

修士論文

焦点面像を用いた補償光学装置の
非共通光路収差の推定

Estimation of Non-Common Path Aberration
in Adaptive Optics Systems
using Focal Plane Images

東北大学大学院 理学研究科 天文学専攻 修士2年
大本 薫

令和元年

目次

第 1 章	補償光学の原理と非共通光路収差	1
1.1	補償光学	1
1.1.1	観測における大気の影響	1
1.1.2	補償光学装置	1
1.1.3	補償光学の性能を示す指標 (ストレーラ比と半値幅)	3
1.2	高精度補償	6
1.2.1	すばる望遠鏡 (可視光領域) で高分解能を達成した時のサイエンスケース	9
1.3	本研究の目的	11
1.3.1	非共通光路収差 (Non-Common Pass Aberration : NCPA)	11
1.3.2	非共通光路収差の推定と補正	11
1.3.3	本研究の目的	13
第 2 章	非共通光路収差の推定アルゴリズム	14
2.1	Gerchberg-Saxton algorithm(Gerchberg and Saxton 1972[1])	14
2.1.1	Gerchberg-Saxton algorithm による開口面、焦点面での振幅強度の収束性	15
2.1.2	Gerchberg-Saxton algorithm による位相の収束解の一意性	17
2.2	Gerchberg-Saxton and Phase Diversity algorithm	18
2.2.1	Phase Diversity	18
2.2.2	Gerchberg-Saxton and Phase Diversity アルゴリズム概要	20
2.3	Fast-Furious algorithm(Keller 2012[2])	20
2.4	Fast-Furious and Gerchberg-Saxton algorithm(Korkiakoski 2014[3])	23
2.4.1	電場を出すまでの式	23
2.4.2	イテレーション部分の式	24
第 3 章	シミュレーションの設定	26
3.1	SCExAO	27
3.2	各アルゴリズムでの注意点	28
3.3	シミュレーションの流れ	30
第 4 章	結果	33

4.1	使用した位相収差	33
4.2	各アルゴリズムの動作確認	34
4.3	各アルゴリズムを使用した位相収差の再現	50
4.4	任意の非共通光路収差を再現する	55
第 5 章	議論	59
5.1	各アルゴリズムでの位相の再現結果のまとめ	59
5.2	FF-GS アルゴリズムの近似による影響	61
5.3	PD-GS アルゴリズムでの回復できる位相収差の大きさと PD の大きさの範囲	63
5.4	FF アルゴリズムの奇関数成分に対するふるまい	63
第 6 章	まとめ	65
	参考文献	72

要旨

補償光学を用いた高空間分解能観測において、波面測定を行う波面センサー側と観測用カメラ側に光が分割された後の共通しない光路 (非共通光路) で生じる波面収差は、空間分解能を低下させる要因として問題となる。この波面収差は光学設計に起因するだけでなく、光学素子の研磨やコーティングに起因する歪みによっても生じる。可変形鏡による補償の際に、非共通光路の波面収差は収差による影響を打ち消すような補償を常時加えることで解消することが出来るが、その波面収差は観測用カメラで得られる焦点面像から位相収差を推定する必要がある。ここで、非共通光路の波面収差は準静的であり、較正用光源を用いた事前の測定で決めることが出来る。本研究ではゼルニケ多項式に基づく波面収差とそれによる焦点面像を、検出器のサンプリングや雑音を考慮した光学シミュレーションで作成し、焦点面像の収差の位相推定を行った。Gerchberg-Saxton アルゴリズム、Phase Diversity and Gerchberg-Saxton アルゴリズム、Fast-Furious アルゴリズム、Fast-Furious and Gerchberg-Saxton アルゴリズムの4つの推定法について収差の推定誤差の評価を行い、収差の大きさに関わらずもっとも安定した推定結果を与えるのは位相ダイバーシティの情報を加えた Phase Diversity and Gerchberg-Saxton アルゴリズムであるという結果を得た。

第 1 章

補償光学の原理と非共通光路収差

1.1 補償光学

1.1.1 観測における大気の影響

地上望遠鏡は地球の大気を通して観測をおこなうため、地球大気による像への影響を考える必要がある。空気は温度によって密度が異なり、この密度の異なる空気の塊が空気の対流 (具体的には地球の自転運動や日射量の違いによる空気の循環) によって不均一に混ざるために、屈折率が時間的、空間的に変化する。これを大気揺らぎと呼び、この揺らぎは地上から高度 10km 程度までの対流圏で生じている。地上から観測をする際に、大気中の屈折率の変動が遠方の星から来る平面波の同位相面をゆがめる。望遠鏡の持つ理論的な角度分解能は観測波長 λ と望遠鏡の開口の直径 D をもちいて $1.22\lambda/D$ と表されるが、この大気ゆらぎの影響により、実際にはこの角度分解能より広がった像が得られる。この大気ゆらぎによる像のぼけ具合をシーイングと呼ぶ。地上で観測される波面を平面波とみなせる領域の大きさをフリード長と呼ぶ。フリード長 r_0 は観測波長 λ の $6/5$ 乗に比例するような値であり、シーイング θ とフリード長の間には $\theta \sim \lambda/r_0$ という関係がある。フリード長は大気揺らぎの安定している観測値であるハワイ・マウナケア山頂では可視光の領域で 10-20cm である。大気揺らぎの変動スピードは、風速で移動する大気がフリード長を通過する時間で表わされる。図 1.1 は望遠鏡の開口直径が 4.1m の場合と 8.2m のそれぞれについて、回折限界を達成した時の像の大きさと、波長 500nm でフリード長 r_0 が 10cm と 20cm となる時の像の大きさを横軸観測波長としてプロットした図である。波長が短いほど回折限界と補償されていない像の大きさに差がある。

1.1.2 補償光学装置

図 1.2 は補償光学系の基本的構造である。補償光学装置は大きく波面センサ、可変形鏡、制御系の三つの部分に分けることができる。波面センサで波面のゆがみを測定し、測定したゆがみから制御系で可変形鏡の制御特性を計算して可変形鏡に信号を送り、波面のゆがみを打ち消すように鏡面を変形させる。波面測定用の参照光源として使われる、観測対象の天体の近くにある明るい点源をガイドスター (Guide Star(GS)) と呼び、自然に存在する天体を使用する自然ガイド星 (Natural GS(NGS)) と、地上からレー

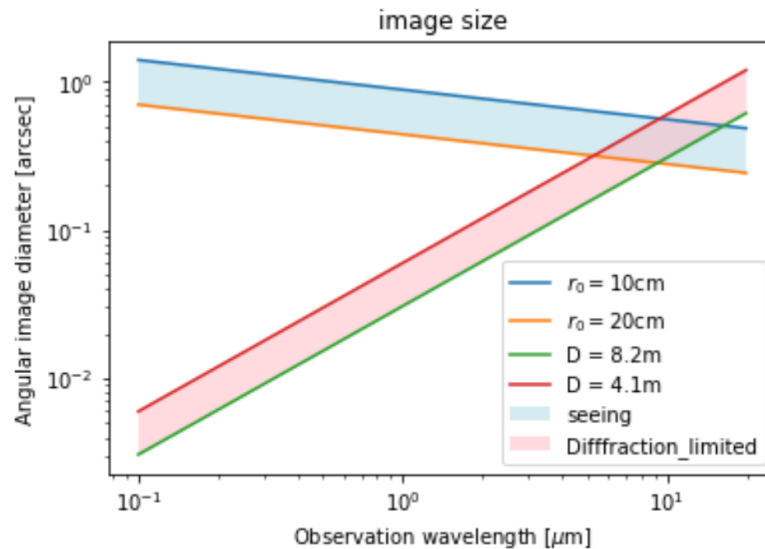


図 1.1 青の実線はフリード長 $r_0 = 10\text{cm}$ のときのシーイングサイズ、オレンジの実線はフリード長 $r_0 = 20\text{cm}$ のときのシーイングサイズを波長の関数としてプロットしている。また赤の実線は望遠鏡の開口直径 $D=4.1\text{m}$ のときの回折限界の大きさ、また緑の実線は望遠鏡の開口直径 $D=8.2\text{m}$ のときの回折限界の大きさを、波長の関数としてプロットしている。

ザーを打ち上げ、地上 90km に存在するナトリウム層のナトリウム原子を励起することで光源とするレーザーガイド星 (Laser GS (LGS)) が用いられる。以下レーザーガイド星、波面センサ、可変形鏡、制御系について説明する。

レーザーガイド星

波長 589nm のナトリウム D2 線共鳴レーザーを使用して、地上 90km に存在するナトリウム原子層を照射することで、ナトリウム原子の励起、脱励起過程から発光を得る。レーザーの出力パワーを上げることで、基準になるような人工星を作ることが出来る。人工星の波面の乱れを利用することで、観測対象が地上に届くまでに受ける大気ゆらぎによる影響を調べることが可能になる。

波面センサ

波面センサは主にシャックハルトマン波面センサ、ピラミッド波面センサ、曲率波面センサの三つの方式がある。ここではシャックハルトマン波面センサについて説明する。望遠鏡に入ってきた光線束を、マイクロレンズアレイを使用して小開口に分割し、それぞれのレンズの結像位置を測定する。このとき測定した位置と平面波がレンズに入射したときの結像位置とのずれがそれぞれの小開口での波面の傾斜の大きさと比例している。この波面の傾斜ベクトルの分布から波面形状を求めることができる。

可変形鏡 (Deformable Mirror; DM)

連続薄膜鏡面の裏面に並べられたアクチュエータという素子により、鏡の表面を高速で変形することができる。このアクチュエータには piezo 素子や MEMS 素子が使われており、補償光学では主

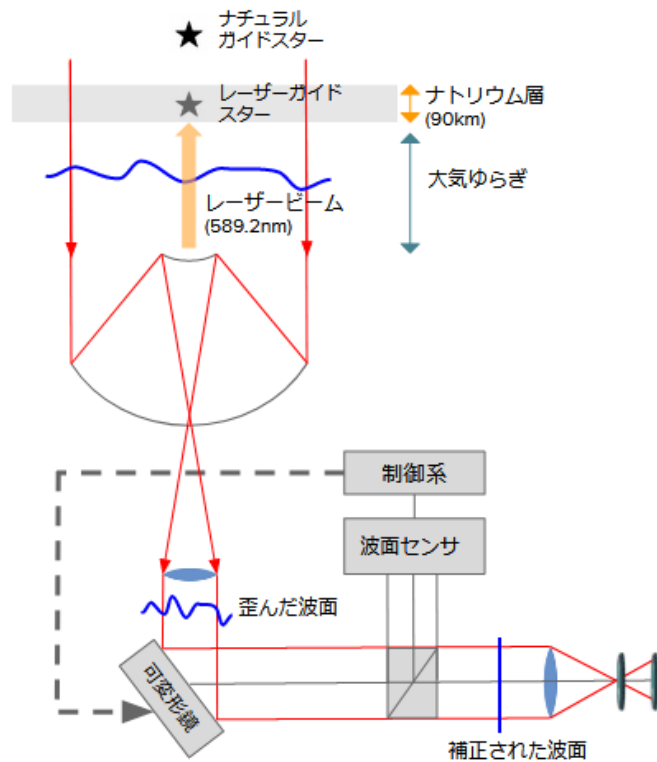


図 1.2 補償光学装置

に piezo 素子駆動のものが多用されている。piezo 素子を使うものには積層型 piezo 素子とバイモルフ型 piezo 素子を用いたものがある。測定した波面のゆがみを打ち消すように DM を変化させ、DM での反射光が常に平面波となるように制御される。

制御系 (リアルタイム計算機)

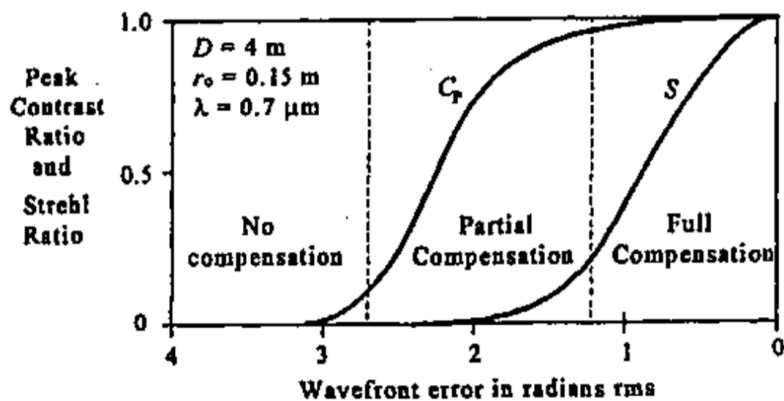
入射してきた波面に対する可変形鏡の鏡面形状を、行列計算を行うことで制御している。制御の較正においては、個々の駆動素子によってどのように鏡面が変化するかを、全ての駆動素子に対して個別に一定の電圧を印加し、それによる鏡面形状を測定することによって測っている。制御においては補償光学の各要素について、入力と出力を特徴づける伝達関数を求め、系全体の伝達関数を評価し、時間応答特性を解析して制御している。

1.1.3 補償光学の性能を示す指標 (ストレーラ比と半値幅)

波面の乱れ具合 (RMS) とストレーラ比、コア・ハロー比の関係

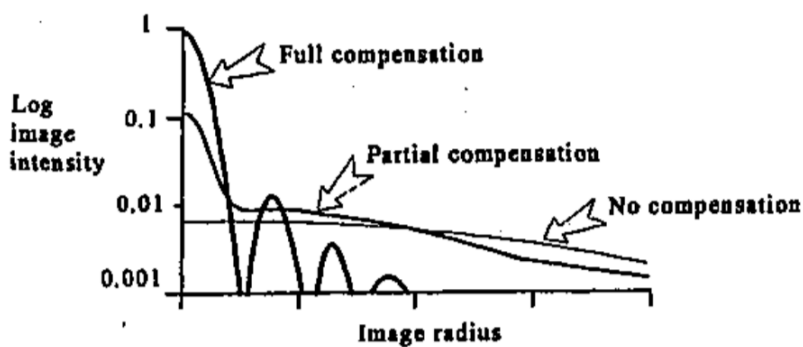
以下では Hardy(1994)[4] に基づいて、波面誤差がストレーラ比、コア・ハロー比にどのように影響するかを示す。望遠鏡の空間分解能を表す指標として、半値幅 (Full Width at Half Maximum: FWHM) がある。星像 (PSF) の広がり、その星像の明るさ分布に対してピークの値の半分になる所での星像の大き

さで示され、この像の広がり半値幅と呼ぶ。またストレール比も望遠鏡の性能を示す指標であり、これは星像の中心強度を望遠鏡の回折限界での像の中心強度で規格化した値である。なおストレール比を考えるときには、像全体を動かす tilt 成分については完全に補償できているとする [5]。RMS が 2rad 以下であるとき、ストレール比は波面の平均二乗誤差 σ^2 を用いて $S = \exp(-\sigma^2)$ と近似することが出来る。コアとハローの強度比は $C_P = S/(S + 2S_H)$ で定義され、ここで S_H はハローの規格化された最大強度である。ハローがないとき $S_H = 0$ であり、このときの C_P の値は 1 となる。以下の図 1.3 に波長 700nm での tilt 成分を除いた波面の位相乱れ (RMS) の値とそれに伴うストレール比とハローとコアのコントラスト比のグラフを載せる。



(a) Peak contrast and Strehl ratios of a turbulence-degraded point source as a function of the degree of compensation.

図 1.3 波面の位相乱れ (RMS) の値とそれに伴うストレール比とハローとコアのコントラスト比のグラフ。[4]



(b) Intensity profiles for three degrees of compensation.

図 1.4 補償精度とそれに伴うコア・ハローの強度の割合の変化を示している。[4]

図 1.3 と図 1.4 から、RMS の値が 3rad ~ 1rad に改善するとき、 C_P の値はほぼ 1 まで改善し、ストレール比の値は 0.1 まで改善することがわかる。また RMS の値が 1rad ~ 0rad(Full Compensation) に改善

するとき、 C_p の値はおおきく変動しない一方で、ストレール比は 0.1 から 1 まで改善することがわかる。これは半値幅はストレール比が 0.1~ 1 まで改善する間には大きく変化しないことを示している。従って補償光学装置の性能を議論するときには、半値幅よりストレール比を使用する方がよい [6]。

ストレール比とコア、ハローの比の関係

以下では秋山正幸 (2018)[7] に基づいて、ストレール比の変化が PSF にどのように影響するかを示す。以下の図 1.5 は、ストレール比の値によるコアとハローの強度変化を示している。影で示された領域は線形の時の PSF の形を示してあり、破線はこれを対数スケールで書き直したものである。

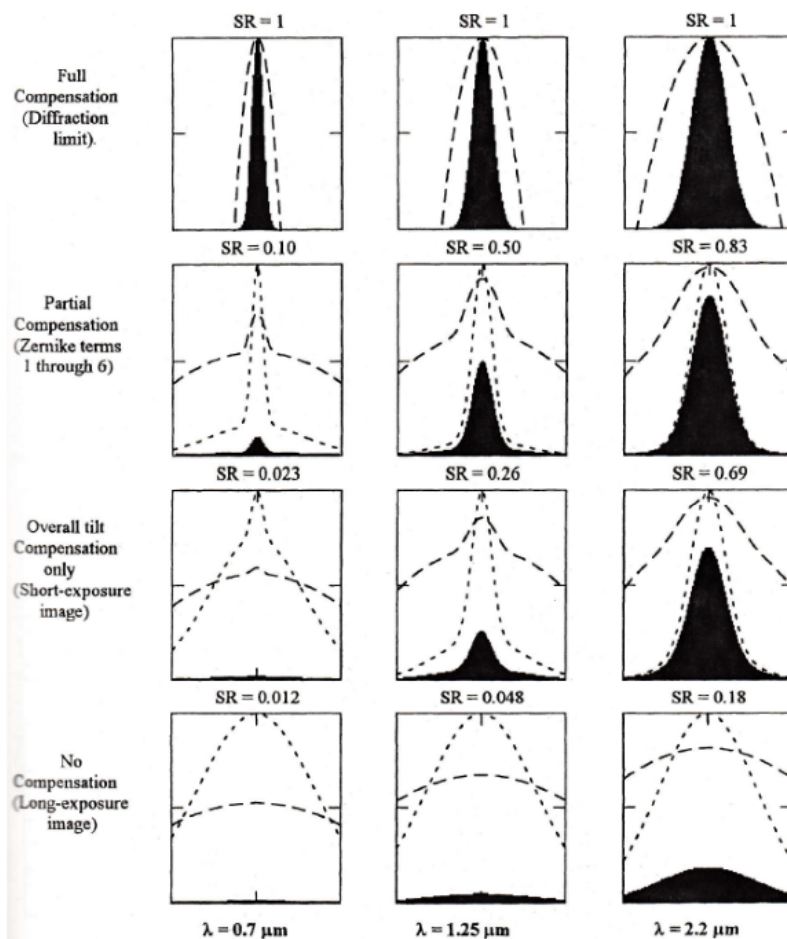


Figure 4.11 Image intensity profiles for various degrees of turbulence compensation, as a function of the observing wavelength. The peak image intensity (Strehl ratio) for each case is shown. The solid figure is the intensity profile with a linear intensity scale. The dotted line shows the shape of this profile, normalized to unity. The dashed curve is the intensity plotted on a logarithmic scale. The horizontal scale is ± 0.5 arc seconds. Conditions: aperture = 2.0 m; $r_0 = 0.15$ m; $\lambda = 0.7, 1.25, \text{ and } 2.2 \mu\text{m}$.

図 1.5 ストレール比の大きさとそれに伴うハローとコアの強度の変化のイメージである。左の列は波長 700nm、真ん中の列は波長 1.25um、右の列は波長 2.2um での PSF を示してある。上から回折限界を達成しているとき、部分的な補償がされているとき、tilt 成分についての補償がされているとき、補償がないときである。[4]

図 1.5 から、ストレール比が大きくなるほど、コアの成分が強くなっていることが分かる。実際に PSF がストレール比によってどのように変化するかをあらわしたのが図 1.6 である。EE は $0.12'' \times 0.12''$ に入るエネルギー、EE2 は $0.24'' \times 0.24''$ に入るエネルギーの % を示す。

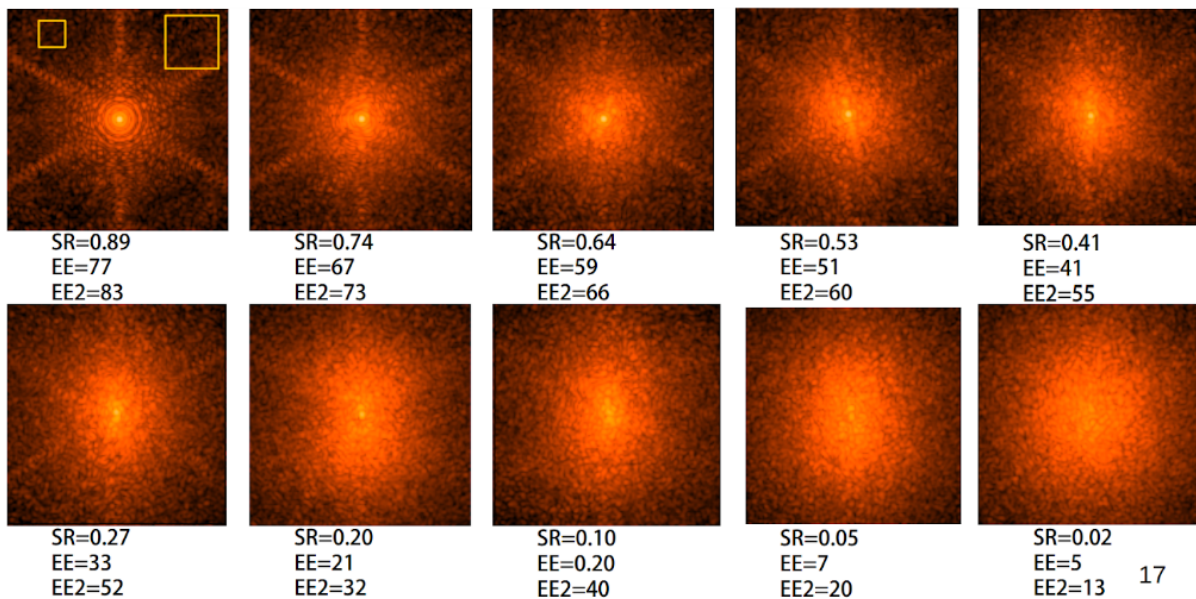


図 1.6 30m 望遠鏡で K バンドの観測を仮定したときのストレール比ごとの PSF のシミュレーション結果である。図の 1 辺は 1.0 秒角に対応し、明るさは log スケールで示してある。[7]

ストレール比が 0.89 のとき、EE の値から、PSF の中心にエネルギーの 77% が集中していることが分かる。一方で、ストレール比が 0.20 のとき、EE は 21% となり、ハロー成分にエネルギーの 79% が分散していることが分かる。図 1.6 から、ストレール比と分解能を一概に結び付けることは適切ではない。例えば $SR = 0.5$ であっても、非常に明るい星に近接する暗い星を調べるときにハロー部分に埋もれてしまったり、また銀河の星形成領域を調べようとした場合に、ハロー成分によって各場所での正確な波長成分を調べることが困難であることが考えられる。観測対象にもよるが、一般的にはストレール比 0.5 が一つの目安であり十分な分解能となる。またストレール比の改善とともに像に対して適切な検出窓のサイズを適用することで、検出に必要な星からの放射強度が低くなる。したがって分解能を高め ($S \sim 0.5$ 程度に改善する)、より暗い天体を検出できるようにするために、ストレール比を改善することが補償光学で求められている。

1.2 高精度補償

AO188 とコーン効果

AO188 はすばる望遠鏡に搭載されている補償光学装置で、曲率波面センサーと 188 素子のバイモルフ可変形鏡で構成されている。AO188 は、すばる望遠鏡の近赤外ナスマイス台に設置され、ナチュラルガイ

ド星 (NGS) モードとレーザーガイド星 (LGS) モードでの観測が可能である。近赤外線領域 (K バンド) で回折限界に近い分解能を達成している一方で、可視光領域ではコーン効果による影響から波面測定精度が制限されている。ここでコーン効果とは、図 1.9 の左のようにレーザーガイド星が有限の高さに存在することで、星からくる光が円筒状なのに対してレーザーガイド星の光はコーン状に大気を通過してくるために、波面測定精度が悪化する現象を指す。ここでコーン効果による波面測定誤差 σ_{cone}^2 [rad] は、

$$\sigma_{cone}^2 = \frac{\int dr W(r/R) \{ \langle [\phi(r) - \phi_{LGS}(r)]^2 \rangle \}}{\int dr W(r/R)} \quad (1.1)$$

となる。ここで R は望遠鏡の開口の半径、W(r/R) は開口関数をさす。一つのレーザーガイド星を仮定した時にこの波面測定誤差は以下のように書くことができる。

$$\sigma_{cone}^2 = (D/d_0)^{\frac{5}{3}} \quad (1.2)$$

$$d_0 = \lambda^{\frac{6}{5}} \cos^{\frac{3}{5}}(\psi) \left[\int C_n^2(h) F(h/H) \right]^{-\frac{3}{5}} \quad (1.3)$$

ここで ψ は天頂角、D は望遠鏡の開口直径をさす。ここから、一つのレーザーガイド星を仮定した時のコーン効果による波面測定誤差 σ_{cone}^2 [rad] は観測波長 λ の-2 乗で表現される。ストレール比 S_R は波面測定誤差 σ_{cone}^2 を用いて $S_R \sim \exp(-\sigma_{cone}^2)$ で近似することができる。Elise Viard et.al(2002)[8] の図 1.7 に、一つのレーザーガイド星を仮定した場合のストレール比の波長依存性を示してある。このグラフより、コーン効果による波面測定誤差の影響から、短波長側ではストレール比が減少することが分かる。一方で図 1.8[8] は 500nm でのレーザーガイドスターの個数によるストレール比の変化のグラフであり、レーザーガイド星の数が增多することでストレール比が改善していることがわかる。したがって可視光領域で分解能を回折限界に近づけるためには、レーザーガイド星の数を増して、コーン効果の影響を低減する必要がある。

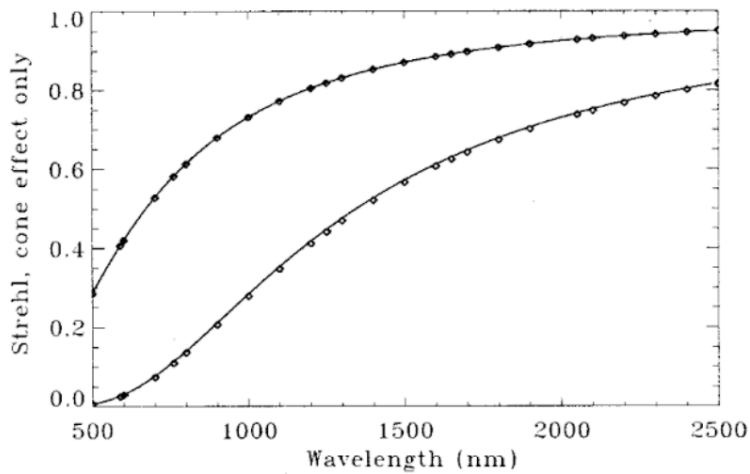


図 1.7 観測波長とコーン効果によるストレール比の変化 [8]。上の実線はフリード長 $r_0 = 25\text{cm}$ のときの波長ごとのストレール比の変化を示し、下の実線は $r_0 = 15\text{cm}$ のときの波長ごとのストレール比の変化を示す。

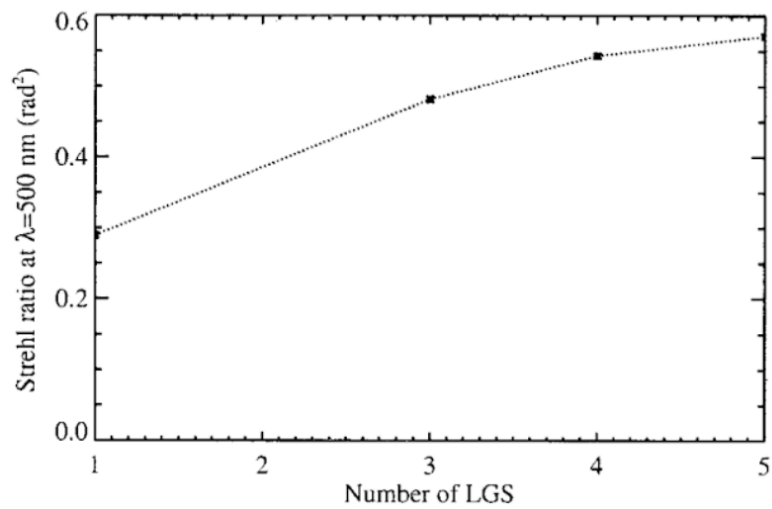


図 1.8 観測波長 500nm でのレーザーガイド星の個数によるストレール比の変化 [8]

LTAO

従来の AO 装置と LTAO の大きな違いはレーザーガイド星の数と、それに対応する波面センサの数である。図 1.9 は AO188 と LTAO の概略図である。LTAO では AO188 よりも覆うことのできる大気の領域が増えていることが分かる。4つのレーザーガイド星からの光の波面を測定し、大気ゆらぎ層のトモグラフィ推定を行うことで、コーン効果による AO 補正の精度 (の制限) を向上することが可能となる。LTAO 装置を使用した観測では図 1.10 のような空間分解能の改善がシミュレーションから期待されている。とくに回折限界とシーイングリミットの差が大きい可視光領域で大きな改善が見込まれることがわかる。

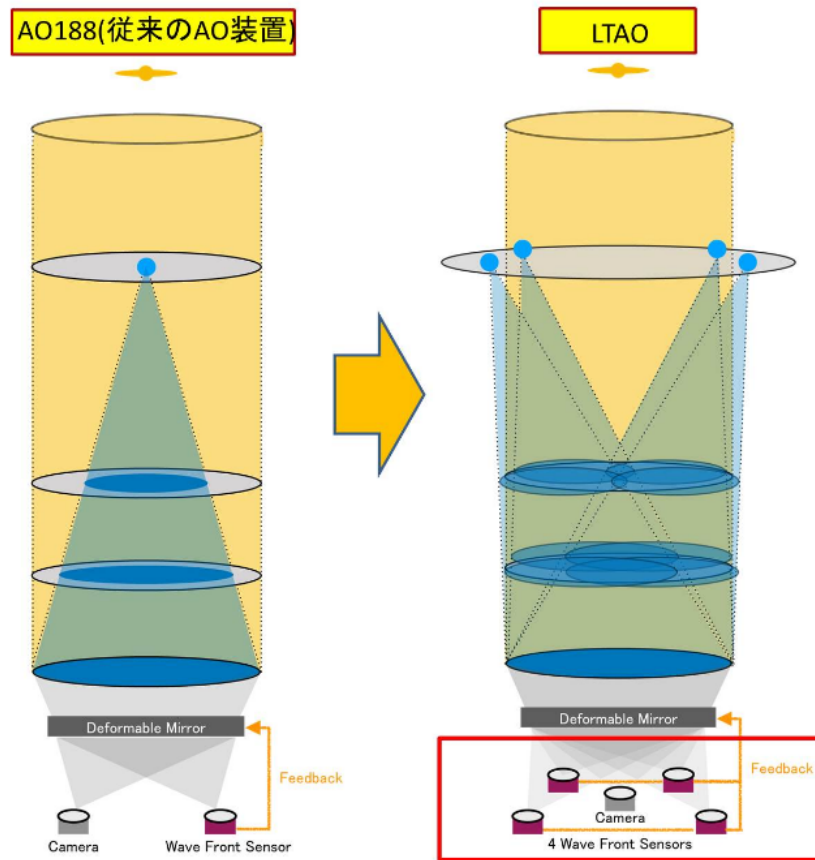


図 1.9 AO188(左) と LTAO(右) の場合の、レーザーガイド星からの光の波面と大気層の配置の模式図

1.2.1 すばる望遠鏡 (可視光領域) で高分解能を達成した時のサイエンスケース

すばる望遠鏡で高分解能を達成した時のサイエンスケースとしていくつか例を挙げる。

活動銀河核の超巨大ブラックホールの質量の推定

銀河中心核に存在する超巨大ブラックホールの質量は、ブラックホール周辺のガスの運動を調べることで推定することができる。今までブラックホールの質量は電波干渉計での分子ガスの観測や近赤外線での電離ガスや星の運動 (CO 分子吸収線) の観測から推定していた。しかし、分子ガスがないものに関しては電波で観測することができず、さらに近赤外での観測では空間分解能が不十分であった。LTAO ではブラックホール周りの電離ガスや星を高空間分解能の可視光面分光観測で調べることができるので、多くの銀河に対してブラックホール質量の推定を行うことができると期待できる。

110 億年前 ($z=3$) の遠方宇宙の銀河の撮像観測 (近赤外領域)

遠方銀河においては銀河の物理的大きさが現在の銀河より小さい上に遠いため、見かけのサイズは

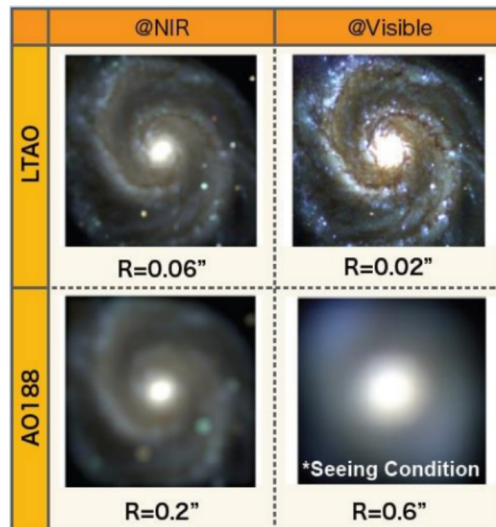


図 1.10 各波長における空間分解能の改善。[7]

極めて小さい。よってシーイングが見かけの銀河のサイズと同程度となってしまう、銀河内部の構造を観測的に明らかにするのは非常に難しかった。LTAO を用いた観測では可視近赤外線での高空間分解能での観測が可能になることから、遠方銀河での星の分布が分かり、ここから今の銀河と昔の銀河の構造の違いについて詳しく調べることができるようになる。

80 億年前 ($z=1$) の銀河の分光観測 (可視光領域)

現在の銀河は薄いディスクを持ち広がっている銀河が多く存在する一方、遠方の銀河は円形で中心の密度が高いコンパクトな銀河が多い。銀河の形態の宇宙初期から現在までの進化の原因については、特に星の運動の高空間分解能でのマッピング観測が少ないことから、あまりよくわかっていない。 $z \sim 1$ で 4000\AA 付近の吸収線は、地上で 8000\AA 付近で観測することが出来る。したがって面分光で観測をすることで、銀河中の星の運動の分布が分かる。

$z=0.4 \sim 0.8$ での銀河内の化学組成の分布を調べる

銀河進化を考えるうえで銀河外からのガスの降着と銀河内部の化学進化は重要である。銀河内の化学組成の勾配について、近傍の銀河では観測が行われていたが、遠方では空間分解能の制約から観測が進んでいなかった。したがって銀河のガスのうちどれくらいが星となり化学進化に寄与するのか、また銀河外からのガス流入による銀河内の重元素量の変化の様子などはよくわかっていなかった。化学組成の分布の時間変化について調べるためには、遠方の銀河と近傍の銀河の化学組成の比較が必要である。銀河内に含まれる [OIII] のガスの輝線は赤方偏移 $0.4 - 0.8$ の範囲では可視光で観測できるので、LTAO を用いて、銀河内での [OIII] のガスの分布を高分解能の面分光で観測することができ、銀河内の化学組成の勾配について調べることができる。

γ 線バーストの発生環境の観測

ガンマ線バースト (GRB) とは $10^{52} \sim 10^{54} \text{erg}$ のエネルギーを数 10 秒の間に γ 線として放つ現

象である。ガンマ線放射の継続時間により二種類に分類されており、長い方をロング GRB、短い方をショート GRB と呼ぶ。それぞれ発生源が異なり、ロング GRB は超新星爆発、ショート GRB は中性子星の合体に起因すると考えられている。ロング GRB は低金属量環境で発生すると考えられているが、今までの観測では分解能が低いことからロング GRB の周りの環境について銀河全体を平均したような観測結果しか得られていない。LTAO を用いることで、ガンマ線バースト発生位置の局所的な金属量環境などを調べることが可能となり、その結果から GRB の親星についての強い観測的な制限が得られると期待出来る。

1.3 本研究の目的

1.3.1 非共通光路収差 (Non-Common Pass Aberration : NCPA)

補償光学装置内や観測装置のレンズやミラーなどの光学素子は、その加工工程 (研磨やコーティング) に起因する歪みを持つ。このため実際に観測装置で得られる画像は、補償光学装置による補償が無い場合には、大気の流れによって乱された分に加えて、観測装置内の光学設計で残った歪みと、光学素子の制作時の歪みが加わったものになる。光路を撮影用カメラと波面センサーへとわかるビームスプリッターまでの、補償光学装置を含めた望遠鏡内部での光学系による収差は、補償光学の波面センサーを用いて測定できるので可変形鏡で補償することができるが、一方でビームスプリッター以降の撮影用カメラまでと波面センサーまでの光学素子の違いに起因する歪みは、光学系が異なる為に補償されないまま像に残る。このビームスプリッター以降の光学系の違いに起因する収差を非共通光路収差 (Non-Common Pass Aberration : NCPA) と呼ぶ。この非共通光路による波面収差は最終的に得られる像のストレール比を下げる原因となる。図 1.12 に非共通光路収差としてコマ収差を考えた場合の、最終的に得られる像の強度が示してある。横軸は得られた像の中心から 30 ピクセルまでをプロットしたもの、また縦軸は各ピクセルでの強度の値を示している。オレンジ色の線分が位相収差を与えない場合に得られる画像の強度分布、青色の線分がコマ収差を与えた時の得られる画像の強度分布となっている。

1.3.2 非共通光路収差の推定と補正

補償光学装置を用いた高空間分解能観測において、非共通光路収差はストレール比を低下させる要因として問題となる。従って、可変形鏡による像の補償の際に、非共通光路で発生する収差を打ち消すような可変形鏡の各素子の変分への電圧を常に加えることで、非共通光路収差を補正することが出来る。ここで、非共通光路の波面収差は準静的であり、較正用光源を用いた事前の測定で決めることが出来る。非共通光路収差を求め、補正する方法について以下に示す。

1, Focal Plane Sharpening[9]

撮像カメラ上での PSF が最適な値、つまり PSF のピーク強度が最大値になるかガウシアンフィットした時の半値幅が小さくなるように可変形鏡を変形させ、そのときの可変形鏡の変化を非共通光路による収差の補償分として扱う。この方法では最適化の手法の一つであるネルダー-ミード法な

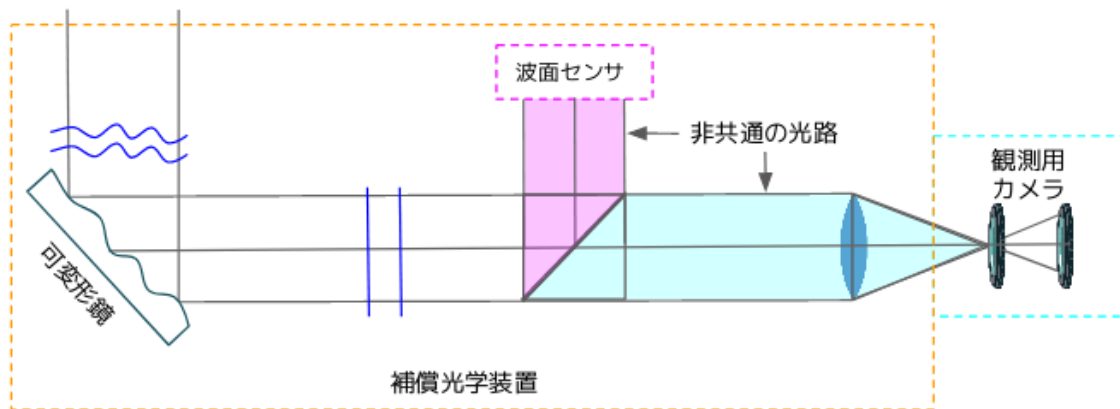


図 1.11 図中のピンクと水色で示される光路が非共通光路に対応する。波面センサまでと観測用カメラまではビームスプリッターで分けられている。ピンクと水色で示される光路内の光学系が異なることにより、それぞれの光路内で生じる位相収差も異なる。補償光学では観測用カメラで得られる像には非共通光路由来の歪みがのった状態になる。

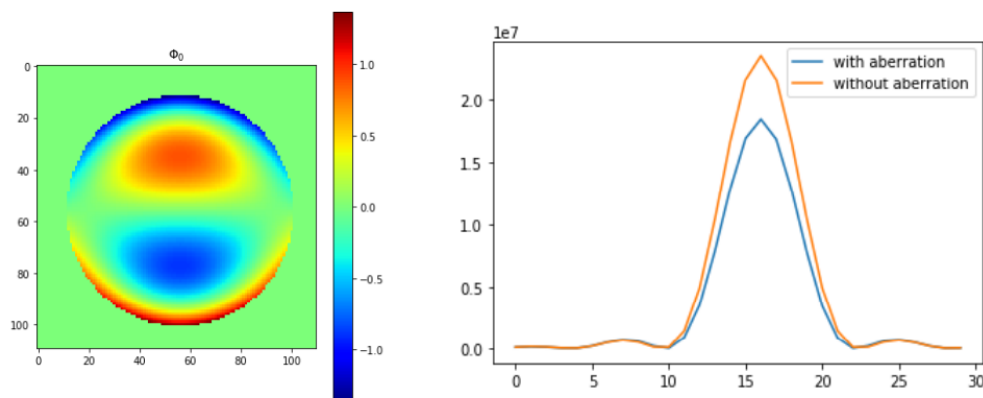


図 1.12 位相収差として強度 $-0.1 \sim 0.1$ rad のコマ収差 (左の収差マップ) がのった時の最大強度の変化 (右のグラフ) を表している。グラフのオレンジ色と青色の実線は、それぞれ収差がのらなかったときの PSF と左の強度マップに示すコマ収差が乗った時の PSF の強度を画像中心のピクセル 30 個について取り出しプロットしたものである。それぞれの最大強度の値からストレール比は 0.78 のようになる。

どを用いて、単純かつ堅実に PSF を最適化できる。可変形鏡の形が任意で良い (開口関数の形状によらない) こと、また最適化を行う際にどの基底を用いても同じ形状に収束することが長所としてあげられる。欠点としては、イテレーション回数が増えるために収束まで時間がかかること、イテレーションごとに PSF の形を確かめる必要があるので焦点面での画像を後述の Phase Diversity と比べて多く必要とすること、再現する位相収差はある程度の大きさが必要とされること、撮影した PSF に複数のピークがある場合には収束が困難であることがあげられる [10][11]。

2, 観測用カメラで得られる焦点面像から位相収差を推定する方法

観測用カメラで得られる焦点面像と開口面での振幅の情報と、Phase Diversity の画像から、その間に含まれる収差の情報を推定する方法で、今研究で扱う。詳細は第二章。

1.3.3 本研究の目的

本研究の目的は、補償光学装置の内部に存在する、レンズなどの光学素子の製造工程に由来する歪みや、光学設計に起因するビームスプリッター以降の波面センサーで補正することができない位相収差についての推定を行うアルゴリズムを比較し、光学系に最適な位相収差の推定アルゴリズムを知ることである。比較するアルゴリズムは全て焦点面像と開口の形を用いるものであり、位相推定法の中で、光学系の形を変えることなく、また使用する画像が少ないことが利点として挙げられる。十分な分解能の目安とされるストレール比は 0.5 であるが、暗い星を観測することや、明るい天体の周囲の情報を得る場合など、ストレール比が 1 に近いことを要求するサイエンスケースも存在する。非共通光路による収差を補正することは、高いストレール比を達成する上で非常に重要となる。本研究では Gerchberg-Saxton アルゴリズム、Phase Diversity and Gerchberg-Saxton アルゴリズム、Fast-Furiosus アルゴリズム、Phase Diversity and Gerchberg-Saxton アルゴリズムの 4 つのアルゴリズムを実装・比較し、各アルゴリズムを用いた時の非共通光路による位相収差の再現精度から想定する光学系において最適なアルゴリズムを決定する。

第 2 章

非共通光路収差の推定アルゴリズム

非共通光路収差を推定する方法として、本研究では、観測用カメラで得られる焦点面像と開口関数の情報から位相を導出するアルゴリズム四つを比較し、その位相収差の再現精度を評価する。この章ではそれぞれのアルゴリズムの詳細と特徴についてまとめる。

非共通光路収差を推定する方法として、本研究では、観測用カメラで得られる焦点面像、また焦点からずれた場所での振幅の強度情報と開口関数の情報から位相を導出する Gerchberg-Saxton アルゴリズム、Phase Diversity and Gerchberg-Saxton アルゴリズム、Fast-Furious アルゴリズム、Phase Diversity and Gerchberg-Saxton アルゴリズムを比較する。

2.1 Gerchberg-Saxton algorithm(Gerchberg and Saxton 1972[1])

gerchberg-saxton algorithm(以下 GS algorithm という) は位相回復法の一つである。開口面での電場の振幅強度 (開口関数) と焦点面像を利用し、この二つの画像を再現できるような位相をイテレーションで求めていく方法である。開口面から焦点面への電場の伝搬は、開口の中心から焦点面までの距離が十分に遠い場合、フラウンホーファー回折の式で書くことができる。すなわち焦点面での電場の式 $e(\mathbf{r})$ と開口面での電場の式 $E(\mathbf{r}')$ はフーリエ変換で書くことができる。

今開口面の座標系 (x,y) 、焦点面での座標系 (x',y') とする。また開口面での点像分布関数 (PSF) を P_{pupil} 、焦点面での PSF を P_{focal} とし、開口面での位相と PSF、焦点面での位相と PSF に対して以下の一連の計算をおこなう。

$$\begin{aligned}
 0, & \quad e_1^{(0)}(\mathbf{r}) = P_{pupil}(\mathbf{r}) \exp(i\phi_{pupil}^{(0)}(\mathbf{r})) \\
 1, & \quad E_1^{[0]}(\mathbf{r}') = F(e^{(0)}(\mathbf{r})) = F(P_{pupil}(\mathbf{r}) \exp(i\phi_{pupil}^{(0)}(\mathbf{r}))) = P(\mathbf{r}') \exp(i\phi_{focal}^{(0)}(\mathbf{r}')) \\
 2, & \quad E_2^{(0)}(\mathbf{r}') = P_{focal}(\mathbf{r}') \exp(i\phi_{focal}^{(0)}(\mathbf{r}')) \\
 3, & \quad e_2^{(0)}(\mathbf{r}) = F^{-1}(E_2^{(0)}(\mathbf{r}')) = P(\mathbf{r}) \exp(i\phi_{pupil}^{(1)}(\mathbf{r})) \\
 4, & \quad e_1^{(1)}(\mathbf{r}) = P_{pupil}(\mathbf{r}) \exp(i\phi_{pupil}^{(1)}(\mathbf{r}))
 \end{aligned}$$

この 0~4 の操作を GS アルゴリズムの 1 ループとし、任意の回数繰り返すことで開口面での位相の情報を更新していく。以下 n 回目の試行を図 2.1 に示す。

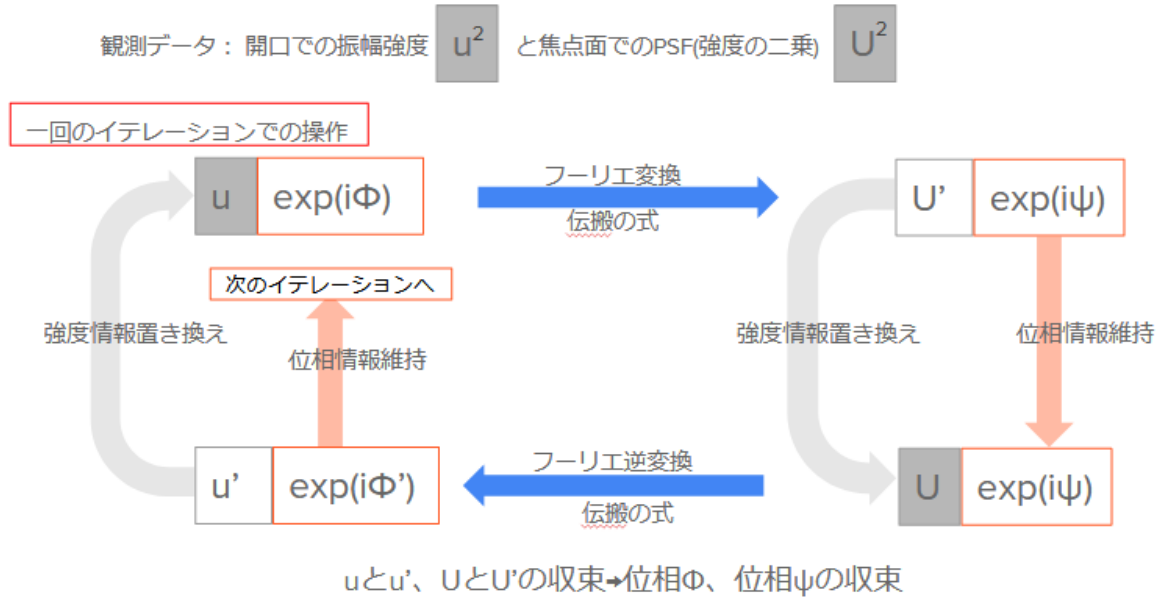


図 2.1 GS アルゴリズム

2.1.1 Gerchberg-Saxton algorithm による開口面、焦点面での振幅強度の収束性

GS アルゴリズムのループによって焦点面上での振幅強度が収束していくことを示す。ここで概要で取り扱った一連の動作をわかりやすいように、開口面での PSF を p 、焦点面での PSF を P として以下のように書き直す。

- 0, $u_k = |p| \exp(i\phi_{k-1})$
- 1, $U'_k = DFT(u_k) = |U'_k| \exp(i\psi_k)$
- 2, $U_k = |P| \exp(i\psi_k)$
- 3, $u'_k = IDFT(U_k) = |u'_k| \exp(i\phi_k)$

箇条書きは k 番目のループを表している。ここで開口・瞳面での電場の式を u または u' 、焦点面での電場の式を U または U' とし、置き換えを行なう前の式には l を付けている。

今簡単のため u_k, u'_k, U_k, U'_k をそれぞれの空間での一次元の波の式として扱う。これらの波の式はそれぞれの空間の複素平面上に図 2.2 のように描写することができる。開口面での操作後の振幅の強度と初期振幅強度との差分を $e_k = |u_{k+1} - u'_k|^2$ 、また焦点面での操作後の振幅の強度と初期振幅強度との差分を $E_k = |U_{k+1} - U'_k|^2$ とし、これが試行により減少していくことを示す。 u_k と u'_k のなす角 (位相差) を $\phi_k - \phi_{k-1}$ とすると、余弦定理より

$$|u_k - u'_k|^2 = |u_k|^2 + |u'_k|^2 - 2|u_k||u'_k| \cos(\phi_k - \phi_{k-1}) \tag{2.1}$$

$$= |p|^2 + |u'_k|^2 - 2|u_k||u'_k| \cos(\phi_k - \phi_{k-1}) \tag{2.2}$$

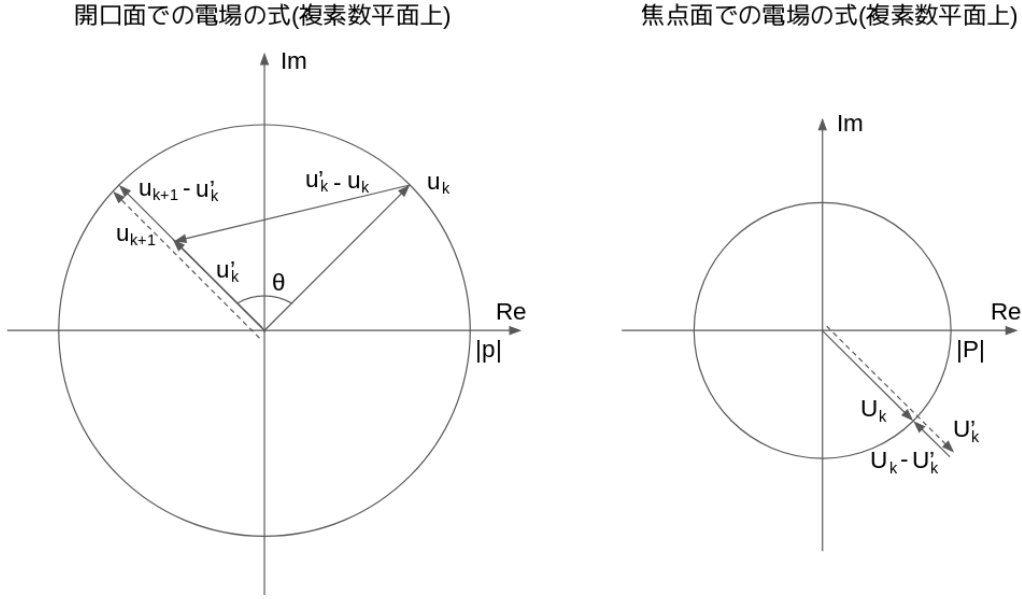


図 2.2 空間領域、空間周波数領域での複素振幅の様子

u_{K+1} と u'_k は同位相であるので、

$$e_k = |u_{k+1} - u'_k|^2 = |u_{k+1}|^2 + |u'_k|^2 - 2|u_{k+1}||u'_k| \quad (2.3)$$

$$= |p|^2 + |u'_k|^2 - 2|u_{k+1}||u'_k| \quad (2.4)$$

$\cos(\phi_k - \phi_{k-1}) < 1$ より、式 (2.2) と式 (2.4) から

$$e_k = |u_{k+1} - u'_k|^2 \leq |u_k - u'_k|^2 \quad (2.5)$$

となる (等号成立は $\phi_k = \phi_{k-1}$ のとき)。

したがって空間領域のすべての点において以下の不等式が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{N-1} e_k = \sum_{i=0}^{N-1} |u_{k+1} - u'_k|^2 \leq \sum_{i=0}^{N-1} |u_k - u'_k|^2 \quad (2.6)$$

等号成立は空間領域のすべての点において u_k と u'_k が同じ位相を持つときである。空間周波数成分も同様にして、

$$\sum_{i=0}^{N-1} E_k = \sum_{i=0}^{N-1} |U_{k+1} - U'_k|^2 \leq \sum_{i=0}^{N-1} |U'_k - U_k|^2 \quad (2.7)$$

等号成立は焦点面のすべての点において U_{k+1} と U'_k が同じ位相を持つときである。ここでパーセバルの等式から、フーリエ変換の前後での開口面と焦点面での係数変化を無視すると、

$$\sum_{i=0}^{N-1} |u_k - u'_k|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |F(u_k - u'_k)|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |U'_k - U_k|^2 \quad (2.8)$$

であり、式 (2.7) と式 (2.8) から、

$$\sum_{i=0}^{N-1} e_k \leq \sum_{i=0}^{N-1} |u_k - u'_k|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |U'_k - U_k|^2 \quad (2.9)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} |U'_k - U_{k-1}|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |u_k - u'_{k-1}|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} e_{k-1} \quad (2.10)$$

同様にして、

$$\sum_{i=0}^{N-1} E_k \leq \sum_{i=0}^{N-1} |U'_{k+1} - U_k|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |u_{k+1} - u'_k|^2 \quad (2.11)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} |u_k - u'_k|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |U'_k - U_k|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} E_{k-1} \quad (2.12)$$

以上より、GS アルゴリズムを繰り返すことによって空間領域と空間周波数領域のそれぞれで振幅の強度の誤差は減少していく。

2.1.2 Gerchberg-Saxton algorithm による位相の収束解の一意性

GS アルゴリズムにおいて、空間領域での振幅強度と空間周波数領域での振幅強度が収束したときに得られる位相収差について考える。今 GS アルゴリズムが収束したとして、この時の空間領域と空間周波数領域での電場をそれぞれ $u(r) = |p(r)|e^{i\phi(r)}$ 、 $U(k) = |P(k)|e^{i\psi(k)}$ とする。位相収差の収束解が一意でないとする、空間領域と空間周波数領域の電場の収束解として $u(r)e^{i\phi'(r)} = |p(r)|e^{i(\phi(r)+\phi'(r))}$ と $U(k)e^{i\psi(k)} = |P(k)|e^{i(\psi(k)+\psi'(k))}$ が存在する。このとき振幅の大きさは、

$$|P(k)|^2 = U^*(k)U(k) \quad (2.13)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)e^{i2\pi k \cdot r} dr \int_{-\infty}^{\infty} u(r)e^{-i2\pi k \cdot r} dr \quad (2.14)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)e^{i2\pi k \cdot r} dr \int_{-\infty}^{\infty} u(r+\gamma)e^{-i2\pi k \cdot (r+\gamma)} d\gamma \quad (2.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)e^{i2\pi k \cdot r} \int_{-\infty}^{\infty} u(r+\gamma)e^{-i2\pi k \cdot (r+\gamma)} d\gamma dr \quad (2.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)e^{i2\pi k \cdot r} u(r+\gamma)e^{-i2\pi k \cdot (r+\gamma)} d\gamma dr \quad (2.17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)u(r+\gamma)e^{-i2\pi k \cdot (\gamma)} d\gamma dr \quad (2.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)u(r+\gamma)e^{-i2\pi k \cdot (\gamma)} dr d\gamma \quad (2.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi k \cdot \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)u(r+\gamma) dr d\gamma \quad (2.20)$$

また $U(k)e^{i\psi(k)} = |P(k)|e^{i(\psi(k)+\psi'(k))}$ を用いて振幅を表すと、

$$|P(k)|^2 = U^*(k)e^{-i\psi(k)}U(k)e^{i\psi(k)} \quad (2.21)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi k \cdot \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)e^{-i\phi'(r)}u(r+\gamma)e^{i\phi'(r+\gamma)} dr d\gamma \quad (2.22)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi k \cdot \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)u(r+\gamma)e^{-i(\phi'(r)-\phi'(r+\gamma))} dr d\gamma \quad (2.23)$$

フーリエ変換はユニタリなので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)u(r+\gamma)dr = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(r)u(r+\gamma)e^{-i(\phi'(r)-\phi'(r+\gamma))} dr \quad (2.24)$$

式 (2.24) が任意の γ について成り立つとき、

$$e^{-i(\phi'(r)-\phi'(r+\gamma))} = 1 \quad (2.25)$$

$$\phi'(r) - \phi'(r+\gamma) = 0 \quad (2.26)$$

であり、収束解は $\phi'(r) = const$ (ピストン成分) の不定性をもつ。

2.2 Gerchberg-Saxton and Phase Diversity algorithm

2.2.1 Phase Diversity

Phase Diversity とは、一枚目の画像に対して Defocus などの既知の位相を加えてとった画像を使用することで、焦点面での画像からでは判別できない符号の情報を決定するという技術を指す。例えば非共通光路収差として以下の図 2.3 の左側と真ん中の図に示す符号が反転した二つの位相収差を与えたときの PSF の形を図 2.4 に示す。

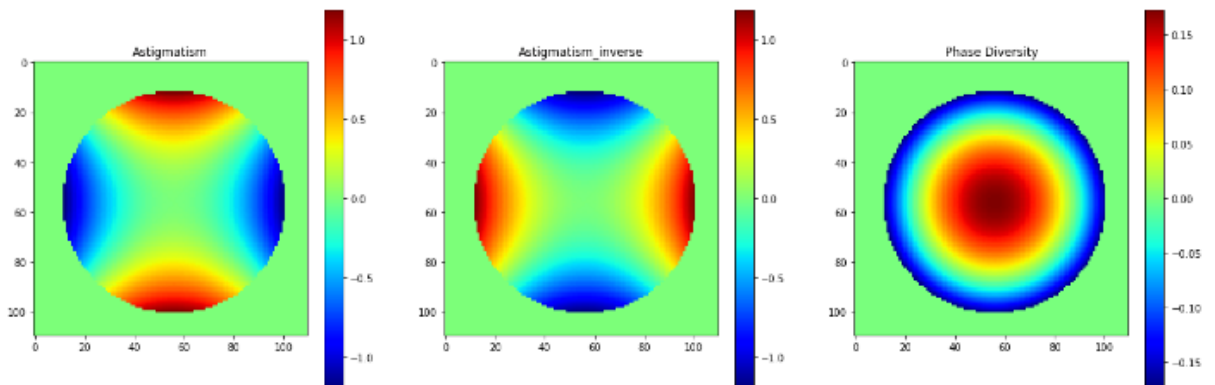


図 2.3 Astigmatism、Astigmatism の符号を反転させたもの (左の画像と真ん中の画像) と Phase Diversity の位相 (右)。

図 2.4 の左側のイメージから、位相収差に Astigmatism を与えた時に撮れる焦点面での PSF、真ん中のイメージが位相収差の符号を反転させた時の焦点面での PSF、一番右のイメージがその差分を示してい

る。差分のイメージの強度が非常に小さいことから、位相収差として与える収差の符号が反転していても、焦点面での PSF の形は変わらないことがわかる。したがって焦点面像を使用して位相収差を推定する場合には、その焦点面での PSF からは位相収差の符号についての情報を得ることができない。

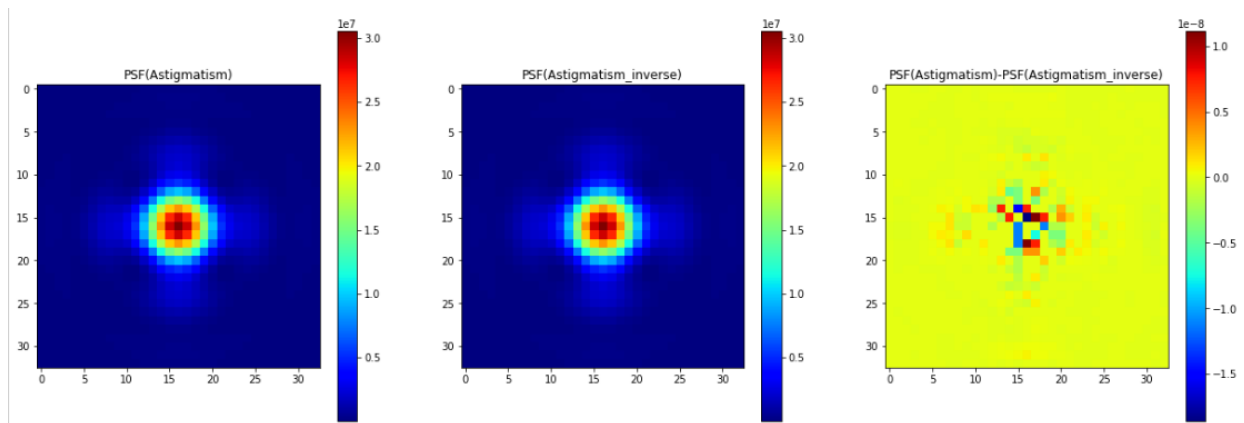


図 2.4 位相収差に Astigmatism、Astigmatism の符号を反転させたものを与えた時の焦点面での PSF(左の画像と真ん中の画像)とその差分(右)。PSF の強度の値と比較すると、画像の差分の強度は無視できる大きさである。

ここで図 2.4 で得られた画像に、図 2.3 の一番右の defocus を、Phase Diversity の情報として加えた時に得られる焦点面での PSF を図 2.5 に示す。

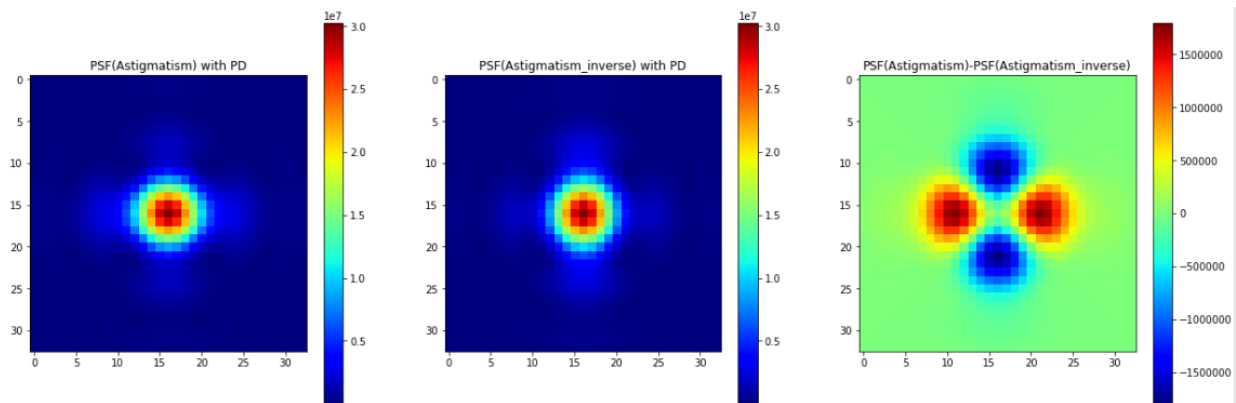


図 2.5 位相収差に Astigmatism、Astigmatism の符号を反転させたものを与えた時の、Phase Diversity の画像(左の画像と真ん中の画像)とその差分(右)。PSF の強度の値と比較すると、画像の差分の大きさは 10^{-1} となっている。これは 2.4 での PSF の形状が、Phase Diversity によって、それぞれ与えた位相収差の形を反映するように少しずつ変化したためである。

図 2.5 の左側と真ん中のイメージはそれぞれ図 2.4 での左側と真ん中のイメージに Phase Diversity の情報を加えた焦点面での PSF を表している。一番右は左側のイメージと真ん中のイメージの差分であり、与えた位相収差の符号によって得られる PSF の形に差が出るのが分かる。ここから、Phase Diversity

の情報を加えることで、PSF の形の差から、位相収差の符号についての情報を得ることができる。Phase Diversity を加えた時に、defocus、spherical の場合には像全体が変化 (サイズが拡大・縮小) するのに対し、astigmatism、coma、trefoil の場合は像がある特定の方向には変化しない。像全体の符号の情報を得る際には、特定の方向に像が変化しないような位相を加えるよりも、像全体が変化するような位相を加えるのが適切である。したがって Phase Diversity を像の符号の判断に用いる場合は、加えるのに最も単純な defocus を使用するのがよい。

2.2.2 Gerchberg-Saxton and Phase Diversity アルゴリズム概要

前節の GS アルゴリズムでは開口での振幅強度の情報と、焦点面像の二つの画像をもちいて位相の推定を行ったが、Gerchberg-Saxton and Phase Diversity(以下 PD-GS アルゴリズムという) では、それに加えて焦点面から少しずれた場所での既知の収差が乗った画像の計 3 枚を用いることで位相の推定を行う。図 2.6 に PD-GS アルゴリズムの概要を示す。

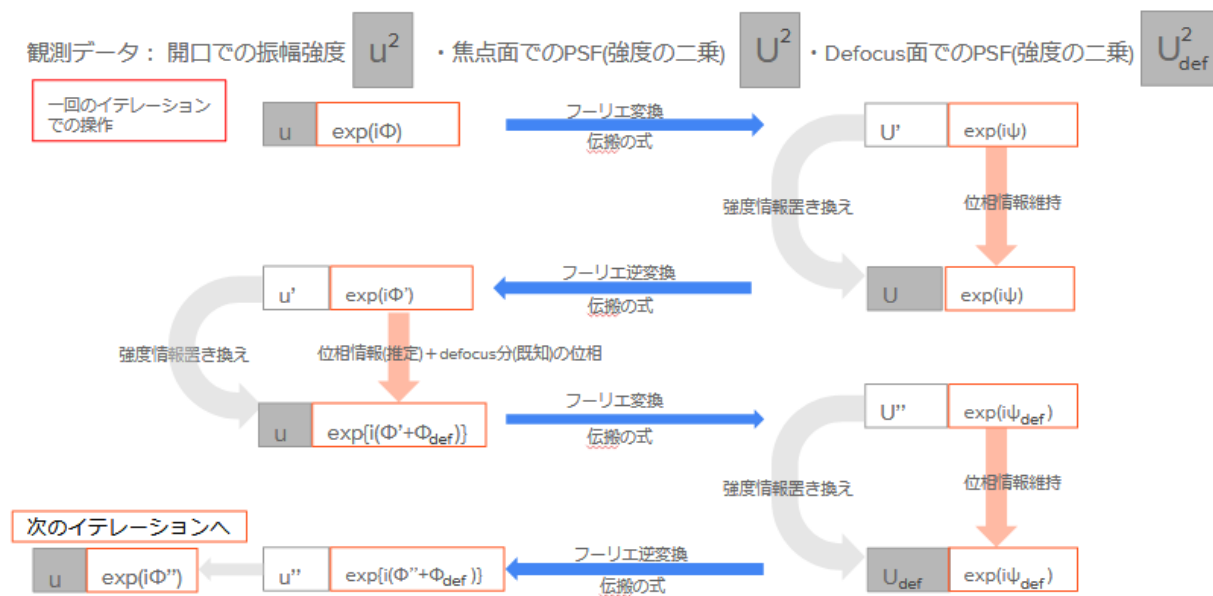


図 2.6 PD-GS アルゴリズム概要

GS アルゴリズムと同様に、各画像と試行ごとの結果の振幅強度の差分がある一定の値より小さくなったところでイテレーションをやめ、その時の位相の値を位相収差の推定値とする。

2.3 Fast-Furious algorithm(Keller 2012[2])

Fast & Furious algorithm(以下 FF algorithm という) は、波の式が $A \exp \phi \sim A + iA\phi + \frac{1}{2}A\phi^2$ と近似できる範囲での位相 ϕ について推定する手法である。この手法では焦点面での PSF と、phase-diversity の情報から解析的に位相を求め、可変形鏡にフィードバックする。波面の奇数成分については、一枚のイメージ (焦点面での像) のみで計算することができる。一方で波面の偶数成分の符号については

phase-diversity の情報から得ることができ、さらに phase-diversity のデータを使うことによりノイズによる制限や停滞問題を減らすことができる。アルゴリズムの概要を下の図 2.7 に記す。

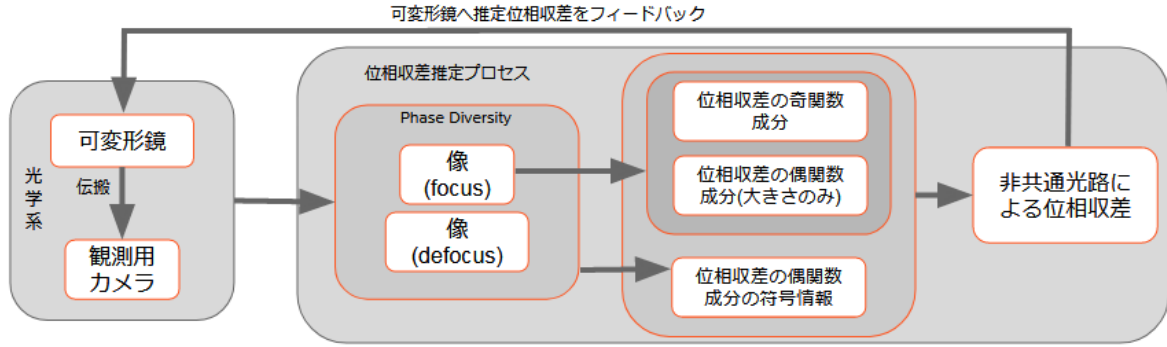


図 2.7 FF アルゴリズム概要

波面の伝搬の式はフラウンホーファー回折の式で書くことができ、したがって焦点面での PSF は開口面での波面の式をフーリエ変換したものの二乗で書くことができる。開口面での波の式を $A \exp(i\Phi)$ 、焦点面での PSF を p とすると、

$$p = |F(A \exp(i\Phi))|^2 \tag{2.27}$$

ここで位相 Φ が十分に小さい場合、上の式を二次までの近似で表すと

$$p = |F(A + iA\Phi - \frac{1}{2}A\Phi^2)|^2 \tag{2.28}$$

Φ は奇数成分と偶数成分に分けることができ、

$$p = |F(A + iA\Phi_e + iA\Phi_o - \frac{1}{2}A\Phi_e^2 - \frac{1}{2}A\Phi_o^2 + A\Phi_e\Phi_o)|^2 \tag{2.29}$$

FF algorithm ではこの後の計算を簡単にするため、開口面の形状が偶関数で記述できると仮定する。この開口関数が偶関数であるという仮定は多くの望遠鏡の開口や、また点光源周辺の回折効果を抑制するために使用される瞳の形が対称であることから適切であると言える [12]。開口関数 A が偶関数の時、式 (2.29) は奇関数と偶関数の項に分けられるため、それぞれの項は実数か純虚数で書くことができる。以下の a 、 v 、 y はそれぞれ開口関数、波面の偶数成分、奇数成分のフーリエ変換を示している。

$$a = F(A) \tag{2.30}$$

$$v = F(A\Phi_e) \tag{2.31}$$

$$y = Im\{F(A\Phi_o)\} \tag{2.32}$$

これらを使って、PSF の二次近似は式 (2.33) のように書くことができる。

$$p = |a + iv - y + \xi|^2 = a^2 + v^2 + y^2 + 2ay + \xi \tag{2.33}$$

ここで ξ は近似の二次の項をまとめたものである。この時 PSF を電場の一次近似として扱った計算は、近似された PSF と収差がない場合に撮れる PSF の最大強度が同じ値を持つようにスケーリングをすることで改善することができるようになる。この改善した PSF (p_n) の近似は 1rad 以下の RMS を持つ波面の場合には十分であり、したがってこのスケーリングを行うために取得した PSF に対して以下の操作をする。

$$p_n = p \cdot \frac{\sum_{x,y} a^2(x,y)}{\sum_{x,y} p x, y} \quad (2.34)$$

$$p = a^2 + y^2 + v^2 - 2ay - \left(1 - \frac{\max(p_n)}{\max(a^2)}\right) \quad (2.35)$$

$$p' = p_n + \left(1 - \frac{\max(p_n)}{\max(a^2)}\right) a^2 \quad (2.36)$$

ここで p' は a^2 と同じエネルギーを持つ。これを偶関数成分と奇関数成分に分けると、

$$p'_e = F^{-1}(i \cdot \text{Im}[F(p')]) \quad (2.37)$$

$$p'_o = F^{-1}(\text{Re}[F(p')]) \quad (2.38)$$

となる。波面の奇数成分は式 (2.38) から y を求め、式 (2.32) に代入することで求まるが、ノイズの影響や近似によるエラーが起こりやすい。このため y を求めるのに式 (2.39) を使う。ここで ϵ は画像のノイズレベルの 50~500 倍程度の大きさである。

$$y = \frac{ap'_o}{2a^2 + \epsilon} \quad (2.39)$$

また波面の偶数成分は Phase-diversity の情報から、

$$p'_{e2} = a^2 + (v + v_d)^2 + (y + y_d)^2 \quad (2.40)$$

ここで v_d 、 y_d は Phase-diversity の情報をそれぞれ式 (2.31)、式 (2.32) に入れて求めたものである。式 (2.37) と式 (2.40) から、 v は

$$v_s = \frac{p'_e - p'_{e2} - v_d^2 - y_d^2 - 2yy_d}{2v_d} \quad (2.41)$$

phase-diversity による PSF の差分は小さいので、ノイズに弱い。そのため式 (2.39) と同様に、 v_s を v の符号を計算するために使用すると、

$$v = \text{sign}(v_s) |p'_e - a^2 - y^2|^{0.52} \quad (2.42)$$

よって、式 (2.31) より位相の偶数成分が分かる。位相収差の推定値は式 (2.31)、式 (2.32) から求めた位相の偶数成分と奇数成分を足すことで得られる。この求めた位相収差の形を可変形鏡へとフィードバックすることにより、次の計算では元の位相収差から推定した位相収差が引かれたより小さな収差についての計算を行う。

2.4 Fast-Furious and Gerchberg-Saxton algorithm(Korkiakoski 2014[3])

FF algorithm にある振幅の強度が偶関数であるという仮定は、多くの円形の光学系に当てはまる。一方で、他の制限要因の影響を受けない高次システムで最適な波面検出を実現するには、開口関数が任意の振幅分布を持つことができるモデルを考慮する必要がある。そこで FF algorithm に GS アルゴリズムを組み合わせることで、開口関数の形状による制約を無くした Fast & Furious Gerchberg-Saxton algorithm(以下 FF-GS アルゴリズムという)について説明する。以下に概略図 2.8 を示す。

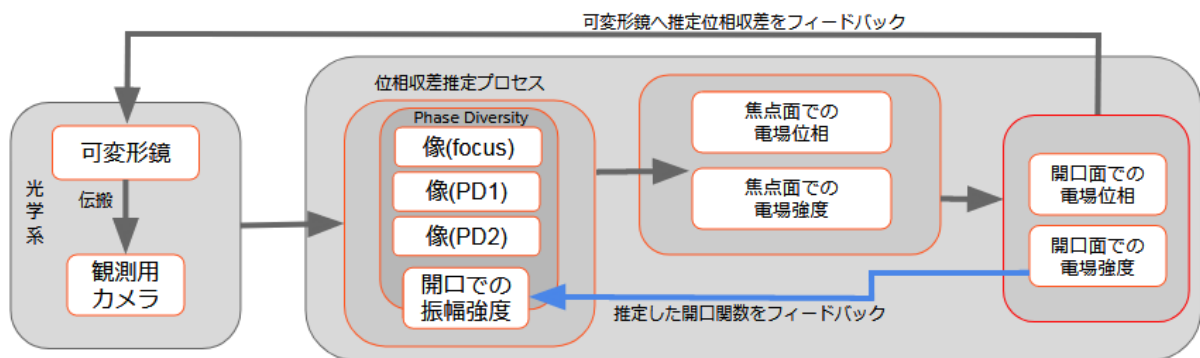


図 2.8 FF-GS アルゴリズム概要

2.4.1 電場を出すまでの式

GS アルゴリズムでは開口での振幅を分かったものとして、焦点面での像から開口での位相をイテレーションをすることで推定していたが、FF-GS アルゴリズムでは Phase-diversity の情報から開口面での振幅強度を推定することで、開口面での位相を求める。FF-GS アルゴリズムでは焦点面での像に加えて、異なる二つの Phase-diversity での画像二枚の計三枚から開口面での振幅強度の推定を行う。このとき位相の振幅はある程度小さいとすると、全ての場所での PSF は電場の式の一次近似でかける。開口での振幅強度を A として、

$$p'_1 = |e_1|^2 = |FA + iA(\phi)|^2 \quad (2.43)$$

$$p'_2 = |e_2|^2 = |FA + iA(\phi + \phi_{d1})|^2 \quad (2.44)$$

$$p'_3 = |e_3|^2 = |FA + iA(\phi + \phi_{d2})|^2 \quad (2.45)$$

ここで e_1 、 e_2 、 e_3 は像に対応する電場の式である。ここで ϕ_{d1} と ϕ_{d2} は既知の phase-diversity であり、 ϕ は開口での未知の位相である。開口での位相を推定するためには式 (2.43) と式 (2.44) で表される画像二枚でも十分だが、これに式 (2.45) で表される PSF を加えた三枚でやることで収束の安定性が増える。

位相を直接求めるのではなく、Phase-diversity の情報から開口面での電場の式を求める。式 (2.43) で表される開口面での電場は以下のように書くことができる。

$$e_1 = (a_r + \alpha) + i(a_i + \beta) \quad (2.46)$$

ここで

$$\begin{aligned} a_r &= \text{Re}\{F\{A\}\} \\ a_i &= \text{Im}\{F\{A\}\} \\ \alpha &= -\text{Im}\{F\{A\phi\}\} \\ \beta &= \text{Re}\{F\{A\phi\}\} \end{aligned}$$

である。式 (2.44) と式 (2.45) から式 (2.43) を引くと、 α と β について以下のような方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_{d1} & 2\beta_{d1} \\ 2\alpha_{d2} & 2\beta_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_{d1} &= -\text{Im}\{F\{A\phi_{d1}\}\} \\ \beta_{d1} &= \text{Re}\{F\{A\phi_{d1}\}\} \\ \alpha_{d2} &= -\text{Im}\{F\{A\phi_{d2}\}\} \\ \beta_{d2} &= \text{Re}\{F\{A\phi_{d2}\}\} \end{aligned}$$

また

$$c_1 = p'_2 - p'_1 - (2a_r\alpha_{d1} + 2a_i\beta_{d1} + \alpha_{d1}^2 + \beta_{d1}^2) \quad (2.48)$$

$$c_2 = p'_3 - p'_1 - (2a_r\alpha_{d2} + 2a_i\beta_{d2} + \alpha_{d2}^2 + \beta_{d2}^2) \quad (2.49)$$

である。Phase-diversity が線形独立であるとき、上の行列はフルランクになる。次に、 α と β を式 (2.46) に代入して、焦点面での電場の式を計算する。このとき phase-diversity による PSF の差分が小さいために、ノイズが発生しやすくなり、したがって計算結果からは位相の情報のみを利用して、以下の式に代入することで開口面での電場の式を求める。

$$e_1 = |p'_1|^{0.5} \exp [i \arg (a_r + \alpha) + i(a_i + \beta)] \quad (2.50)$$

これを逆フーリエ変換することで開口面での電場の式を求め、位相収差を計算するとともに開口面での開口関数の形の推定を行う。

2.4.2 イテレーション部分の式

FF-GS アルゴリズムでの一回のイテレーションでの操作を以下に示す。

1. 開口での振幅強度 A は前回の試行から推測した値を使用する。2.4.1 での計算を元に、 p_2 を基準とした時の p_2 での電場の式 e_2 を求める。

2. 求めた e_2 を逆フーリエ変換して開口面での電場の式 E_2 を求め、その時の開口での振幅強度の推定値 A を一番新しい開口での振幅強度とする。
3. 2でもとめた開口での振幅強度 A を使用して p_1 での電場の式を 2.4.1 での計算を元に求める。
4. p_1 に対応する開口面での電場の式 E_1 をもとめる。このとき、このイテレーションでの最後の位相収差と開口での振幅強度の推定値を以下の式で求める。

$$\phi = \arg(E_1), A = |E_1|$$

以上の手順を開口での振幅強度が収束するまで行う。また開口での振幅強度が収束した時の位相収差 ϕ を可変形鏡へフィードバックする。

第 3 章

シミュレーションの設定

非共通光路収差として与えた位相を、第二章での位相収差の推定アルゴリズムを使用して再現し、その結果をもとと与えた位相と比較することで各アルゴリズムの計算結果の評価を行う。このとき、AO188 に搭載されている可視光領域でのカメラ SCExAO の開口の形を想定して開口関数を設定した。また、pixel scale は各補償光学装置での検出器に従い、それに合わせて焦点面像を作成した。また位相収差としてのゼルニケ多項式の各項は python の Light Pipes を用いて作成した。このときシミュレーションに使用した位相収差は補償光学装置内の光学素子由来のものとしたので、レンズの基本的な収差であるザイデル 5 収差を想定し、位相の大きさが 1[rad] 程度になるように設定した。以下では装置の開口のサイズや観測用カメラの pixel スケールなどのパラメータについて説明する。なお、各検出器や補償光学装置の位置関係を以下の図 3.1[13] に示す。

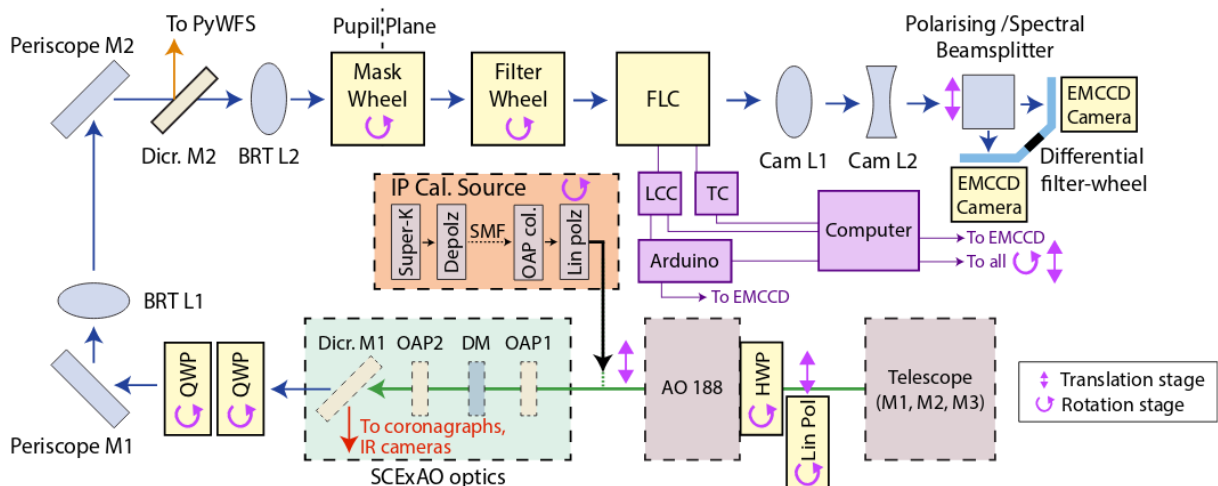


図 3.1 補償光学装置の位置関係 [13]

3.1 SCExAO

SCExAO の開口関数については Kuhn et al. 2018[14] で想定されているパラメータを使用した。図 3.2 に使用した開口の形とその詳細のサイズを記す。

表 3.1 SCExAO の開口とそのパラメータ

parameter Description	Design Value	Alternative Metric
Primary mirror diameter	$D_p = 8.2 \text{ m}$	$R_p = 4.1 \text{ m}$
Ratio of secondary to primary mirror diameter	$D_s/D_p = 0.289$	$D_s = 2.369 \text{ m}, R_s = 1.184 \text{ m}$
Ratio of spiders thickness to primary diameter	$e/D_p = 0.029$	$e = 0.237 \text{ m}$
Spiders orientation angle versus horizontal	$q = 51^\circ.75$	
Spiders origin decenter along the horizontal	$d/D_p = 0.081$	$d = 0.661 \text{ m}$

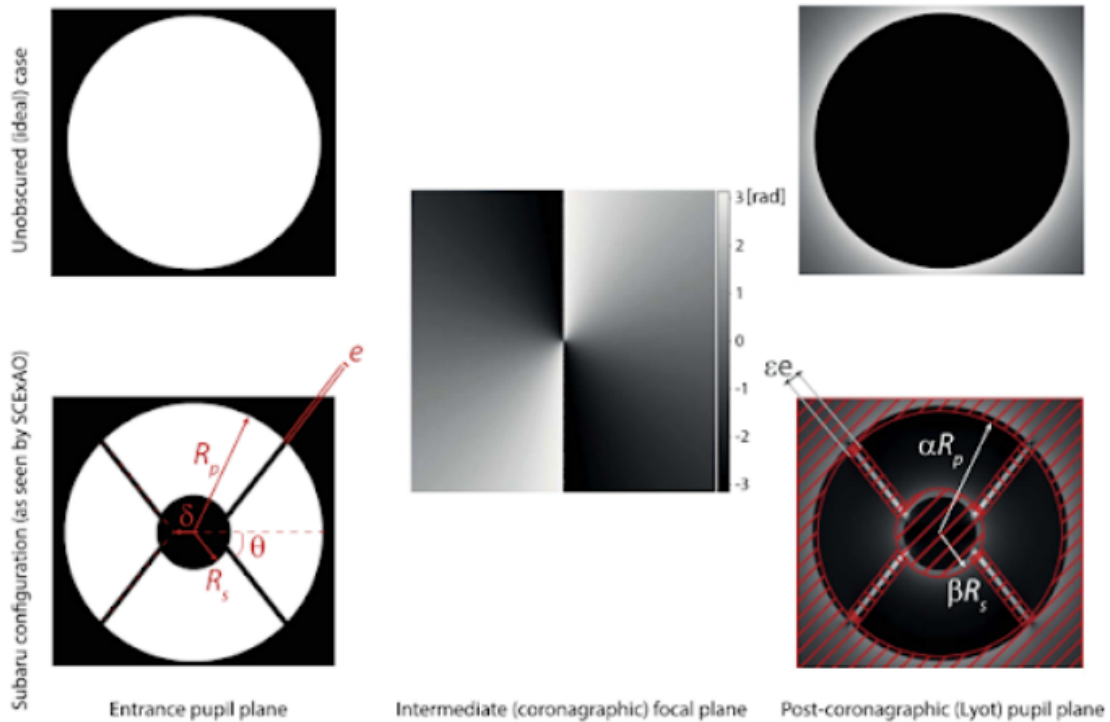


Figure 1. Principle of vector vortex coronagraphy for ideal (upper row) and Subaru-shaped (bottom row) telescope pupils, in the case of a topographic charge-2 phase mask. The Subaru pupil and SCExAO Lyot mask parameters shown here are detailed in Section 2.3 and Table 2. (A color version of this figure is available in the online journal.)

図 3.2 SCExAO の開口とそのパラメータ [14]

検出器として SCExAO で共同利用で使われている可視光カメラである VAMPIRES を想定し、望遠鏡の回折限界での第一暗環までの距離を求め、カメラの 1pixel あたりの角度から、カメラで撮れる像を作

成した。このとき回折限界はすばる望遠鏡 (主鏡の直径 $D = 8.2m$) で可視光線 $500nm$ を観測した時の、 $1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.07[\text{arcsec}]$ である。VAMPIRES は可視光領域での系外惑星、原始惑星系円盤観測を行うための検出器であり、pixel size などを以下の表にまとめる。[15]

表 3.2 VEAMPIRES の各パラメータ

Detector name	Detector size(pixels)	Pixel size (μm)	Read-out noise(e^-)
VAMPIRES	512 × 512	16	1

なおこのパラメータは Jovanovic et al. 2015[15] で想定されているパラメータを使用している。

3.2 各アルゴリズムでの注意点

GS アルゴリズム

使用する焦点面での PSF について、カメラのサチレーションレベルを参考にして、焦点面での強度振幅の最大値を 20000(単位) になるようにフーリエ変換、逆フーリエ変換の係数を変更する。非共通光路による位相収差として与える位相は、最大値を 2π 以下に設定する。

PD-GS アルゴリズム

PD-GS アルゴリズムでは開口での振幅の強度の情報と焦点面での PSF に加えて、既知の位相収差があったときの振幅の強度の情報を使用して非共通光路収差を推定する。既知の位相収差としては、偶関数を使用するのがよい。今回は PD として、ゼルニケ多項式の defocus 成分を使用する。以下の図 3.3 に具体的に使用した PD の位相収差のマップをのせる。

FF アルゴリズム

GS アルゴリズムでは焦点面での画像に加えて、既知の位相収差 ϕ_{d1} が乗った画像を用いて非共通光路収差を計算する。式 (2.41) より、既知の位相収差として奇関数を使用するのは好ましくないため、 ϕ_{d1} を偶関数に設定する。今回はゼルニケ多項式の defocus 成分を使用する。

FF-GS アルゴリズム

FFGS アルゴリズムでは焦点面での画像に加えて、二つの既知の位相収差 ϕ_{d1} 、 ϕ_{d2} が乗った画像を用いて非共通光路収差を計算する。既知の位相収差について、 ϕ_{d1} を奇関数、 ϕ_{d2} を偶関数と選ぶことで、 α

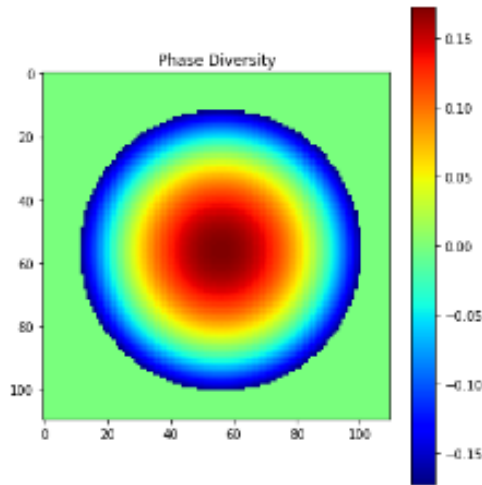


図 3.3 PD-GS アルゴリズムで使した PD の位相収差のマップ

と β の値をより簡単な式 (3.2) で求めることができる。

$$\alpha = \frac{c_1}{2\alpha_{d1}} \tag{3.1}$$

$$\beta = \frac{c_2}{2\beta_{d2}} \tag{3.2}$$

具体的に使した PD の位相収差のマップを図 3.4 に載せる。

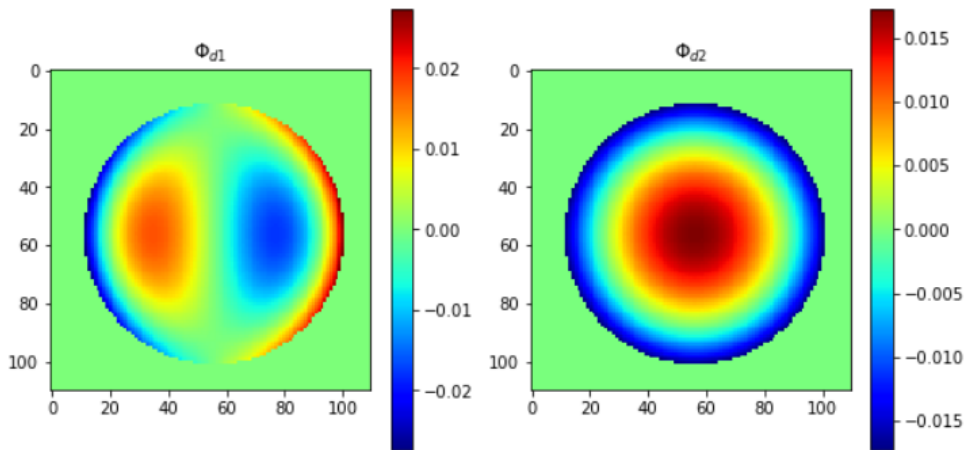


図 3.4 FF-GS アルゴリズムで使した PD の位相収差のマップ

また、画像の各ピクセル上において、計算の処理上本来 0 であるはずの α_{d1} 、 β_{d1} に微小な値が入り、 α 、 β の値が大きく外れた値となることを防ぐために、 α_{d1} 、 β_{d1} がそれぞれ $-0.0005 < \alpha_{d1} < 0.0005$ 、 $-0.0005 < \beta_{d1} < 0.0005$ の範囲にある時は $\alpha_{d1} = 0$ 、 $\beta_{d2} = 0$ となるように計算した。

3.3 シミュレーションの流れ

シミュレーションで使用するために作成した画像と光路との対応関係は以下の図 3.5 のようになる。

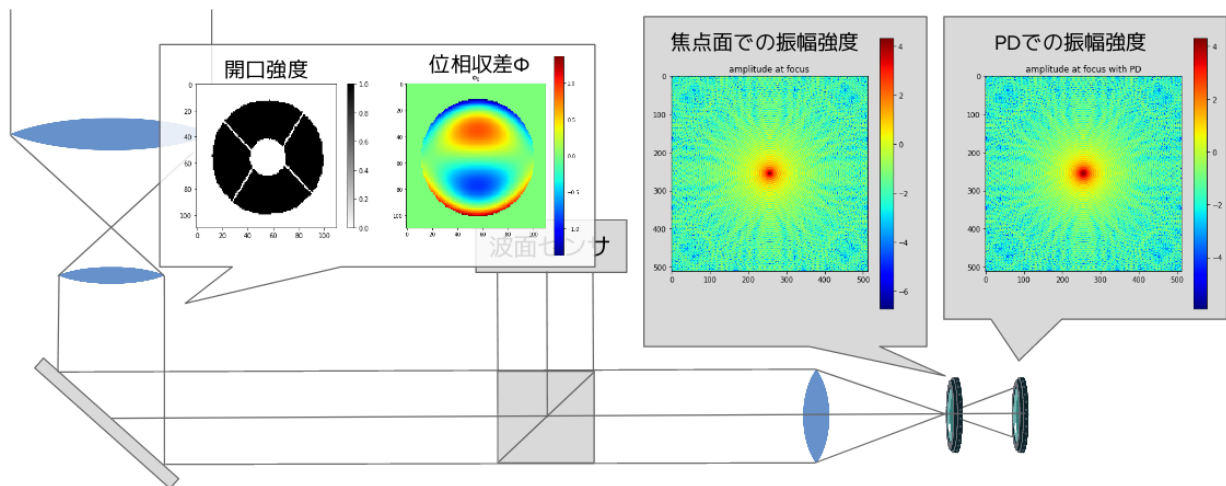


図 3.5 光学系の各場所と画像の対応関係を表している。

開口の形から、開口での振幅強度を作る。このとき開口での電場の式に与える位相収差は、実際の光学系では非共通光路によるものであるが、簡単のため開口での電場の位相成分として扱う。また PD の画像は、PD として defocus の収差を与える場合には図 3.5 のカメラのように焦点から少しずれた位置の画像を使用するが、このシミュレーションでは PD の収差を開口の電場の式の位相成分に直接加えることで作成する。

PSF の作成

各アルゴリズムで使用する画像を作成する。ここでレンズを使って集光されたときの集光面での光強度とフラウンホーファー回折で表現される遠方のスクリーン上での光強度は同じであるので、焦点面での光の強度分布は開口面での電場の式から計算することができる。したがって開口面に於ける電場の式を、既知の開口関数と、非共通光路による位相収差と見なしたゼルニケ収差の各項から作成する。開口面での画像について、望遠鏡の開口の直径と伝搬波長から回折限界、つまり第一暗環までの距離 (角度) が分かるので、中心から第 1 暗環までのスクリーン上での pixel 数をカメラの 1pixel あたりの角度で計算することで、伝搬前の画像のサイズを計算する。またこのとき観測波長として 500nm を想定する。フーリエ変換後の画像 1 pixel のサイズは、伝搬前の画像サイズを L [m]× L [m] として以下の式でかける。

$$1\text{pixel} = 1/L \tag{3.3}$$

いま $\sin \theta \sim \theta$ なので、第 1 暗環までを中心から n [pixel] とすると、1 pixel の角度は

$$\frac{1.22 \times 0.5\mu\text{m} (\text{可視光})}{8.2\text{m}} \times 1/n = 7.5 \times 10^{-8}/n [\text{rad}] = 0.02/n \text{ 秒角} \tag{3.4}$$

いま SCEXAO を想定したとき、カメラの 1pixel が $10\text{mas} = 0.01$ 秒角より $n=2$ に設定すると、開口での画像の一辺の長さ L は

$$1/L = 1.22/8.2\text{m} \times 1/2 \text{ (1pixel の大きさ)} \Leftrightarrow L \sim 13\text{m} \quad (3.5)$$

従ってフーリエ変換を行うときに、開口での像は $13\text{m} \times 13\text{m}$ かつ開口直径が 8.2m となる。なおこのとき pixel 数はカメラと同じ $512\text{pixel} \times 512\text{pixel}$ である。

開口面での電場は以下の開口関数 (振幅強度) と収差から作り、これをフーリエ変換することで焦点面での電場の式を計算し、ここから焦点面での PSF を作成した。PD の画像はフーリエ変換前の開口面での電場の式の位相に PD の位相収差を加えてフーリエ変換することにより求めた。

PSF の使用範囲

PSF にのっているノイズの影響を取り除くために、各アルゴリズムでイテレーションの際に使用する PSF の範囲を徐々に広げながら位相の推定を行う。このとき、使用する PSF の範囲に付いて、各範囲での 200 回イテレーションをしたあとの与えた位相と推定した位相の差分の RMS をプロットしたものが図 3.6 になる。画像の大きさを 13m 四方として、画像中心から半径 $0.05, 0.10, 0.15, \sim, 1.0\text{m}$ の範囲を位相回復のための画像として使用した。図 3.6 から、半径 0.5m の

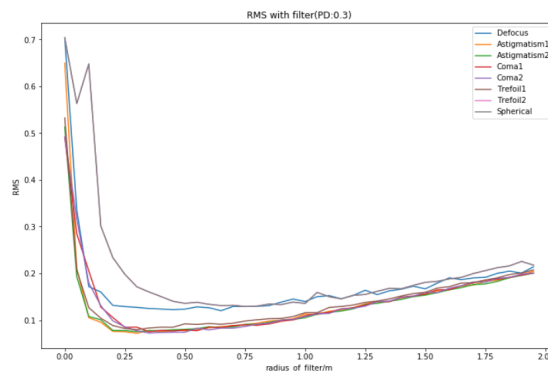


図 3.6 画像中心から各藩経言の PSF を使用して位相推定した時の与えた位相と推定した位相の差分の RMS をプロットしたものの。

円より位相回復に使用する PSF の範囲を大きくしても精度は向上せず、ほぼ一定となった。従って、以下のノイズが PSF にのる場合での位相回復では、与えた位相と推定した位相の差分の RMS がちいさくなる様に PSF の使用範囲を大きくして推定を行う。

評価の方法

作成したそれぞれの場所での PSF から、各アルゴリズムを動かすことで開口面で与えた位相収差が回復できるかどうかを確認する。各アルゴリズムでの計算結果として得られた位相収差と開口面で与えた位相収差の RMS 値を使用して、それぞれのアルゴリズムの波面回復精度の評価を行う。以下に RMS の式を載せる。

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^n ((\text{各ピクセルでの}) \text{位相強度} - \text{元の位相強度})^2} \quad (3.6)$$

ここで $N = 512 \times 512$ 、RMS の単位は [rad] である。

第 4 章

結果

GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズム、FF アルゴリズム、FF-GS アルゴリズムを使用して、シミュレーションで仮定した非共通光路による位相収差の再現を行う。再現した位相収差について、シミュレーションで与えた非共通光路による位相収差との RMS から、再現精度の評価を行う。

4.1 使用した位相収差

非共通光路による収差として想定したザイデル 5 収差を以下の図 4.1 にのせる。カラーバーは位相収差の強度を示し、全ての収差が $-1 \sim 1$ rad の間に収まるように調整した。

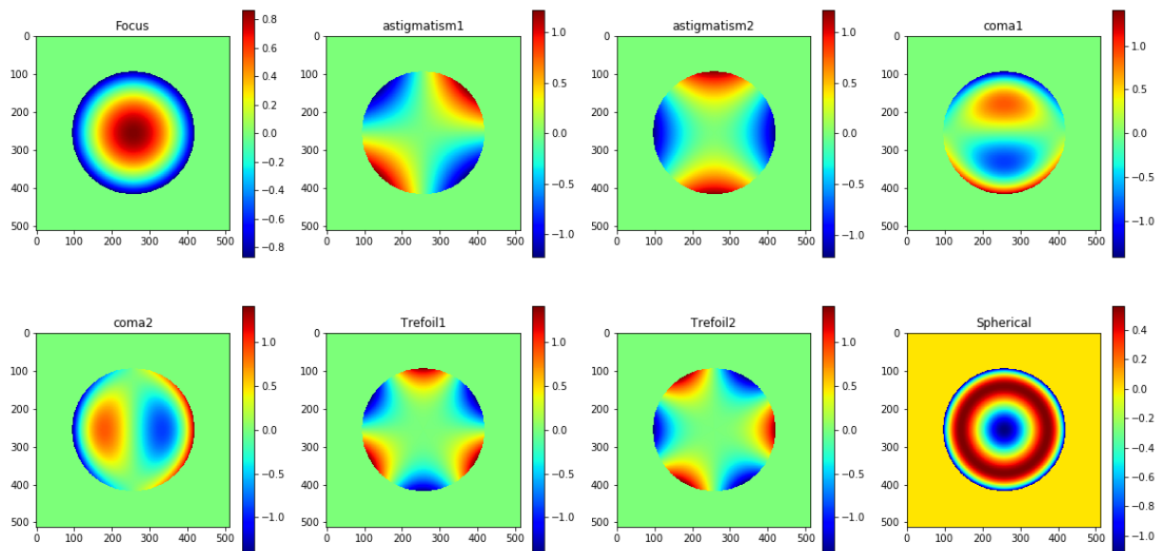


図 4.1 ザイデル 5 収差

4.2 各アルゴリズムの動作確認

各アルゴリズムの動作を確認する。開口関数として円形開口を設定し、各 PSF にノイズがのらない場合に非共通光路による位相収差を推定した。GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズムは位相収差の推定値と実際に与えた収差のイテレーション回数に応じた RMS 値の変化を調べた。また焦点面での PSF の値についても、シミュレーションに使用した PSF と推定結果から得られた PSF の RMS 値をイテレーション回数に応じたグラフを作成した。

GS アルゴリズムでの位相収差の回復 (円形開口、ノイズなしの場合)

GS アルゴリズムを用いて、図 4.1 の位相収差を推定した。図 4.2 にその結果を載せる。

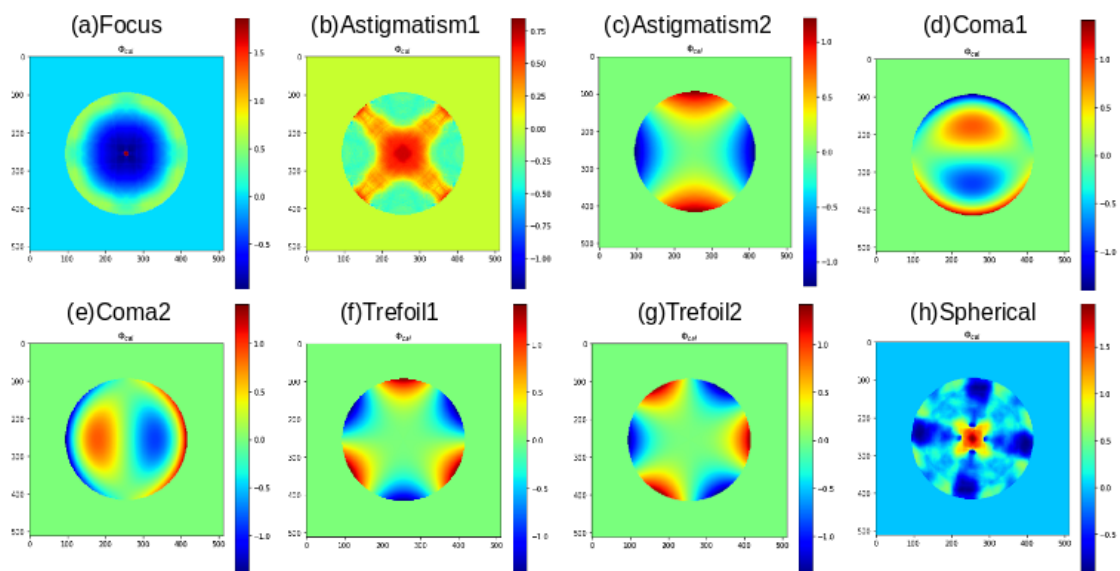


図 4.2 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。

図 4.3 は非共通光路による位相収差マップと、再現した位相収差マップの対応するピクセル上での位相強度の 0 からの変分を、横軸を非共通光路による位相収差マップの強度、縦軸を再現した位相収差マップの強度としてプロットしたものである。実線は推定した位相収差と非共通光路による収差が等しい時を示している。

また各位相収差について、イテレーションの回数による与えた収差と推定した収差の RMS の変化を記したのが図 4.4 のグラフになる。

図 4.4 より各位相収差について、位相が収束するまでにかかるイテレーションの回数は 10 回 ~ 60 回に

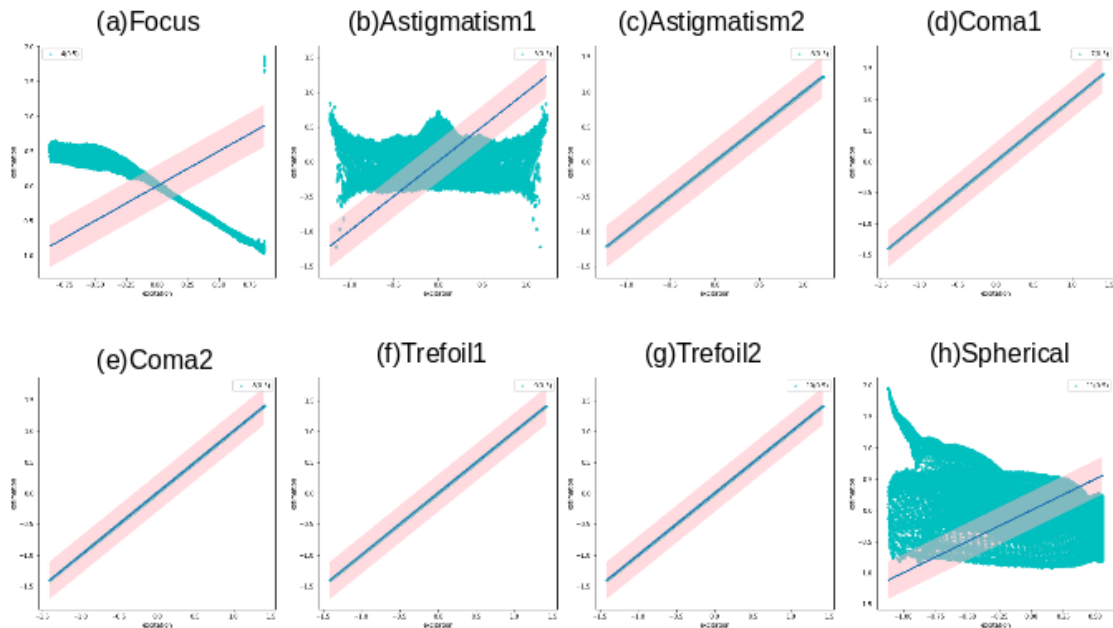


図 4.3 GS アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路取差として与えた位相と計算結果の位相の 0 からの変分の比較を示している。各グラフ中の線分は計算結果の位相が与えた位相と等しいときをあらわす。Focus、Astigmatism2、Coma、Trefoil については線分上にプロットがのっているが、Astigmatism1、Spherical は大きく線分から外れることがわかる。

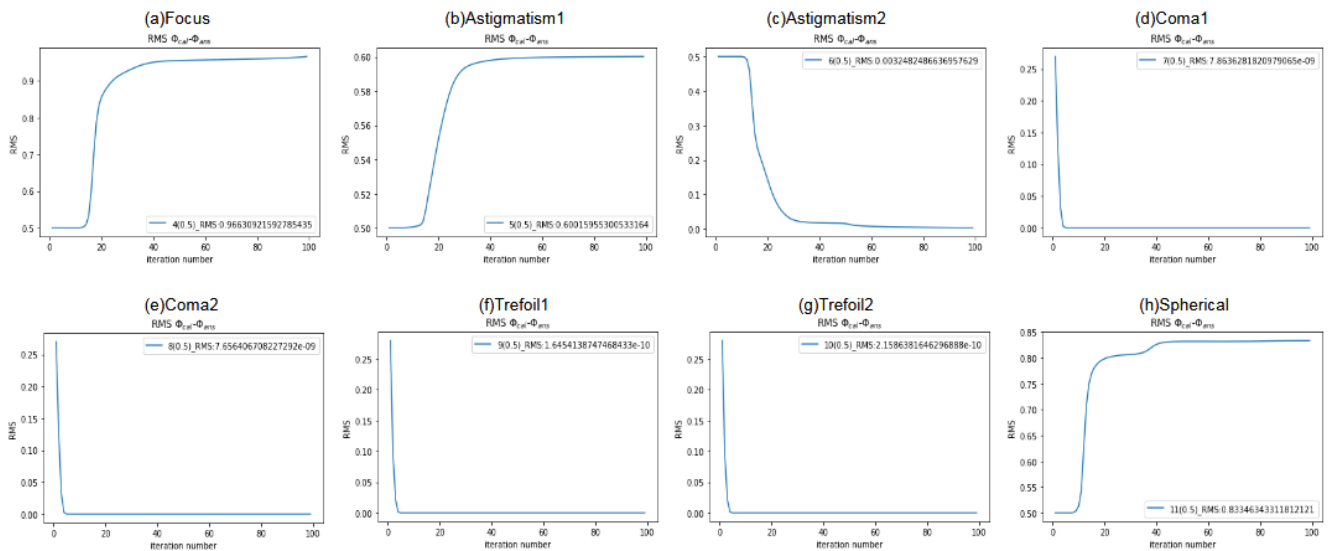


図 4.4 GS アルゴリズムによるイテレーション回数での RMS 値の変化のグラフをのせる。横軸がイテレーション回数、縦軸が非共通光路取差として与えた位相と GS アルゴリズムを使って推定した位相取差の RMS である。右上の汎用の中の数字は、イテレーション後の RMS の値である。

なった。円形開口でノイズがないとした場合は、非共通光路による収差 Astigmatism2, Coma, Terefoil のとき、RMS の値は (Astigmatism2: 3.2×10^{-3} [rad], Coma1: 7.9×10^{-9} [rad], Coma2: 7.7×10^{-9} [rad], Terefoil1: 1.6×10^{-10} [rad], Terefoil2: 2.2×10^{-10} [rad]) となり、推定した位相収差と非共通光路による収差が等しいことがわかる。これは図 4.3 でプロットが実線上にのることからも確認できる。一方で、Focus、Astigmatism1、Spherical については、図 4.4 から RMS 値は (Focus : 0.97[rad], Astigmatism1 : 0.60[rad], Spherical : 0.83[rad]) であり、また図 4.6、図 4.3 から想定した収差とは異なる形の位相収差に収束していることがわかる。非共通光路収差として Astigmatism1 と Spherical を与えた時の、焦点面での PSF の形と RMS 値の変化を以下に示す。

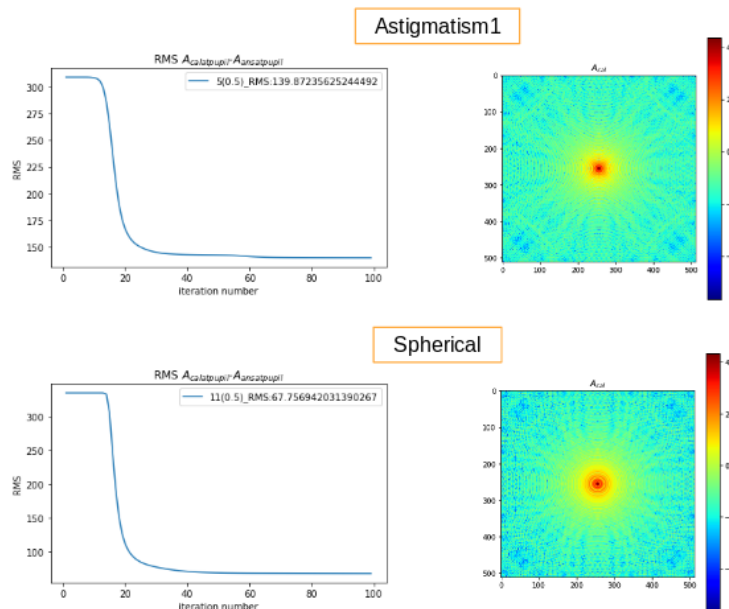


図 4.5 非共通光路収差として Astigmatism1 と Spherical を与えた時の、焦点面での PSF の形と RMS 値の変化を示してある。上段が Astigmatism、下段が Spherical で、左のグラフが与えた焦点面での PSF と計算した PSF の差分の RMS のイテレーションによる変化を、右のイメージが焦点面での PSF を log スケールで描写したものになっている。グラフからどちらの位相を与えても焦点面での PSF の差分が減少していく様子が分かる。

図 4.5 から、Astigmatism1 と Spherical どちらを与えた時も焦点面での PSF はある形に収束していくことがわかる。これは式 (2.12) で等号が成り立ち、かつ位相の差分が 0 にならない場合である。一方で、位相の差分が 0 にならない場合の開口面での振幅強度について調べるため、各位相が収束した時の開口面での振幅強度を図 4.6 に示す。推定した位相収差と非共通光路による収差が等しい (非共通光路として与えた位相収差が Focus、Astigmatism1、Spherical 以外の) 場合、開口での振幅強度のマップは位相の推定のために与えた開口面での振幅強度に等しくなる。一方で推定した位相収差と非共通光路による収差が異なる場合には、開口での振幅強度のマップは与えた開口面での振幅強度の形ではなく、あるパターンを持ったイメージに収束する。

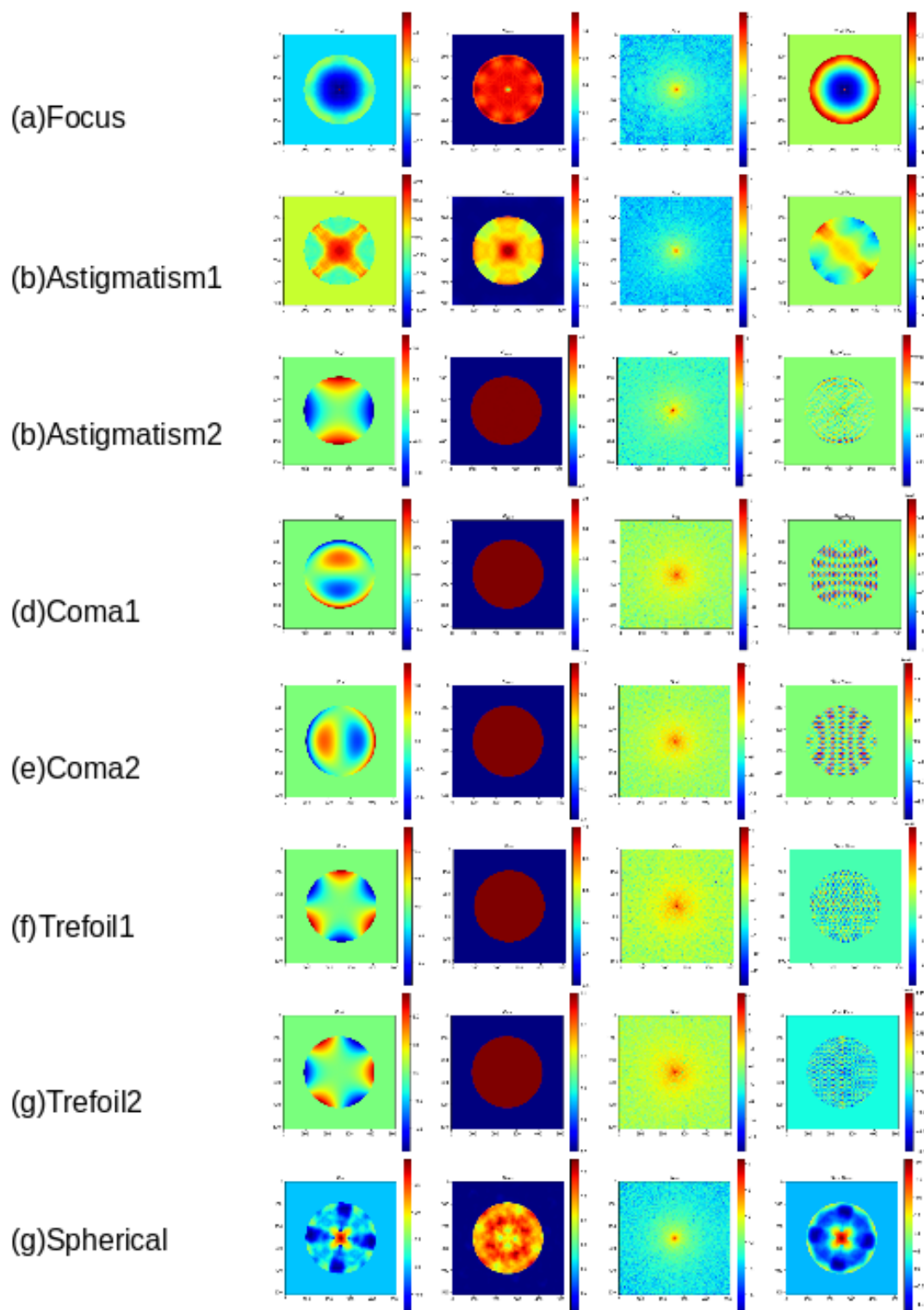


図 4.6 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。左から、推定した位相、収束したときの開口面での振幅強度、収束したときの焦点面での振幅強度、与えた位相と推定した位相の差分を示している。

PD-GS アルゴリズム (円形開口、ノイズなしの場合)

PD-GS アルゴリズムを用いて、図 4.1 の位相収差を推定した。図 4.7、図 4.8 にその結果を載せる。

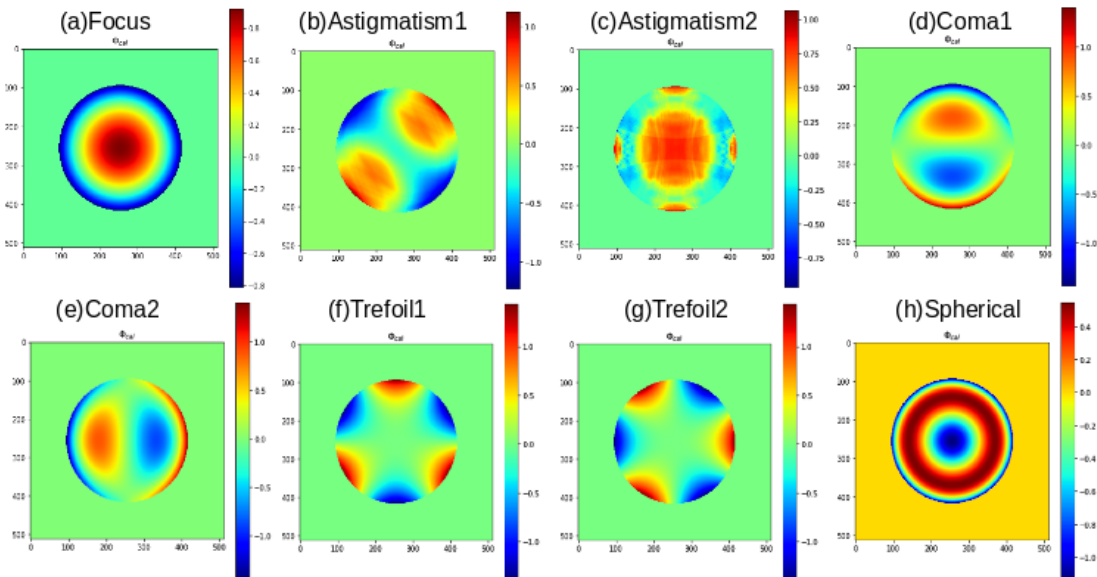


図 4.7 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、PD-GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果。

図 4.10 から、PD-GS アルゴリズムでの位相の推定値は、Astigmatism を除いて非共通光路による収差として与えた位相収差と同じ形に収束していることがわかる。これは図 4.8 で、非共通光路収差として与えた位相収差と推定した位相収差の各 pixel における 0 からの変分のプロットが線分上に重なっていることから確認できる。図 4.9 に与えた収差と推定した収差の差分の RMS のイテレーション回数による変化を載せる。

図 4.9 より、与えた収差と推定した収差の差分の RMS が収束するまでのイテレーションの回数は一番収束が早い Astigmatism1 で 10 回ほどであり、Astigmatism2、Coma、Trefoil1 は 100 回のイテレーションでは収束しなかった。奇関数 (coma, trefoil) を再現した時は GS アルゴリズムと比べて収束までに必要とする回数が多くなっている。また、位相収差が奇関数 (coma, trefoil) の場合、収束した時の RMS の値はそれぞれ (coma1 : 0.016[rad], coma2 : 0.016[rad], trefoil1 : 0.0092[rad], trefoil2 : 0.0092[rad]) となり、これは GS アルゴリズムでの収束した際の RMS の値より大きくなっている。

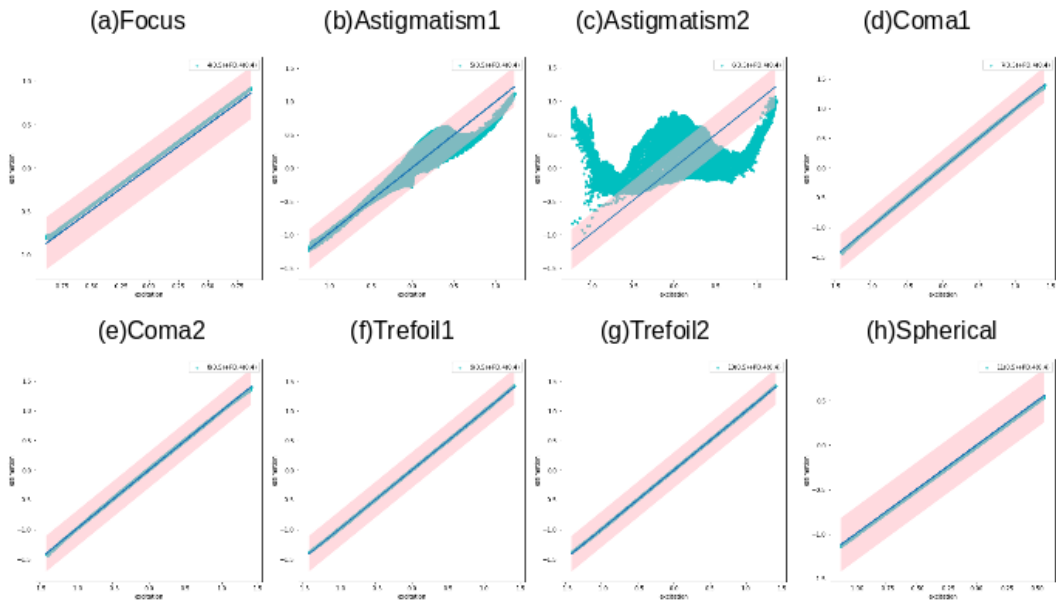


図 4.8 PD-GS アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相と計算結果の位相の 0 からの変分の比較を示している。計算結果の位相が与えた位相と等しい場合には線分上に重なる。

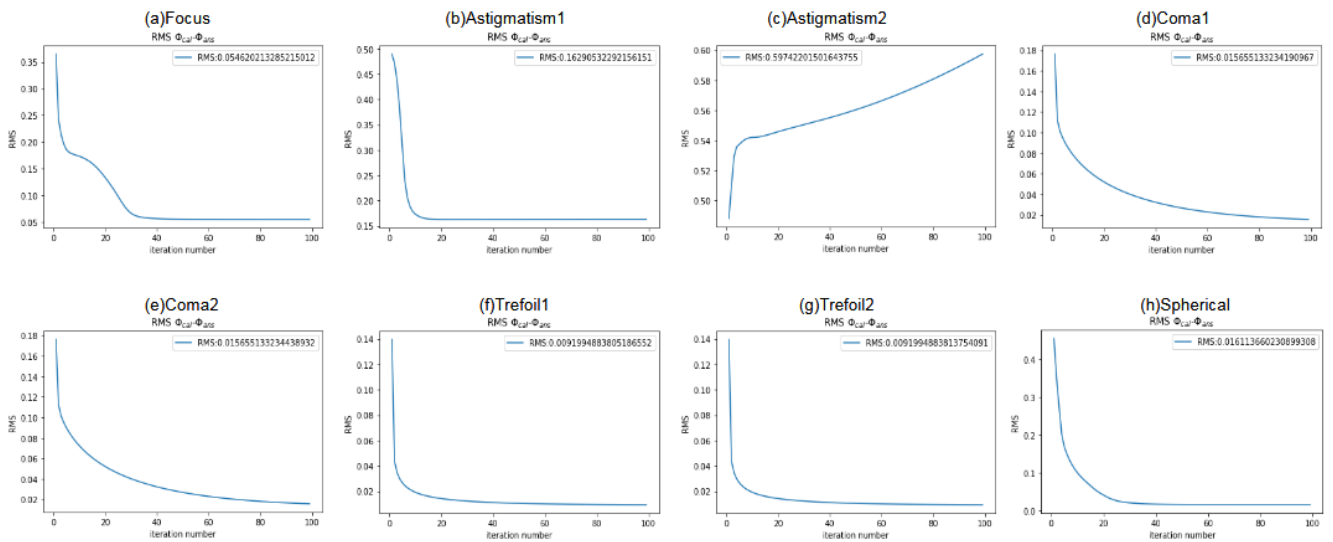


図 4.9 PD-GS アルゴリズムによるイテレーション回数での RMS 値の変化のグラフをのせる。横軸がイテレーション回数、縦軸が非共通光路収差として与えた位相と PD-GS アルゴリズムを使って推定した位相収差の RMS である。RMS 値の収束までのイテレーションの回数は 10 回から 100 回以上となった。

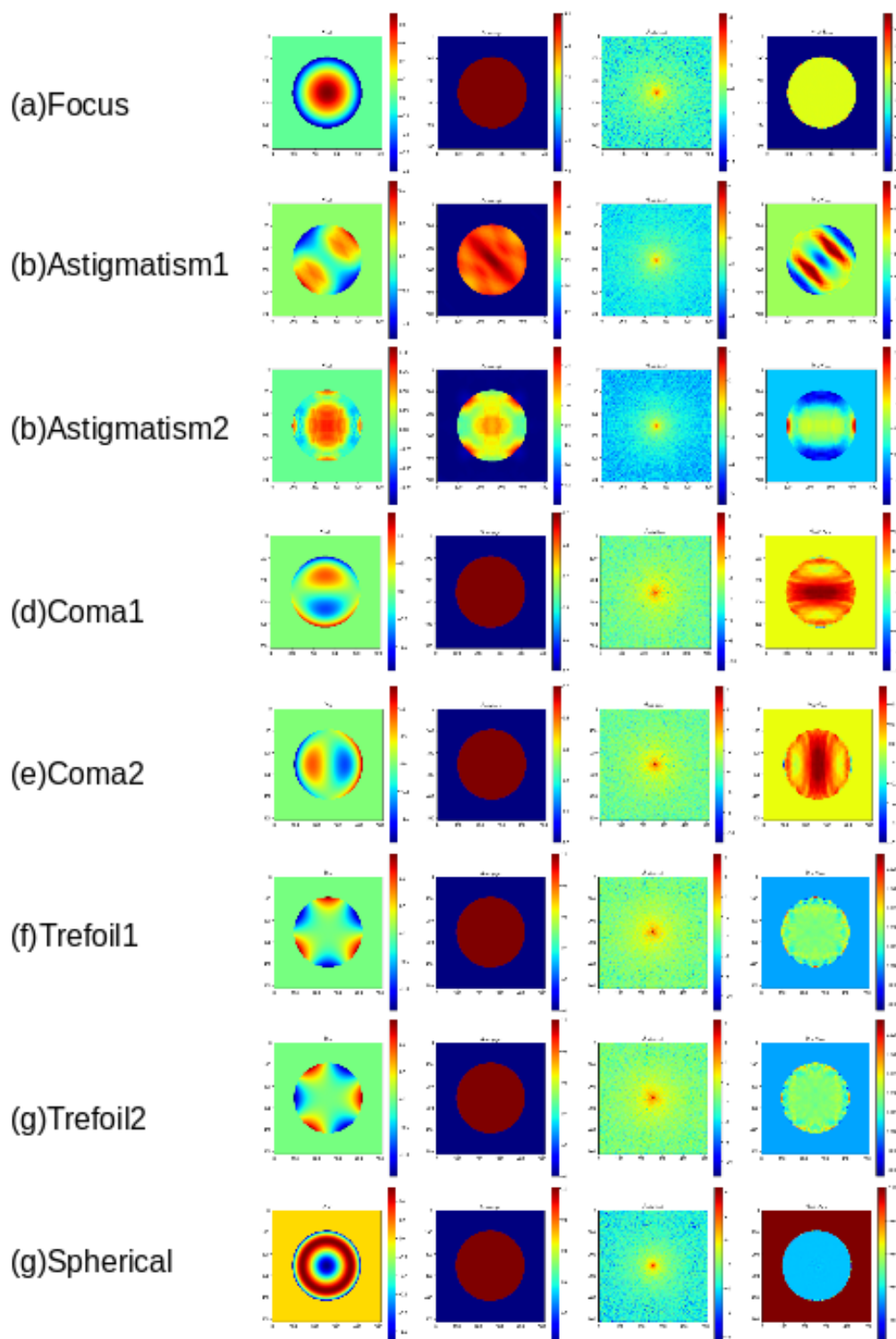


図 4.10 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、PD-GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。左から、推定した位相、収束したときの開口面での振幅強度、収束したときの焦点面での振幅強度、与えた位相と推定した位相の差分を示している。

FF アルゴリズム (円形開口、ノイズなしの場合)

FF アルゴリズムを用いて、図 4.1 の位相収差を計算した。図 4.11、図 4.12 にその結果を載せる。

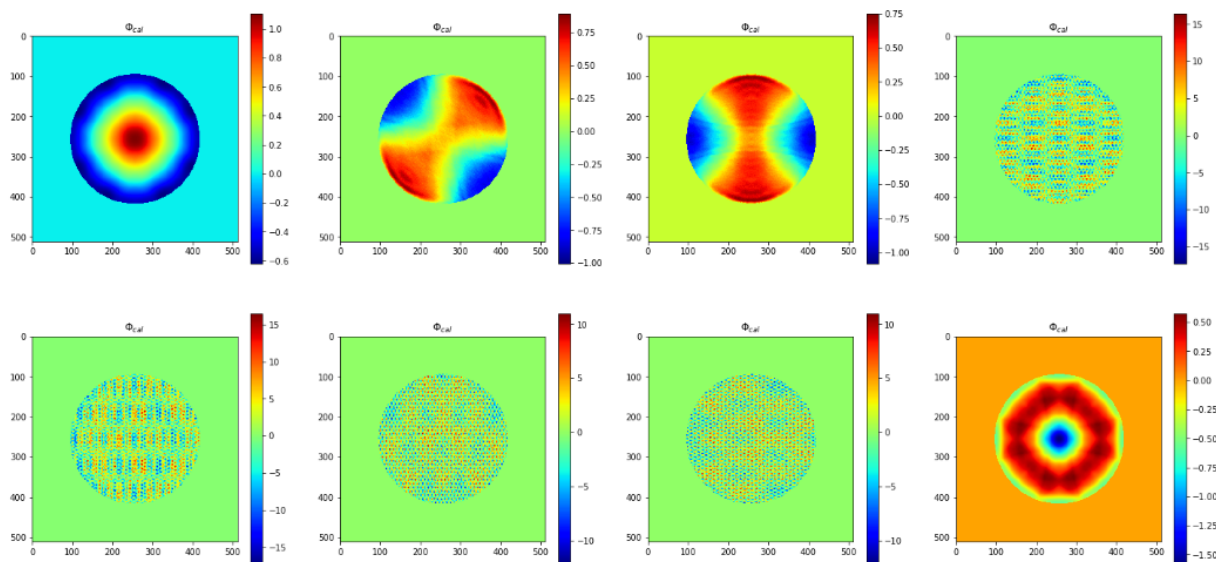


図 4.11 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、FF アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。このとき与えた位相収差の強度の範囲は $-1[\text{rad}] \sim 1[\text{rad}]$ である。

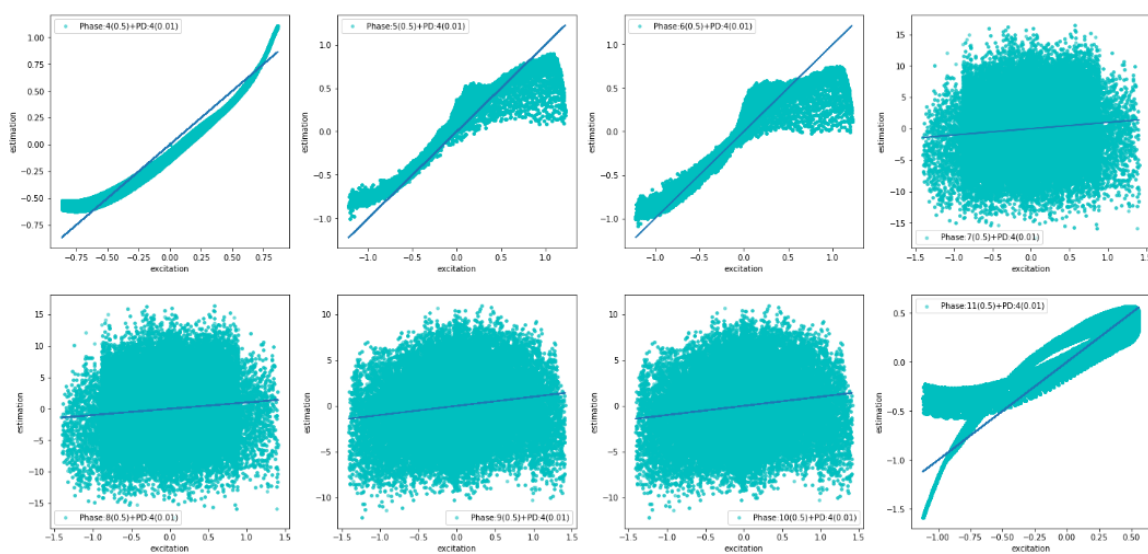


図 4.12 FF アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相 ($-1[\text{rad}] \sim 1[\text{rad}]$) と計算結果の位相の 0 からの変分の比較を示している。

FF アルゴリズムでは、非共通光路収差として偶関数を与えたときに、各位相収差と推定した位相の差分の RMS 値が Focus:, Astigmatism1:, Astigmatism2:, Spherical: で位相を再現した。また与えた位相が奇関数の場合は再現できなかった。なおこのとき非共通光路収差として与えた位相は、GS アルゴリズムと PD-GS アルゴリズムで使用したものと同じで強度が $-1[\text{rad}] \sim 1\text{rad}$ であり、これは FF アルゴリズムで使われている $e^{i\phi} \sim 1 + \phi + 1/2\phi^2$ の近似を考えたときに適切でない。従って、図 4.14 に位相収差の強度を $-0.2[\text{rad}] \sim 0.2[\text{rad}]$ 、 $-0.003[\text{rad}] \sim 0.003[\text{rad}]$ にした場合の、FF アルゴリズムによる位相収差の計算結果を載せる。なおこのとき非共通光路収差として与えた位相収差は図 4.13 のとおりである。

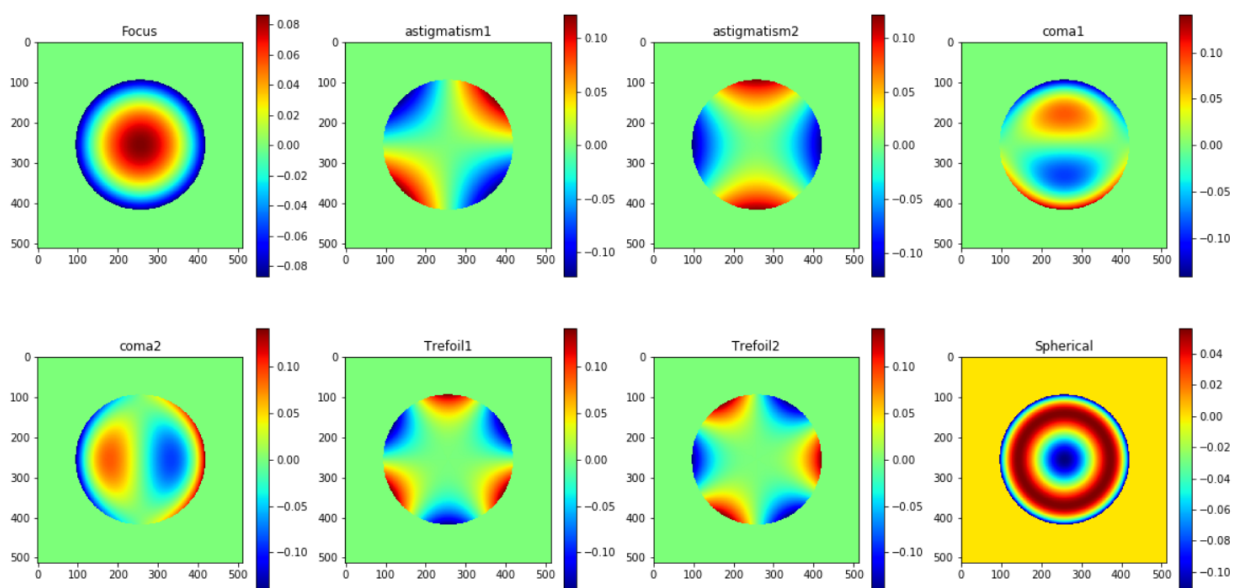


図 4.13 強度を $-0.2[\text{rad}] \sim 0.2[\text{rad}]$ にしたザイデル 5 収差

図 4.18 には、非共通光路収差として与えた位相が coma, trefoil のときの、FF アルゴリズムで回復した像を偶関数成分と奇関数成分にわけたものをそれぞれ示してある。

図 4.18 から、非共通光路収差として与えた位相が奇関数で表される (coma, trefoil) の場合、推定した位相には偶関数成分がのることが分かる。非共通光路収差として与えた位相と推定した位相の奇関数成分の形は一致し、差分の RMS の値は 5×10^{-6} 程度になった。

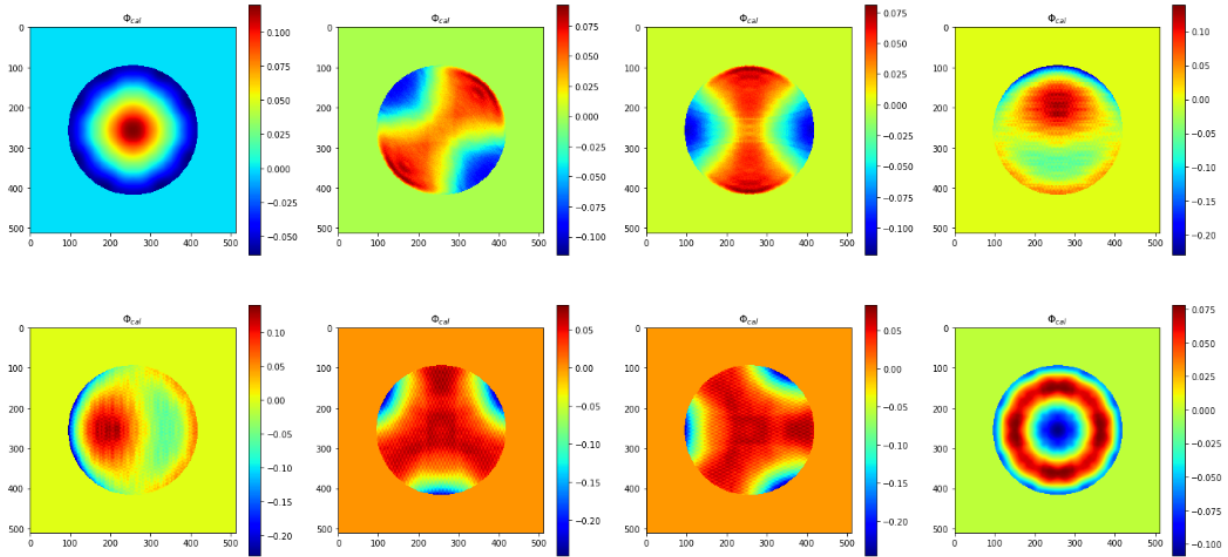


図 4.14 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、FF アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。このとき与えた位相収差の強度の範囲は $-0.2[\text{rad}] \sim 0.2[\text{rad}]$ である。

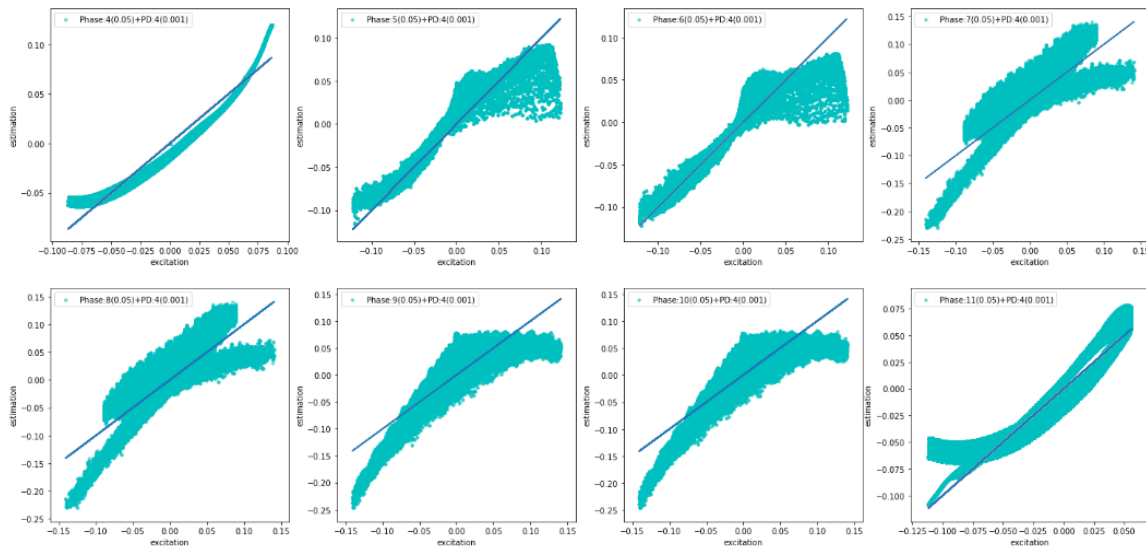


図 4.15 FF アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相 ($-0.2[\text{rad}] \sim 0.2[\text{rad}]$) と計算結果の位相の 0 からの変分の比較を示している。

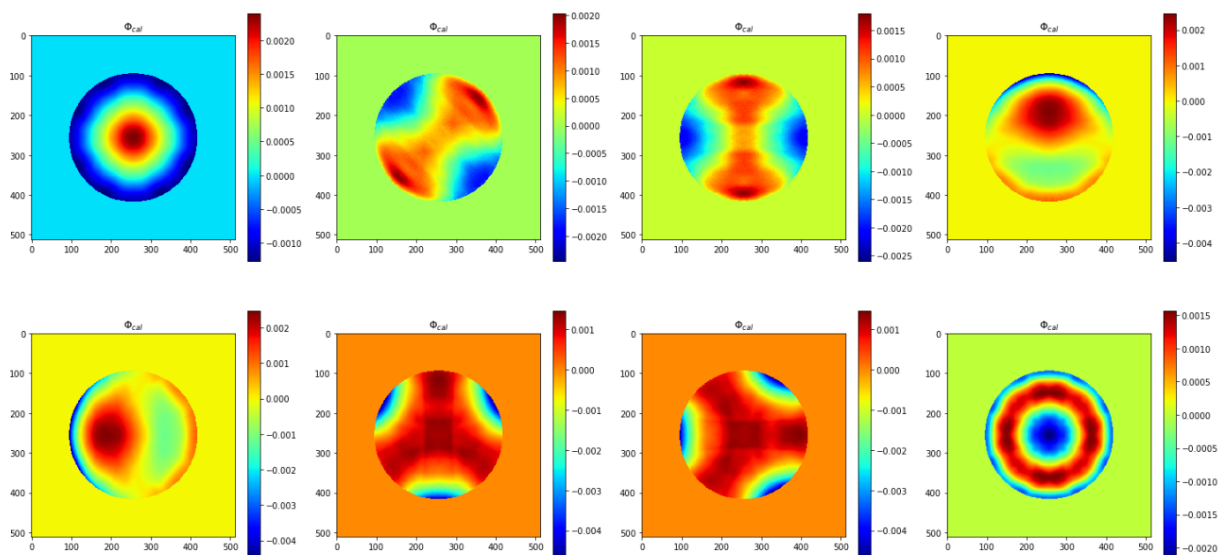


図 4.16 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、FF-GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。このとき与えた位相収差の強度の範囲は $-0.003[\text{rad}] \sim 0.003[\text{rad}]$ である。

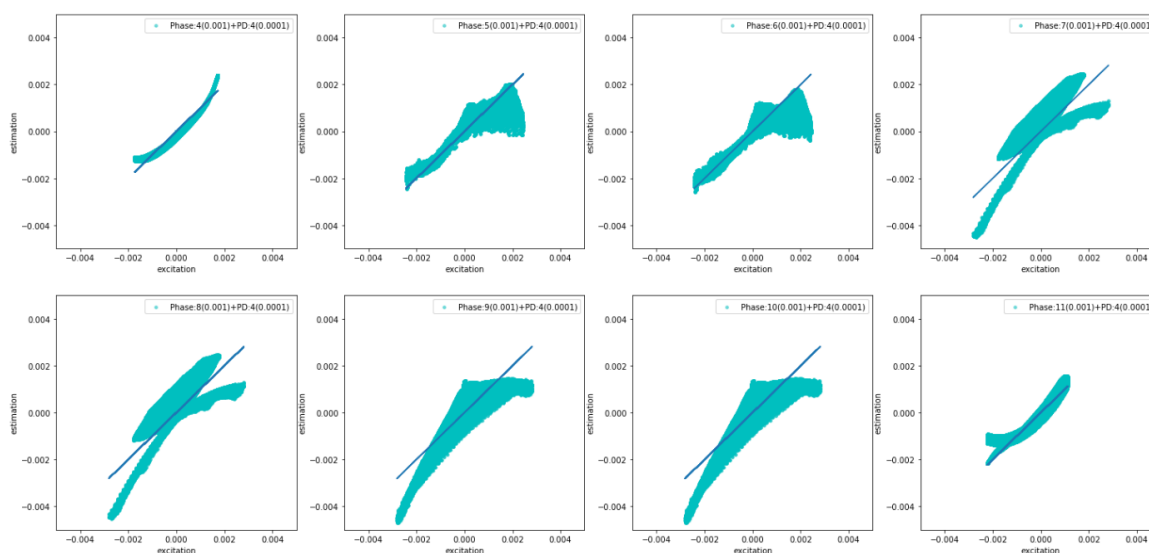


図 4.17 FF-GS アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相 ($-0.003[\text{rad}] \sim 0.003[\text{rad}]$) と計算結果の位相の 0 からの変分の比較を示している。

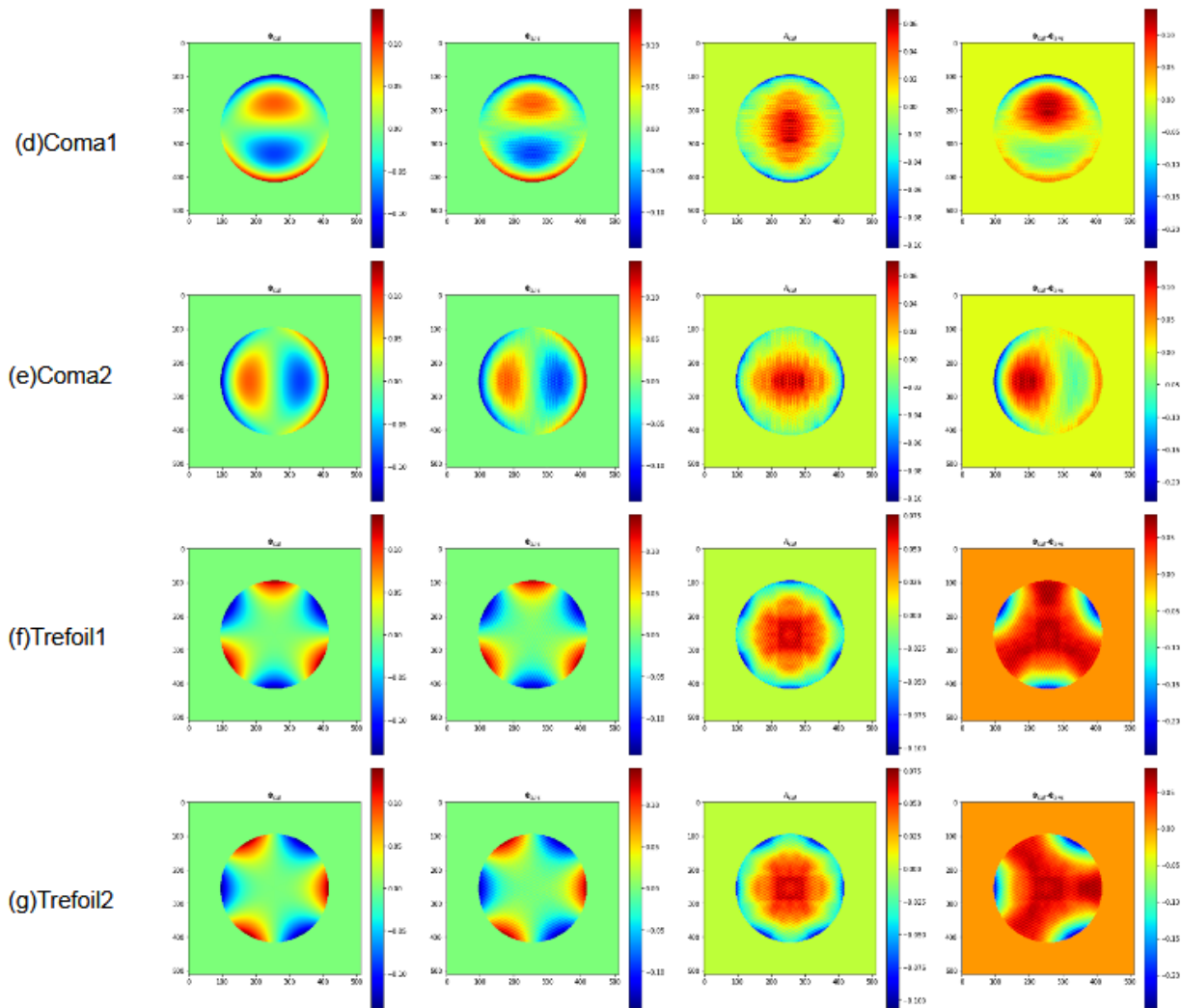


図 4.18 非共通光路収差として coma と trefoil を与えた時の、結果の偶関数成分と奇関数成分の位相マップ。一番左の列には与えた収差、右から二番目の列は計算結果の位相の偶関数成分、右から三番目の列は計算結果の位相の奇関数成分、一番左が計算結果の位相となっている。

FFGS アルゴリズム (円形開口、ノイズなしの場合)

FFGS アルゴリズムを用いて、図 4.1 の位相収差を計算した。図 4.19、図 4.20 にその結果を載せる。

図 4.19、図 4.20 から、非共通光路収差として与えた位相の形について再現できているのがわかる。このとき各位相と再現位相の差分の RMS は Focus : 0.21[rad]、Astigmatism1 : 0.17[rad]、Astigmatism : 0.16[rad]、Coma1 : 0.44[rad]、Coma2 : 0.17[rad]、Trefoil1 : 0.089[rad]、Trefoil2 : 0.087[rad]、Spherical : 0.34[rad] となった。また FF アルゴリズムと同じ理由から、図 4.21 に位相収差の強度を $-0.2[rad]$ ~

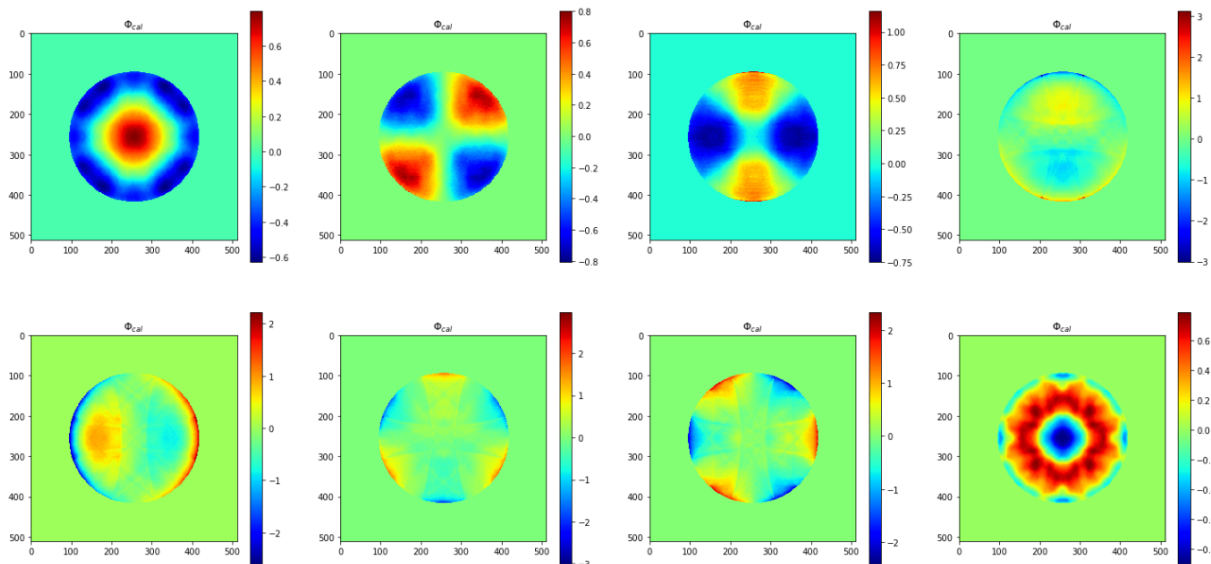


図 4.19 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、FF-GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。このとき与えた位相収差の強度の範囲は $-1[\text{rad}] \sim 1[\text{rad}]$ である。

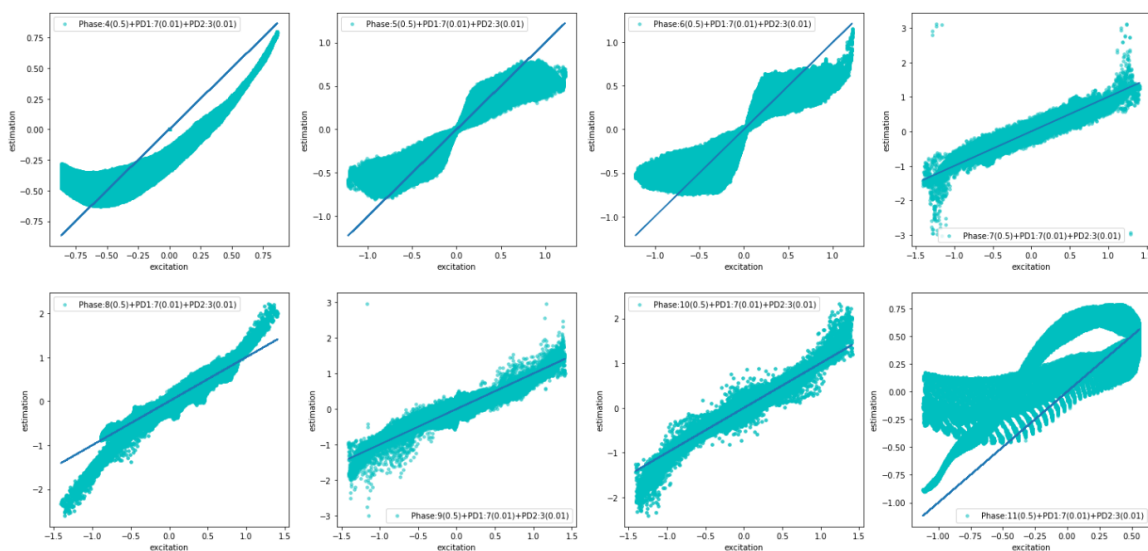


図 4.20 FF-GS アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相と計算結果の位相の変分の比較を示している。

0.2[rad]、 $-0.003[\text{rad}] \sim 0.003[\text{rad}]$ にした場合の、FFGS アルゴリズムによる位相収差の計算結果を載せる。

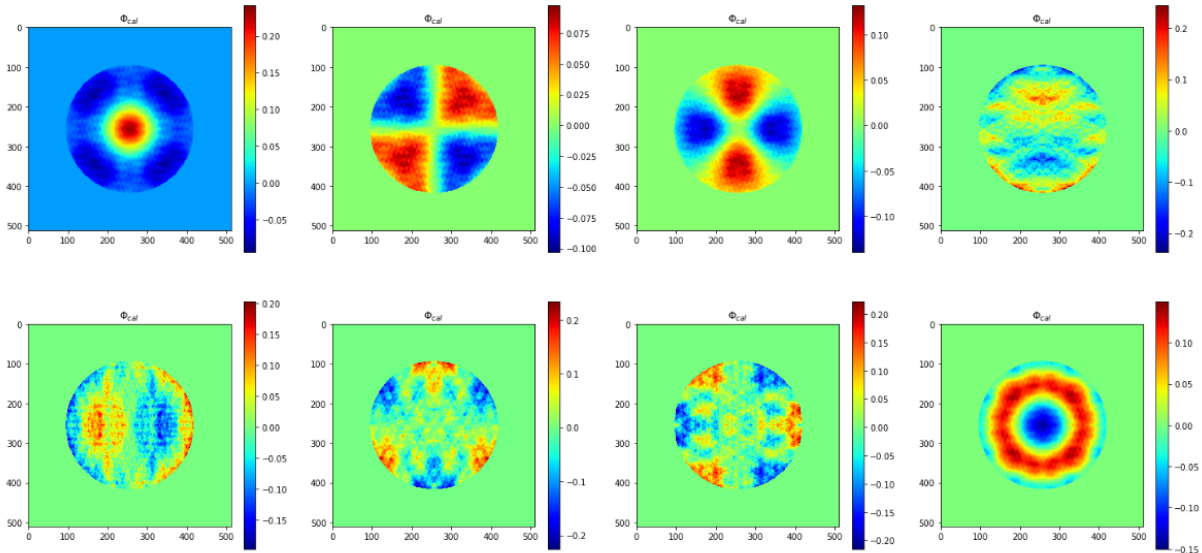


図 4.21 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、FF-GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。このとき与えた位相収差の強度の範囲は $-0.2[\text{rad}] \sim 0.2[\text{rad}]$ である。

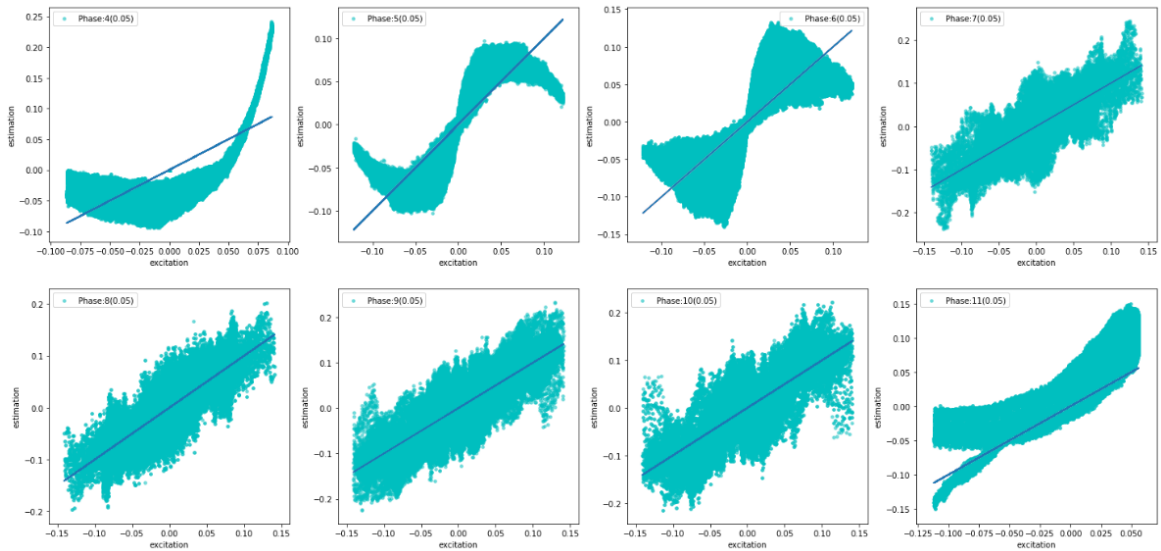


図 4.22 FFGS アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相と計算結果の位相の 0 からの変分の比較を示している。

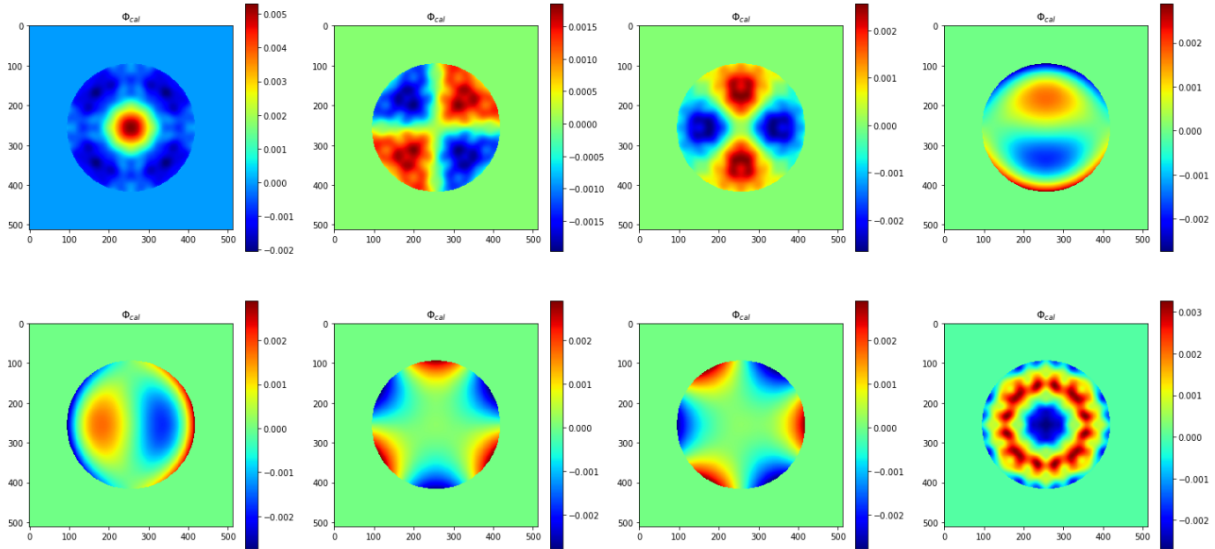


図 4.23 円形開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのらないとしたときに、FF-GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。このとき与えた位相収差の強度の範囲は $-0.003[\text{rad}] \sim 0.003[\text{rad}]$ である。

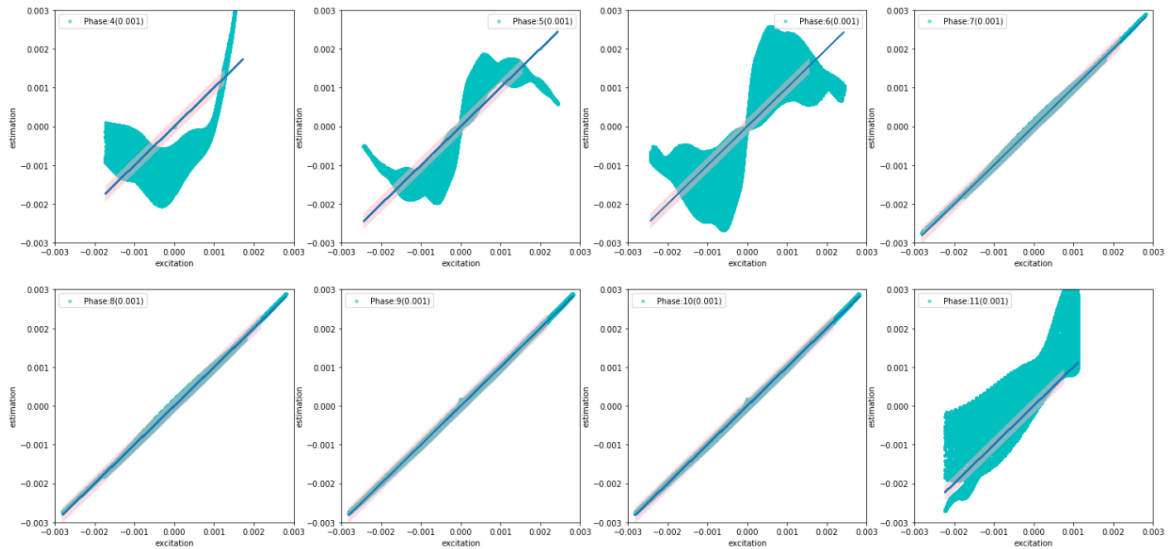


図 4.24 FF-GS アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相と計算結果の位相の 0 からの変分の比較を示している。

図 4.23、図 4.24 から、Coma と Trefoil を非共通光路収差として与えたとき、与えた収差を再現できていることが分かる。このとき各位相と再現位相の差分の RMS は Focus : $0.0011[\text{rad}]$ 、Astigmatism1 :

6.0×10^{-4} [rad]、Astigmatism2 : 9.0×10^{-4} [rad]、Coma1 : 5.2×10^{-5} [rad]、Coma2 : 5.2×10^{-5} [rad]、Trefoil1 : 5.2×10^{-5} [rad]、Trefoil2 : 5.2×10^{-5} [rad]、Spherical : 9.6×10^{-4} [rad] となった。以上の結果より、非共通光路収差としてザイデル5収差を与えた場合に、強度に依存せず安定して位相推定を行うことができるのはGSアルゴリズムとPD-GSアルゴリズムである。光学系での収差を修正する場合には、推定できる位相強度の範囲に縛りが無いほうが好ましいので、以下のより現実的なシミュレーションにおいてはGSアルゴリズムとPD-GSアルゴリズムを用いて位相の推定を行う。

4.3 各アルゴリズムを使用した位相収差の再現

GS アルゴリズム、PDGS アルゴリズムを使用して、シミュレーションで仮定した非共通光路による位相収差の再現を行う。再現した位相収差について、シミュレーションで与えた非共通光路による位相収差との RMS から、再現精度の評価を行う。非共通光路による収差として想定したザイデル 5 収差を以下の図 4.1 にのせる。

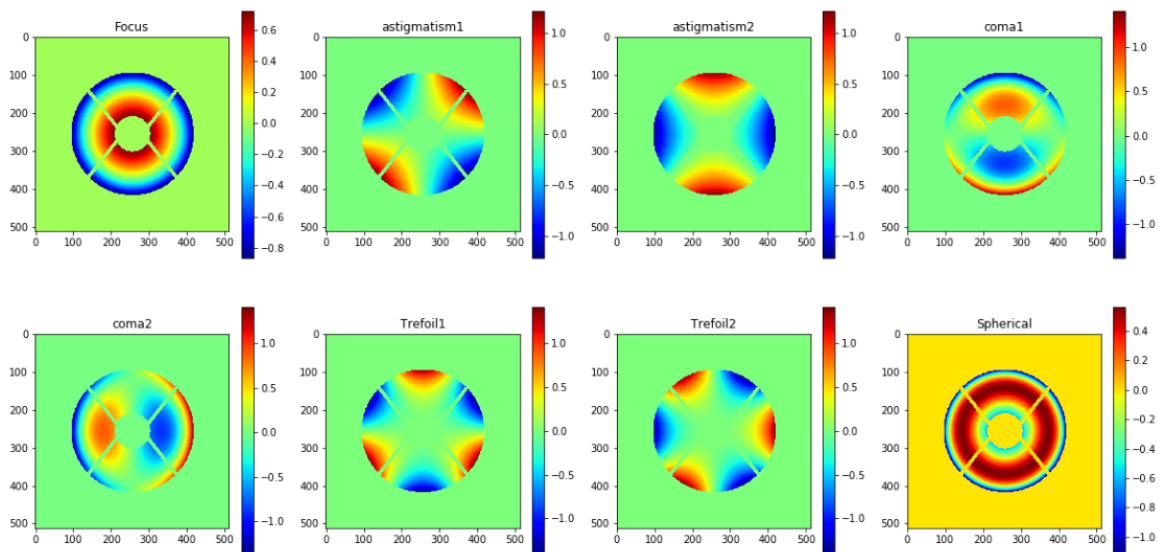


図 4.25 ザイデル 5 収差に SCExAO での開口関数をかけたもの。

GS アルゴリズムでの位相収差の回復 (SCExAO 開口、ノイズありの場合)

GS アルゴリズムを用いて、図 4.25 の位相収差を計算した。図 4.26、図 4.27 にその結果を載せる。図 4.27 は非共通光路による位相収差マップと、再現した位相収差マップの対応するピクセル上での位相強度の 0 からの変分を、横軸を非共通光路による位相収差マップの強度、縦軸を再現した位相収差マップとしてプロットしたものである。位相収差の差分が元の値と推定値で $1/10$ 波長 ($0.3[\text{rad}]$) に収まるような範囲がピンクで示されている。

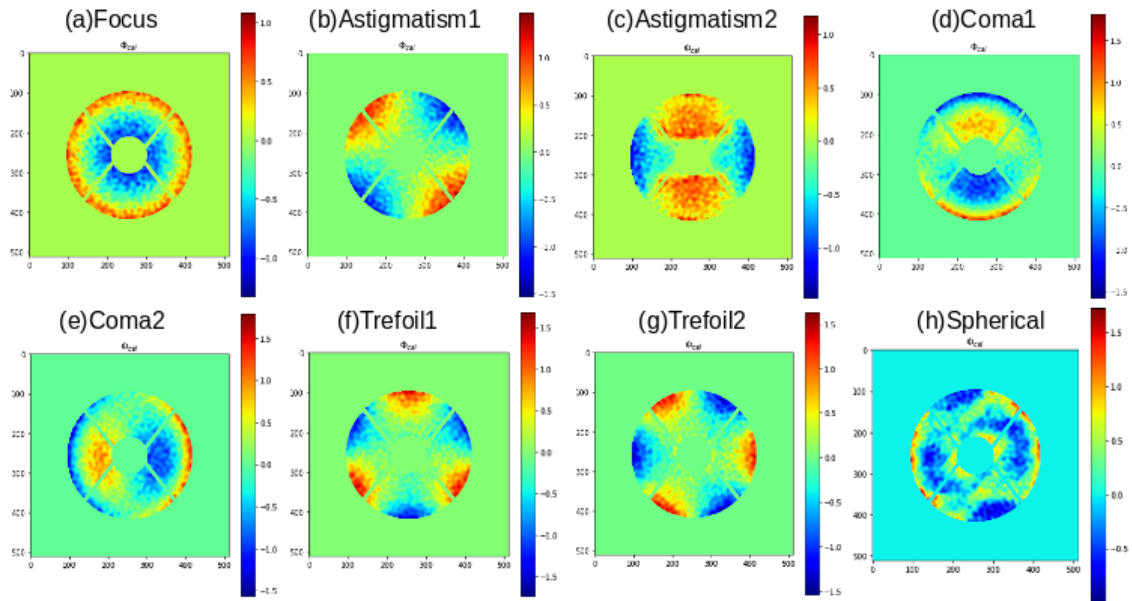


図 4.26 SCExAO の開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのるとしたときに、GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。再現する位相によってはピストン成分がのっている。

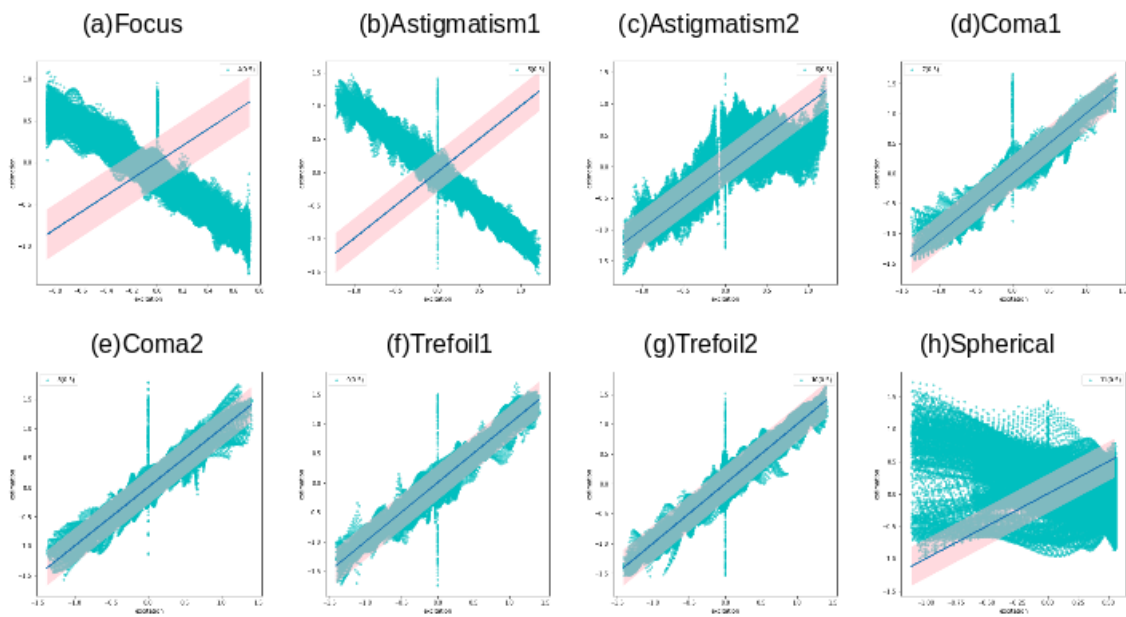


図 4.27 GS アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相と計算結果の位相の 0 からの変分の比較を示している。

図 4.29 と図 4.27 より、非共通光路収差として Coma、Trefoil を与えた時に、位相はほぼ $1/10$ 波長の範囲で再現された。一方、Focus、Astigmatism、Spherical を与えた場合、位相は再現されなかった。Focus、Astigmatism1 を非共通光路収差として与えたとき、再現された位相の符号は反転した。このとき非共通光路収差として与えた位相収差と推定した位相収差の差分の RMS 値を、それぞれの位相収差ごとにイテレーション回数による変化として示したものが図 4.28 である。

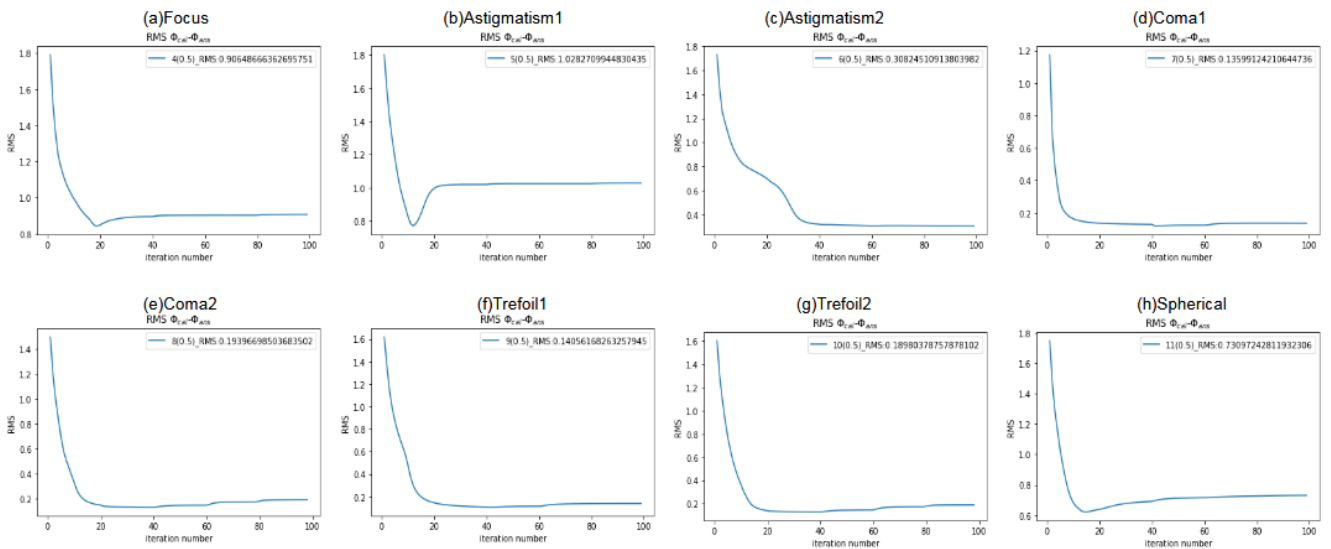


図 4.28 GS アルゴリズムによるイテレーション回数での RMS 値の変化

焦点面での PSF のノイズを考慮して、推定に使用する PSF の範囲を徐々に広げるフィルターをかけ、各範囲で RMS の値が収束するまでイテレーションを繰り返した。図 4.28 から、各位相収差を与えた時に、RMS の値が収束しているため、推定した位相収差が収束していることがわかる。したがって非共通光路収差として Focus、Astigmatism1 を与えた時に、収束した位相収差の符号が反転しているのは、焦点面での PSF の形が同じことによるものである。図 4.29 に SCEXAO を想定した開口関数、ノイズを考えた場合の GS アルゴリズムによる位相収差の推定結果の一覧を示す。

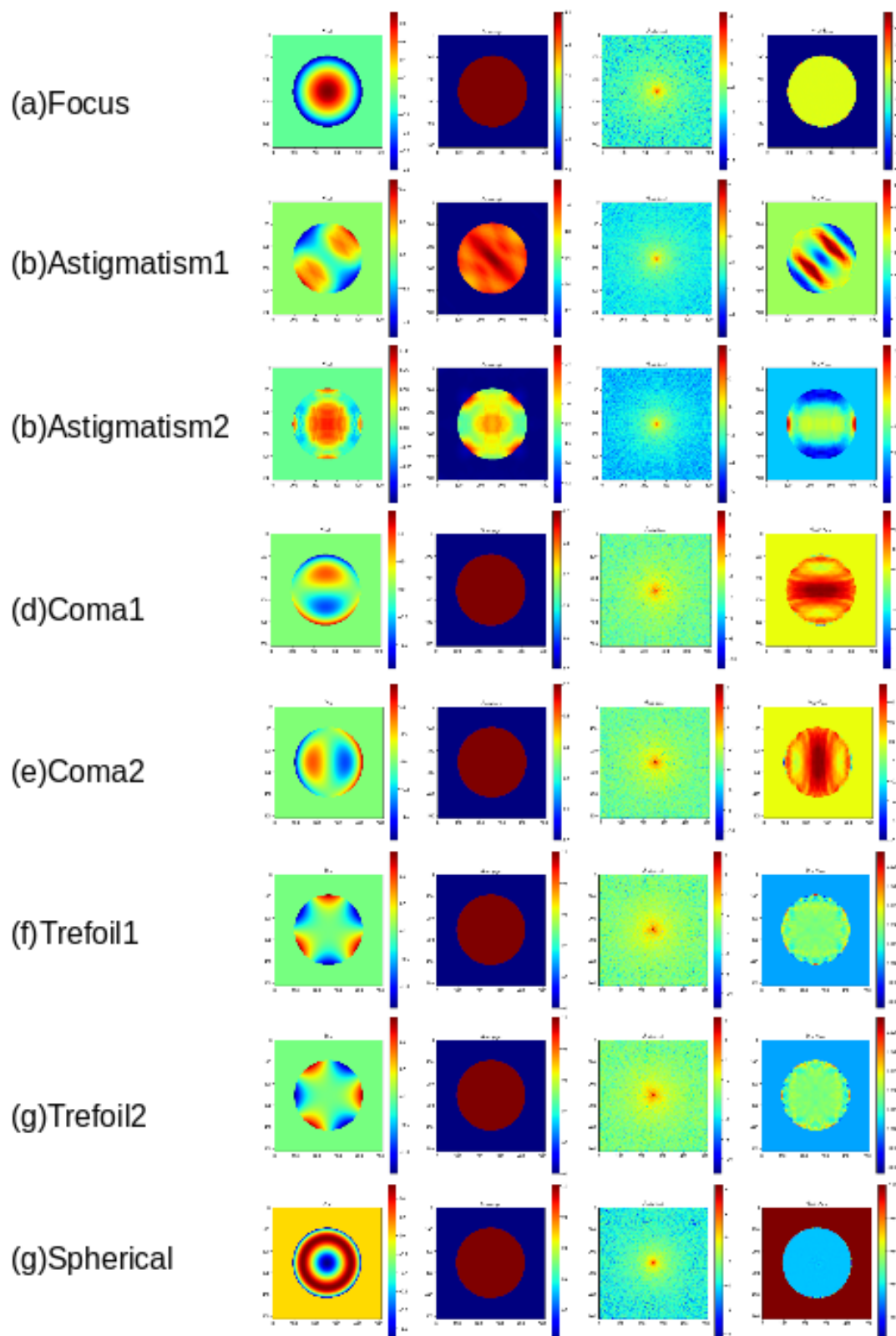


図 4.29 SCExAO の開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのりとしたときに、GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。左から、推定した位相、収束したときの開口面での振幅強度、収束したときの焦点面での振幅強度、与えた位相と推定した位相の差分を示している。

PDGS アルゴリズムでの位相収差の回復 (SCExAO 開口、ノイズありの場合)

PDGS アルゴリズムを用いて、図 4.25 の位相収差を計算した。図 4.30、図 4.31 にその結果を載せる。

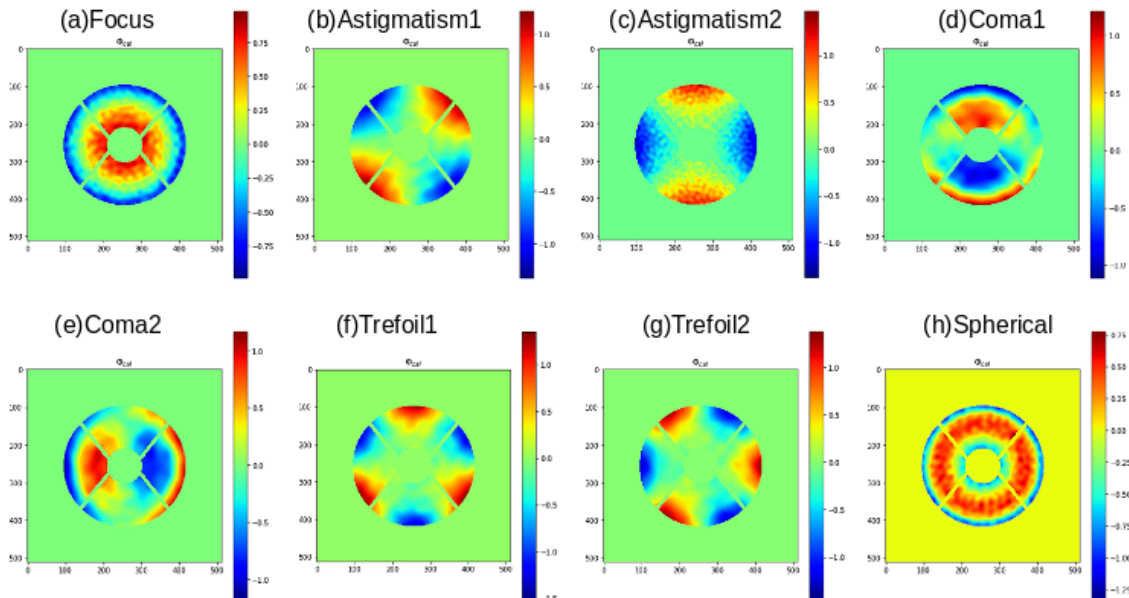


図 4.30 SCExAO の開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのりとしたときに、PD-GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。

図 4.33 と図 4.31 より、位相は $1/10$ 波長の範囲で再現されている。この時の各位相収差の RMS のイテレーション回数による収束の様子は以下の様になる。なおイテレーションごとの RMS の値が不連続になっている点でフィルターの範囲が変化している。

図 4.32 から、Focus、Astigmatism、Spherical を与えた時に、推定した位相収差が与えた位相収差に収束していくことがわかる。なお非共通光路収差として Coma と Trefoil を与えた場合には、使用する PSF の範囲を広げても RMS の値は改善しなかった。以下の図 4.27 に SCExAO を想定した開口関数、ノイズを考えた場合の GS アルゴリズムによる位相収差の推定結果の一覧を示す。

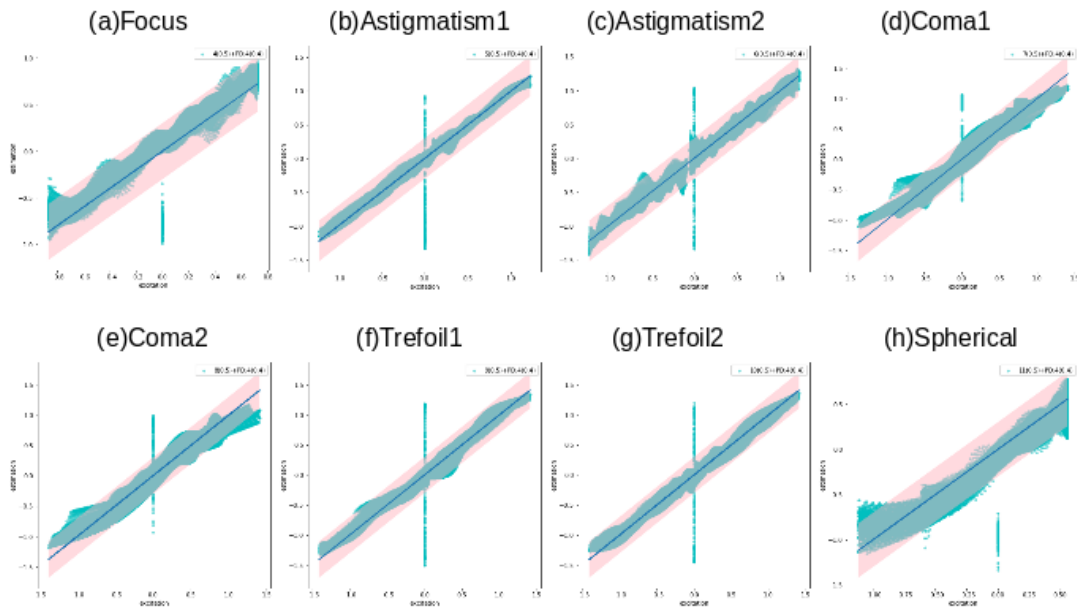


図 4.31 PDGS アルゴリズム変分の比較

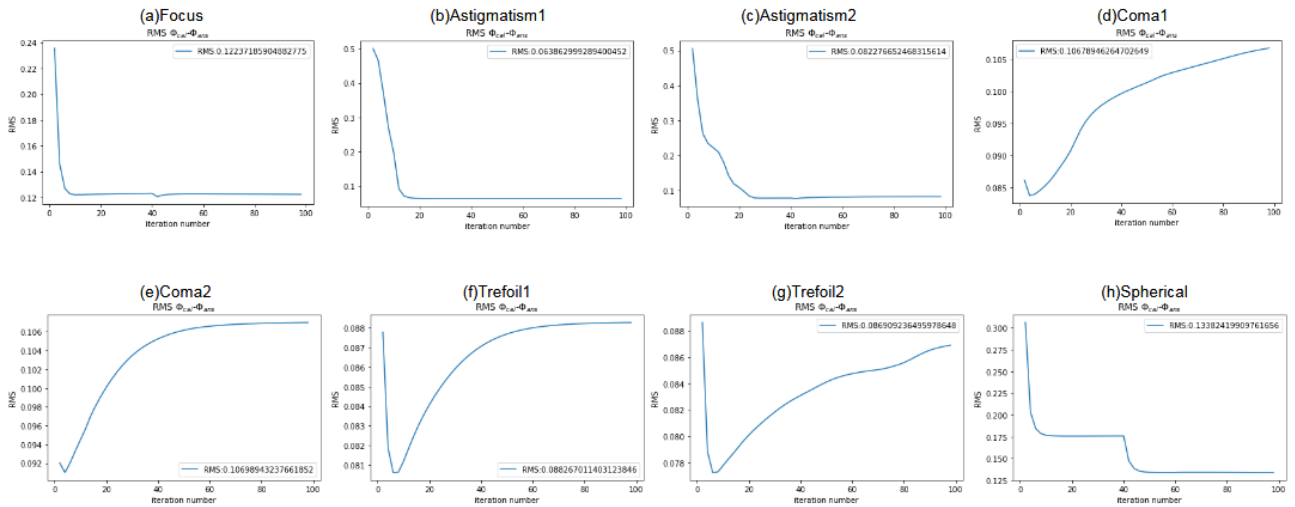


図 4.32 PDGS アルゴリズムによるイテレーション回数での RMS 値の変化

4.4 任意の非共通光路収差を再現する

ゼルニケの項を足し合わせて作った任意の位相を非共通光路収差として与えて計算した PSF から、GS アルゴリズムと PDGS アルゴリズムを用いて位相収差を計算する。図 4.34 は与える非共通光路による収差である。

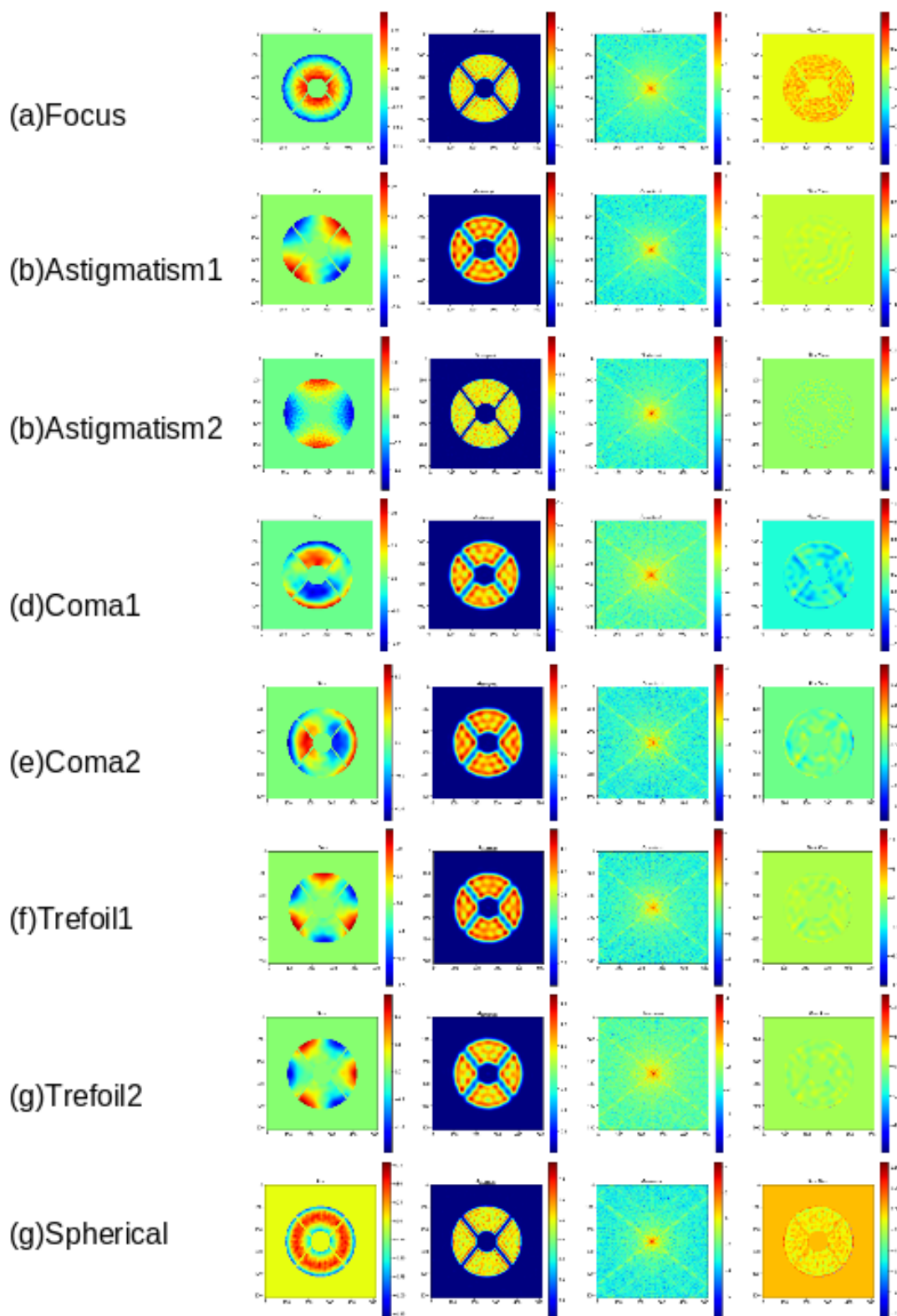


図 4.33 SCExAO の開口を仮定し、かつノイズが焦点面での PSF にのりとしたときに、PD-GS アルゴリズムで各非共通光路収差として与えた位相を推定した結果が示してある。左から、推定した位相、収束したときの開口面での振幅強度、収束したときの焦点面での振幅強度、与えた位相と推定した位相の差分を示している。

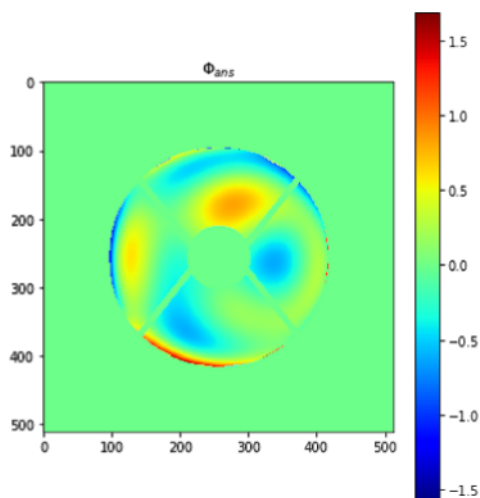


図 4.34 非共通光路収差として与えた任意の位相収差の強度マップ。

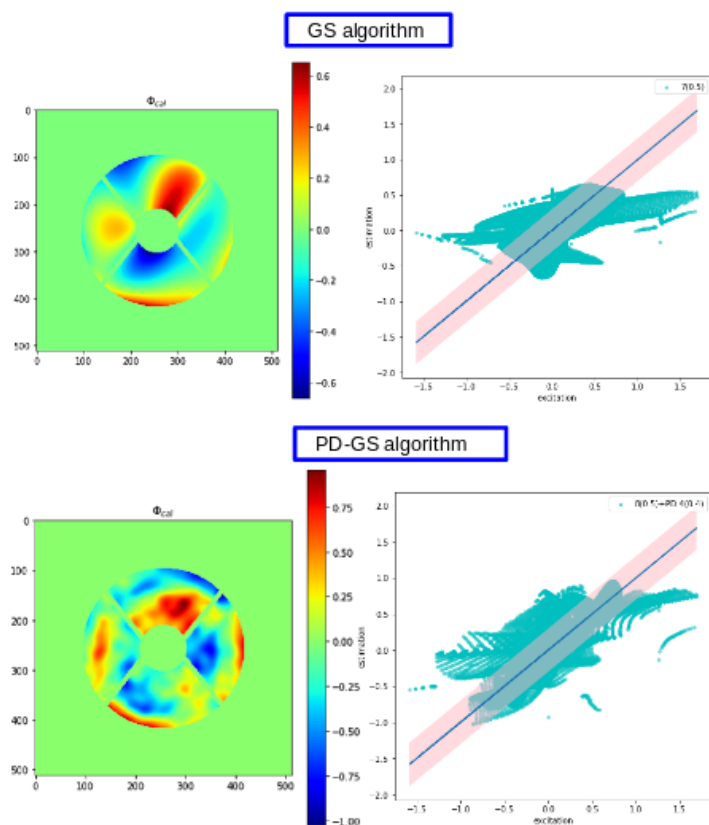


図 4.35 図 4.34 の位相を GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズムを用いて推定した結果を示す。上段が GS アルゴリズムによる位相の推定結果、下段が PD-GS アルゴリズムによる位相の推定結果である。

図 4.35 から、GS アルゴリズムでの位相の推定結果は与えた位相の形と異なっている。一方で、PD-GS アルゴリズムでの位相の推定結果は与えた位相の形を再現している。以下にそれぞれのアルゴリズムでのイテレーション回数による非共通光路収差として与えた位相と推定した位相の差分の RMS 値の変化をのせる。

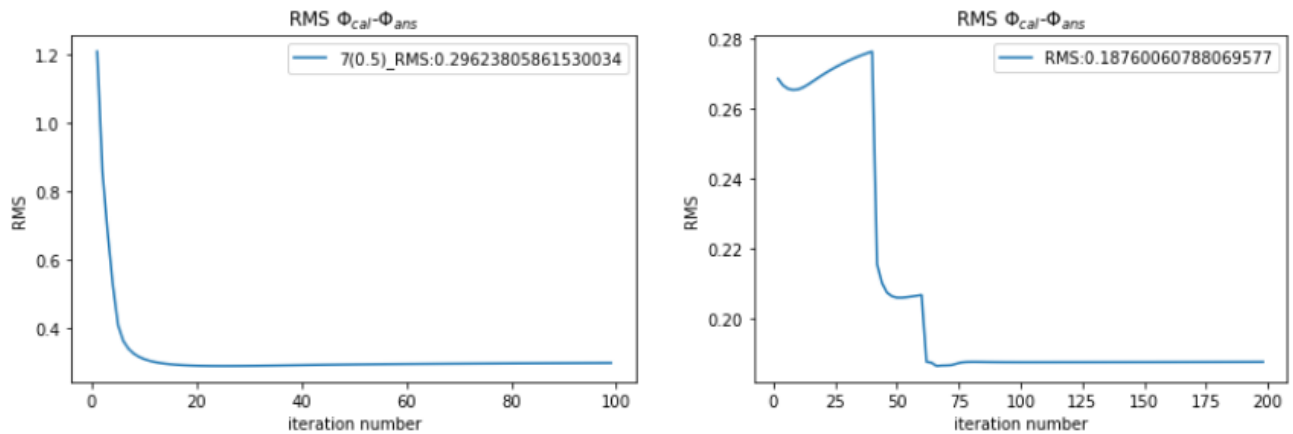


図 4.36 GS,PDGS アルゴリズムによるイテレーション回数での非共通光路収差として与えた位相と推定した位相の差分の RMS 値の変化を示す。左が GS アルゴリズムを使ったときの収束の様子、右が PDGS アルゴリズムを使ったときの収束の様子である。最終的な RMS の値は、GS アルゴリズムでは $RMS = 0.30[\text{rad}]$ 、PD-GS アルゴリズムでは $RMS = 0.19[\text{rad}]$ となっている。

図 4.36 よりどちらのアルゴリズムでも RMS の値は減少しているので、位相の推定値は各アルゴリズムで与えた位相収差へと収束していくことがわかる。

第 5 章

議論

4 章での各アルゴリズムの位相の推定結果についてまとめ、非共通光路収差として与える位相強度による各アルゴリズムの再現精度を比較する。このとき FF-GS アルゴリズムで、位相を解析的に解くために使用した近似式が結果に影響することを 5.2 に記す。また FF アルゴリズムで偶関数で表現できる位相が再現できない理由を式から導く。

5.1 各アルゴリズムでの位相の再現結果のまとめ

位相収差の回復 (円形開口、ノイズなしの場合)

表 5.1、5.2、5.3 に、円形開口かつ焦点面での PSF にノイズがのらない場合を想定した時の、各アルゴリズムでの推定位相と非共通光路収差として与えた位相収差の差分の RMS をまとめた。表 5.1 は与えた位相収差の大きさが $-1.0 \sim 1.0$ [rad] のときに、GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズム、FF アルゴリズム、FF-GS アルゴリズムで推定した位相と与えた位相の差分の RMS の値を示してある。このとき与えた位相収差の RMS はそれぞれ 0.50 [rad] となっている。

表 5.1 円形開口でかつ焦点面での PSF にノイズがのらない場合を考えたときの、各アルゴリズムでの推定位相と非共通光路収差として与えた位相収差 (振幅強度の範囲 $-1.0 \sim 1.0$ [rad]) の差分の RMS 値 (単位は rad)。

Algorithm	Focus	Astigmatism1	Astigmatism2	Coma1	Coma2	Trefoil1	Trefoil2	Spherical
RMS[rad]	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
GS	0.97	0.60	0.0032	7.9e-9	7.7e-9	1.6e-10	2.2e-10	0.83
PD-GS	0.055	0.16	0.60	0.016	0.016	0.0092	0.0092	0.016
FF	0.12	0.18	0.19	4.8	4.8	3.4	3.4	0.21
FF-GS	0.23	0.18	0.23	0.17	0.18	0.17	0.14	0.16

表 5.1 から、推定した位相の形状が与えた位相の形と異なる (GS アルゴリズムでの Astigmatism1 の結果と PD-GS アルゴリズムの Astigmatism2 の) 場合は、差分の RMS の値は与えた位相収差の持つ RMS の値より大きくなっている。Coma、Trefoil(奇関数) を 4 つのアルゴリズムの中で一番精度よく再現できるのは GS アルゴリズムであり、Astigmatism は GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズムのどちらも

与えた位相収差とは異なる位相の形状に収束した。FF アルゴリズム、FF-GS アルゴリズムは、Coma、Trefoil に関して近似の精度が悪いため GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズムと比較すると再現精度が悪くなった。表 5.2 は与えた位相収差の大きさが $-0.2 \sim 0.2$ [rad] のときに、FF アルゴリズム、FF-GS アルゴリズムで推定した位相と与えた位相の差分の RMS の値を示してある。このとき与えた位相収差の RMS はそれぞれ 0.050 [rad] となっている。

表 5.2 円形開口でかつ焦点面での PSF にノイズがのらない場合を考えたときの、FF アルゴリズム、FF-GS アルゴリズムでの推定位相と非共通光路収差として与えた位相収差 ($-0.2 \sim 0.2$ [rad]) の差分の RMS 値 (単位は rad)。

Algorithm	Focus	Astigmatism1	Astigmatism2	Coma1	Coma2	Trefoil1	Trefoil2	Spherical
RMS[rad]	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050
GS	0.0084	0.010	0.0032	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.010
PD-GS	0.010	0.010	0.010	1.3e-07	1.3e-07	1.4e-07	1.4e-07	0.0093
FF	0.012	0.022	0.022	0.029	0.029	0.037	0.037	0.014
FF-GS	0.046	0.028	0.042	0.036	0.031	0.037	0.042	0.045

表 5.3 は与えた位相収差の大きさが $-0.003 \sim 0.003$ [rad] のときに、FF アルゴリズム、FF-GS アルゴリズムで推定した位相と与えた位相の差分の RMS の値を示してある。このとき与えた位相収差の RMS はそれぞれ 0.0010 [rad] となっている。

表 5.3 円形開口でかつ焦点面での PSF にノイズがのらない場合を考えたときの、各アルゴリズムでの推定位相と非共通光路収差として与えた位相収差 ($-0.003 \sim 0.003$ [rad]) の差分の RMS 値 (単位は rad)。

Algorithm	Focus	Astigmatism1	Astigmatism2	Coma1	Coma2	Trefoil1	Trefoil2	Spherical
RMS[rad]	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
GS	4.0e-14	0.0014	0.0014	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0014
PD-GS	0.0010	0.0010	0.0010	6.2e-09	6.2e-09	6.5e-09	6.5e-09	0.0010
FF	2.5e-4	4.4e-4	4.3e-4	5.7e-4	5.7e-4	7.5e-4	7.5e-4	2.9e-4
FF-GS	1.0e-3	6.0e-4	9.0e-4	5.2e-5	5.2e-5	5.2e-5	5.2e-5	9.6e-4

非共通光路収差として与えた位相収差の強度が $-0.003 \sim 0.003$ [rad] の場合に、アルゴリズムで推定した位相の各 pixel での強度が、与えた位相収差の各 pixel での強度の値の $\pm 10\%$ に入る様な pixel の個数の割合は、FF アルゴリズムで Focus:9.5%、Astigmatism1:8.7%、Astigmatism2:8.4%、Coma1:3.0%、Coma2:3.0%、Trefoil1:3.0%、Trefoil:3.0%、Spherical:3.4% であり、FF-GS アルゴリズムでは Focus:1.6%、Astigmatism1:3.5%、Astigmatism2:3.0%、Coma1:33%、Coma2:33%、Trefoil1:27%、Trefoil:27%、Spherical:10% となった。FF アルゴリズムと FF-GS アルゴリズムの再現精度は Coma、Trefoil を非共通光路収差として与えたときに大きく差が出た。これらの結果から、与えた位相収差が十分に小さく、奇関数の場合に置いては FF アルゴリズムより FF-GS アルゴリズムを用いたほうが位相推

定の精度は良いが、与えた位相収差が 1/10 波長程度の大きさであれば FF アルゴリズムと FF-GS アルゴリズムでは位相推定の精度に大きな違いは見られなかった。

位相収差の回復 (SCExAO 開口、ノイズありの場合)

図 5.4 に SCExAO 開口かつ焦点面での PSF にノイズがのる場合の、各アルゴリズムでのイテレーション 100 回後の推定位相と非共通光路収差として与えた位相収差の差分の RMS をまとめた。

表 5.4 SCExAO 開口でかつ焦点面での PSF にノイズがのる場合を考えたときの、GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズムでの推定位相と非共通光路収差として与えた位相収差 ($-1.0 \sim 1.0$ [rad]) の差分の RMS 値 (単位は rad)。

Algorithm	Focus	Astigmatism1	Astigmatism2	Coma1	Coma2	Trefoil1	Trefoil2	Spherical
RMS[rad]	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
GS	0.91	1.0	0.31	0.14	0.19	0.14	0.19	0.73
PD-GS	0.12	0.064	0.082	0.11	0.11	0.088	0.087	0.13

GS アルゴリズムと比較して、PD-GS アルゴリズムを用いた場合のザイデル 5 収差全ての RMS 値は小さく、位相の推定精度は高くなった。とくに Focus、Astigmatism1 を非共通光路収差として与えたときにその差は大きく、これは GS アルゴリズムでは位相の符号の情報が取得できない事によるものである。したがって、SCExAO での非共通光路収差の推定を考える場合には、GS アルゴリズムより PD-GS アルゴリズムが適している。

5.2 FF-GS アルゴリズムの近似による影響

FF-GS アルゴリズムでは、焦点面での PSF は電場の式の位相の二次の項までで近似できるとして、解析的に位相を求めている。したがって、アルゴリズムで使用する焦点面での PSF を以下の式を使って作成した時に位相が復元できるのかを確認し、ここから近似による影響を調べる。

$$p_1 = |F\{A + iA\phi\}| \tag{5.1}$$

$$p_2 = |F\{A + iA(\phi + \phi_1)\}| \tag{5.2}$$

$$p_3 = |F\{A + iA(\phi + \phi_2)\}| \tag{5.3}$$

図 5.1 に計算結果をのせる。図 5.1 と図 5.2 から、また非共通光路収差として与えた収差と計算した収差の差分の RMS の値は、0.030rad~ 0.045rad の間であり、図 4.19 で得られた結果と比較すると、0.07 倍~ 0.5 倍ほどの値になっている。RMS の値に大きく影響が出たのは、非共通光路収差として coma1 を与えたときであり、最も影響が小さかったのは Trefoil1 を与えたときである。このことから、FF-GS アルゴリズムで位相が回復できない理由として、FF-GS アルゴリズムで推定される位相収差は $e^{i\phi} = 1 + i\phi - \frac{1}{2}\phi^2$ の近似の影響を大きく受けることが挙げられる。

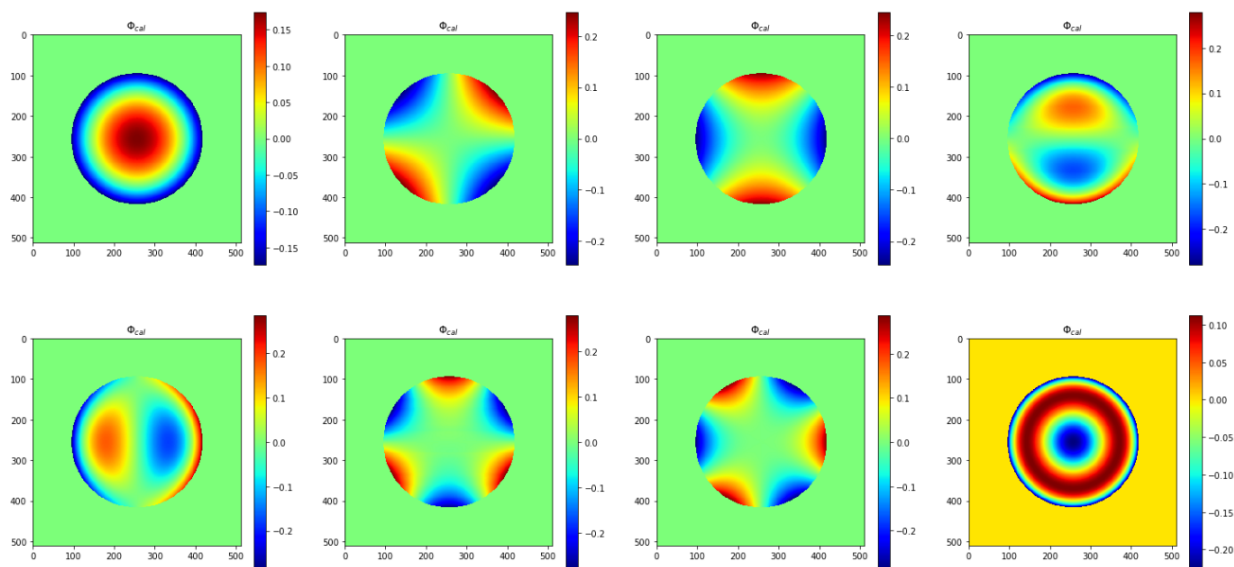


図 5.1 二次近似で導出した焦点面での PSF から FF-GS アルゴリズムを用いて求めた位相の計算結果を示す。

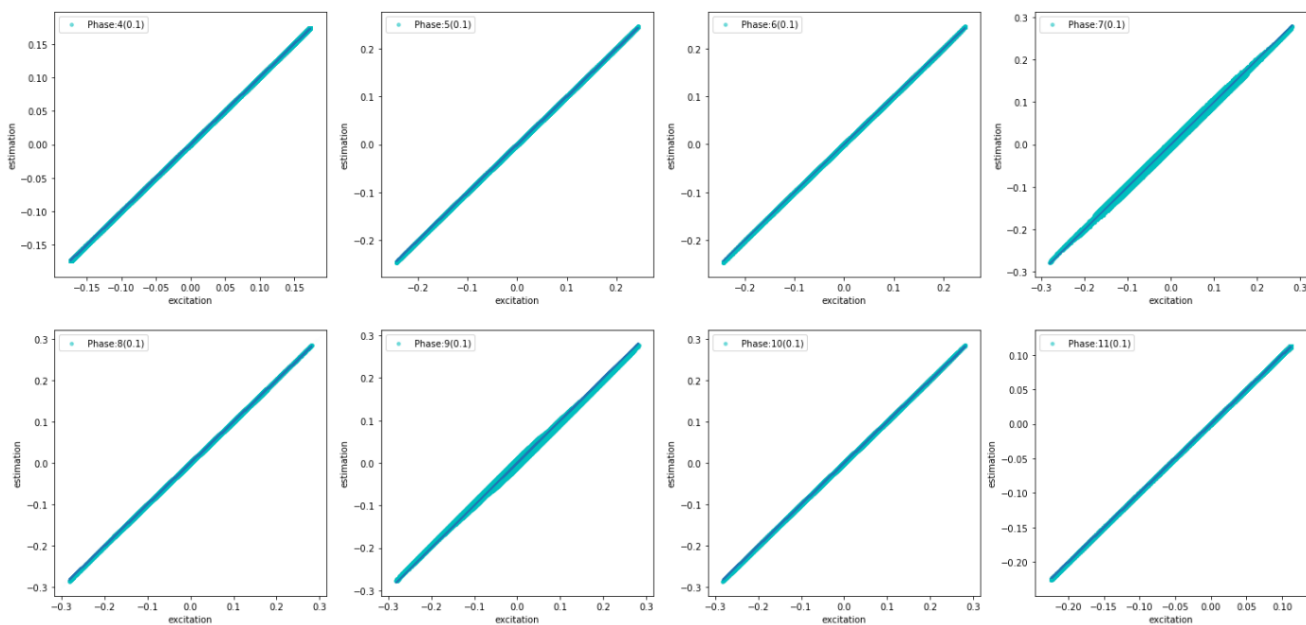


図 5.2 FF-GS アルゴリズムを使用した時の、各ピクセルにおける非共通光路収差として与えた位相と計算結果の位相の変分の比較を示している。

5.3 PD-GS アルゴリズムでの回復できる位相収差の大きさと PD の大ききの範囲

PD-GS アルゴリズムで使用した PD の大ききと与えた位相収差の大ききによる位相の推定精度を調べる。図 5.3 の一つのグラフは、与えた位相収差の RMS を一定とし、PD の大ききを変化させた時の各位相収差の推定精度がプロットしてある。図 5.3 から、与えた位相収差の RMS が 0.8[rad] 程度までは

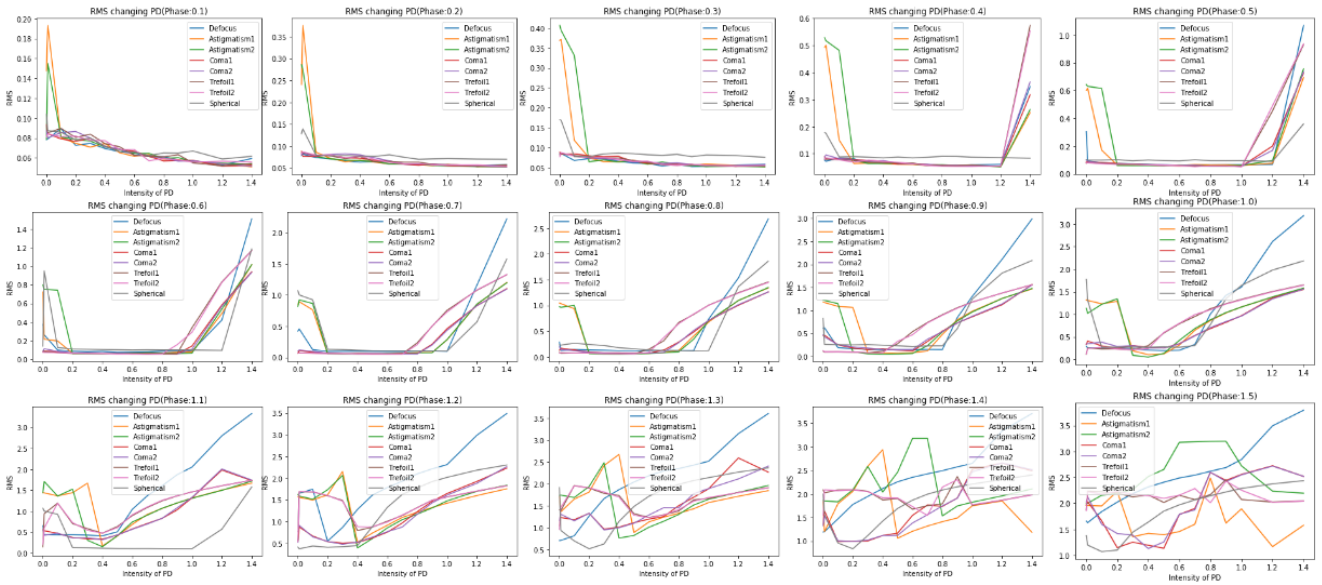


図 5.3 与えた位相収差の大きき (RMS) ごとに、横軸を PD に使用した位相収差の大きき、縦軸を与えた位相収差 (ザイデル 5 収差) と推定した位相収差の差分の RMS としてプロットしてある。与えた位相収差の RMS が 0.8[rad] 程度までは PD-GS アルゴリズムで位相を回復できている。与える PD の大きき (RMS) が 0.2~0.4[rad] で与えた位相をよく再現する。

PD-GS アルゴリズムで位相を回復でき、与える PD の大きき (RMS) が 0.2~0.4[rad] で与えた位相をよく再現していることが分かる。

5.4 FF アルゴリズムの奇関数成分に対するふるまい

FF アルゴリズムで位相収差が再現できない理由について説明する。第二章での FF アルゴリズムの概要より、 a 、 v 、 y は以下のようにかける。

$$a = F(A) \tag{5.4}$$

$$v = F(A\Phi_e) \tag{5.5}$$

$$y = Im\{F(A\Phi_o)\} \tag{5.6}$$

ここで、今非共通光路収差を奇関数と仮定すると、 $v = 0$ となる。従って焦点面での PSF の偶関数成分と奇関数成分は、

$$p'_e = a^2 + v^2 + y^2 = a^2 + y^2 \tag{5.7}$$

$$p'_o = 2ay \tag{5.8}$$

よって焦点面での PSF は

$$p' = p_e + p_o = a^2 + y^2 + 2ay \tag{5.9}$$

これはフーリエ変換の式に直すと、

$$p' = |F[|f(x)| + i|f(x)|\phi(x)]|^2 \tag{5.10}$$

となり、これはもとの焦点面での PSF の、位相 ϕ の一次の項までの近似の式となる。元の PSF の式との差分 ($p - p'$) が偶関数となることから、これが位相収差の偶関数成分 v として出てくるため、非共通光路収差として与えた位相収差に偶関数の形の位相収差がたされたものが位相の推定結果として得られる。非共通光路収差としてコマ収差を与えた時の元の PSF の式との差分 ($p - p'$) と v^2 のマップを図 5.4 にのせる。図 5.4 の一番左が元の PSF の式との差分 ($p - p'$)、真ん中が v^2 、右の図が $p - p'$ と v^2 の差分を

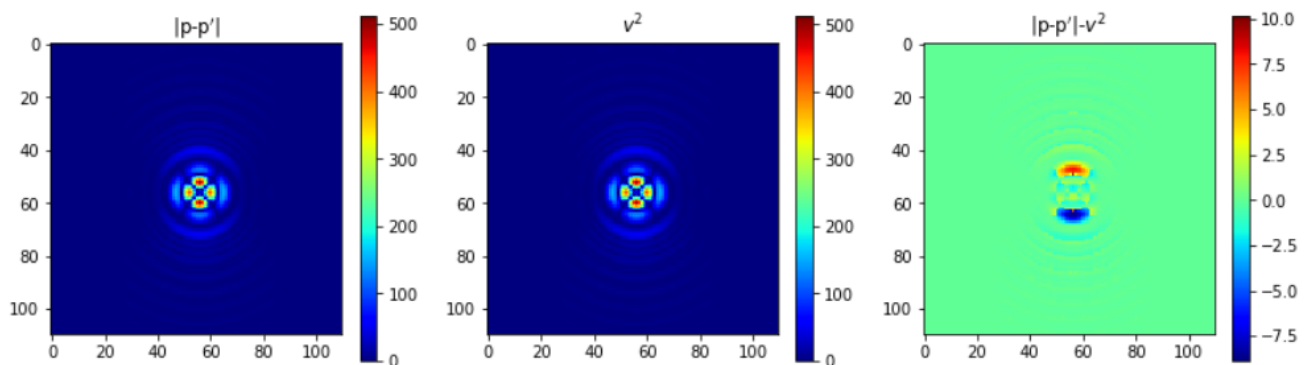


図 5.4 PSF と二次近似の差分と v^2 のイメージ

計算したものである。ここから PSF の近似の結果として出来た元の PSF との差分が偶関数成分に押し付けられていることが分かる。この偶関数成分が常に近似の差分として残るために、FF アルゴリズムで奇関数で表現される位相を回復しようとした場合には、常に任意の偶関数の形の位相収差が足された位相収差が得られる。このため実際に FF アルゴリズムで位相収差を計算し補償する場合は、最初のステップで位相の奇関数成分を計算し、その後で偶関数成分を計算するとよい。

第6章

まとめ

LTAO など高分解能での観測を考えた場合に、ビームスプリッター以降のカメラまでと波面センサーまでの光学系が異なる事に起因する非共通光路収差を補償する必要がある。本研究ではこの非共通光路収差を推定するために、GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズム、FF アルゴリズム、FF-GS アルゴリズムを実装し、その位相収差の再現精度について評価を行った。非共通光路による位相収差としてザイデル5収差を使用し、焦点面像と Phase Diversity の像として 512pixel× 512pixel の振幅強度のマップを作成した。

円形開口を想定し、ノイズなしの焦点面での振幅強度のマップを使用し、各アルゴリズムの動作を確認した。非共通光路収差として与えた位相が奇関数のとき、GS アルゴリズムでは非共通光路収差として与えた位相収差と推定して得た位相の差分の RMS の値が PD-GS アルゴリズムでの結果と比較して小さい値になった。一方で、与えた位相収差が偶関数のとき、GS アルゴリズムでは Astigmatism2 のみ正しい位相収差の形に収束し、PD-GS アルゴリズムでは Astigmatism を除いて位相を再現できた。GS アルゴリズムで偶関数の位相が再現できない理由は、位相収差が偶関数の場合、その符号に関わらず焦点面での PSF の形状が同じになるために、焦点面での PSF から位相を推定する GS アルゴリズムでは位相収差の符号の情報が失われることが挙げられる。ここから、円形開口を想定し、ノイズなしの焦点面での PSF を使用した場合に、奇関数で表現できる位相収差に付いて再現するのであれば、GS アルゴリズムは PD-GS アルゴリズムより精度もよくイテレーションの回数も少なく位相を再現できるが、偶関数で表現できる位相収差を再現しようとした場合には、PSF の形状によって GS アルゴリズムでは位相が再現できないことが分かった。また FF アルゴリズムと FF-GS アルゴリズムでは、PSF の二次近似との差分による影響が大きいことが確認できた。したがって FF アルゴリズムと FF-GS アルゴリズムでは再現できる位相の強度に制限があるために、位相の偶奇性、強度に関わらず再現できるアルゴリズムは、PD-GS アルゴリズムであるという結論を得た。

より現実的なシミュレーションとして、ノイズを与えてかつ SCE_xAO の瞳関数を使用した場合には、GS アルゴリズムは Focus、Astigmatism、Spherical を除いて、また PD-GS アルゴリズムではザイデル5収差について、形を再現することができた。円形開口、ノイズなしを仮定した場合と同様に、GS アルゴリズムは符号が反転した位相に収束してしまうために、偶関数で表現される位相収差を再現できなかった。ノイズがなく円形開口を想定したとき程には、GS アルゴリズム、PD-GS アルゴリズムのどちらを使用しても、推定した位相の精度が大きく変わることはなかった。つまりノイズがなく円形開口の場合では GS

アルゴリズムの方が PD-GS アルゴリズムよりも良い精度で再現できたが、実際に近いシミュレーションでは GS アルゴリズムでも PD-GS アルゴリズムでも位相推定の精度に差はでなかった。また任意の位相収差を仮定した場合には、GS アルゴリズムと PD-GS アルゴリズムどちらも収束したが、GS アルゴリズムでは位相の形を再現するまでには至らなかった。これらの結果から、実際に非共通光路収差を推定する際には、位相の偶奇性や強度によらず位相収差を再現できる PD-GS アルゴリズムであると考えられる。

謝辞

まず本研究を行うにあたり2年間のご指導をいただきました秋山正幸教授に心より感謝申し上げます。装置開発に携わる機会を与えていただいたことに加え、多くの出張や発表をさせていただいたことに深く感謝致します。この大学院生活で得た貴重な経験を、今後も生かしていきたいと思えます。また毎週のゼミでは国立天文台の大屋真様を始め、たくさんの方から研究に対するご助言をいただきました。最後に、大学院2年間、天文学専攻の同期の皆さまとスタッフ、先輩、後輩の皆さま、また研究を応援してくれた家族に深く感謝申し上げます。

付録

ゼルニケ多項式の導出

波面収差を表現する規定としてよく用いられるのがゼルニケ多項式である。ここではゼルニケ多項式の導出を行い、低次の項については具体的な強度マップを作成する。以下の図 6.1 は光軸からの高さ y の物点 $P(y,0)$ より出た光線が光学系を通過して、光軸に垂直な像平面と $P'(y',z')$ で交わっている状態を示している。

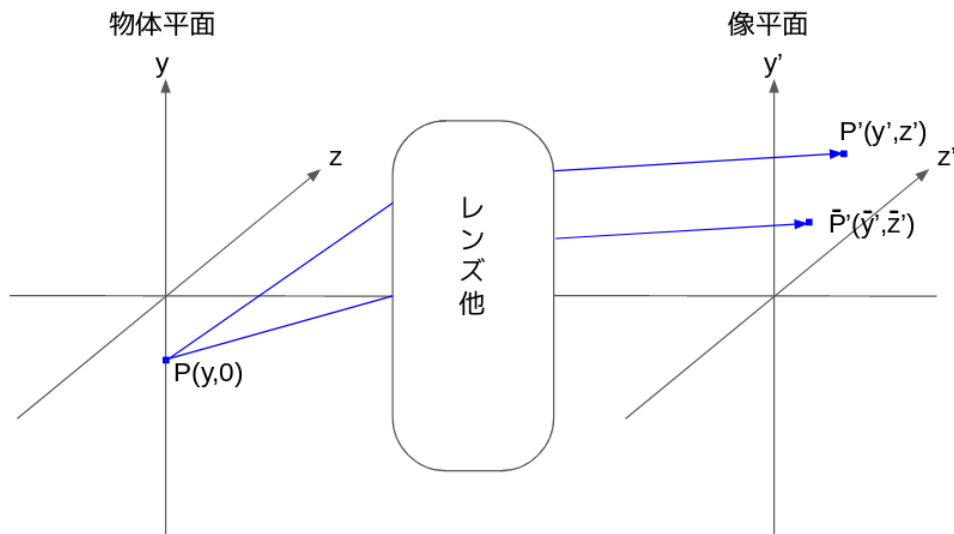


図 6.1 物体平面 $P(y,0)$ から出た光が像平面の $P'(y',z')$ で交わる様子を示している。 $\bar{P}'(\bar{y}',\bar{z}')$ は像面での理想像点である。

$\bar{P}'(\bar{y}',\bar{z}')$ を理想像点としたとき、

$$\Delta y' = y' - \bar{y}' \quad (6.1)$$

$$\Delta z' = z' - \bar{z}' \quad (6.2)$$

がこの光線の横収差となる。収差を求める際には光線の通過点を計算する必要がある、このときの通過点は三角関数を含む計算で表すことができる。このような三角関数によって表現できる各光線の通過点の情報を、その三角関数の一次までの近似で表現できる領域のことを近軸領域と呼び、この近軸領域での結像

は理想結像と呼ばれる。理想的な結像からのずれを取差と呼び、ザイデルの 5 取差はこの三角関数を三次の項までで近似した時の理想結像とのずれをさす。具体的には以下の式で書かれる光線の横取差 (光軸と垂直な面内での理想結像からのずれ) である。

$$\Delta y' = IR^3 \cos \phi + IIR^2 y(2 + \cos 2\phi) + (2III + IV)Ry^2 \cos \phi + Vy^3 \quad (6.3)$$

$$\Delta z' = IR^3 \sin \phi + IIR^2 y \sin 2\phi + IV Ry^2 \sin \phi \quad (6.4)$$

基本的な取差の性質はザイデル 5 取差に準じるが、実際の光学系では更に高次の項の取差を含んでいる。光学系の取差のより便利な展開級数として、Zernike 多項式が用いられる。これは半径 1 の円上で定義された直交多項式であり、二次元の取差関数はこれの重ね合わせで再現される。単位円内での直交条件は以下の式で書くことができる。

$$\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} V_\alpha^*(x,y)V_\beta(x,y)dxdy = A_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} \quad (6.5)$$

ここで * は複素共役、 δ は Kronecker の δ 、 $A_{\alpha\beta}$ は正規化の定数である。Zernike の円形多項式はこれに加え、座標軸を回転させても不変という特徴のある多項式であり、これは個々の多項式 $V(x,y)$ を直交座標の原点の回りでの回転

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi \quad (6.6)$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \quad (6.7)$$

を行った時に、

$$V(x,y) = G(\phi)V(x',y') \quad (6.8)$$

が成り立つような多項式になっている。ただし、 $G(\phi)$ は $G(0) = 1$ で回転角 ϕ の 2π を周期にもった連続関数である。角度 ϕ_1 と ϕ_2 の回転を行うことと $\phi_1 + \phi_2$ の回転を行うことは等価なので、式 1.2 より G は

$$G(\phi_1)G(\phi_2) = G(\phi_1 + \phi_2) = G(\phi_1 - \phi_2) \quad (6.9)$$

を満足するので、 G の一般解は

$$G(\phi) = e^{il\phi} \quad (6.10)$$

である。式 (6.10) を式 (6.8) に代入して、 $x' = \rho \cos \phi$ 、 $y' = \rho \sin \phi$ とおき、式 (6.7) を用いると、 V は

$$V(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = R(\rho)e^{il\phi} \quad (6.11)$$

の形になる。このとき式 (6.11) から直交条件は、

$$\int_c V_i(x,y)V_j^+(x,y)dxdy \quad (6.12)$$

$$= \int_c V_i(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)V_j^+(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)\rho d\rho d\theta \quad (6.13)$$

$$= \int_0^1 R_i^m(\rho)R_j^{s+}(\rho)\rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-is\theta}d\theta \quad (6.14)$$

$m = s$ のときにこれが 0 となるためには、 $R_l^m(\rho)$ がそれぞれ直交している必要がある。このとき $R_l^m(\rho)$ は以下の条件を満たす。

- 式 (6.11) より $R_l^m(\rho)$ は ρ に関する n 次の多項式
- $R_l^m(\rho)$ は ρ に関する m より低い次数のべきは含まない
- $n - |m|$ は偶数である

これを満たすような動径多項式の一般型は、Jacobi の超幾何多項式の性質から以下のようになる。

$$R_n^\pm(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s} \tag{6.15}$$

低次の具体的な多項式を以下の表にまとめる。

表 6.1 Zernike 低次の項

$m \setminus n$	0	1	2	3	4	5
0	1		$2\rho^2 - 1$		$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$	
1		ρ		$3\rho^3 - 2\rho$		$10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho$
2			ρ^2		$4\rho^4 - 3\rho^2$	
3				ρ^3		$5\rho^5 - 4\rho^3$
4					ρ^4	
5						ρ^5

これらを二次元の画像で表現したものが図 6.2 である。

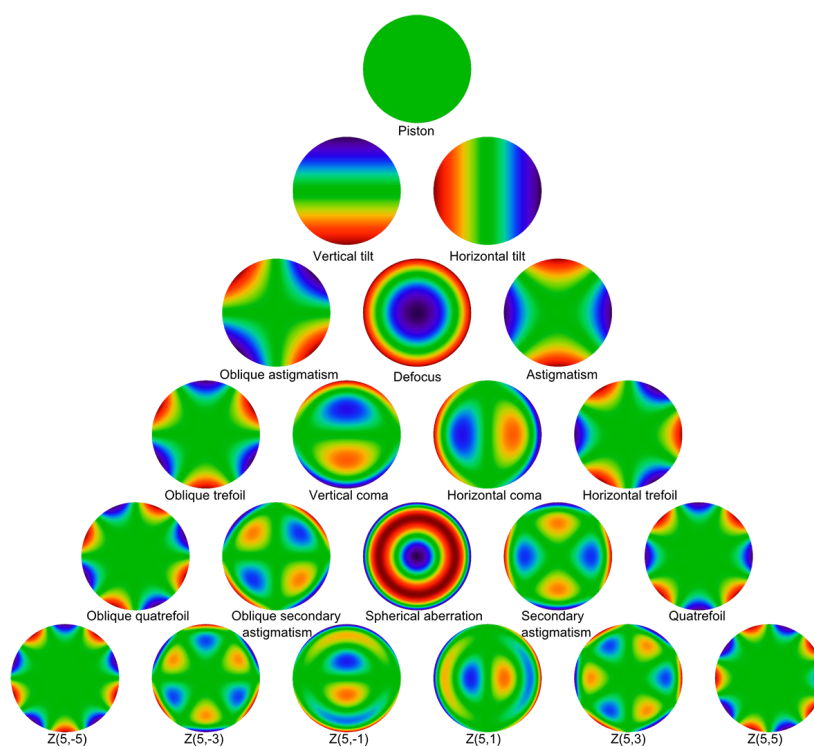


図 6.2 ゼルニケ多項式 [16]

参考文献

- [1] Ralph W Gerchberg. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, Vol. 35, pp. 237–246, 1972.
- [2] Christoph U Keller, Visa Korkiakoski, Niek Doelman, Rufus Fraanje, Raluca Andrei, and Michel Verhaegen. Extremely fast focal-plane wavefront sensing for extreme adaptive optics. In *Adaptive Optics Systems III*, Vol. 8447, p. 844721. International Society for Optics and Photonics, 2012.
- [3] Visa Korkiakoski, Christoph U Keller, Niek Doelman, Matthew Kenworthy, Gilles Otten, and Michel Verhaegen. Fast & furious focal-plane wavefront sensing. *Applied optics*, Vol. 53, No. 20, pp. 4565–4579, 2014.
- [4] John W Hardy. *Adaptive optics for astronomical telescopes*, Vol. 16. Oxford University Press on Demand, 1998.
- [5] Robert K Tyson. *Principles of adaptive optics*. CRC press, 2015.
- [6] 高見英樹. 補償光学系: 大気揺らぎを克服する. 天文月報 第 91 卷 第 10 号, Vol. 478, p. 766, 1997.
- [7] 秋山正幸. 補償光学の開発から見る装置開発の多様性. 2018.
- [8] Elise Viard, Miska Le Louarn, and Norbert Hubin. Adaptive optics with four laser guide stars: correction of the cone effect in large telescopes. *Applied optics*, Vol. 41, No. 1, pp. 11–20, 2002.
- [9] Jesse Grant Ball. Ncpa optimizations at gemini north using focal plane sharpening. 2016.
- [10] Robert A Gonsalves. Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Optical Engineering*, Vol. 21, No. 5, p. 215829, 1982.
- [11] Masen Lamb, David Andersen, Jean-Pierre Veran, Carlos Correia, and Olivier Lardiere. Calibrating the non-common path aberrations on the moao system raven and. In *Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes 4—Conference Proceedings*, Vol. 1, 2015.
- [12] N Jeremy Kasdin, Robert J Vanderbei, David N Spergel, and Michael G Littman. Extrasolar planet finding via optimal apodized-pupil and shaped-pupil coronagraphs. *The Astrophysical Journal*, Vol. 582, No. 2, p. 1147, 2003.
- [13] Barnaby Norris, Guillaume Schworer, Peter Tuthill, Nemanja Jovanovic, Olivier Guyon, Paul Stewart, and Frantz Martinache. The vampires instrument: imaging the innermost regions of protoplanetary discs with polarimetric interferometry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 447, No. 3, pp. 2894–2906, 2015.
- [14] Jonas Kühn, Eugene Serabyn, Julien Lozi, Nemanja Jovanovic, Thayne Currie, Olivier Guyon,

- Tomoyuki Kudo, Frantz Martinache, Kurt Liewer, Garima Singh, et al. An h-band vector vortex coronagraph for the subaru coronagraphic extreme adaptive optics system. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Vol. 130, No. 985, p. 035001, 2018.
- [15] N Jovanovic, Frantz Martinache, Olivier Guyon, Christophe Clergeon, Garima Singh, Tomoyuki Kudo, Vincent Garrel, Kevin Newman, D Doughty, Julien Lozi, et al. The subaru coronagraphic extreme adaptive optics system: enabling high-contrast imaging on solar-system scales. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Vol. 127, No. 955, p. 890, 2015.
- [16] 単位円にプロットされた 5 次までのゼルニケ多項式. <https://www.comsol.jp/release/5.2a/ray-optics-module>.