

修士論文

すばる望遠鏡 RAVEN オンスカイ測定データの
経験的再構成による大気トモグラフィ法の評価

Evaluation of atmospheric tomography method by empirical
reconstruction of Subaru/RAVEN on-sky measurements

東北大学大学院 理学研究科 天文学専攻 修士 2 年

山崎 公大

平成 27 年度

要旨

広視野補償光学の一種である多天体補償光学 (MOAO) は広い領域に渡って存在する複数の天体に対して回折限界に迫るような補正性能を実現する技術であり、将来的には TMT の第 2 期観測装置として MOAO と面分光ユニットを組み合わせた IRMOS と呼ばれる導入が提案されている。しかしながら、口径 30m クラスで MOAO を実現するためには実用上の課題点を検証、克服していく必要がある。RAVEN は MOAO 実証装置であり、カナダのピクトリア大学のチームが中心となり、国立天文台と東北大学の協力のもと開発が進められ、2014 年 5 月にすばる望遠鏡で 8m クラスの望遠鏡では初となる MOAO 装置のオンスカイ観測が行われた。

MOAO ではトモグラフィーの手法により複数のガイド星の波面情報から観測対象方向の揺らぎを 3 次元的に推定する。この時の変換は事前に仮定した観測パラメータからモデル計算した行列を用いて行われるが、一方で現実の観測コンディションをより反映した推定行列を構成する Learn & Apply 法 (Vidal et al.2010) が提案されている。今回私は、今年 6 月にすばる望遠鏡にて行われた多天体補償光学実証装置 RAVEN のオンスカイ観測で得られた実際の測定データに Learn & Apply 法を適応し、実際のオンスカイ観測による測定データを利用から構成したトモグラフィック波面再構成行列を用いたトモグラフィック波面推定の検証を行った。その結果、今回新しく適用した手法による波面推定精度が従来のトモグラフィーによす推定を上回ることが確認された。これは、従来の古典的トモグラフィーモデルでは考慮されていないが、オンスカイ観測で波面推定精度に結びつくパラメータが存在する可能性を示唆するものである。本論文では経験的トモグラフィー手法による波面推定結果と、トモグラフィック再構成行列の構造の比較から、オンスカイ環境でも従来のトモグラフィーモデルが妥当であるかを検証していく。

目次

第 1 章	導入	1
1.1	補償光学	1
1.1.1	補償光学の原理	1
1.1.2	補償光学の広視野化	2
1.1.3	広視野補償光学の種類	3
1.2	口径 30m 望遠鏡 (TMT) と広視野補償光学	4
1.2.1	TMT 初期 AO 装置と第 1 期観測装置	4
1.2.2	TMT-AGE プロジェクト	5
1.3	広視野補償光学における波面推定手法	8
1.3.1	波面センサーの測定値と波面位相の関係	8
1.3.2	波面再構成行列	10
1.3.3	トモグラフィーモデル	10
1.3.4	古典的トモグラフィック再構成行列	12
1.4	問題提起と本研究の目的	13
1.4.1	多天体補償光学の開発現状	13
1.4.2	オンスカイ観測における古典的トモグラフィーモデルの妥当性	13
1.4.3	本研究の目標	14
第 2 章	多天体補償光学実証装置 RAVEN	15
2.1	RAVEN 概要	15
2.2	装置設計	16
2.3	自然ガイド星用波面センサー	17
2.4	サイエンスパス	18
2.5	波面補償の流れ	19
第 3 章	経験的トモグラフィック波面推定	20
3.1	Learn & Apply 法	20
3.1.1	概要	20
3.1.2	再構成行列の導出	20
3.1.3	Learn & Apply 法のオンスカイ観測への適用	22
3.2	経験的トモグラフィー	22
第 4 章	データ解析	24
4.1	行った解析と目的	24
4.2	RAVEN データ	24
4.2.1	WFS の測定値	24
4.2.2	データの格納	25

4.2.3	変数の設定	25
4.3	解析の流れ	26
4.3.1	経験的トモグラフィック推定行列の計算	27
4.3.2	計算手順	27
4.3.3	評価方法	29
4.4	行列 X の特異値分解を用いた \hat{R} の解	29
4.5	擬似逆行列による \hat{R} の解	31
4.6	データ	31
4.6.1	データの選定	31
4.6.2	使用データ	32
4.6.3	パラメータ	36
第 5 章	結果	37
5.1	古典的トモグラフィの結果	37
5.1.1	古典的トモグラフィック再構成行列	37
5.1.2	データセット 20150623_195319 の波面推定結果	41
5.1.3	データセット 20140514_043709 の波面推定結果	42
5.1.4	データセット 20140515_005644 の波面推定結果	43
5.1.5	古典的トモグラフィの結果まとめ	44
5.2	経験的トモグラフィの結果	44
5.2.1	波面推定結果	44
5.2.2	全体的な推定結果の特徴	48
5.2.3	サイエンスチャンネルの違いによる推定結果の特徴	48
5.2.4	観測時間帯の違いによる推定結果の特徴	48
5.2.5	経験的トモグラフィック推定とデータ記録時間の関係	49
5.2.6	推定精度の時間的変動	51
5.3	経験的トモグラフィック推定行列の構造	52
5.3.1	経験的トモグラフィック再構成行列	52
5.3.2	低特異値モードの除去	53
第 6 章	議論	57
6.1	経験的トモグラフィック再構成行列の構造の分析方針	57
6.1.1	トモグラフィック再構成行列の構造	57
6.1.2	低特異値の除去による無関係モードの抑制	58
6.1.3	評価方法	60
6.1.4	方針	60
6.2	トモグラフィック再構成行列構造の比較	60
6.2.1	高層大気の影響についての考察	64
6.3	推定波面誤差の比較	74
6.4	議論のまとめ	91
第 7 章	結論	92
	謝辞	93

Appendix A 数学	94
A.1 最小二乗解の導出	94
A.2 固有値	97
A.3 特異値分解	98
A.3.1 基本性質	98
A.3.2 低特異値の最小二乗解への寄与	99
A.3.3 擬似逆行列を用いた推定	101
A.4 ツェルニケ多項式	101

第1章 導入

1.1 補償光学

地球上で天体からの光を観測する場合、我々は地球大気の揺らぎの中を通過してきた天体の光を観測することになる。この大気揺らぎの影響により天体の星像はぼかされてしまい、地上に設置された望遠鏡は本来の性能を発揮できない。この大気の揺らぎをリアルタイムで補正することによって星像の改善を図る装置が補償光学 (Adaptive Optics; AO) である。補償光学はすばる望遠鏡をはじめ、世界各国の大型望遠鏡では、地上望遠鏡にはなくてはならない要素の1つであると見なされている。また、現在各国な機関で計画が進められているなどといった超大型望遠鏡においても、大型望遠鏡の大口径がもたらされる恩恵を最大限に受けるためにも補償光学システムを導入して大気による光の乱れを抑制することが必要不可欠であると考えられている。これらの超大型望遠鏡に向けた AO システムが現在多くの研究グループにより提案され、研究開発が進められている。

1.1.1 補償光学の原理

観測対象となる天体は極めて遠方にあるため地球に到達する時には完全な平面波となっている。この平面波が大気揺らぎの影響を受けることにより天体からの光の波面が歪み、結果として観測される星像がぼかされる。補償光学の役割は、大気揺らぎをリアルタイムで測定し、波面の歪みと完全に逆の位相を与えることで天体からの光の波面の歪みを平面波に補正することにある。単層補償光学 (Single Conjugate Adaptive Optics; SCAO) は最も基本的な補償光学システムであり、現在世界中の望遠鏡で既に運用されている補償光学システムの多くはこのタイプである。以下では SCAO を例に補償光学の原理を説明する。

補償光学システム、波面センサー、リアルタイムコンピュータ、可変形鏡の3つの基本的な構成要素から成り立っている。(図 1.1)

波面センサー

波面センサー (Wavefront Sensor; WFS) では望遠鏡上空の大気揺らぎの形状の情報を取得する。大気揺らぎの測定には参照光源であるが、観測ターゲットが十分明るい、もしくは大きさを持っている場合を除いて観測天体自体を参照光源として用いることはできない。そのため通常は観測ターゲットの近い位置にある明るい点源を参照光源として使用する。これをガイド星 (Guide Star; GS) と呼ぶ。ガイド星には自然に存在する天体を使う場合 (自然ガイド星; Natural GS (NGS)) と、人工的にレーザーを打ち上げて大気中に参照光源を作り出すレーザーガイド星 (Laser GS (LGS)) がある。

リアルタイムコンピュータ

リアルタイムコンピュータでは、波面センサーで測定されたデータを基に補償したい領域の大気揺らぎの推定、可変形鏡等の波面補償装置を制御するための命令 (コマンド) の生成を

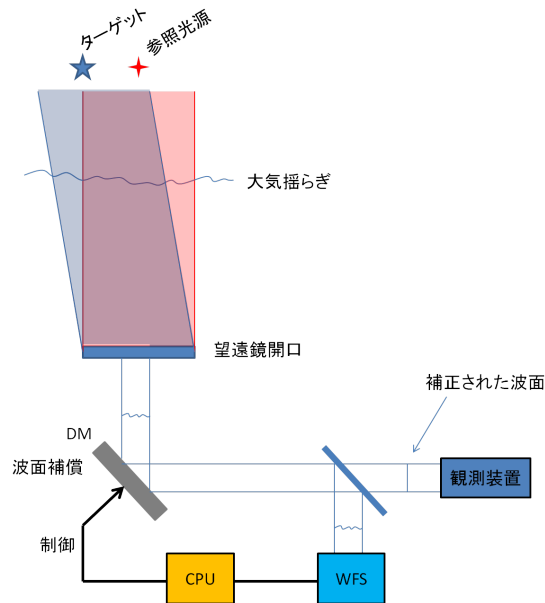


図 1.1: 補償光学の原理

行う。波面センサーの測定値から波面の3次元的な形状（位相）の情報を得る波面再構成や、推定した波面を打ち消すように波面補償装置を制御するコマンド（電圧等の情報）を生成するプロセスは、通常行列による演算を通して行われる。

可変形鏡

補償光学において可変形鏡（Deformable Mirror; DM）は大気によって歪んだ波面を補正する役割を担っている。DMは薄い鏡面の裏側に並べられたアクチュエータという素子を伸縮させることで表面を自由に变形させることができる。DMには多くの種類があるが、補償光学装置としては電圧を加えることで变形を起こす piezo素子を用いたタイプを使うことが多い。測定された大気揺らぎを打ち消す様にDMを变形させ、DMで反射した波面が常に平面波に戻るように制御することで波面補償が行われる。

大気の状態は時々刻々と変化するため、波面測定、波面再構成、コマンド生成・送信という流れはリアルタイムで観測中絶え間なく行われる。この波面測定から波面補償までの一連の動作のことを制御ループと呼び、閉ループ制御（Open loop control）と開ループ制御（Closed loop control）の二つの方式が存在する。

1.1.2 補償光学の広視野化

AOの広視野化に向けては主に次の3つの課題を解決する必要がある。

1. アニソプラナティズム 波面センサーはガイド星方向に沿った上空大気の揺らぎのみを測定する。ガイド星から離れた方向では天体からの光は特に異なる大気揺らぎを通過してくることになる。このためガイド星から外れた方向では波面補償精度が劣化する。この現象はアニソプラナティズムと呼ばれている。SCAOで同一波面として補償できる目安とされる角度（イ

ソプラナティック角)はJバンドで20"、Hバンドで30"、Kバンドで40"程度と言われている [31]。

2. スカイカバレッジ アニソプラナティズムの問題により、1つのガイド星で補償できる領域は極めて狭い。また、波面測定を行えるガイド星はある一定の等級よりも明るくないといけないという制限もある。このような条件のため、自然に存在する天体を大気揺らぎ波面の参照光源とすることができる領域は極めて限定的である。AOによる補償が行える領域の天球面上での割合のことをスカイカバレッジと呼ぶ。1つの自然ガイド星を参照源として使う場合スカイカバレッジはわずか数%程度である。
3. コーン効果 2のスカイカバレッジを増やすための方策として自然ガイド星に代わってレーザーを使用し、任意の方向に十分な明るさを持った参照源(レーザーガイド星)を人工的に作り出す方法がある。しかしレーザーが参照源を作る位置は大気中のある高さの部分である。例えばナトリウムレーザーガイド星の場合上空90kmのNa層が共鳴して参照源を作る。そのため、無限遠から届く自然ガイド星からの光と違い波面センサーの視線方向の大気の3次元的情報が十分に測定できない。このガイド星の高さが有限であることに起因する問題であるので望遠鏡の口径が大きいほど強く影響が生じる。

広視野補償光学では複数のレーザーガイド星を使用し、望遠鏡上空の大気による影響を3次元的に測定することでこれらの問題を解決している。複数のレーザーガイド星を用いることで異なる方向の大気揺らぎの情報を得ることができるので、コーン効果による大気揺らぎの情報の損失やアニソプラナティズムによる波面補償精度の劣化を軽減することができる。これにより広視野の波面補償が可能となる。

1.1.3 広視野補償光学の種類

現在、次世代の超大型望遠鏡の性能を更に高めるための技術として様々な広視野補償光学装置が研究、開発されており、次の3方式が提案されている。

地表層補償光学 (Ground Layer Adaptive Optics;GLAO)

GLAOは複数のガイド星からの大気揺らぎを測定し、地表に近い層だけを補償する方法である。

多層共役補償光学 (Multi Conjugate Adaptive Optics;MCAO) 複数のレーザーガイド星を参照源として使用し、異なる方向の波面センサーの情報から望遠鏡上空の大きい体積の大気揺らぎを推定する手法。このとき大気揺らぎは数枚の薄い層の成分の足し合わせで表されるとし、複数の波面センサーの情報から各層に対応する大気揺らぎを後述のトモグラフィー手法を用いて推定する。波面補償には各層の揺らぎの補正に共役なDMを用いる。この技術により広視野で均一な波面補償が可能となる。

多天体補償光学 (Multi-Object Adaptive Optics;MOAO) MOAOはVLTの次世代補償光学装置としてHammer et al,2002[20]によって最初に提案された。複数のレーザーガイド星を使い、トモグラフィーの手法で大気揺らぎを推定するという点はMCAOと共通であるが、MCAOが広視野を満遍なく補償するのに対してMOAOは広い視野内に散在する複数のサイエンスタージェット方向のみに対応した補償を行うものである。各サイエンスタージェット方向の大気揺ら

ぎはそれぞれ独自の光学系内に備えられた DM を用いて行われる。MOAO の利点は、MCAO よりも広視野実現できる点と、各ターゲットに対して個別の光学系を持つことから面分光装置との相性が良い点である。。

1.2 口径 30m 望遠鏡 (TMT) と広視野補償光学

現在、口径数 10m クラスの超大型可視赤外望遠鏡 (Extla Large Telescope; ELT) の建設が世界中で計画されている。超大型望遠鏡の大口径がもたらす高い集光能力と、高い空間分解能を最大限に活用するために広視野補償光学は有効な手段と考えられている。ELT に向けた広視野補償光学については幾つかの研究チームによる装置提案が為されている。本節では、日本を含めた国際協力のもとで推進されている「口径 30m 望遠鏡 (Thirty Meter Telescope; TMT)」における広視野補償光学について説明する。なお、主な観測装置の詳細は 2011 年にまとめられた MT サイエンス検討会報告書「TMT で切り拓く新しい天文学」を参考にした。

1.2.1 TMT 初期 AO 装置と第 1 期観測装置

TMT は日本の国立天文台及び、カリフォルニア大学、カリフォルニア工科大学、カナダ大学連合、中国国家天文台、インド、米国との国際協力を得て、2024 年の観測開始を目指して現在建設が進められている。最大の特徴である 30m の口径は 492 枚の分割鏡を組み合わせることで実現する。日本は望遠鏡本体構造、主鏡分割鏡の製作。観測装置の一部の製作を担当している。

初期 AO 装置 : NFIRAOS

TMT の初期 AO 装置としては NFIRAOS (Narrow Field InfraRed Adaptive Optics System) が TMT のナスミス架台に搭載される予定となっており、カナダ国立研究機構 (NRC-Herzberg) が設計を担当している (Herriot et al, 2014 [22]、AO for ELT 2 資料 [14])。NFIRAOS は複数のレーザーガイド星を用いた多層共役補償光学システムを採用し、赤外線で 2 分角を超える広い領域にわたって大気揺らぎの補償を行うことができる。NFIRAOS の特徴は以下の 2 つである。

- 波面補償には 6 つのレーザーガイド星と高オーダー用の自然ガイド星 1 つを用い、補償範囲の広視野化を図る。
- 多層共役補償光学システムを採用し、2 つの大気揺らぎ層 (0km (地表層) と 11.2km) に共役な DM により補正を行う。

NFIRAOS を利用する第 1 期観測装置

TMT 第 1 期観測装置のうち、NFIRAOS によって補正された光を利用する 2 つの装置が計画されている。(詳細は TMT ホームページ [24] を参照)

InfraRed Imaging Spectrograph; IRIS 0.84–2.4 μm の近赤外線の波長域において撮像機能と面分光機能を有する。撮像を行う検出器は素子数 4K × 4K の HgCaTe 検出器 Hawaii 4RG を持っている。素子数を多く利用できるため、NFIRAOS で補償された 16.4'' × 16.4'' の広視野を一度

に観測することができる。面分光はレンズレットアレイ方式とイメージスライサー方式の 2 通りを採用している。NFIRAOS の補償能力と組み合わせることで波面誤差を低く抑えることで、相対位置測定精度 30μ 秒角の高精度位置天文学を行うことを目指している。

InfraRed Multi-slit Spectrograph; IRMS IRMS は NFIRAOS によって補償された視野全体をカバーした近赤外広視野多天体分光装置である。マルチスリット方式を採用し、 $2 \times 2 \text{ arcmin}^2$ の視野内で 46 天体の分光が可能となる。

1.2.2 TMT-AGE プロジェクト

TMT では第 2 期観測装置として、MOAO と面分光装置 (Integral Field Spectrograph; IFS) を組み合わせた近赤外広視野多天体分光装置 (InfraRed Multi-Object Spectrograph; IRMOS) が導入されることが予定されている。我々の研究グループではこの IRMOS の装置提案として、MOAO と多天体面分光装置を組み合わせた観測装置である初期宇宙銀河分析装置、通称 TMT-AGE (TMT-Analyzer for Galaxies in Early univers) の開発検討を行うプロジェクトを進めている。当節では TMT-AGE プロジェクトの概要と意義について記述する。

TMT-AGE が狙うサイエンスフィールド

TMT-AGE プロジェクトが狙うサイエンスのうち、MOAO と面分光装置の組み合わせが特に威力を発揮するであろう領域として、赤方偏移 $z = 1 - 5$ における銀河形成史と内部構造の進化の解明がある。銀河形成は $1 < z < 3$ の時代に最も活発に行われたことが知られている。また現在 Hubble 系列として知られる様な銀河の形態が形成され始めたのもこの時代であることも示唆されている。銀河の形成史、形態進化を理解するためには様々な時代、環境における銀河の物理的・化学的性質を内部構造にまで分解して詳細に調査することが必要であると考えられる。

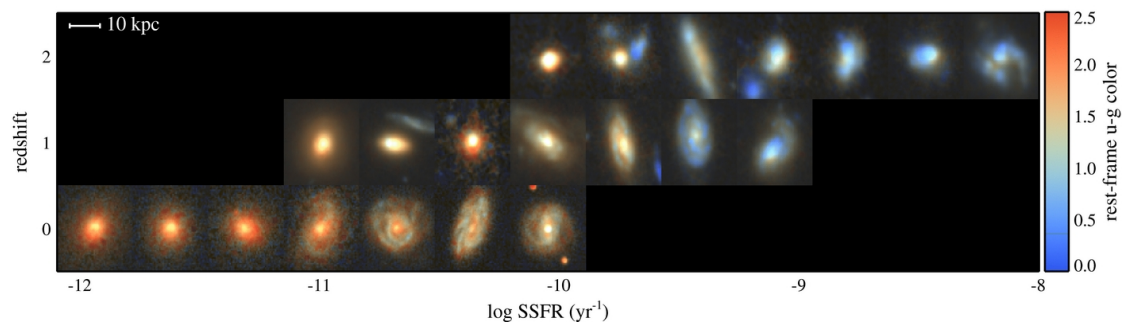


図 1.2: 様々な赤方偏移時代における銀河の Morphology と星形成率密度。時代をさかのぼるにつれ星形成率密度が高まり、形状も現在見られる Hubble 系列とは似つかなくなる。(Danile et al, 2011[33])

銀河内部の動力的性質を知るには面分光装置の導入が望まれる。個々の銀河を空間分解して空間一波長の 3 次元空間で分光観測を行い、 $H\alpha$ や $[OII]$ 等の輝線のドップラーシフトから速度構造を導くことで、回転やランダム運動といった銀河の形態についての情報を得ることができる。また同じ方法により銀河の局所的な星形成率を測定することも可能となる。しかしながらこれらの時代の銀河は非常に淡いため、空間分解して分光観測を行うためにはすばる望遠鏡の 13 倍もの集光能力を持つ TMT の能力が不可欠である。また、TMT の大口径と補償光学システム (Adaptive Optics

: AO) によってもたらされる高空間分解能によって、視直径の小さい高赤方偏移の銀河まで空間分解が可能となる。更に、統計的なアプローチから銀河の研究を行う必要性から、大量の銀河サンプルを確保することが求められる。割り当てられる観測時間の中でこれらの要請を満たす観測を達成するためには、広い領域に散在する複数個の銀河を同時に観測する必要がある。TMT-AGE では、MOAO によって視野 5 分という広い範囲で大気揺らぎの影響を低減し、補償領域内に配置した 10-20 台の面分光ユニット (Integral Field Unit; IFU) による天体の面分光によってこれらのサイエンス要求を達成できると考えている。

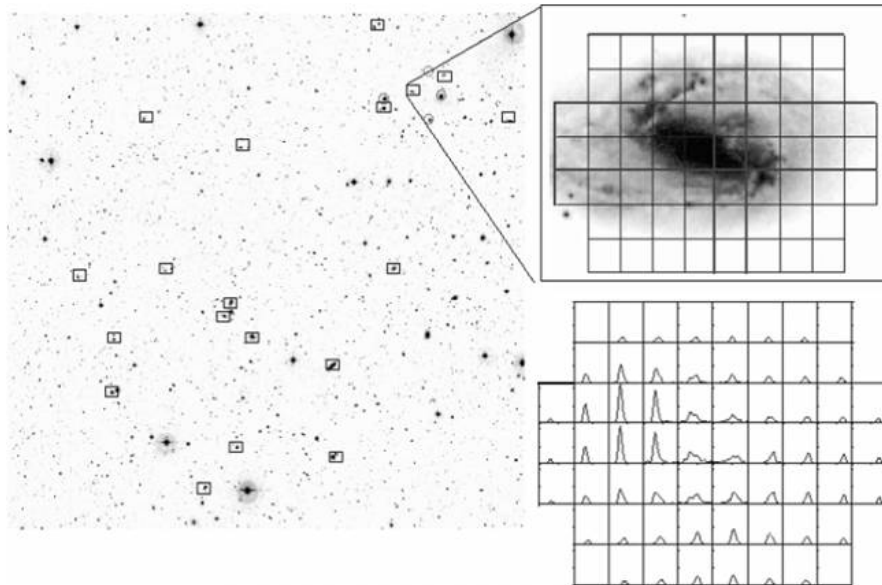


図 1.3: 欧州南天天文台が提案した多天体面分光装置 FALCON の IFU (Hammer et al,2006 [15])。VLT の 25' の視野内に散在する銀河の周囲 (四角で囲んだ領域) を IFU でピックアップし、空間分解した領域で分光してスペクトルを得る。

TMTRMOS	
AO の種類	多天体補償光学 (MOAO)
補償可能領域 (Field of regard)	5 分角
IFU 視野 (Field of view)	2 秒角
波長	0.8 - 2.5 μm
IFU 台数	10-20 台
波長分解能	2000 - 10000

表 1.1: RAVEN のサイエンス要求 [23]

意義

第 1 期 AO 装置 NFIRAOS は 2' \times 2' の広い領域の大気揺らぎを補正し観測装置に提供することができるが、近赤外線の回折限界を達成できる領域は中心の 10'' - 30'' 程度に限られている。従って第 2 期装置では回折限界に近い星像を実現可能な補償領域を更に拡大することが望まれている。

ここで TMT-AGE が広視野補償光学の中でも多天体補償光学を導入する根拠について述べる。前述の通り、TMT 第 1 期装置として導入される NFIRAOS は広視野補償光学の中でも MCAO という種類である。MCAO では望遠鏡上空の大気揺らぎを典型的な層からの足し合わせであるとして各層の揺らぎを専用の DM で補正する。そのため 1 つの DM が補償する領域が広大になりアクチュエーターの素子数を多くする必要がある。このような技術的制約のため MCAO では補償領域を拡大することが難しいと言われている。また、同じく広視野補償光学の一種である GLAO は、地表層の大気揺らぎのみを補正するので可補償領域は広くとれるが、地表層以外の大気揺らぎを一切考えないため補償性能はあまり出せない。一方 MOAO システムは目標天体に対応した領域を分割する個別の光学パスを有しており、目標銀河の観測に必要な周辺領域 (約数秒角) の波面を補償のみを行うように設計されている。MOAO を用いる事で、広い領域に散在する複数の銀河の同時観測を可能にし、その領域も望遠鏡の機械的な限界の範囲内で広くとる事ができる。よって MOAO を導入すれば、広い可補償領域を確保でき TMT の集光能力を活かしつつ高空間分解能を達成できる。また、同時に複数の天体を観測することによる観測効率の向上も見込めると考えられる。

面分光装置については欧州南天天文台の KMOS (K-band Multi Object Spectrograph) [13] が 8.2m 大型望遠鏡 VLT で既に実用化されている。KMOS は独立した面分光ユニット (図 1.2) によって 7.2 分角の視直径内で最大 24 天体を同時分光可能である。各面分光ユニットの視野は $2.8'' \times 2.8''$ で空間サンプリングは $0.2'' \times 0.2''$ であり、既に $z = 2$ 程度の高赤方偏移銀河の空間分解の成果を挙げている。TMT の IRMOS はこうした既存技術を上回る性能で高赤方偏移天体の空間分解が可能となると期待される。TMT-AGE も KMOS と類似したピックアップ機構を用いて 10 から 20 天体の同時観測を行うが、TMT の 30m 口径による集光能力の向上により、より遠方の銀河に大しても高分散な分光が可能となる。また各 IFU に特化した補償光学を導入することで、IFU 視野内で回折限界に迫る様な高空間分解能が達成できる。これにより遠方銀河のより局所的な構造まで捉えることができるようになると思われる。

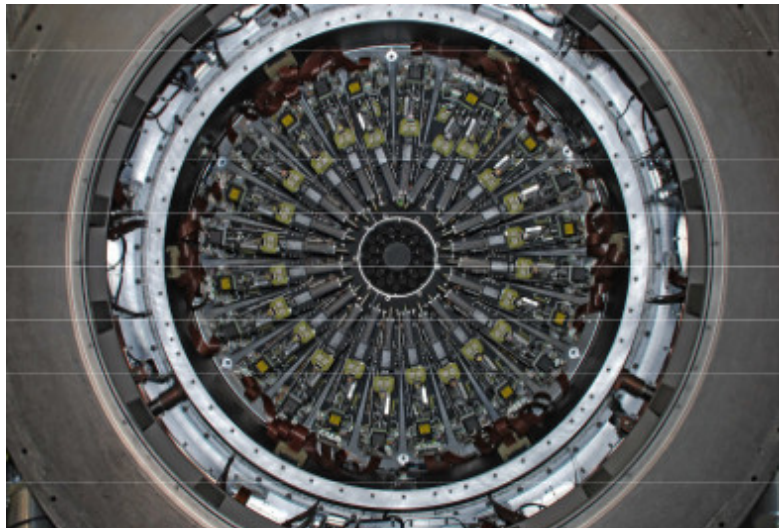


表 1.2: KMOS の面分光ユニット (IFU)。棒状のピックアップ機構を用いて天体周囲のみを切り取ってそれぞれ面分光を行う。[13]

開発の現状

MOAO と面分光ユニットで独立に検討が進められている。このうち MOAO システムについては国立天文台、東北大学の協力の下、カナダのピクトリア大学のチームを中心としたプロジェクトで技術実証実験を重ねられてきた。MOAO の実用化は未だに例がなく、トモグラフィーアルゴリズムによる波面推定や開ループ制御などといった技術的課題を克服していく必要がある。そのためまずは 8m クラスの望遠鏡でのオンスカイ観測を目指したプロトタイプ機である RAVEN が開発され、2014 年にはすばる望遠鏡にて 8m クラスの望遠鏡では初となるオンスカイでの MOAO システムの技術立証及びサイエンス観測を行った。今後は RAVEN で蓄積した結果を基にトモグラフィーアルゴリズムや制御方法など改善点などを洗い出し、TMT に向けた MOAO システムの検討、開発をしていく必要がある。

1.3 広視野補償光学における波面推定手法

補償光学では、波面センサーで測定した大気揺らぎの情報をもとに推定した波面形状を打ち消すように DM を制御して歪んだ波面を補正する。この時重要となるのが、波面センサーで測定したデータをターゲット方向の揺らぎに変換する「波面再構成」というプロセスである。MOAO や MCAO などの広視野補償光学において波面再構成手法として広く使われているトモグラフィーと呼ばれる手法について記述する。ここではシャックハルトマン型波面センサーを使用した測定値 (Slope) と波面位相の関係を基本として、トモグラフィーモデルを置くことで導ける。

1.3.1 波面センサーの測定値と波面位相の関係

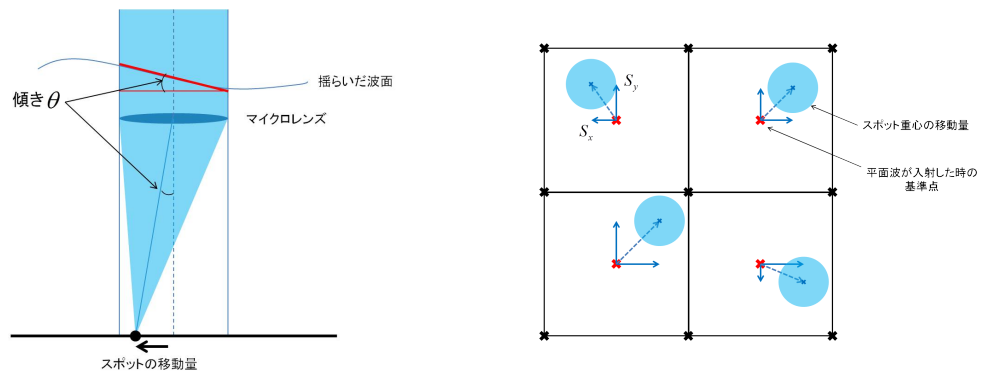


図 1.4: シャックハルトマン型波面センサーの波面測定原理。マイクロレンズに対して入射した波面は検出器上に結像する (スポット)。理想的な平面波 (Reference 面) をマイクロレンズで結像させた位置を基準とした時のスポット重心の移動量は左図のように波面の傾き θ (x, y の 2 方向) に対応する。この時の測定した移動量のことを Slope (S^x, S^y) と呼ぶ。

多くの補償光学系ではシャックハルトマン型波面センサーを用いて波面測定を行っている。シャックハルトマン型波面センサーの場合の測定値は波面の局所的な傾斜 (以後 Slope と呼ぶ) に対応している (図 1.4)。波面再構成 (Wavefront Reconstruction) とは、波面センサーで測定した Slope の測定データから可変形鏡で補償されるべき波面の 3 次元形状 (波面位相) を回復するプロセスである。波面再構成において、波面傾斜を測定する点と 3 次元波面の高さ情報を定義する点との間の関

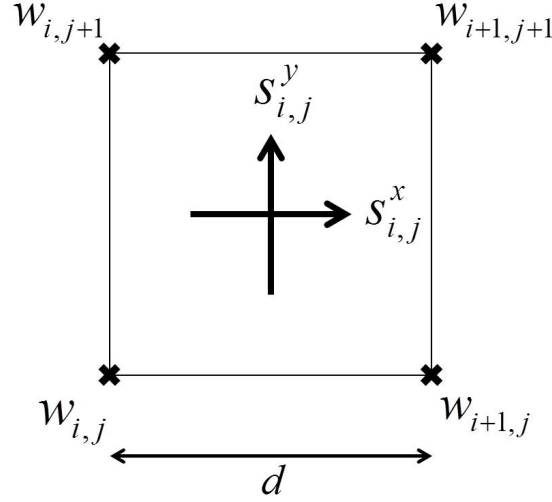


図 1.5: シャックハルトマン型波面センサーにおける測定点と波面位相点の幾何学配置 (Freid Geometry)

係性のことを再構成のジオメトリーと呼ぶ。このジオメトリーは波面センサーの種類によって異なるが、シャックハルトマン型波面センサーでは主に図 1.6 の様なジオメトリーとなっている。この配置の再構成は、Freid[34] によって解析されたことから Freid Geometry と呼ばれる。

図 1.5 のジオメトリーでは、間隔 d で並んだ波面センサーの測定点 (スポット) に対して周囲 4 つの位相点で波面位相を定義する。ここでマイクロレンズアレイのスポット数を $n_s \times n_s = N_s$ 、位相点の数を $n_w \times n_w = N_w$ と定義すると $n_s = n_w - 1$ となるので、 $N_s = s \times (n_w - 1)^2$ という関係が成り立つ。測定値は x 方向と y 方向に分けられるので測定値の数は $2N_s$ で与えられる。 (i, j) 番目のスポット位置で測定された Slope を $S_{i,j}^x, S_{i,j}^y$ とすると、スポット位置の周囲の位相点で定義される波面位相 W の関係は次の連立方程式で表される。

$$S_{i,j}^x = \frac{(w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1}) - (w_{i,j} + w_{i,j+1})}{2d} \quad (1.1)$$

$$S_{i,j}^y = \frac{(w_{i,j+1} + w_{i+1,j+1}) - (w_{i,j} + w_{i+1,j})}{2d} \quad (1.2)$$

一般的に波面再構成を含めた補償光学の制御ではこのような変換は行列による線形関係で表す。 $n_s = 2$ の場合 (スポット数 $N_s = 8$ 、位相点数 $N_w = 9$) の関係行列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} S_{i,j}^x \\ S_{i+1,j}^x \\ S_{i,j+1}^x \\ S_{i+1,j+1}^x \\ S_{i,j}^y \\ S_{i+1,j}^y \\ S_{i,j+1}^y \\ S_{i+1,j+1}^y \end{pmatrix} = \frac{1}{2d} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{i,j} \\ w_{i+1,j} \\ w_{i+2,j} \\ w_{i,j+1} \\ w_{i+1,j+1} \\ w_{i+2,j+1} \\ w_{i,j+2} \\ w_{i+1,j+2} \\ w_{i+2,j+2} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$s = Gw \quad (1.4)$$

1.3.2 波面再構成行列

Slope のデータから波面位相の値を再構成するためには関係式 1.1、1.2 を逆に解けば良い。この操作は行列表現では G の逆行列を 1.9 の左から掛けることに対応する。つまり波面再構成とは Slope と波面位相のジオメトリーから決まる線形関係 1.4 の逆問題を解くことに他ならない。測定値 s から波面 w を推定する行列 R をを真の波面と推定値との二乗誤差 $(w - Rs)^2$ が最小になるような基準によって求めると次のようになる。

$$\hat{R} = (G^T G)^{-1} G^T \quad (1.5)$$

これを用いると波面再構成は次のように表される。

$$\hat{w} = (G^T G)^{-1} G^T s \quad (1.6)$$

上式の $(G^T G)^{-1} G^T$ は波面再構成行列と呼ばれる。

1.3.3 トモグラフィーモデル

これまでの議論は1つのガイド星で波面補償を行う SCAO のケースについて行ってきた。それに対して広視野補償光学では、複数のガイド星 (LGS もしくは NGS) に共役な波面センサーの測定値から推定すべき波面を導く必要がある。多くの広視野補償光学ではトモグラフィーと呼ばれる手法に基づいて波面再構成が行われている。トモグラフィーとは、大気揺らぎが複数の層からの足し合わせで表現できるとして、複数のガイド星の波面情報から望遠鏡の開口上の大気揺らぎを3次元的に復元する方法のことである。ここでは各波面センサーの測定値とサイエンスタゲット方向の波面位相との関係に基づくトモグラフィーモデルについて記述する。トモグラフィーモデルの詳細は Hammer et al,2006 [15] を参考にした。

今、大気揺らぎは図 1.6 のような離散的な層をしていると仮定する。大気によって揺らいだ波面はこの N_l 枚の薄い大気層に由来するものとし、最終的に各大気層の合計を測定する。 j 層目の大気層の高度を h_j 、大気揺らぎ波面を関数 ϕ_j で表す。on-axis 方向からの角度 $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ を向いた波面センサー α の望遠鏡開口面上での位置 $\rho = (\rho_x, \rho_y)$ における波面位相 w は、各層の高さでに対応した波面センサーの開口面上の揺らぎを足し合わせた形として書ける。

$$w^{[\alpha]}(\rho, \theta, t) = \sum_{j=1}^{N_l} \phi_j(\rho + h_j \theta, t) \quad (1.7)$$

今、各層の大気揺らぎを有限の位相点上で定義される離散的データ列ベクトル ϕ_j として与えられているものとして、波面センサー α の開口面に対応する領域 (図 1.6 の青色の領域) の位相点上での波面の値 $w_j^{[\alpha]}$ に焼き直す操作を $A_j^{[\alpha]}$ という行列で置き換えることにすると、式 (1.7) の関係は次の様な行列形式で表される。

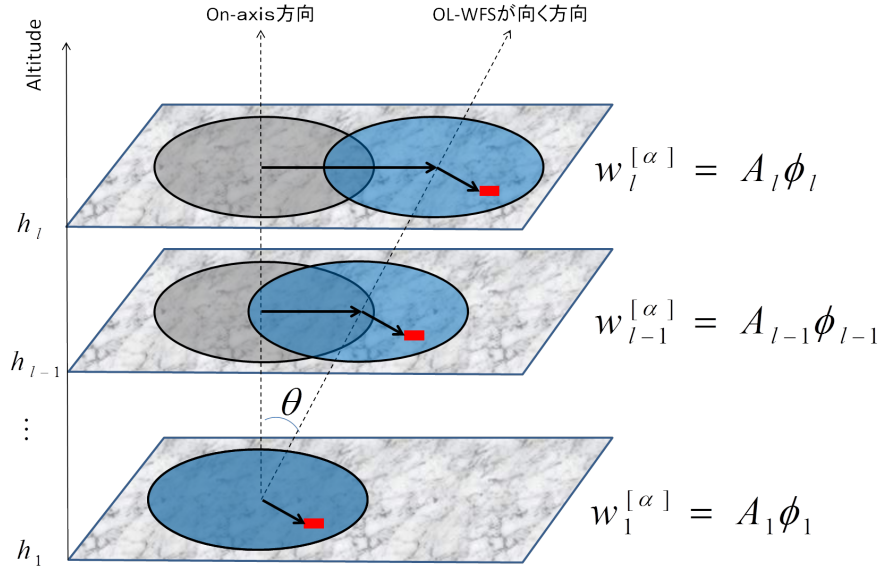


図 1.6: トモグラフィーの原理

$$\mathbf{w}^{[\alpha]} = \sum_{j=1}^{N_l} \mathbf{w}_j^{[\alpha]} = \sum_{j=1}^{N_l} \mathbf{A}_j^{[\alpha]} \phi_j \quad (1.8)$$

行列 $\mathbf{A}_j^{[\alpha]}$ は j 層目の揺らぎ ϕ_j から波面センサー α の開口面部の揺らぎ成分を切り出す変換を表す。

ここで、全波面センサー ($1 < \alpha < N_\alpha$) 分の波面について縦方向に結合したベクトルを \mathbf{w} 、同じく全層分の揺らぎ波面を縦方向に結合したベクトル ϕ を定義する。

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}^{[1]} \\ \mathbf{w}^{[2]} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^{[N_\alpha]} \end{pmatrix} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N_l} \end{pmatrix}$$

また、行列 $\mathbf{A}_j^{[\alpha]}$ を次のように結合する。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{[1]} \\ \mathbf{A}^{[2]} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{[N_\alpha]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{[1]} & \mathbf{A}_2^{[1]} & \cdots & \mathbf{A}_{N_l}^{[1]} \\ \mathbf{A}_1^{[2]} & \mathbf{A}_2^{[2]} & \cdots & \mathbf{A}_{N_l}^{[2]} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{A}_1^{[N_\alpha]} & \mathbf{A}_2^{[N_\alpha]} & \cdots & \mathbf{A}_{N_l}^{[N_\alpha]} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

式 (1.9)、式 (1.9) より式 (1.8) の足し合わせは次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}^{[1]} \\ \mathbf{w}^{[2]} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^{[N_\alpha]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{[1]} & \mathbf{A}_2^{[1]} & \cdots & \mathbf{A}_{N_l}^{[1]} \\ \mathbf{A}_1^{[2]} & \mathbf{A}_2^{[2]} & \cdots & \mathbf{A}_{N_l}^{[2]} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{A}_1^{[N_\alpha]} & \mathbf{A}_2^{[N_\alpha]} & \cdots & \mathbf{A}_{N_l}^{[N_\alpha]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N_l} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

また、波面センサー方向の α の波面位相 $w^{[\alpha]}$ と波面センサーで測定される Slopes $^{[\alpha]}$ の関係行列は、シャックハルトマン型波面センサーのジオメトリを仮定すると前章で導入した $G^{[\alpha]}$ とすることができる。これにより式 (1.10) は更に

$$s^{[\alpha]} = G^{[\alpha]} \sum_{j=1}^{N_j} A_j^{[\alpha]} \phi_j \quad (1.11)$$

と変形できる。これを全波面センサー ($1 < \alpha, N_\alpha$) 分縦方向に結合したベクトル s に対して拡張する。

$$s = \sum_{j=1}^{N_j} G_j A_j^{[\alpha]} \phi_j \quad (1.12)$$

ここで、各波面センサーの開口面上における位相と Slope の関係行列 $G^{[\alpha]}$ を対角成分に結合した行列を

$$G = \text{diag}[G_1, \dots, G_{N_\alpha}] \quad (1.13)$$

と定義する。ここ diag とは行列の対角成分を表す。以上をまとめると式 (1.10) は、式 (1.12)、式 (1.13) により最終的に次のような関係式となる。

$$\begin{aligned} s &= GA\phi \\ &= G'\phi \end{aligned} \quad (1.14)$$

ここで G' は前章の SCAO の場合の波面再構成ジオメトリートモグラフィーマデルノイズを含む場合はノイズ行列を η として

$$s = G'\phi + \eta \quad (1.15)$$

と表す。これがトモグラフィーマデルによる全波面センサーの測定値と各層の大気揺らぎとの線形関係である。

1.3.4 古典的トモグラフィック再構成行列

今、複数の波面センサーによる Slope 測定値 s からサイエンスターゲット方向の補償領域の揺らぎ波面の推定値を $\hat{w}^{[\beta]}$ 行列を R と置くことにする。

$$\hat{w}^{[\beta]} = Rs \quad (1.16)$$

R は波面センサーから得た情報を基に補償すべき波面位相を推定する変換関係を表す行列であり、多天体補償光学の場合式 (1.10) に代わる関係式である。式 (1.16) を最小分散法によって解くことにより、行列 R は次のように与えられる。

$$R = \langle w^{[\beta]} w^T \rangle G'^T \left(G' \langle w w^T \rangle G^T + \langle \eta \eta^T \rangle \right)^{-1} \quad (1.17)$$

式 (1.17) の R を古典的トモグラフィック再構成行列と呼ぶ。また古典的トモグラフィック再構成行列によって波面推定を行うことを特に「古典的トモグラフィック」と呼び後述の別手法と区別する。

1.4 問題提起と本研究の目的

1.4.1 多天体補償光学の開發現状

MOAO の概念は先進的であり、未だに望遠鏡で本格運用された例はない。しかしながら現在 ELT に向けた MOAO の装置は様々な研究機関によって提案されている。前述の通り TMT では IRMOS という多天体面分光装置に MOAO の概念が組み込まれる計画であり、TMT-AGE プロジェクトとして開発検討がなされている。また、欧州南天天文台 ESO では TMT-AGE と同じく MOAO と多天体面分光装置を組み合わせた EAGLE と呼ばれる装置を超大型望遠鏡 E-ELT (European Extremely Large Telescope) に導入する計画が進められている (Cuby et al, 2010 [9])。EALGE 開発の前段階として 8m クラスの望遠鏡での技術実証のための試験装置 CANAL (Gendron et al, 2011 [17]) が開発され、2010 年 9 月にはスペイン領カナリア諸島に位置する William Herschel 4.2m 望遠鏡を使ったオンスカイ観測を行っている。この試験観測では MOAO の開ループ制御及びトモグラフィアルゴリズムの検証が行われた。また TMT の IRMOS に向けた技術を検証することを目的とした MOAO 実証装置 RAVEN が、2014 年にはすばる望遠鏡にて 8m クラスの望遠鏡では初となるオンスカイでの MOAO システムの技術立証及びサイエンス観測を行った。これらは技術実証装置による試験観測ではあるものの、最近ようやく MOAO のオンスカイ観測実験が行われデータの蓄積が始まった。今後はこれらのオンスカイ観測の結果からトモグラフィアルゴリズムの技術的課題の克服が行われていくと期待される。

1.4.2 オンスカイ観測における古典的トモグラフィモデルの妥当性

1.3.3 章で説明した古典的トモグラフィは事前に仮定したモデルに従って行われる。このモデルからトモグラフィック再構成行列 R_{TM} を構成するために次のパラメータを考慮する必要がある。

- 高層大気の足し合わせの際の高度プロファイル
- コロモゴロフ乱流を仮定した場合の揺らぎのパワースペクトル
- ガイド星配置、望遠鏡の天頂角などの観測パラメータ
- 波面センサーの測定ノイズ

しかしながら、実際に望遠鏡を使用しオンスカイで観測した時に、これらのモデルによるトモグラフィアルゴリズムが十分に大気揺らぎの影響を反映しているかどうかを検証する必要がある。ELT で MOAO を実現する上で、オンスカイ観測環境下で高性能かつ安定な推定を行えるトモグラフィアルゴリズムの開発が必要不可欠である。しかしながら前述の通り MOAO のトモグラフィアルゴリズムをオンスカイに適用した例はごくわずかであるため、既存のトモグラフィモデルの性能評価は主にシミュレーションや実験室実験などによってなされてきた。実験室系ではコロモゴロフモデルを満たすように人工的に発生させた大気揺らぎを用いている。またガイド星、ターゲット天体も LED など人工的な光源で代用している。これに対しオンスカイ観測では生の大気揺らぎを見るため、理論では表しきれない短時間の大気の変動や気象条件の違いなどがトモグラフィ推定に影響すると考えられる。またガイド星として天体、もしくは上空に打ち上げたレーザー光源といった現実の光源を使うことから、実験室のように安定した波面測定をできていない可能性も生じる。更に、装置を望遠鏡に取り付けることにより望遠鏡自体の周期的な振動や変形が細かい収差変動を生み出すことも指摘されている。

1.4.3 本研究の目標

従来のトモグラフィーモデルがオンスカイ観測の環境においても妥当であるかを議論することは、MOAOの補償性能に向上の余地があるかどうかを判断する上で意義があると考えられる。本研究の目標は、古典的なトモグラフィーモデルでは考慮されていないが、オンスカイ観測環境で推定精度向上の要因となるようなパラメータかどうかの洗い出しを行い、トモグラフィーモデルの改善の可能性を探ることである。今回私は、実際の測定データからトモグラフィック再構成行列を構成する Learn & Apply 法 (Vidal et al, 2010 [34]) を応用して経験的に波面再構成を行う手法を考案した。この手法により波面センサーの測定データ経験的に構成したトモグラフィック再構成行列は、古典的なモデルの仮定を敷くこと無く測定データの統計的性質から再構成に対応する変換関係を決定することができると期待される。この手法を MOAO 実証装置 RAVEN のオンスカイ観測で得られた測定データに適用し、経験的、古典的手法による推定結果の比較や再構成行列の構造の比較を行い、従来のモデルでは含みきれていなかったオンスカイ観測環境における波面推定性能に関わるパラメータがあるかどうかを考察した。

第2章 多天体補償光学実証装置 RAVEN

本研究では、多天体補償光学の実証装置である RAVEN のすばる望遠鏡でのオンスカイ観測のデータを使用した。本章では RAVEN の概要と、研究に関連する具体的な技術やシステムについて具体的に記述する。

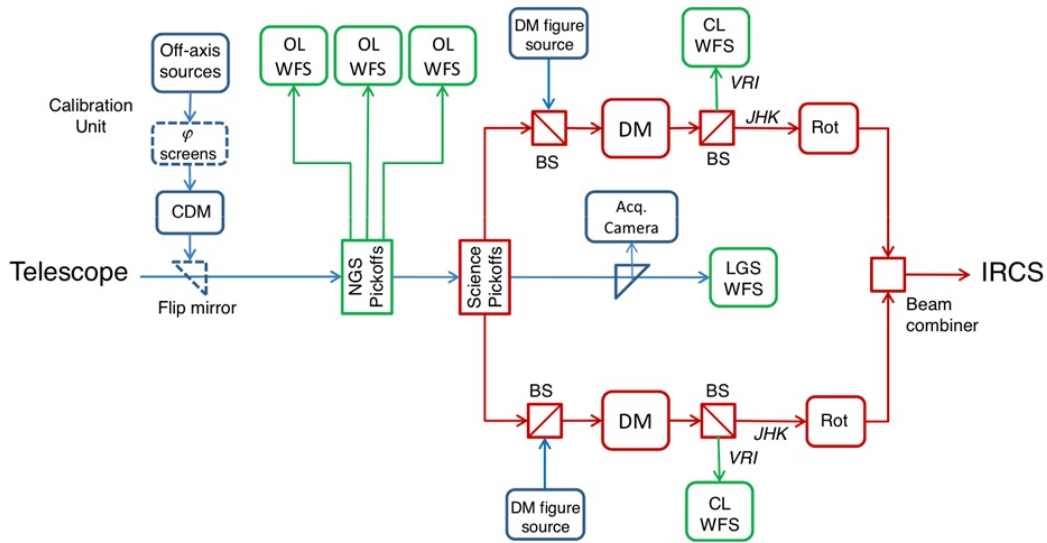
2.1 RAVEN 概要

多天体補償光学 (Multi-Object Adaptive Optics; MOAO) は広い視野にわたって望遠鏡の性能の限界である回折限界に迫るような星像を実現するための革新的な技術であり、現在、世界中で建設が計画されている超大型望遠鏡の高い集光能力と広視野を最大限に活用するためのアイデアとして注目が集まっている。しかしながら多天体補償光学装置を数 10m クラスの望遠鏡に導入するには、開ループ制御やキャリブレーション手法などの挑戦的な技術課題を克服していく必要がある。多天体補償光学実証装置 RAVEN はこうした背景の下、超大型望遠鏡への多天体補償光学装置の実現に向けた技術検証を行うことを目標に開発が進められてきた装置である。RAVEN に課せられるサイエンス要求は表 2.1 にまとめた通りである。

RAVEN はカナダのピクトリア大学のチームを中心に、東北大学と国立天文台ハワイ観測所の協力の元、ハワイ島マウナケア山頂のすばる望遠鏡のナスミス焦点に装着したオンスカイ観測を行うことを想定して開発が進められてきた。2014 年 5 月にはすばる望遠鏡でファーストライトを迎え、8m クラスの望遠鏡での MOAO のオンスカイの実証観測及びサイエンス観測を行った。更に 2014 年 8 月、2015 年 6 月にも引き続きすばる望遠鏡でのオンスカイ観測を実施した。これらの観測により、トモグラフィー推定や多天体分光など多天体補償光学に関わる技術の実証や、多天体補償光学装置を使用したサイエンス観測などの成果を挙げている (Olivier et al 2014([26]))。

パラメータ	要求
AO の種類	多天体補償光学 (MOAO)
観測装置	IRCS (可視光撮像分光装置)
分光波長帯域	0.9 - 4 μm
サイエンスチャンネル数	2
波面センサー数	NGC 用 3 台 + LGS 用 1 台
補償範囲 (Field of Regard)	直径 3.5 分角
サイエンス視野	直径 4 秒角 (角ピックアップアーム)
Ensquared Energy	> 30% (H バンド、 $r_0 = 15\text{cm}$ で 140mas 以内)
スループット	AO188 の 80%
波面センサーの限界等級	$R < 14$ (目標値 $R < 15$)

表 2.1: RAVEN のサイエンス要求 [23]



Functional optical block diagram of Raven.

図 2.1: RAVEN の光学ブロックダイアグラム。破線は切り離し可能なシステムを表す。(RAVEN HP[23]より借用)

2.2 装置設計

ここで説明する RAVEN の光学、機械設計については、Olivier et al.2012 [27]、RAVEN HP [23] の記述を参考にしている。

RAVEN の光学ブロックダイアグラムを図 2.1 に示す。ナスミス焦点での視野直径は 3.5' となっている。

RAVEN には以下のサブシステムがある。

キャリブレーションユニット

実験室で AO システムのテスト及びキャリブレーションを行うための望遠鏡シュミレーター。2.4' の視野内に 7×7 のガイド星配置と軸上のレーザーガイド星を再現でき、DM を用いて地表層大気揺らぎ、2 つの高度 (5km、10km) の高層大気揺らぎを発生させることができる。

開ループ波面センサー (OL-WFS)

RAVEN には自然ガイド星用の 3 台の OL-WFS (NGS-WFS) が備えられており、望遠鏡の焦点面上の 3.5' の領域内領域を巡回する可動式ピックオフ鏡から自然ガイド星からの光を導入し、測定する。

サイエンスピックオフアーム

RAVEN は 2 つのサイエンスタarget に対応するピックオフアームを持っている。 $\rho-\theta$ ステージに取り付けられた 2 つのピックオフ鏡から取り込んだ光はサイエンスリレーに供給される。光路長の変化はトロンボンと呼ばれる機構で補正される。各々のサイエンスアームには、望遠鏡の焦点面に共役な DM と WFS が備えられている (以後アーム内の光学系をサイエンスパスと呼ぶ)。また、重要な目的として、イメージローテーター (IMR) がある。これにより、分光器のスリットに対してサイエンスタarget の像を個別にアライメントすることができる。

ビーム合成装置

2つのサイエンス方向から来る視野4秒角の光をIRCSに供給するための装置。

閉ループ波面センサー (CL-WFS)

サイエンスパスのWFSは非軸上ターゲット方向のキャリブレーションや、観測中のDM形状のモニタリング、サイエンスパス内で独立したSCAOを行うための閉ループAO補正などの目的で使用される。

レーザーガイド星用波面センサー

すばる望遠鏡では軸上ナトリウムレーザーガイド星の使用することが可能なので、RAVENは軸上レーザーガイド星を利用することを想定した設計になっている。これにより自然ガイド星を使った場合よりもスカイカパレッジを大幅に改善することができると期待される。レーザーガイド星からの光は専用の閉ループWFS(LGS-WFS)で測定され、他のNGS-WFSからの測定値と組み合わせて波面補償を行うことが可能である。

2.3 自然ガイド星用波面センサー

前説で触れた自然ガイド星用波面センサー(以後単にOL-WFSと呼ぶ)について更に詳しく説明する。RAVENのOL-WFSは1.3章で触れたシャックハルトマン型波面センサーという種類である。3台のOL-WFSは、望遠鏡の焦点面から15mm前方の位置に、Y字型に配置されている(図2.2)。また、それぞれのOL-WFSは、 $x-y$ 軸方向に動く可動盤に装着されており、WFSのレンズセットが望遠鏡や装置に対して回転を起こすことなくガイド星配置の変化に追従することができる。NGS用WFSの様子は表2.2の通りである。

有効ピクセル	128 × 128
ピクセルサイズ	24 × 24 μm
センサー領域	3.1 × 3.1 mm
副開口	10 × 10
副開口あたりのピクセル数	12 × 12
ピクセルスケール	0.38"/ pix
WFS FoV ϕ	4.8"

表 2.2: NGS 用 OL-WFS の仕様 [27]

図 2.3 は OL-WFS の光学レイアウトである。各 OL-WFS のアームに入射した光はピックアップミラーを経て色消しレンズで平行光に直された後、各マイクロレンズアレイ上に口径 3.0mm の瞳像を作る。ピッチ長さ 300 μm のマイクロレンズによって集光した光はリレー光学レンズを経て検出素子上にスポットを形成する。各 OL-WFS は望遠鏡開口に共役となっており、マイクロレンズアレイによって開口の 10 分の 1 の局所的波面の傾きの情報を入手することだできる。すばる望遠鏡の口径を 8m としたとき、マイクロレンズによって集光できる領域の物理的サイズは 0.8m である。

各 WFS を備えているアームはそれぞれ独立した光学系を持っていることは MOAO の閉ループ制御では問題となることがある。各アームが視野依存性のある収差や非線形誤差などの独立した特性を持つ場合、WFS の測定領域と補償領域が一致する閉ループ制御の AO システムでは通常は特に問題にならないが、RAVEN のような閉ループ制御の AO システムでは補償と波面測定が別々の光学パスで行われるので関係性を予め決めておかないと正確な補償ができない。そのため、事前に

OL-WFS の光学パスと後述のサイエンスターゲットをピックアップする光学系（サイエンスパス）のキャリブレーションを正確に行う必要がある。

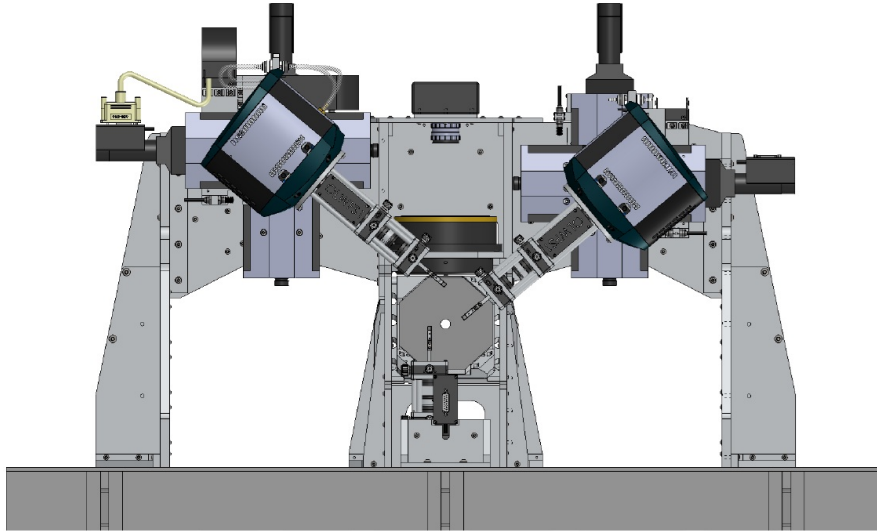


図 2.2: OL-WFS の CAD モデル (RAVEN HP より借用 [23])。各 WFS は鉛直下方を基準に 0° 、 -130° 、 130° に配置されている。

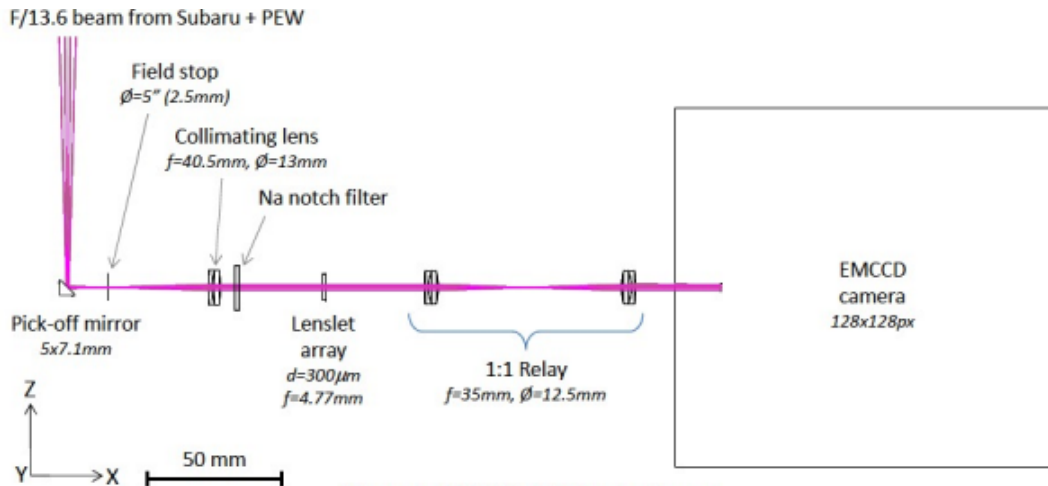


図 2.3: OL-WFS の光学レイアウト (Olivier et al,2012 [27])

2.4 サイエンスパス

サイエンスパスは複数のサイエンスターゲット周辺の限られた領域のみを切り取るサイエンスピックアップアームと、サイエンス方向の大気揺らぎの補償及び赤外線観測装置へ補償された波面を提供するためのサイエンスリレーから成り立っている。サイエンスピックアップミラーは望遠鏡焦点面の後方 20mm に OL-WFS のピックアップアームと干渉しないように配置されている。これは OL-WFS 用のピックアップアームとの干渉を避けるためである。ピックアップアームは $\rho - \theta$ 回転台に

取り付けられており、角度とアームの長さを変えるよりサイエンスタargetの位置を捉える。この時、サイエンスパス毎にの光路長の変化が生じるため、トロンボーンと呼ばれる機構の長さを調節することにより各サイエンスパスの光路長を常に同一に保つことができる。これにより各パスで共通な波面補償が可能となる。

光路補正済みの光は非軸対称楕円ミラー（OAE）を経てDMで補正される。このDMは望遠鏡瞳面上のサイエンスタarget周辺の補償領域と共役となっている。DMは磁力によって変形する。光束のフットプリントが当たるアクチュエータ数は11×11である。また、DMは傾きの補正が可能なTip-tiltステージ上に置かれているため、Tip-Tiltの変動だけ独立して補正を行うことができる。

2.5 波面補償の流れ

RAVENではトモグラフィーの手法によって波面推定を行う。前章で触れた通り、トモグラフィーは複数のガイド星から取得した大気揺らぎの情報から、望遠鏡の開口上の大気揺らぎを3次元的に推定する手法である。これにより1つのガイド星を用いた補償よりも広い領域を補償することが可能となる。RAVENでは前述の3台のOL-WFSを用いて大気揺らぎを測定し、トモグラフィー法によって上空の揺らぎを求める仕組みとなっている。また、1台の軸上LGS用WFを付属で使用することで更に補償精度を上げることも可能である。トモグラフィーを行う上で大気揺らぎが支配的に寄与する大気層の高度を決定する必要があるが、これは別の測定（SLODER）から求めた大気層の高度と強度分布を利用する。MCAOと違い補正する方向はサイエンスタargetの周囲だけで良いので、推定された上空の大気揺らぎから、サイエンスタarget方向の補正領域の揺らぎを切り取ってDMの補正量を決める。多天体補償光学のシステムは大気揺らぎを測定する領域が補正領域と異なっているため開ループ制御となっている。RAVENのシステムの全体像を図2.3に示す。

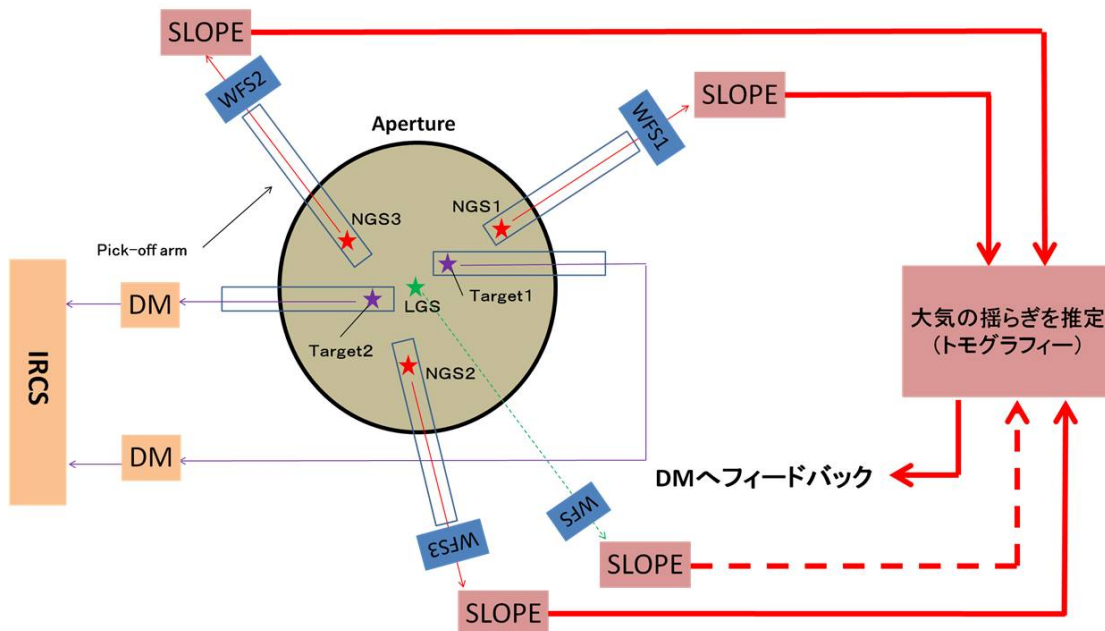


表 2.3: RAVEN の波面補償システム概要

第3章 経験的トモグラフィック波面推定

本章では、トモグラフィの一種である Learn & Apply 法について説明する。また、この手法を応用して実際の測定データを基に経験的にトモグラフィック波面推定行列を構成する方法を定式化し、従来のトモグラフィモデルとオンスカイ環境を比較するための方法について説明する。

3.1 Learn & Apply 法

3.1.1 概要

Learn & Apply 法は MOAO におけるトモグラフィアルゴリズムの一種である。この手法はヨーロッパ南天天文台 (ESO) によって建設中の超大型望遠鏡 E-ELT (Eulopian-Extremely Large Telescope) に導入を予定している多天体補償光学装置 EAGLE (Elt Adaptive optics for GaLaxy Evolution) のトモグラフィック波面再構成法として提案されているもので、現在 EAGLE に関する技術実証を目的とした CANARY と呼ばれる装置でオンスカイ試験が行われている (Vidal et al,[34])。

1.3 章で説明した通り、古典的トモグラフィのアプローチでは、各ガイド星に共役な開ループ波面センサー (OL-WFS) の測定データ m ($[N_s \times 1]$ の列ベクトル) から補償領域の大気揺らぎ波面 w ($[N_w \times 1]$ の列ベクトル) への線形変換

$$w = Rm \quad (3.1)$$

を実現する再構成行列 R ($[N_w \times N_s]$ の行列) を、トモグラフィに關係するパラメータを事前モデル化した上で計算している。しかしながら MOAO システムでは、開ループ制御ゆえに WFS と DM のキャリブレーションを直接行えないなどの問題があり、トモグラフィモデルのパラメータを事前に用意することに課題がある。

これに対して Learn & Apply 法では、実際にオンスカイで測定した大気揺らぎのデータを基に複数の OL-WFS の測定データと補償方向方向に共役な DM に付属した WFS の測定データを關係付ける行列を構成するアプローチをとる。

3.1.2 再構成行列の導出

ここでは Learn & Apply 法によるトモグラフィック再構成行列を定式化する。

N_s 個の測定点を持つ WFS で測定されるデータを $[N_s \times 1]$ の列ベクトル m を用いて表し、サイエンスタゲット方向の補償領域に共役な WFS の測定データを $m_{sciences}$ 、自然ガイド星からの波面を測定する i 番目の OL-WFS の測定データを m_j と、それぞれ添字を付けて区別する。更に、 m_{OL} はシステムの全ての OL-WFS ($j = 1 \sim N_G$ 、ただし N_G はガイド星の数) の測定データを縦方向に

結合した $[N_s N_G \times 1]$ の列ベクトル

$$\mathbf{m}_{OL} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^1(t) \\ \mathbf{m}^2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{m}^{N_G}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

を定義する。

今、時刻 t の複数の OL-WFS の測定値とサイエンスタarget方向の WFS $\mathbf{m}_{science}$ の測定値が変換行列 R ($[N_s \times N_s N_G]$ の行列) によって関係付けられているとすると、下の様な線形関係式で書くことができる。

$$\mathbf{m}_{science}(t) = R \mathbf{m}_{OL}(t) \quad (3.3)$$

揺らぎの波面はあるサンプリング周波数で離散的に測定されるデータであり、ある時間帯 $T_s < t < T_e$ の間に測定されたデータセットは、各時刻で測定したデータ列ベクトル \mathbf{m} を時間方向に結合させた行列 M として表現すると、式 3.3 の関係式を次のように拡張することができる。

$$M_{science} = R M_{OL} \quad (3.4)$$

ただし、この時サンプリング周波数を F_s とするとデータ点数は $L = F_s \times (T_e - T_s)$ となるので、 $M_{science}$ は $[N_s \times L]$ 行列、 M_{OL} は $[N_s N_G \times L]$ 行列である。

式 (3.4) の関係行列を最小二乗法によって解く。最小二乗のコスト関数を行列の各成分の差の二乗のアンサンプル平均をとったものとして

$$F = \langle \|M_{science} - R M_{OL}\|^2 \rangle \quad (3.5)$$

と定義した時、最小二乗法による行列 R の推定値 \hat{R} は

$$\hat{R} = \underset{R}{\operatorname{argmin}} F = \underset{R}{\operatorname{argmin}} \langle \|M_{science} - R M_{OL}\|^2 \rangle \quad (3.6)$$

と求めることができる。

式 (3.5) を解くことにより、行列 R の最小二乗推定解は次のような形で表せる。(詳細な計算過程は AppendixA に記載した。)

$$\hat{R} = M_{science} M_{OL}^T (M_{OL} M_{OL}^T)^{-1} \quad (3.7)$$

更に、データサイズをできるだけ長くすると ($L \rightarrow \infty$)、式 (3.6) の右辺の 2 組の行列の積 $M_{science} M_{OL}^T$ 、 $M_{OL} M_{OL}^T$ は共分散行列 $C_{science,OL}$ 、 $C_{OL,OL}$ に近づく。従って、推定解 \hat{R} は

$$\hat{R} = C_{science,OL} (C_{OL,OL})^{-1} \quad (3.8)$$

と書ける。

式 (3.6) または式 (3.7) の \hat{R} は、オンスカイでの OL-WFS 測定データとサイエンスタarget方向の測定データを与えたときに、両者を繋ぐ最適な線形関係を表しており、オンスカイデータから構成したトモグラフィック再構成行列となっている。

3.1.3 Learn & Apply 法のオンスカイ観測への適用

Learn & Apply 法を実際のオンスカイでのサイエンス観測に適用することを考える。Learn & Apply 法の目的は最小二乗推定解 \hat{R} をそのままトモグラフィー推定に用いるのではなく、トモグラフィーモデルに関するパラメータを実際のオンスカイ環境に合わせて回収することにある。関係するパラメータとしては、

- 大気揺らぎ層の高度プロファイル: h
- 高さ h における大気揺らぎパラメータ: $r_0(h)$, $L_0(h)$
- 装置内部の位置関係: WFS の検出素子のシフト x_j, y_j 、光軸方向ずれ z_j 、回転 θ_j 、拡大率 G_j など

次の式で表されるように実際のデータから求めた共分散行列 $C'_{science,OL}$, $C'_{OL,OL}$ とモデル計算によって求めた共分散行列 $C_{OL,OL}(h, r_0(h), L_0(h), (\alpha_j \beta_j))$, $C_{science,OL}(h, r_0(h), L_0(h), (\alpha_j \beta_j))$ の差の二乗 ϵ が最小となるようなパラメータを決める。

$$\epsilon = \|C'_{OL,OL} - C_{OL,OL}(h, r_0(h), L_0(h), (\alpha_j \beta_j))\|^2 + \|C'_{science,OL} - C_{science,OL}(h, r_0(h), L_0(h), (\alpha_j \beta_j))\|^2 \quad (3.9)$$

サイエンス観測の場合、大気揺らぎを測定するための OL-WFS はガイド星から大気揺らぎ情報を測定しているが、CL-WFS はガイド星ではなくサイエンスターゲットを捉えているのが普通である。この場合 CL-WFS の測定データは利用することができない。そのため、図 3.8 の共分散行列のうち $C_{science,OL}$ は求まらない。この場合、図 3.9 の $C_{science,OL}$ の項は予め装置のパラメータから計算することで補完する。しかし、図 3.9 の第 1 項の最小化だけで十分な信頼性を確保することが可能である [34]。

まとめると、Learn & Apply 法は以下の 2 段階の操作から成り立っている。

Learn Step 実際のオンスカイのデータから大気揺らぎプロファイル、装置内部の位置関係などのパラメータを回収

Apply Step 回収したパラメータを基にコンピュータ上で共分散行列 $C_{OL,OL}$ 及び $C_{science,OL}$ を構成し、トモグラフィック再構成行列 \hat{R} 適用

3.2 経験的トモグラフィー

Learn & Apply の手法には OL-WFS 測定値と CL-WFS 測定値から構成した行列をそのままトモグラフィック推定に用いる意図は無く、あくまでもデータの統計量からトモグラフィーモデルに関するパラメータを回収することが目的である。本研究では、敢えて図 3.7 のように OL-WFS と CL-WFS の測定データから構成した変換行列の推定解 \hat{R} をトモグラフィック推定に適用することを考える。すなわち、実際のオンスカイ観測で測定されたデータより構成した行列

$$R_{EM} = M_{science} M_{OL}^T (M_{OL} M_{OL}^T)^{-1} \quad (3.10)$$

を用いて OL-WFS データからサイエンスターゲット方向の揺らぎの推定値 $\hat{M}_{science}$ を求める。

$$\hat{M}_{science} = R_{EM} M_{OL} \quad (3.11)$$

本研究では行列 R_{EM} を経験的トモグラフィック再構成行列と定義し、式 (3.11) による波面推定を行うことを経験的トモグラフィーと呼ぶ。

Learn & Apply 法による経験的トモグラフィーを用いるメリットは次の2つである。

1. MOAO の開ループ系では直接決めることができない装置由来の光学収差や WFS と DM の関係行列などのキャリブレーションが可能である
2. 事前に古典的なトモグラフィーモデルを用意しなくても、オンスカイの特性を反映した再構成行列を決めることができる

第4章 データ解析

4.1 行った解析と目的

本研究は、従来のトモグラフィック推定で考慮されているモデルが実際のオンスカイ観測時に効果を発揮できているのか、また十分な性能が発揮できていないとしたら推定精度の改善は可能なのかという問題意識に基づいて行うものである。多天体補償光学の波面推定の基本となるトモグラフィックモデルについて、実際のオンスカイ観測における妥当性を評価し、推定性能の劣化に寄与すると考えられるパラメータを見積もることが目的である。

今回私は、2014年5月と2015年6月に国立天文台ハワイ観測所のすばる望遠鏡を用いて行われた多天体補償光学実証 RAVEN のオンスカイ観測の大気揺らぎ測定値を用いて、古典的トモグラフィックモデル波面推定を行う行列を実際に WFS で測定された大気揺らぎのデータから経験的に構成する手法を試した。

4.2 RAVEN データ

RAVEN には5つの自然ガイド星 (Natural Guide Star : NGS) 用波面センサー (Wavefront Sensor : WFS) と1つの on-axis レーザーガイド星 (Laser Guide Star LGS) 用波面センサーが備えられている。今回の解析ではこのうち LGS 用の波面センサーを除く5つの波面センサーで取得したデータに対して、2つのサイエンスパス内に備えられている閉ループ波面センサー (Closed Loop WFS : CL-WFS) で取得した slope のデータと、3つの開ループ波面センサー (Open Loop WFS : OL-WFS) で取得した slope のデータとの関係を表す行列を実際のデータから経験的に求める。ここではまず RAVEN の WFS 測定値の利用方法と、解析にあたっての変数の設定について記述する。

4.2.1 WFS の測定値

2.3章で述べた通り RAVEN では Shack-Hartmann 型波面センサーを採用している。RAVEN の Shack-Hartmann センサーは 10×10 のマイクロレンズアレイによって副開口に分けられている。センサーに大気揺らぎの影響を受けた波面が入射すると、マイクロレンズで分割された波面が CCD 検出器上にスポットとして結像する。このスポットの基準値からの移動量を測ることによって大気揺らぎ波面の局所的な傾斜の情報を知ることができる。RAVEN のデータとして格納されている値はスポットの移動量の情報であり、スポットが基準値から何 pixel 分移動したかというデータが記録されている。このスポットの移動量は波面の局所的傾斜と対応した量であるので以後 Slope と呼ぶことにする。波面センサーの設計、仕様に関しては 2.3 章に記載した通りである。

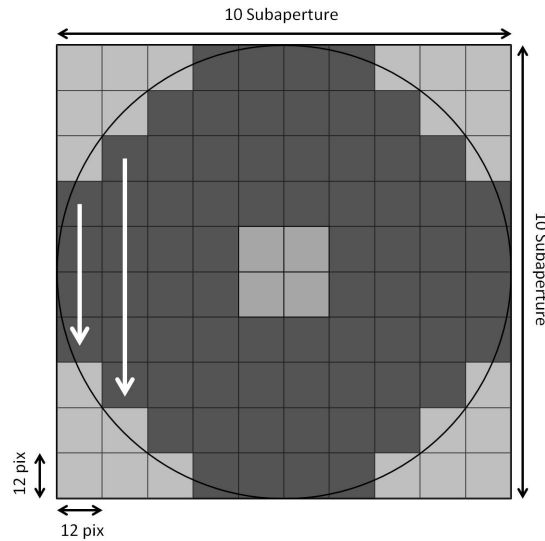


図 4.1: RAVEN マスク形状。10 × 10 の副開口のうち、円形の範囲内の 72 領域（濃いグレーのマス目）を有効な副開口として使用する。矢印はデータセットに記録されている順番を表す。

4.2.2 データの格納

RAVEN の WFS で得られた測定値は行列の形式で記録されている。このデータ行列をデータセットと呼ぶことにする。データの格納のされ方について詳しく記述する。RAVEN の WFS の副開口は全部で 10 × 10 個あるが、望遠鏡の口径は円形であり、かつ副鏡の陰となる部分が存在するため、実際には図 4.1 のようにマスクされている。図 4.1 の濃いグレーとなっている 72 個の副開口で測定した Slope データが利用可能である。データの記録は図 4.1 の矢印の順番で行われる。スポットの移動量は x 軸方向と y 軸方向の 2 成分があり、データ行列の前半の 72 成分は x 軸方向の Slope、後半の 72 成分は y 軸方向の Slope が記録される。よって 1 回の大气揺らぎ測定で、WFS あたり 144 個の測定値が記録される。1 回の測定で得られるデータの単位をフレームという。WFS は毎秒数 100 回ほどの高速で撮像を繰り返しており、観測時間中は絶えず大气揺らぎデータを記録し続ける。よってデータセットは 1 回の測定で記録した 144 個の列ベクトルを全フレーム結合した形式となっている。概ね、1 回の観測は 3 分程度であり、数万フレームのデータが生成される。

4.2.3 変数の設定

RAVEN の各 WFS である時刻に取得した 1 フレーム分の Slope データを次の様な列ベクトルで表す。

$$s_t^i = \begin{pmatrix} s_{1,t}^i \\ s_{2,t}^i \\ \vdots \\ s_{2N_s,t}^i \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

ここで、上付き添字 i は WFS の番号を表し、OL-WFS なら $i = 1 \sim 3$ 、CL-WFS ならサイエンス・チャンネル 1、2 に対応して $i = 4$ 、 $i = 5$ となる。また、本研究では用いないが、軸上 LGS 用の OL-WFS の場合の添字は $i = 6$ となる。下付き添字は各 WFS のスポットの位置を示すものである。

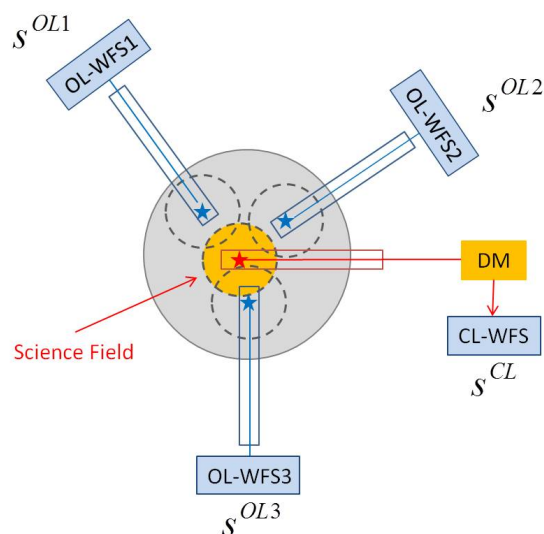


図 4.2: 解析に用いる測定値古典的トモグラフィモデルと異なり、CL-WFS の測定値は実際にオンスカイで測定した大気揺らぎのデータを用いる。

ここで N_s は WFS のスポットの総数を表し、RAVEN のマスクの場合 $N_s = 72$ である。データの格納順番として $i = 1 \sim 72$ には x 方向の、 $i = 73 \sim 144$ には y 方向の slope データがそれぞれ記録されるものとする。また、 t は時刻に関する添字である。

ここで更に、OL-WFS で測定された測定値を 3 つの OL-WFS のデータベクトルを縦方向に結合させた列ベクトル x_t を定義する。

$$x_t = \begin{bmatrix} s_t^1 \\ s_t^2 \\ s_t^3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

x_t は $[432 \times 1]$ の列ベクトルで、ある時刻 t で 3 つの NGS から取得した大気揺らぎ波面の Slope 測定値を指す。

RAVEN のには 2 つのサイエンスチャンネルがあるが、今回の解析では、OL-WFS の測定値とどちらか一方チャンネル方向の大気揺らぎの関係性がわかれば良い。従って CL-WFS の測定値を y_t として次のように書き換えることにする。

$$y_t = \begin{cases} s_t^4 & (\text{SciencePath1}) \\ s_t^5 & (\text{SciencePath2}) \end{cases} \quad (4.3)$$

y_t は $[144 \times 1]$ の行列であり、ターゲット方向の大気揺らぎ波面の Slope 情報となる。

4.3 解析の流れ

RAVEN には 5 つの自然ガイド星 (Natural Guide Star : NGS) 用波面センサー (Wavefront Sensor : WFS) と 1 つの on-axis レーザーガイド星 (Lesar Gude Star LGS) 用波面センサーが備えられている。このうち LGS 用の波面センサーを除く 5 つの波面センサーで取得したデータに対して、2

つのサイエンスパス内に備えられている閉ループ波面センサー（Closed Loop WFS : CL-WFS）で取得した slope のデータと、3つの開ループ波面センサー（Open Loop WFS : OL-WFS）で取得した slope のデータとの関係を表す行列を実際のデータから経験的に求める手法の定式化について説明する。トモグラフィの手法による波面推定は、行列演算によって測定値ベクトルから推定波面ベクトルを計算することである。3章ではトモグラフィック波面推定に使う変換行列（トモグラフィック推定行列）を導出したが、ここでは実際のデータ行列を利用してトモグラフィック推定行列を行う方法、及び、古典的トモグラフィーとの性能の比較方法について記述する。

4.3.1 経験的トモグラフィック推定行列の計算

OL-WFS の測定値と CL-WFS の測定値が変換行列 R によって関係付けられているとすると、下の様な線形関係式で書くことができる。

$$y = R \cdot x \quad (4.4)$$

ただし以降では簡略化のため単にデータ列ベクトル x 、 y と表記した場合、ある時刻 t のデータという意味で使うことにする。データ OL-WFS の情報からサイエンスターゲット方向の真の大気揺らぎを推定するという古典的トモグラフィモデルの議論とは異なり、式 (4.4) はオンスカイでのオンスカイ同士を結びつける関係式であることに注意が必要である。従って、式 (4.4) の左辺の y_t は CL-WFS で実際にオンスカイで取得したデータが必要となる。

揺らぎの波面は決まったサンプリング周波数で離散的に測定されるデータであり、ある時間帯 $T_s < t < T_e$ の間に測定されたデータセットはフレーム毎のデータベクトル s^i を時間方向に結合させた行列 S^i として表現できる。この時サンプリング周波数を F_s とするとデータフレーム数は $L = F_s \times (T_e - T_s)$ となるので、行列 S^i は $[2N_s \times L]$ 行列となる。

$$S^i = \{s_{T_s}^i, \dots, s_{T_e}^i\} \quad (4.5)$$

測定値 x 、 y についても同様に時間方向に行列を結合させたデータセット行列 X 、 Y を定義すると、式 4.4 の関係式を次のように拡張することができる。

$$Y = R \cdot X \quad (4.6)$$

RAVEN のシャックハルトマン波面センサーで測定したデータの場合、 X は $[144 \times L]$ の行列、 Y は $[432 \times L]$ の行列、変換行列 R は $[144 \times 432]$ の行列である。

4.3.2 計算手順

経験的トモグラフィーによる波面推定精度の評価は以下の3段階の手順に沿って行う。

1. 経験的トモグラフィック推定行列 \hat{R} の計算

オンスカイで取得した測定値を元に経験的トモグラフィック推定行列を計算する。行列計算のために使用するデータはデータ行列から範囲を指定して回収する。この作業を「データ記録」と呼ぶ。この時、データ記録を行う始点時刻 T_s と終点時刻 T_e を指定する。このデータ範囲を「データ記録時間」と呼ぶ。行列計算に用いるサンプル数 L はデータ記録時間の始点と終点 T_s 、 T_e 、サンプリング周波数を f_s と書くと $L = (T_e - T_s) \times f_s$ と表せる。記録したデー

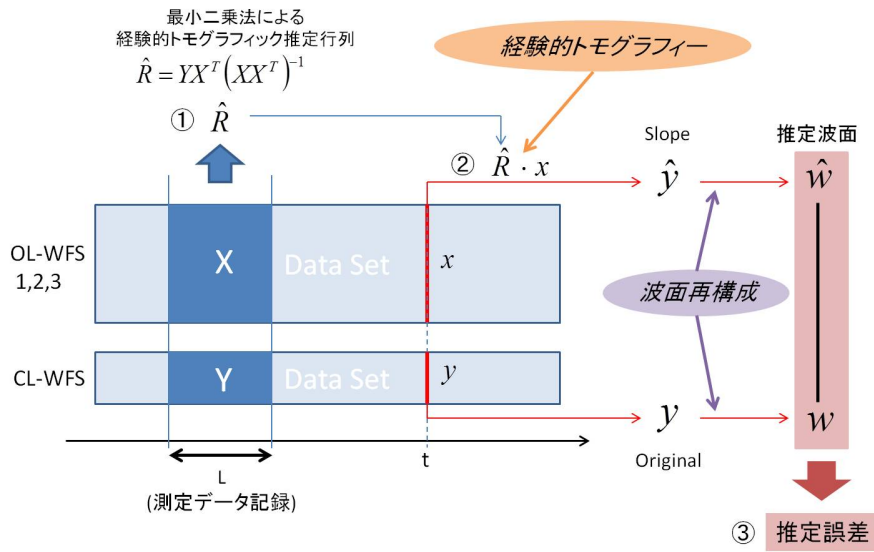


図 4.3: 解析の流れ

タは 3 台の OL-WFS の測定値を X 、CL-WFS の測定値を Y と表し、経験的トモグラフィック推定行列の最小二乗推定解

$$R_{EM} = YX^T(XX^T)^{-1} \tag{4.7}$$

に代入する。これにより経験的トモグラフィック推定行列を計算する。(図 4.3 のステップ 1)

2. 経験的トモグラフィックの実行

記録したデータを元に構成した経験的トモグラフィック再構成行列 R_{EM} は、3 台の OL-WFS の測定データとサイエンスタarget 方向の大気揺らぎ波面の Slope とを結びつける行列になっている。この R_{EM} を式 (4.4) のように波面推定に使う。

$$\hat{y} = R_{EM}x \tag{4.8}$$

この操作を「経験的トモグラフィック」と呼ぶ。 \hat{y} は経験的トモグラフィックによるサイエンスタarget 方向の大気揺らぎ波面の Slope 推定値を表す。経験的トモグラフィック推定行列は古典的モデルと同様にガイド星配置やその時の観測コンディションに依存していると考えられる。従って経験的トモグラフィックは推定行列の計算に用いたデータと同じデータセットの OL-WFS 測定値に対して行う。また、式 (??) によって求まる推定行列は、OL-WFS の Slope 測定値からサイエンスタarget 方向の大気揺らぎに相当する Slope を推定する行列となっていることに注意する。

3. 推定誤差の評価

前述の計算から導かれる経験的トモグラフィック推定行列は、OL-WFS の Slope 測定値からサイエンスタarget 方向の大気揺らぎを CL-WFS で測定した際の Slopes を推定する形になっている。一方で古典的手法では OL-WFS の測定値から直接補償方向の大気揺らぎ波面を推定する行列を計算している。このため、経験的トモグラフィックによる波面推定精度の評価

や古典的手法との性能比較を行うためには、推定によって求めた Slope を波面位相に復元する波面再構成プロセスが必要である（1.3章参照）。すなわち、

$$w = (G^T G)^{-1} G^T s \quad (4.9)$$

という計算によって揺らぎの波面位相 w を回復する。

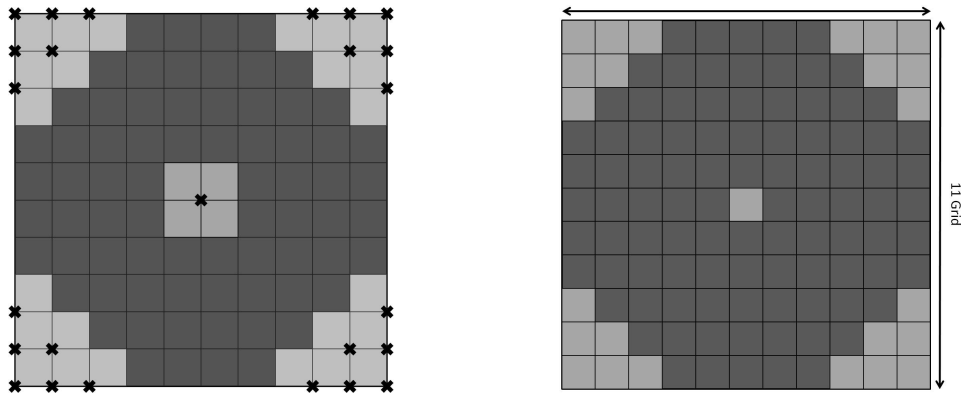


図 4.4: 左図：RAVEN のシャックハルトマン型 WFS のマスク形状。×印は、Slope の情報が無いため波面位相が計算できないグリットの位置を表す。右図：波面のマスク形状。濃いグレーの領域は、WFS で測定した Slope から再構成によって波面位相に直すことができるグリットを表す。

4.3.3 評価方法

波面誤差の評価には二乗平均平方根（Root Mean Square; RMS）という指標を用いる。 i 番目のグリット上で定義される波面の値を w_i 、グリット数を N （RAVEN の場合 96）、波面の平均値を \bar{w} とすると波面 RMS は以下のように定義される。

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^N (w_i - \bar{w})^2} \quad (4.10)$$

また、推定精度に見積もりには、推定後の波面 \hat{w} から真の波面 w （CL-WFS の測定値）を引いた残差の RMS として、波面誤差（WaveFront Error; WFE）を次のように定義する。

$$WFE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^N (\hat{w}_i - w_i)^2} \quad (4.11)$$

データセットの全フレームに対して経験的トモグラフィー、波面再構成を行い、真の波面（CL-WFS 測定値）の RMS と推定による波面残差 WFE を計算する。

4.4 行列 X の特異値分解を用いた \hat{R} の解

前節では最小二乗法を用いて経験的トモグラフィック再構成行列 R_{EM} を推定する式を導出したが、この最小二乗解は行列 X の特異値の小さいモードに起因するノイズを含むことが知られてい

る。このように不要モードによるノイズを制限するための方法として、OL-WFS データセット行列 X に対して特異値分解 (Singular Value Decomposition : SVD) と呼ばれる手法を適用する。特異値分解、及び関連する項目である固有値・固有ベクトルについては Appendix A にて詳細に記述する。

行列 X の特異値分解とは $[N \times L]$ の行列 X を、

$$X = \begin{bmatrix} u_1, u_2, \dots, u_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_N & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_L^T \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

と表すことである。ただし今は、スポット数 N に比べて時間情報すなわちデータセットのフレーム数 L の法が多い状況を考えるものとする。ここで、 γ_j は特異値、 u 、 v は特異値ベクトルと呼ばれる。 U_i および V_j はそれぞれ $[N \times N]$ 、 $[L \times L]$ の行列で次のように定義する。

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_N \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_N \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

特異値ベクトルはそれぞれ正規直行系を成す。

$$U^T U = V^T V = I \quad (4.15)$$

表 4.12 の右辺を展開すれば、

$$X = \sum_{j=1}^N \gamma_j u_j v_j \quad (4.16)$$

を得る。

原理的には式 (4.7) から変換行列 R_{EM} を求めることができるが、 XX^T が正則行列ではない場合は逆行列を求めることができない。これは XX^T の固有値にゼロが含まれていることと同値である。

X の特異値分解式 (4.16) を用いて \hat{R} の最小二乗解 4.7 を表すことを考える。

$$\begin{aligned} X^T (XX^T) &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{\gamma_j} v_j u_j^T \\ &= \mathbf{\Gamma}^{-1} U^T \end{aligned} \quad (4.17)$$

ここで、 $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ は

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\gamma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\gamma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/\gamma_N & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

という対角成分が特異値の逆数であるような行列となる。式 (4.18) を用いると最小二乗解式 (??) は次のようになる。

$$\hat{R} = YV\mathbf{\Gamma}^{-1}U^T \quad (4.19)$$

4.5 擬似逆行列による \hat{R} の解

前説で導いた SVD による推定解式 (4.19) において、特に小さい特異値 γ_j があるとき OL-WFS と CL-WFS の測定値の関係からは決めることができない無関係なモードが増幅され、推定解 \hat{R} に大きな誤差が生じる結果となることが知られている (Appendix A 参照)。また特異値がゼロに極めて近い値を持つと式 (4.19) の右辺の Γ^{-1} に含まれる特異値の逆数が計算不能となる問題もある。このような問題を回避し、無関係なモードによる寄与を低減するための方法として、非常に小さい特異値 $\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_M$ を除外する方策が採られる。

特異値は大きさ順に並んでるとし、ある基準値に満たない特異値 ($j = r$ 番目以下) を除去した

$$X^\dagger = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j} v_j u_j^T \quad (4.20)$$

を式 (4.7) の $X^T (X X^T)^{-1}$ の代わりとして用いる。これにより推定解 \hat{R} は

$$\hat{R} = Y X^\dagger \quad (4.21)$$

となる。式 (??) で導入した X^\dagger は擬似逆行列 (pseud invers) の一種である。本研究では、変換行列の推定方法としてこの擬似逆行列を用いた解法を用いる。

4.6 データ

今回の解析で使用したデータについて説明する。

4.6.1 データの選定

本研究では 2014 年と 2015 年にすばる望遠鏡で行われた RAVEN のオンスカイ観測で得られた WFS の測定値を使用して解析を行った。解析に使うデータセットを選定するにあたって次の3つの基準を設けた。

1. サイエンスターゲットとして明るい星を見ている場合である (本当のサイエンス観測ではない)
2. サイエンスパス内の DM が稼働していない (AO モードではない) 観測である
3. 観測が長時間行われ、データセットに含まれるフレーム数が十分である

RAVEN の波面センサーは毎秒 100 回から 250 回で大気揺らぎの波面を測定している。ただし、サイエンスパス内の閉ループ WFS に関しては、実際のサイエンス観測の場合、銀河などの広がった淡い天体からの光を測定しているため、サンプリング周波数を極端に落としていることがある。今回の解析ではデータの十分な統計を取るという点から、開ループ WFS と閉ループ WFS で同じサンプリング周波数で測定したデータを使うことにする。

4.6.2 使用データ

まず、観測コンディションを示すパラメータについて説明する。

観測年月日及び観測開始時刻

いずれもハワイ時間 (HST) での表記である。データには測定を開始した時刻が記録されている。以後、データセットを区別する時は日付と観測開始時刻のインデックスを呼称として使用することにする。

AO ステータス

いずれのサイエンスチャンネルにおいても NOAO、つまり AO による補償を行っておらず、DM が稼働していない観測のデータのみを使用する。

フレームレート

1 秒間に取得したフレーム数。OL-WFS と CL-WFS でフレームレートが異なる観測のデータは基本的には使用しない。

データサイズ

測定が行われた時間サイズを T 、データセットに含まれるフレーム数を L とする。時間サイズは $T = L/F_s$ として求めているが、一部フレームに欠陥がある場合があるので、あくまで目安として考えるべきである。

フリード長 r_0

大気コンディションの指標の一つでシーイングと対応する量である。 r_0 が大きくなほどシーイングが良いことを示している。

アウトースケール L_0

大気コンディションの指標の一つでトモグラフィーのモデルの中で考慮されるパラメータである。

ガイド星配置

3 つの自然ガイド星と 2 つのサイエンスターゲットの位置を示している。OL は自然ガイド星、CL はサイエンスターゲットを指す。

大気揺らぎの強度分布

RAVEN では波面センサーを使った SLODAR と呼ばれる測定から大気揺らぎの高度プロファイルを推定している。縦軸が高度、横軸が該当する高度の大気揺らぎの強度を示している。
観測

本研究の解析に用いたデータセットを以下に示す。

20140514_043709

観測の詳細

呼称	20140514_043709	
観測年月日 (HST)	2014/5/14	
観測開始時刻 (HST)	4 h 37 m 09 s	
AO ステータス	Ch 1	NOAO
	Ch 2	NOAO
フレームレート	F_s (Hz)	250
データサイズ	T (秒)	172.80
	L	43199
フリード長	r_0 (m)	0.22402
アウトースケール	L_0 (m)	40

表 4.1: 観測の詳細

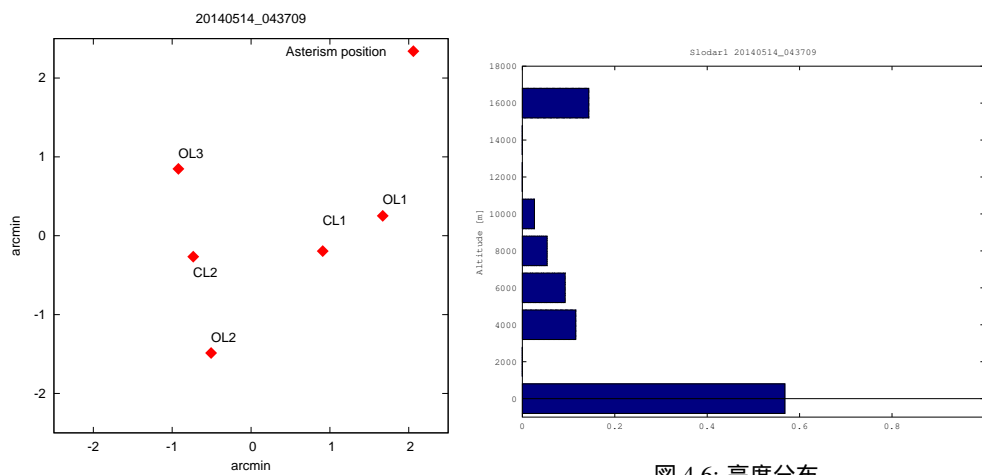


図 4.5: ガイド星配置

図 4.6: 高度分布

20140515_005644

観測の詳細

呼称	20140515_005644	
観測年月日 (HST)	2014/5/15	
観測開始時刻 (HST)	0 h 56 m 44 s	
AO ステータス	Ch 1	NOAO
	Ch2	NOAO
フレームレート (Hz)	100	
データサイズ	T(s)	171.82
	L	17182
フリード長	r_0 (m)	0.53379
アウトースケール	L_0 (m)	10

表 4.2: 観測の詳細

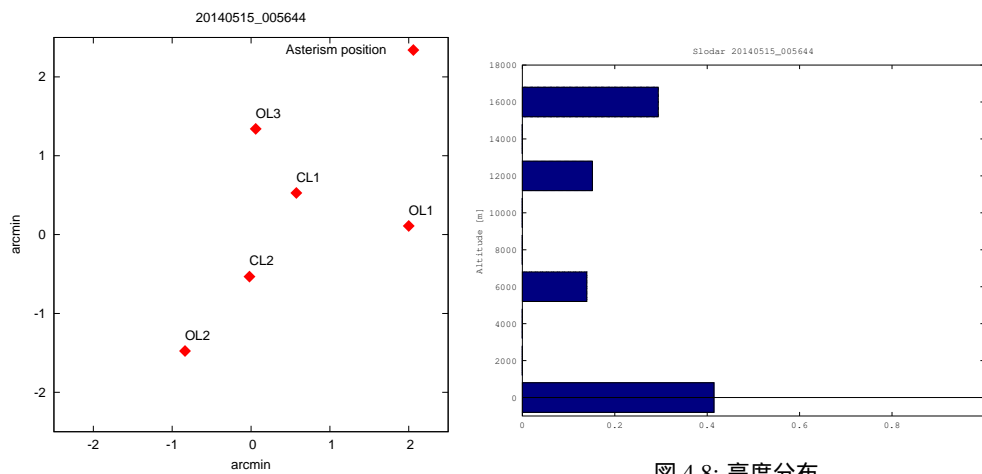


図 4.7: ガイド星配置

図 4.8: 高度分布

20150623_195319

観測の詳細

呼称	20150623_195319	
観測年月日 (HST)	2015/6/23	
観測開始時刻 (HST)	19 h 53 m 19 s	
AO ステータス	Ch 1	NOAO
	Ch2	NOAO
フレームレート (Hz)	150	
データサイズ	T(s)	131.41
	L	19711
フリード長	r_0 (m)	0.22400
アウトースケール	L_0 (m)	40

表 4.3: 観測の詳細

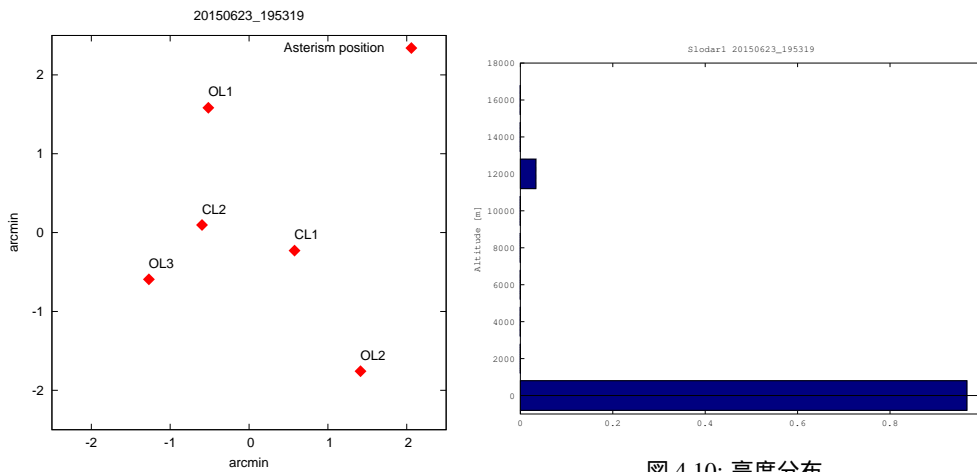


図 4.9: ガイド星配置

図 4.10: 高度分布

4.6.3 パラメータ

解析に使った RAVEN のパラメータは以下の通り。(表 4.4)

ピクセルスケール (設計値) α	0.38 秒/pixel
(2015 年観測時のサイエンスチャンネル 1 のみ)	0.38 秒/pixel
(2015 年観測時のサイエンスチャンネル 2 のみ)	0.38 秒/pixel
望遠鏡口径	8 m
副開口数	10 × 10
有効副開口数	72
副開口口径	0.8 m

表 4.4: 解析に使用したパラメータ

第5章 結果

RAVEN による大気揺らぎのオンスカイ測定データに対して経験的トモグラフィーを施した結果を記述する。本章ではまず 5.1 章で、RAVEN オンスカイ観測で実際に使われているモデルを用いた古典的トモグラフィーによる推定結果を提示し、経験的トモグラフィーの推定精度の評価基準として用いる。5.2 章以降では、経験的トモグラフィック推定行列計算のためのデータ記録時間帯や、観測コンディション（観測時間帯、大気状況、ガイド星配置）等の条件をかえた場合の経験的トモグラフィーの推定精度の振る舞いについて議論していくことにする。

5.1 古典的トモグラフィーの結果

まず、従来使われているモデルによるトモグラフィーがどのくらいの精度に達しているのかを調べるため、前章で選定した 3 組の RAVEN オンスカイデータセットに対して古典的トモグラフィック波面再構成を行った。

5.1.1 古典的トモグラフィック再構成行列

古典的トモグラフィック波面再構成には、RAVEN で実際に使っているモデルに基づいて計算された行列を使用する。RAVEN の場合のトモグラフィック再構成行列は、3 台の OL-WFS で得られた Slope 測定データから指定したサイエンスチャンネル方向の波面の位相へと変換する。

$$\hat{w} = R_{TM}x \quad (5.1)$$

ただし、 x は OL-WFS で得られた Slope 測定値ベクトル（ $[431 \times 1]$ の列ベクトル）、 \hat{w} は 1 つのサイエンスチャンネル方向の波面位相（ $[96 \times 1]$ の列ベクトル）、 R_{TM} はトモグラフィック再構成行列（ $[96 \times 432]$ ）を表す。

ここで、トモグラフィック再構成行列の構造について簡単に解説する。まず古典的トモグラフィック再構成行列 R_{TM} と経験的トモグラフィック再構成行列 R_{EM} は役割が異なることに注意する。 R_{TM} は図 5.1.1 のように 3 つの OL-WFS の Slope 測定値から推定波面 \hat{w} への変換を表すのに対し、 R_{EM} は OL-WFS の Slope 測定値からサイエンスターゲット方向の大気揺らぎに相当する Slope への変換を表す。従って今後の議論で行列構造を比較するにあたって R_{TM} による推定値も Slope になるように変形が必要である。この変形は 1.3 章で定義した幾何学関係 G を左から掛けることに対応する。

$$R'_{TM} = GR_{TM} \quad (5.2)$$

RAVEN のシステムにおけるトモグラフィック再構成行列（ここでは両方とも R としている）は図 5.1 のような構造を持つ。サイエンスターゲット方向の CL-WFS のある副開口に着目した時、この副開口の Slope もしくは波面位相の推定値はトモグラフィック再構成行列 R の対応する行と OL-WFS の測

定データ x の積で求まる。従って行列 R の行方向には対応する OL-WFS の副開口の Slope 測定値が推定にどれだけ寄与しているかを示していることになる。OL-WFS の対応関係は、 R の 1-72 列目が OL-WFS1(x-Slope)73-144 列目が OL-WFS1(y-Slope)、145-216 列目が OL-WFS2(x-Slope)、217-288 列目が OL-WFS2(y-Slope)、289-360 列目が OL-WFS3(x-slope)、361-432 列目が OL-WFS3(x-slope) の測定値に対する寄与である。

次に、RAVEN の WFS の副開口、及び波面位相を定義するグリッドがトモグラフィック再構成行列のどの行に対応するのかを説明する。4.2 章で記述したように、RAVEN のデータは RAVEN のマスクの順番に格納されている。Slope が格納されている順番は図??となっており、この番号はトモグラフィック再構成行列の行番号と対応している。また位相点で定義される波面の値が格納されている順番は図??の通りである。

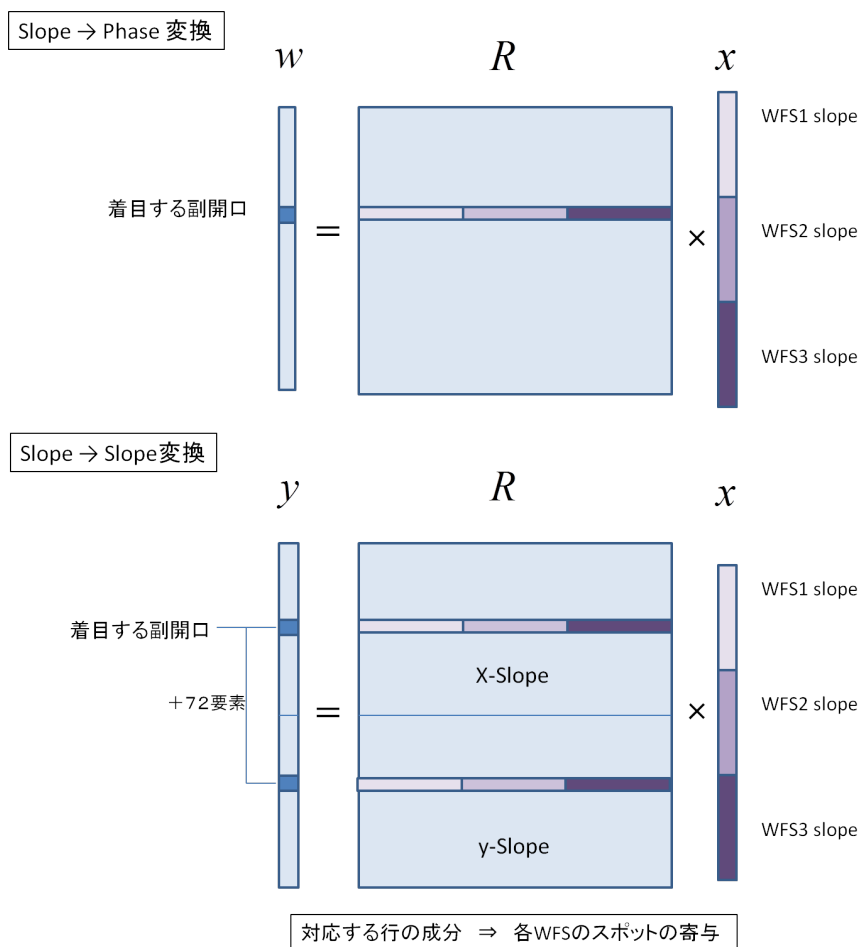


図 5.1: トモグラフィック再構成行列の構造。上は OL-WFS の Slope 測定値からターゲット方向の波面位相に変換する行列 (R_{TM} のみ)、下は同じく OL-WFS の Slope 測定値からターゲット方向の Slope を推定する行列 (R_{EM} 、 R'_{TM}) について、着目する副開口の推定に寄与する行成分の意味を示している。

解析したデータセットに対応した古典的トモグラフィック再構成行列のマップを図 5.4 に示した。それぞれのデータセットでトモグラフィーに関するパラメータが異なるため、行列のマップも微妙に異なっている。なお、古典的トモグラフィック再構成行列は RAVEN チームの本学大学院大野

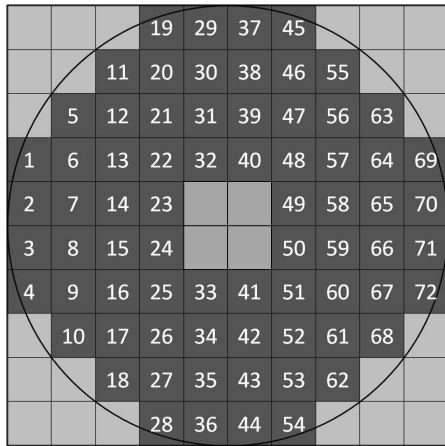


図 5.2: WFS の Slope データの格納順番

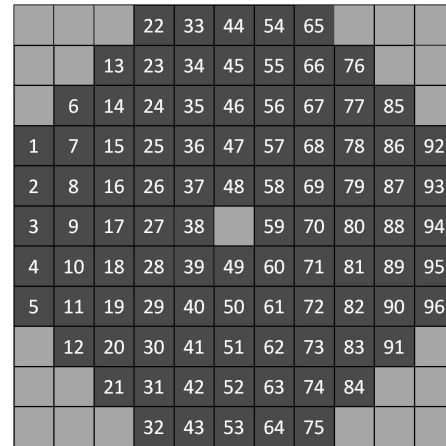


図 5.3: 波面位相データの格納順番

さんより提供して頂いたものを使用している。

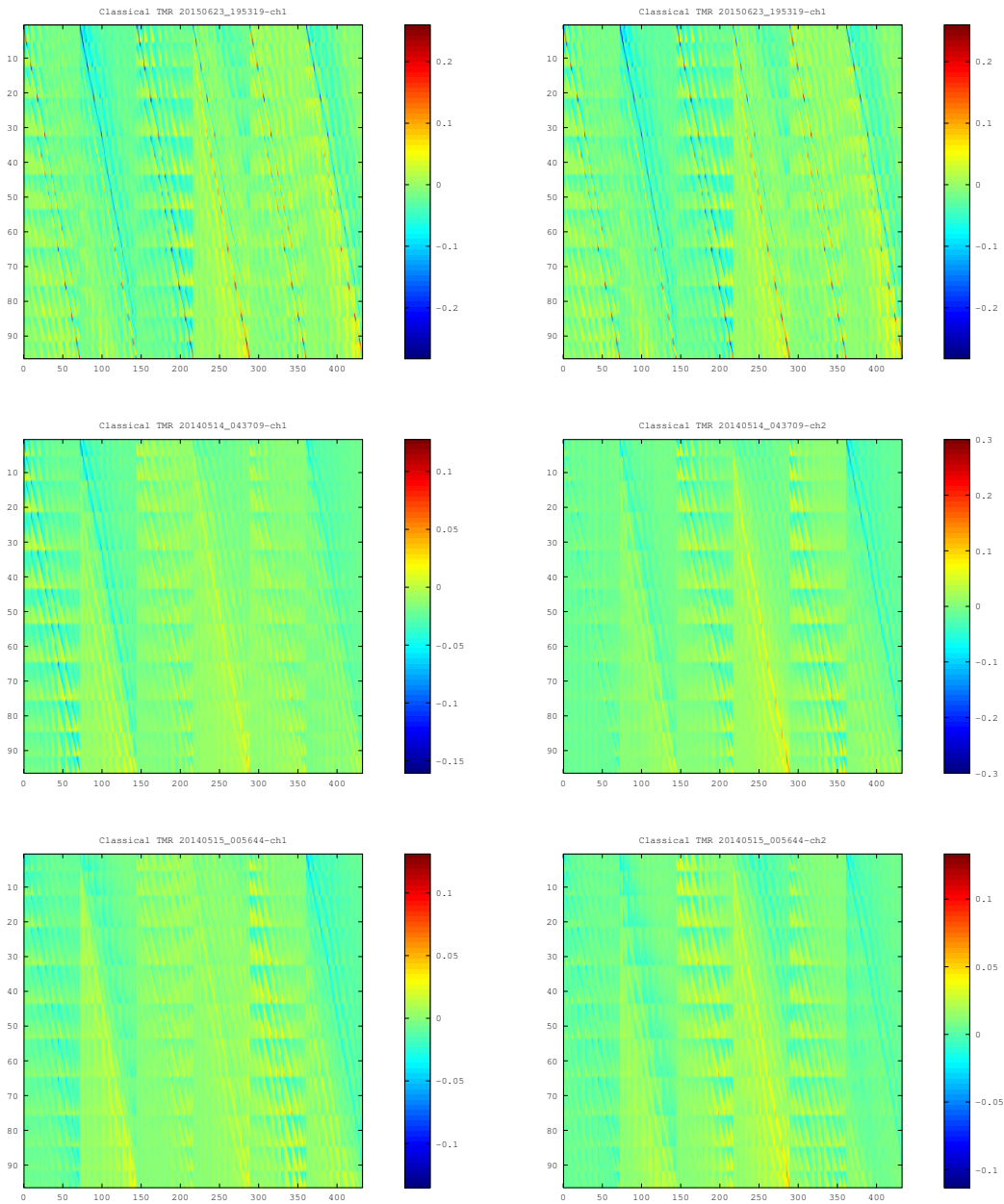


図 5.4: 古典的モデルによるトモグラフィック再構成行列のマップ。上からデータ 20150623_195319、データ 20140514_043709、データ 20140515_005644 の観測時のパラメータから計算した場合の行列に対応する。いずれも左がサイエンスチャンネル 1 に、右がサイエンスチャンネル 2 に対応する。

5.1.2 データセット 20150623_195319 の波面推定結果

3つの時間帯のデータセットに対して古典的トモグラフィーを行った結果を以下に示す。

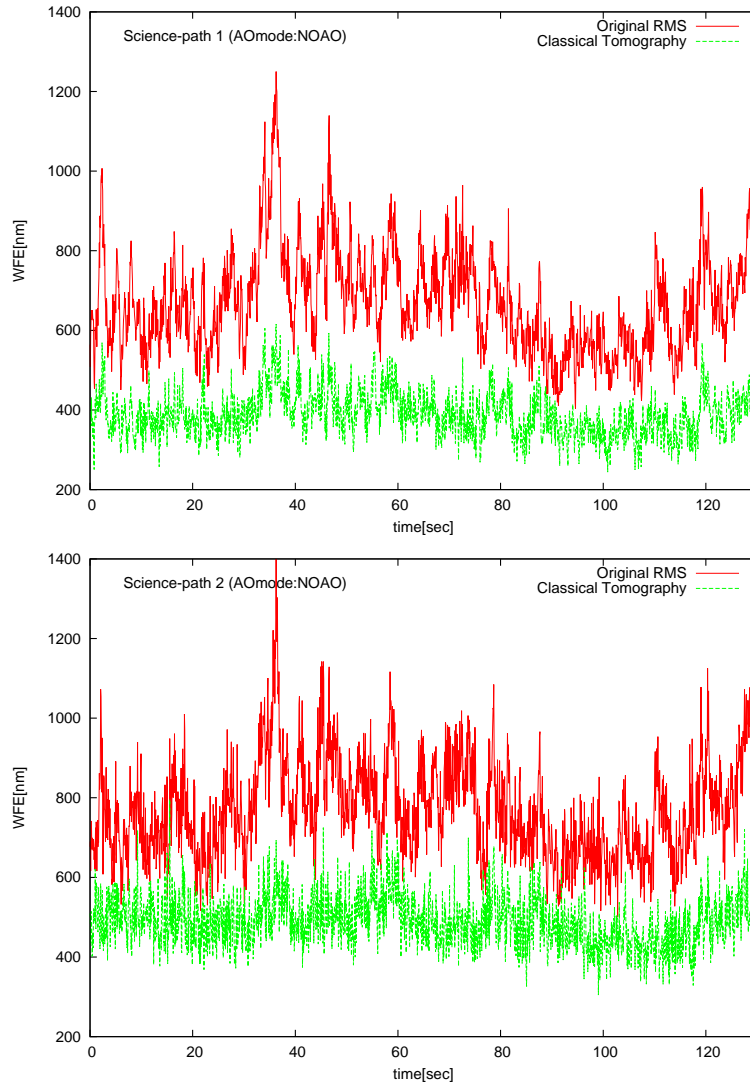


図 5.5: データ 20150623_195319 に対して古典的トモグラフィーを行った時の波面誤差のプロット (上図: サイエンスパス 1。下図: サイエンスパス 2) 赤色プロットは推定前の波面誤差。緑色プロットは古典的トモグラフィーによる推定誤差を表す。

5.1.3 データセット 20140514_043709 の波面推定結果

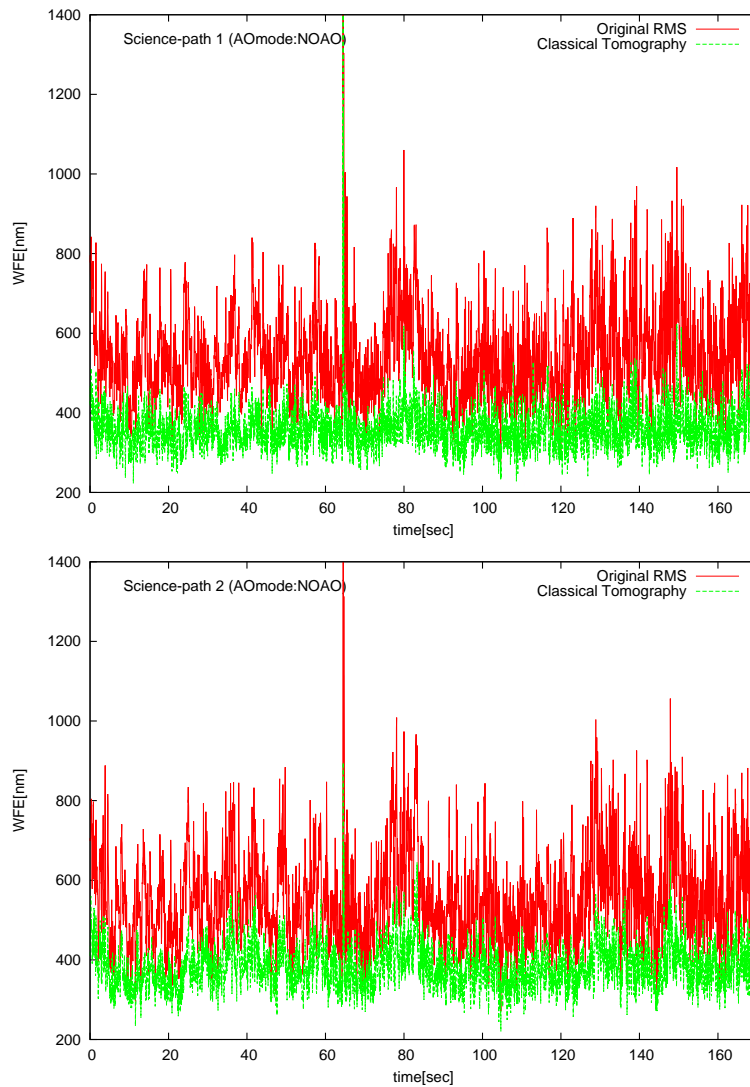


図 5.6: データ 20140514_043709 に対して古典的トモグラフィーを行った時の波面誤差のプロット(上図: サイエンスパス 1。下図: サイエンスパス 2) 赤色プロットは推定前の波面誤差。緑色プロットは古典的トモグラフィーによる推定誤差を表す。

5.1.4 データセット 20140515_005644 の波面推定結果

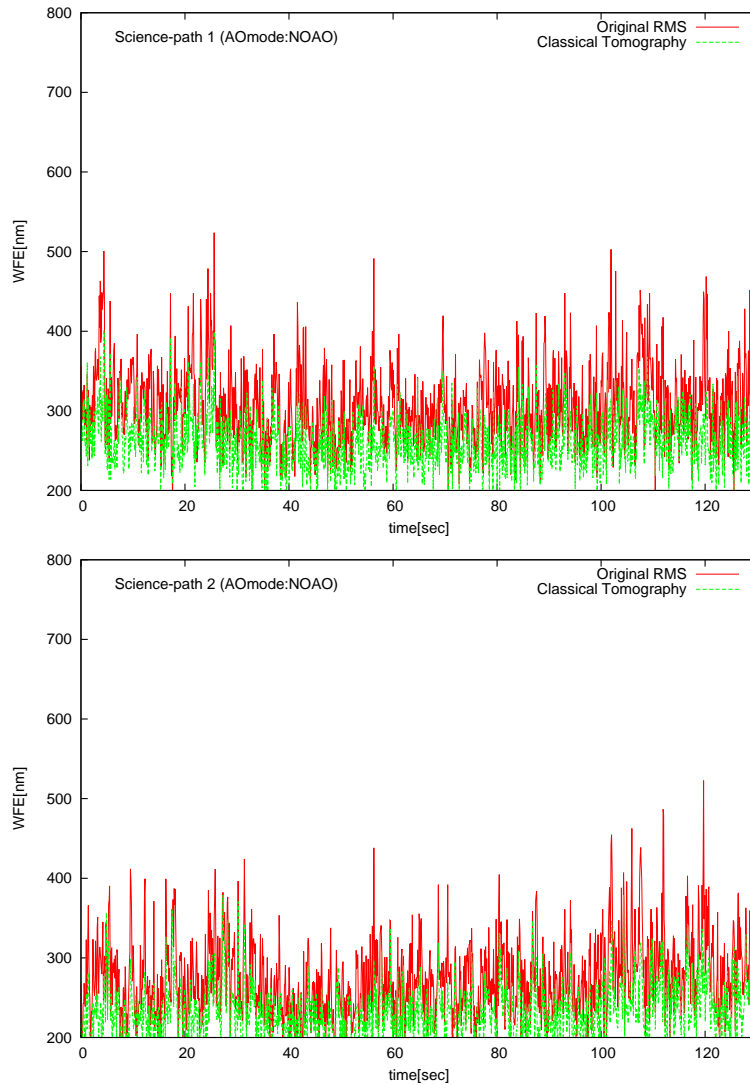


図 5.7: データ 20140515_005644 に対して古典的トモグラフィーを行った時の波面誤差のプロット (上図: サイエンスパス 1。下図: サイエンスパス 2) 赤色プロットは推定前の波面誤差。緑色プロットは古典的トモグラフィーによる推定誤差を表す。

データ名	サイエンスパス	古典的トモグラフィー		推定前波面	
		平均推定誤差 (WFE) (nm)	標準偏差 (nm)	平均波面誤差 (RMS) (nm)	標準偏差 (nm)
20150623_195319	Channel 1	388.47	56.251	672.86	126.32
	Clannel 2	489.64	65.686	771.17	123.82
20140514_043709	Channel 1	265.62	35.790	314.58	53.134
	Clannel 2	236.03	34.348	361.16	48.878
20140515_005644	Channel 1	265.62	35.790	314.58	53.134
	Clannel 2	236.03	34.348	361.16	48.878

表 5.1: 古典的トモグラフィーによる推定結果。波面推定誤差、推定前波面残差とともに Piston、Tip-Tilt 成分除去後の値を元に、全時間での平均値、標準偏差を記載してある。

5.1.5 古典的トモグラフィーの結果まとめ

RAVEN のシステムで実際に使われているモデルを基に構成した古典的トモグラフィック行列による推定を行った結果、いずれのデータセットでもオリジナルの波面残差に対して推定誤差が下回る結果となった。波面推定性能は 2014 年のデータセットでおおよそ波面誤差 200nm、2015 年のデータセットでは 400nm 前後であった。このことはトモグラフィーモデルがオンスカイの測定についても有効であることを示している。しかしながら、推定の効き方にはデータセット毎に差があった。特にデータセット 20140515_005644 では古典的トモグラフィーによる推定があまり効いていない結果となった。これは 20140515_005644 の時間帯のフリード長が $r_0 \approx 0.5$ と、補償すべき大気揺らぎの状態が非常に穏やかであったためであると考えられる。また、データセット 20150623_195319 ではサイエンスチャンネル間で推定精度に違いが生じた。

古典的トモグラフィーによる推定の平均波面誤差と標準偏差を表 5.1 に示した。波面推定性能は 2014 年のデータセットでおおよそ波面誤差 200nm、2015 年のデータセットでは 400nm 前後であった。今後はこれらの値を基準として古典的トモグラフィーと経験的トモグラフィーの性能結果を比較していく。

5.2 経験的トモグラフィーの結果

5.2.1 波面推定結果

RAVEN オンスカイ観測データを使用し経験的トモグラフィーを行った結果について記述する。まず、経験的に構成したトモグラフィック推定行列を使った波面推定による誤差をオリジナルの波面残差、古典的トモグラフィーによる推定誤差の平均値と比較した結果を次頁の図 5.8、図 5.9、図 5.10 に示す。各図において、縦の実線で挟まれた区間がデータ記録時間である。上からデータ記録時間を 10 秒間、30 秒間、60 秒間、120 秒間として構成した再構成行列を用いて推定した結果を示している。また左側の図がサイエンスチャンネル 1 方向の推定結果に、右側の図がサイエンスチャンネル 2 方向の推定結果である。

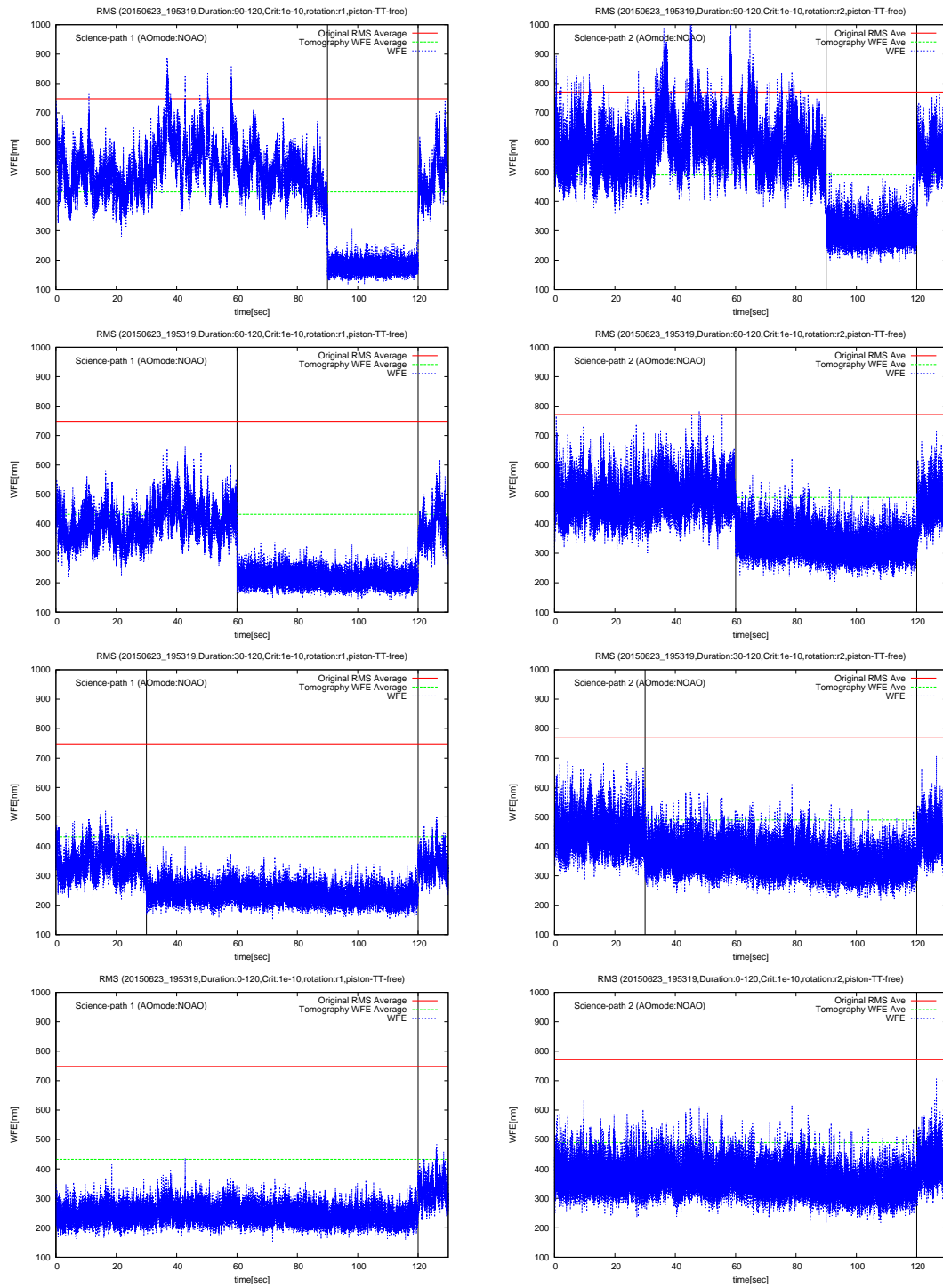


図 5.8: データ 20150623_195319 の経験的トモグラフィック推定結果。左がサイエンスチャンネル 1 に、右がサイエンスチャンネル 2 に対して推定を行った結果である。縦線で区切られた範囲がデータ記録時間 (Duration) にあたり、上から記録時間 30 秒、60 秒、90 秒、120 秒と増加させた時の推定誤差 (WFE) に対応する。

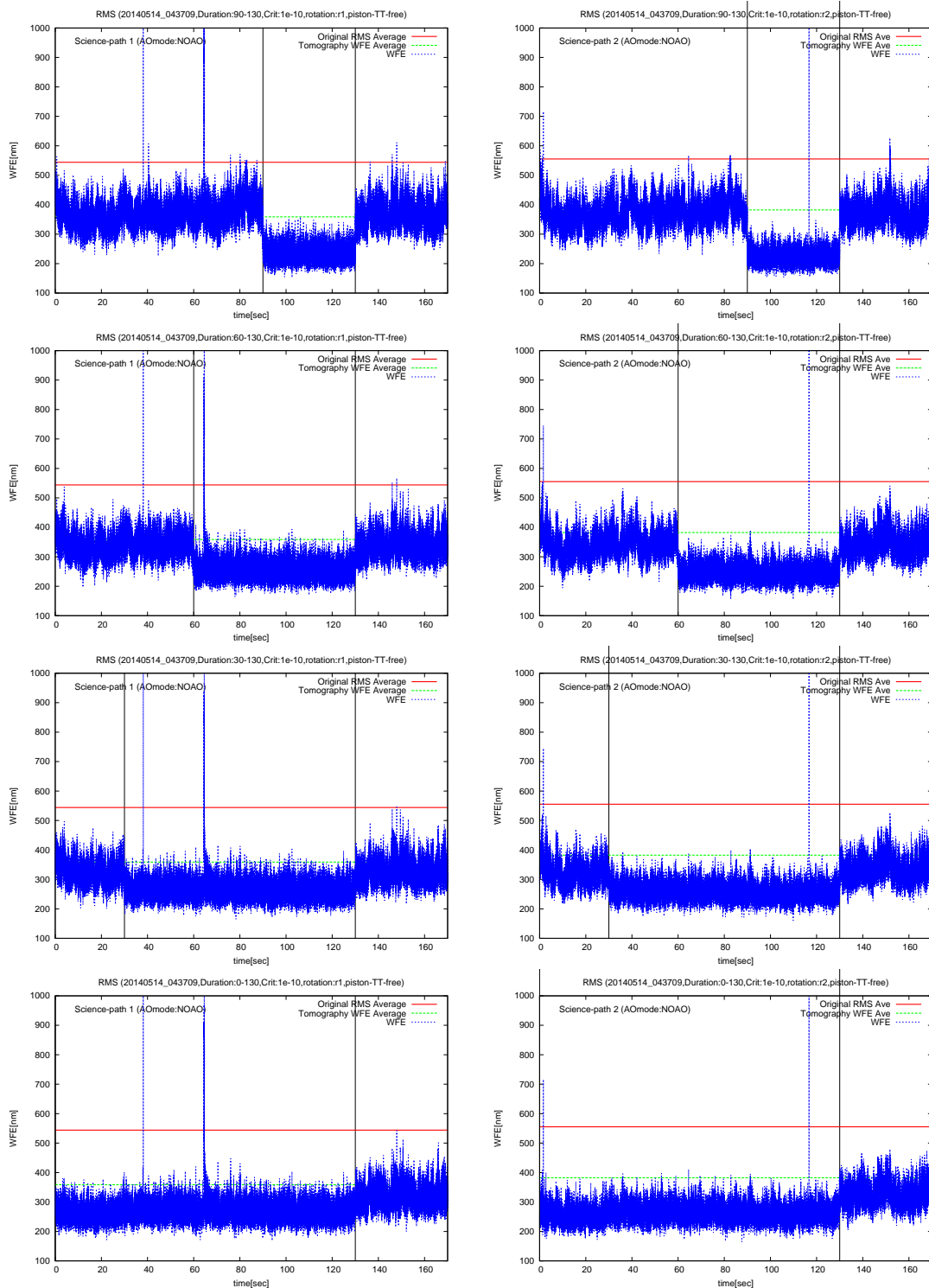


図 5.9: データ 20140514_043709 の経験的トモグラフィック推定結果。左がサイエンスチャンネル 1 に、右がサイエンスチャンネル 2 に対して推定を行った結果である。縦線で区切られた範囲がデータ記録時間 (Duration) にあたり、上から記録時間 30 秒、60 秒、90 秒、120 秒と増加させた時の推定誤差 (WFE) に対応する。

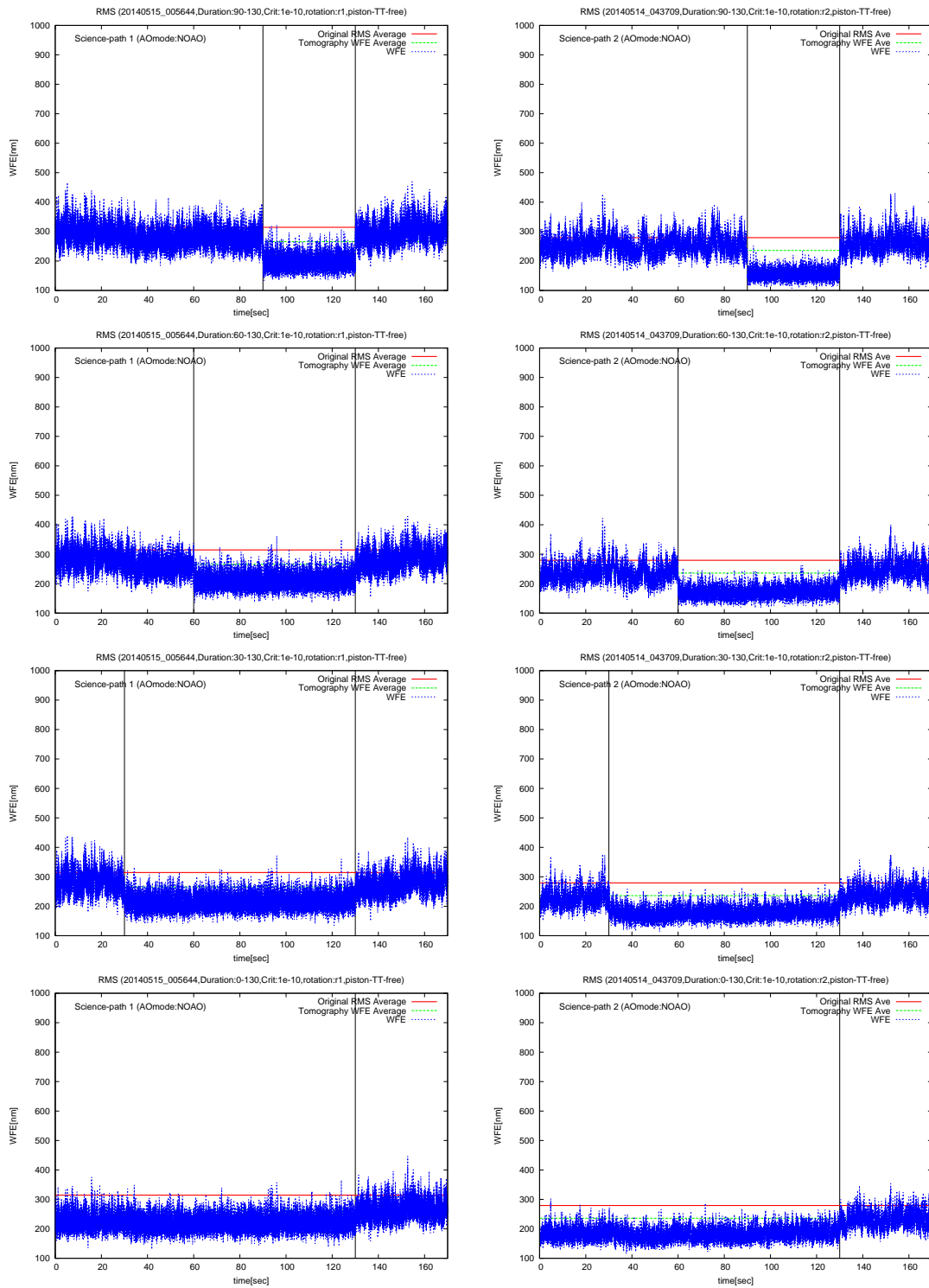


図 5.10: データ 20140515_006544 の経験的トモグラフィック推定結果。左がサイエンスチャンネル 1 に、右がサイエンスチャンネル 2 に対して推定を行った結果である。縦線で区切られた範囲がデータ記録時間 (Duration) にあたり、上から記録時間 30 秒、60 秒、90 秒、120 秒と増加させた時の推定誤差 (WFE) に対応する。

5.2.2 全体的な推定結果の特徴

図 5.8、図 5.9、図 5.10 はそれぞれ異なる観測のオンスカイデータについて、経験的トモグラフィック推定行列の計算のためのデータ記録時間を 30 秒から 120 秒まで増加させていった時の経験的トモグラフィー推定による推定誤差を示している。いずれのデータセットの結果からも、データ記録に使った時間帯の OL-WFS に対する推定結果だけが明らかに良くなっていることが見て取れる。これは古典的トモグラフィーでは見られなかった特徴である。また、この特徴はデータ記録時間が短くなるほど著しくなり、逆に長くなるとデータ記録時間帯以外に対する推定結果との差が緩やかになる傾向があることが分かった。経験的トモグラフィック再構成行列は記録したデータの共分散行列で構成されるので、記録した時間帯の統計的性質を反映していると考えられる。つまり、データを記録した時間帯に偶然発生した揺らぎのパターンや、そのタイムスケールで特徴的なパターンの情報を持っているため、このような特徴が現れると推測される。しかしながら、本来はトモグラフィーモデルに関係するパラメータは観測コンディションが変わらなければ一定であるはずなので、特定の時間帯の統計的性質に依存した推定結果は与えないと考えられる。従って今後は、経験的トモグラフィーの推定性能の評価にはデータ記録時間帯の推定結果は除外した結果を用いることにする。

記録したデータ以外のデータに対しての推定結果に着目すると、3つのデータセット全てで行列計算に使用するデータの記録時間を増やしていくと波面誤差が減少する傾向があることが確認できた。これについては次の節で詳細に分析する。

5.2.3 サイエンスチャンネルの違いによる推定結果の特徴

データセット 20150623_195319 の場合のみサイエンスチャンネル 1 と 2 とで経験的トモグラフィーによる推定結果に差が生じたが、他の二つのデータセットでは目立った差は確認されなかった。データセット 20150623_195319 はサイエンスパス 1 内の CL-WFS で Slope の測定値に一定のシフト、すなわちスポットの全体が基準値から一定のズレを持っている観測条件であることが分かっている。行列計算や推定計算前に Slope の平均 (Tip-Tile) 引きを行っているものの、サイエンスパス 1 と 2 で平等な条件になっていなかった可能性がある。また、小さいながらも全てのデータセットで推定結果や分散に違いが見られたことから、各サイエンスパスに対する OL-WFS の位置合わせを行う行列の微妙な構造の違いや、ガイド星として使用した天体の明るさの違いが影響を及ぼしている可能性が考えられる。

5.2.4 観測時間帯の違いによる推定結果の特徴

推定精度の最も顕著に現れた違いは r_0 の違いによるものである。特に r_0 が小さい 2014 年 5 月 15 日のデータは元波面の波面残差が非常に小さいため古典的トモグラフィーによる WFE も低い。そのため経験的トモグラフィーによる推定ではデータ記録時間を増やしても古典的トモグラフィーを上回る推定精度は出せない。これはそもそもオリジナルの波面 RMS が非常に小さいため、推定結果との差がはっきりとしないためだと考えられる。

5.2.5 経験的トモグラフィック推定とデータ記録時間の関係

前節の結果から、行列構成のためのデータの記録時間を長くとるほど、データ記録時間帯以外のRMSが低下する傾向があることが分かった。本節ではこの傾向についてのより定量的な評価を行うことにする。

まず、データ記録時間帯以外のある一定時間間隔に含まれるデータに着目し、推定による波面誤差の平均値及び標準偏差を求める。このとき、着目する時間間隔はデータ記録時間の終端から一定時間経過後に固定する。この平均値がデータ記録時間の取り方にどのように依存するかをプロットした結果が図5.11である。今の場合、着目するデータをデータ記録終了から5秒後から10秒後にあたる時間帯(20150623_195319なら125~130秒、20140514_043709、20140515_005644なら135~140秒の間)に固定している。また、データ記録時間は終端を2015年のデータのみ測定開始から120秒後、2014年のデータで130秒後にそれぞれ固定し、始点を5秒刻みで増加させている。

図5.11から、データ記録時間を長くしていくと経験的トモグラフィーによる推定波面誤差が明らかな減少が見られる。また、シーイングが良かった時間帯のデータセット20150515_005644を除くデータセットでは、あるデータ記録のタイムスケール以上で経験的トモグラフィーが古典的トモグラフィーよりも波面誤差が小さくなることが分かった。波面推定精度の面で経験的トモグラフィーが古典的トモグラフィーよりも優位に立つタイムスケールを表5.2にまとめた。

データ名	サイエンスパス	平均値が下回るタイムスケール		1σ の幅で下回るタイムスケール	
		データ記録時間	データ点数	データ記録時間	データ点数
20150623_195319	Channel 1	40 秒	6000	60 秒	9000
	Clannel 2	40 秒	6000	60 秒	9000
20140514_043709	Channel 1	40 秒	10000	65 秒	16250
	Clannel 2	30 秒	7500	55 秒	13750
20140515_005644	Channel 1	100 秒	10000		
	Clannel 2	115 秒	11500		

表 5.2: 経験的トモグラフィーによる推定精度が古典的手法より優位となるタイムスケール

データセット20150623_195319とデータセット20140514_043709では、およそ60秒程度のデータ記録を行って経験的トモグラフィーを行えば、古典的手法の推定誤差を 1σ の誤差を含めて下回る結果となった。このタイムスケールを超えてデータ記録を行い再構成行列を計算すれば、古典的モデルに従って求めた再構成行列の性能を十分に再現し、かつ更に性能改善に繋がるようなパラメータを回収できることになる。このタイムスケールは両データセットのデータ点数に違いがあるにも関わらず同程度であったことから、構成した行列がトモグラフィー再構成行列の機能を獲得するためには、データサイズよりも大気揺らぎの時間的な統計に影響している可能性があるが、今回はサンプルが少ないために判断できない。

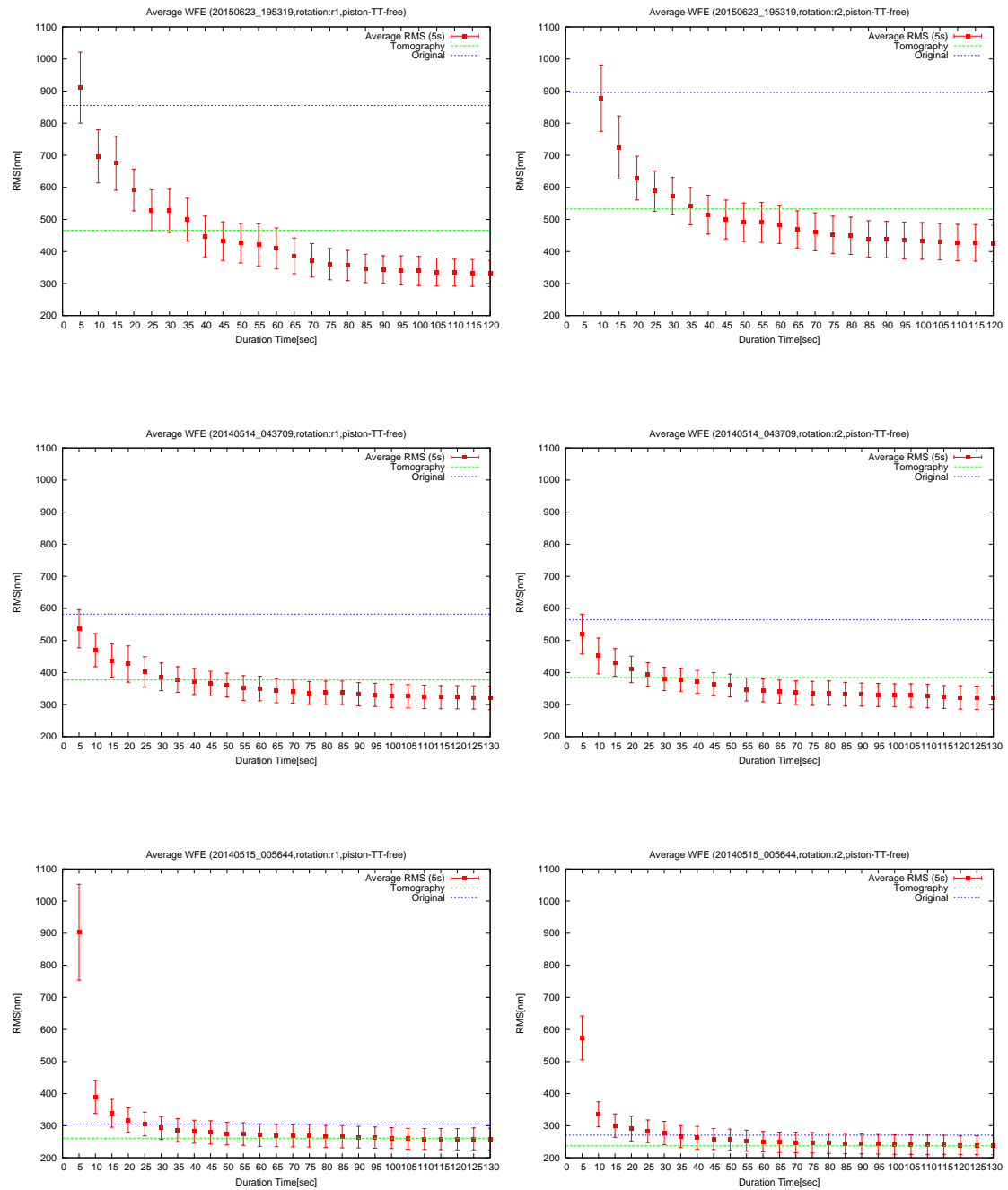


図 5.11: 経験的トモグラフィーにおけるデータ記録時間と推定波面誤差の関係。上からデータセット 20150623_195319、20140514_043709、20140515_005644 の結果、左側がサイエンスチャンネル 1 に、右側がサイエンスチャンネル 2 にそれぞれ対応している。横軸はデータ記録の時間間隔、縦軸は波面誤差を表す。青色の破線がオリジナルの RMS の平均値、緑色の破線が古典的手法による推定結果の平均値である。

5.2.6 推定精度の時間的変動

経験的トモグラフィック再構成行列の計算は限られた時間帯で記録したデータを用いて行われるため、時間的にどの程度離れたデータまで有効に推定が行えるのかということが問題となる。図 5.12 は終点を固定しデータ記録時間を変えたときに、データ記録時間の終点から 5 秒、15 秒、25 秒、35 秒と離れた時間帯で平均波面誤差をプロットした図である。ただしデータセット 20150623-195319 はデータサイズが短いため検証が行えなかった。この結果を見ると、データ記録の終端から離れた時間帯の平均波面誤差は若干の変動はあるが、系統的に劣化したりする傾向は見受けられなかった。変動の原因はオリジナルの波面残差の変動に付随するものと考えられる。しかし、今回解析したデータは利用できるサイズが限られているため、経験的トモグラフィーの推定精度の時間的な変化を検証するためにはより長いデータセットを利用する必要がある。

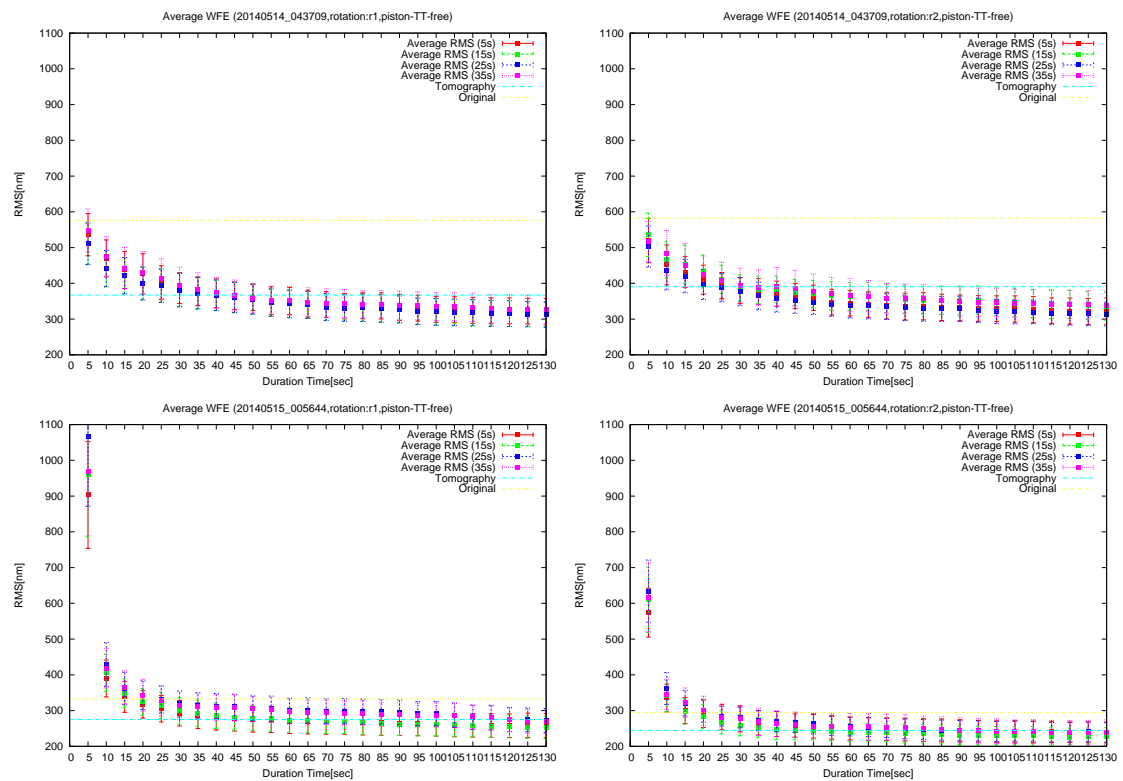


図 5.12

この結果は実際のオンスカイ測定データの統計的性質から構成した行列が、古典的なトモグラフィモデルのパラメータから計算した行列よりもオンスカイ観測の環境に適した推定行列の性質を持っていることを示している。

5.3 経験的トモグラフィック推定行列の構造

5.2 節の議論よりある程度データ記録時間を延ばせば、経験的トモグラフィック推定行列を用いた波面推定で古典的トモグラフィック手法を上回る性能を達成できることが確認された。この結果により、古典的なトモグラフィックモデルのパラメータでは多天体補償光学のオンスカイ観測で波面推定に寄与するパラメータを含みきれていないことが示唆された。十分なタイムスケールの測定データから構成したトモグラフィック推定行列は、古典的なトモグラフィックモデルによる行列構造と類似した構造を持ち、かつオンスカイ観測の状況をより反映していることが期待される。今後は、オンスカイ観測環境でトモグラフィック推定の精度向上に関わっている原因を追求するために、経験的に求めた行列構造を議論していくことになる。

本節では、オンスカイ測定データを基に構成した行列の構造の結果と行列構造を分析する上で不可欠な特異値に関する操作について記述する。

5.3.1 経験的トモグラフィック再構成行列

まず、経験的に求めたともグラフィック再構成行列の例を示し、その特徴について述べる。

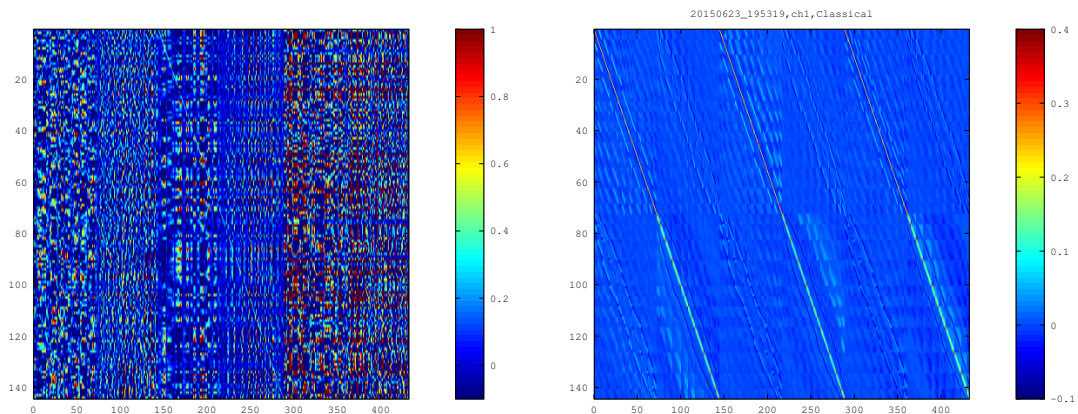


図 5.13: データセット 20150623_195319 のサイエンスチャンネル 1 を使用した再構成行列の例。左側のマップはデータ記録時間 90 秒で経験的に求めた行列マップ、右側が同じデータセットの古典的モデルによる行列マップ

図 5.13 は経験的トモグラフィック再構成行列の例（左）と、対応するデータセットでモデルより構成した古典的トモグラフィック再構成行列（右）である。経験的トモグラフィック再構成行列は、データセット 20140514_043709 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 1 方向の CL-WFS の 90 秒間のデータから構成したものである。5.2 節の結果を見ると、この条件で経験的トモグラフィック推定を行った結果は古典的トモグラフィックよりも良くなっていたことから、経験的に求めた行列でもトモグラフィックモデルと同様のパターンが見られることが期待される。しかしながら、右側の行列の構造にはトモグラフィックのモデルに関係したパターンが現れているのに対し、経験的に求めた

行列の方は全く異なった構造をしているように思える。これは Appendix A 及び 4.4 節で述べた低特異値に起因する無関係なモードの増幅による効果が現れているためだと考えられる。

経験的トモグラフィック推定行列 R_{em} を計算するためには式 (4.21) のように行列 X の特異値行列の逆行列 Γ^{-1} を計算する必要があった。Appendix A で説明したように、式 (4.21) の計算において特異値 γ_j が特に小さい場合、逆行列 Γ^{-1} に含まれる特異値の逆数が非常に大きな値になり、データ行列 X とデータ行列 Y の線形関係には寄与しない無関係なモードが増幅されてしまう。このように小さい特異値を残したまま擬似逆行列による推定を行うと真の線形関係を示す推定行列に余分な成分が乗ってしまう可能性がある。このため経験的トモグラフィック推定行列の構造を分析する上では次の節で説明する低特異値の除去を行う必要があると考えられる。

5.3.2 低特異値モードの除去

特異値の議論には最も大きな特異値で規格化した値を用いる。この規格化した特異値が設定した基準値に対して小さいものを低特異値として除去し、残りの特異値のみを擬似逆行列の計算に用いることにする。図 5.13 で示した経験的トモグラフィック再構成行列の計算に用いたデータ行列 X の規格化した特異値の分布をプロットすると図 5.14 のようになった。解析の結果、特異値の最大値に対して 10^{-4} ほどのオーダーまで特異値が連続的に分布していることが分かった。また、全ての場合で 10^{-10} を下回る極端に小さい特異値が一定数存在することも分かった。表 5.3 に各データセットから取り出したデータ行列 X の規格化した特異値の分布を記載してある。コンピュータの性能上、極端に小さい特異値は逆数が発散するため逆行列の計算ができない。今回の解析では全ての場合で 10^{-10} を下回る特異値は除去している。図 5.13 に示した行列も 10^{-10} より大きな特異値を全て使って計算した行列である。

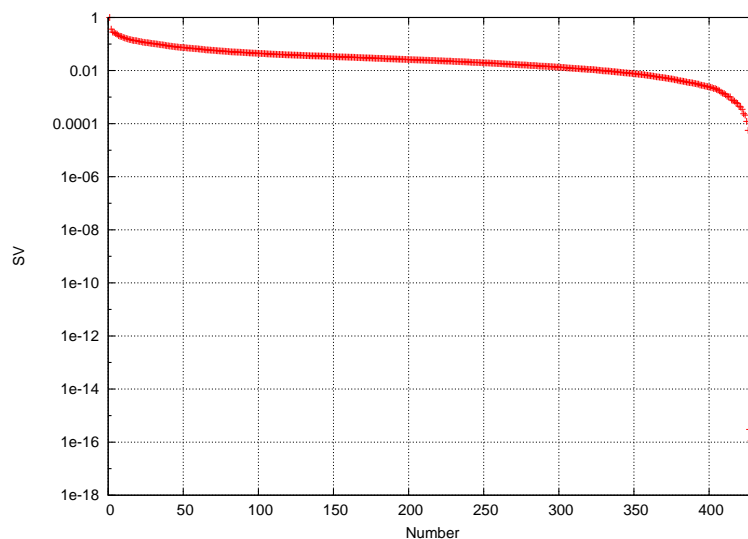


図 5.14: 特異値の分布。データセット 20150623_195319 のサイエンスチャンネル 1 を使用し、データ記録時間 90 秒とした。

データ名	サイエンスパス	データ記録時間(秒)	規格化した特異値														
			1 ~ 10 ⁻¹	~ 10 ⁻²	~ 10 ⁻³	~ 10 ⁻⁴	~ 10 ⁻⁵	~ 10 ⁻⁶	~ 10 ⁻⁷	~ 10 ⁻⁸	~ 10 ⁻⁹	~ 10 ⁻¹⁰	10 ⁻¹⁰ >				
20150623_195319	Channel 1	10	14	238	152	19	3	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		30	23	284	103	14	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		60	28	297	87	13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		90	32	296	86	11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		10	16	261	131	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		30	26	302	86	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
20150623_195319	Channel 2	60	34	311	72	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		90	36	313	68	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		10	80	290	49	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		30	145	245	32	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		60	174	220	30	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		90	188	208	28	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
20140514_043709	Channel 2	10	102	262	54	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		30	120	257	43	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		60	139	243	39	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		90	158	226	38	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		10	160	221	40	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		30	203	193	27	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
20140515_005644	Channel 1	60	227	172	24	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		90	247	154	22	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		10	102	262	54	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		30	120	257	43	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		60	139	243	39	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		90	158	226	38	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
20140515_005644	Channel 2	10	160	221	40	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		30	203	193	27	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		60	227	172	24	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		90	247	154	22	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		10	102	262	54	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		30	120	257	43	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
20140515_005644	Channel 2	60	139	243	39	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
		90	158	226	38	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	

表 5.3: 特異値分布

極端にゼロに近い特異値は計算の都合上除去せざるを得ないが、それ以外の特異値は擬似逆行列の計算に入れても問題はない。しかし比較的低い特異値を計算に入れてしまうと図 5.13 のような無関係なモードに由来するノイズが増幅する。この問題を回避するためある基準値以下の特異値を除去する。基準値を 10^{-4} から 0.1 までの間で徐々に上げていった時の行列マップの様子 (図 5.15) を見ると、低特異値を除去していくとノイズによるパターンが徐々に薄くなり、古典的モデルによる再構成行列に似た様なパターンが判別できるようになることが分かる。以後、再構成行列の構造の議論を行う時には低特異値を除去して計算した行列を用いることにする。

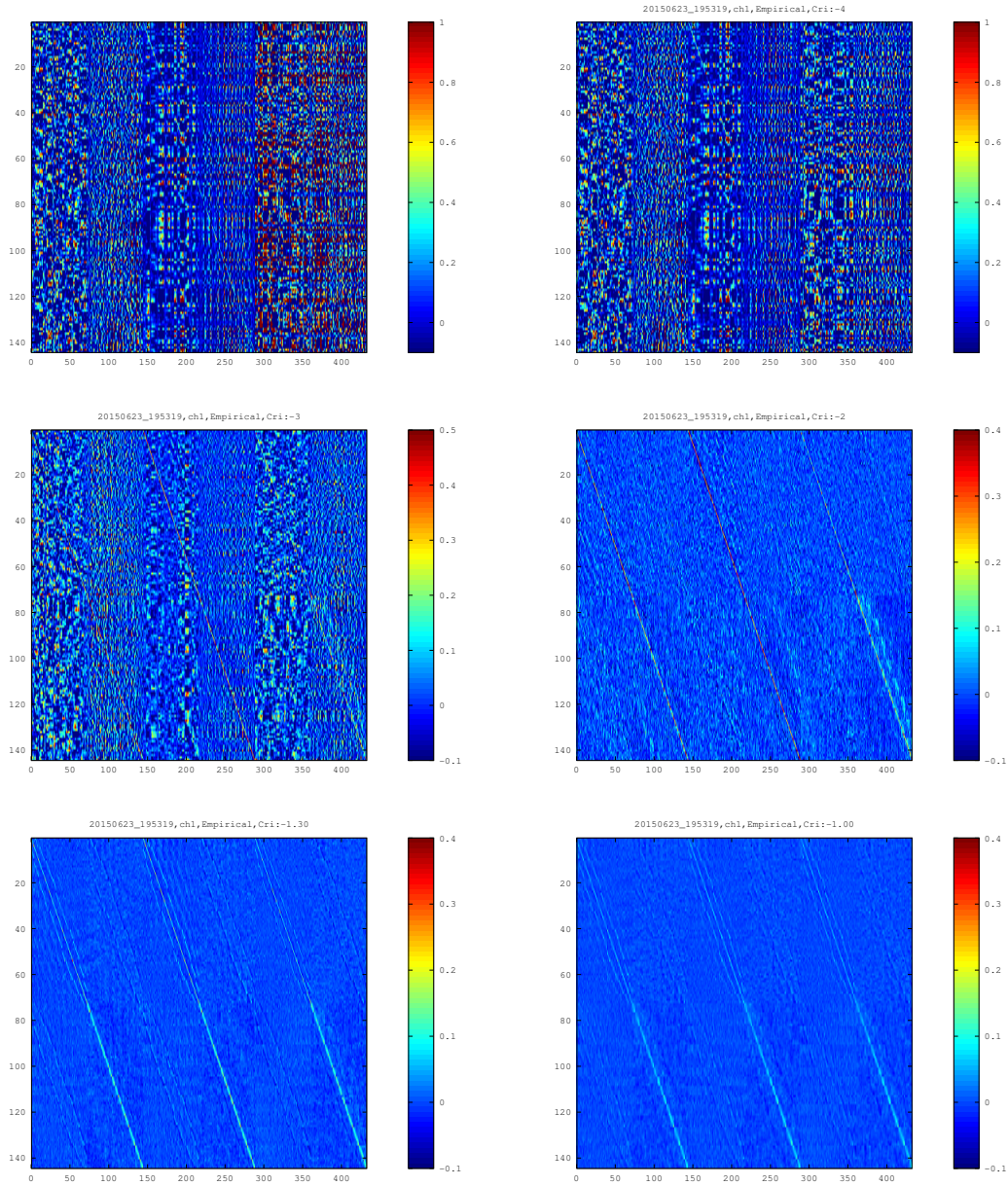


図 5.15: 低特異値の除去による行列マップの変化。データセットとして 20150623_195319 のサイエンスチャンネル 1 を使用した時のデータ記録時間 90 秒とした時の経験的トモグラフィック再構成行列。特異値除去の基準値は左上から 10^{-10} (除去無し)、 10^{-4} 、 10^{-3} 、 10^{-2} 、0.05、0.1。

第6章 議論

今回の解析では十分長い WFS 測定データから経験的に構成したトモグラフィック再構成行列を用いた波面推定の方が古典的手法よりも良い推定を与えることが判明した。このことは、MOAO のオンスカイ観測環境において従来のトモグラフィモデルでは含みきれていないパラメータが波面推定に寄与している可能性があることを示唆している。本章では、経験的手法と古典的手法の再構成行列構造や推定誤差のパターンについて比較することにより、両手法の違いをより詳細に分析していく。

6.1 経験的トモグラフィック再構成行列の構造の分析方針

トモグラフィック再構成行列はトモグラフィモデルを反映した構造を持つ。従って古典的手法と経験的手法を用いた際のトモグラフィ推定精度の差に関係しているパラメータは、古典的モデルによる再構成行列と経験的に求めた再構成行列の構造の違いとして現れるだろうと考えられる。ここではトモグラフィック再構成行列の構造を分析する方針について記述する。

6.1.1 トモグラフィック再構成行列の構造

まず注意として、古典的トモグラフィック再構成行列 R_{TM} は補償領域の大気揺らぎ波面を再構成するのに対して、経験的トモグラフィック再構成行列 R_{EM} は OL-WFS の Slope 測定データからサイエンスタarget方向の補償領域に対応する Slope への変換を表す。そのため以降の議論では R_{TM} から Slope から波面に直す機能を除いた行列を比較として扱うものとする。

5.1 章でも触れたように、トモグラフィック再構成行列の行成分は、サイエンスタarget方向の CL-WFS のある副開口上の揺らぎの推定に対して 3 つの OL-WFS の各副開口で測定された値がどれだけ寄与しているかを示している (図 6.1 左)。トモグラフィック再構成行列 R は、3 つの OL-WFS の Slope 測定値から構成される列ベクトル x から 1 つの CL-WFS 測定点における Slope 推定値 y への変換を表すことから、OL-WFS の寄与を表す 3 つの区画に分割できる。Slope データには x, y の 2 成分があるので、更に 12 個の区画に分割される。このうち CL-WFS の x Slope に対する OL-WFS の y Slope の寄与、もしくはその逆の寄与はあまり現れないため、トモグラフィモデルのパターンが顕著に現れる区画は 6 個であり、各区画がどの WFS の寄与に対応するかは図 6.1 (右) に示した通りである。

次に各区画ごとに現れる行列のパターンとトモグラフィモデルの関係を説明する。今、図 6.2 のように大気揺らぎが地表層 (高度 0km の層)、高層 1、高層 2 の 3 つの層で成り立っていると仮定し、各層の大気揺らぎをサイエンスタarget方向を向いた CL-WFS と、少し離れた位置を向いた OL-WFS で測定している状況を考える。望遠鏡の開口付近の大気揺らぎ (地表層) を見ているのであれば各 WFS で同じ大気揺らぎ波面を測定していることになる。しかし高層に行くにつれ CL-WFS と OL-WFS の角度の差によって高層での開口面にずれが生じる。このため CL-WFS のあ

る副開口（図 6.3 の赤色で示した部分）に寄与する OL-WFS の副開口は地表層では同じ位置であるが高層に行くにつれてずれた位置に現れることになる。

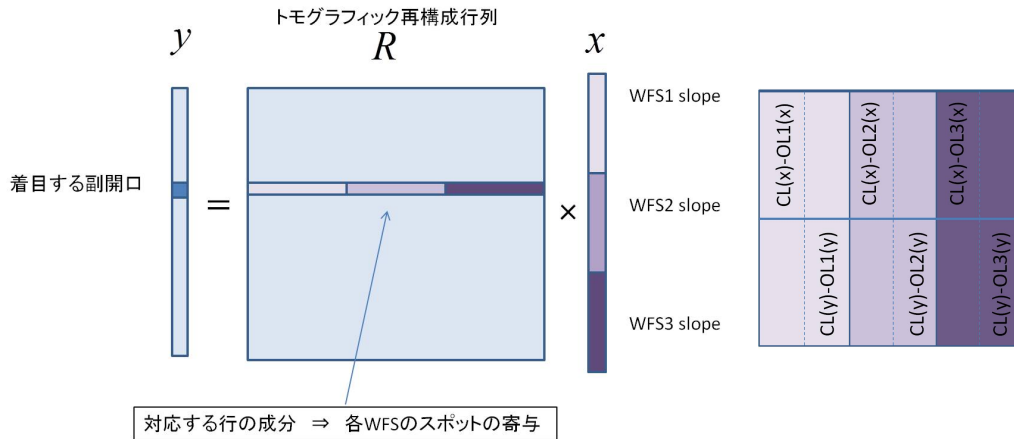


図 6.1: トモグラフィック再構成行列の構造（右）と各区画の意味（左）

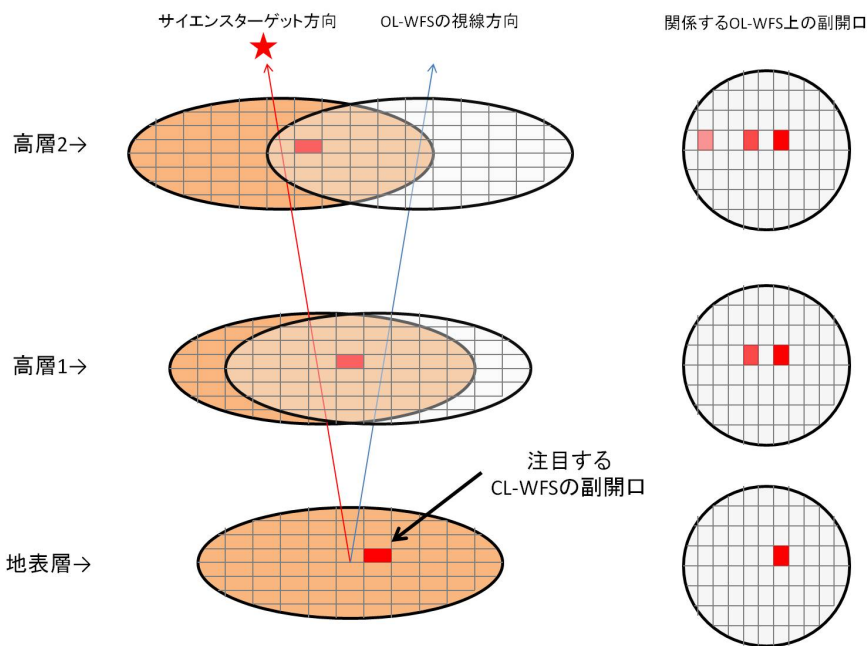


図 6.2: 高層大気における波面センサー副開口のずれ

以上のことから、補償方向の Slope の推定値に対して寄与を与える副開口を OL-WFS ごとに可視化するためには、トモグラフィック再構成行列の行成分のうち着目したい OL-WFS 対応する列のみを切り出して RAVEN のマスク状にマップすれば良い。

6.1.2 低特異値の除去による無関係モードの抑制

経験的に求めたトモグラフィック再構成行列には低特異値に起因するノイズが増幅するため、特異値の除去によってこれを取り除く必要がある。ただし、特異値を除去することにより推定に寄与

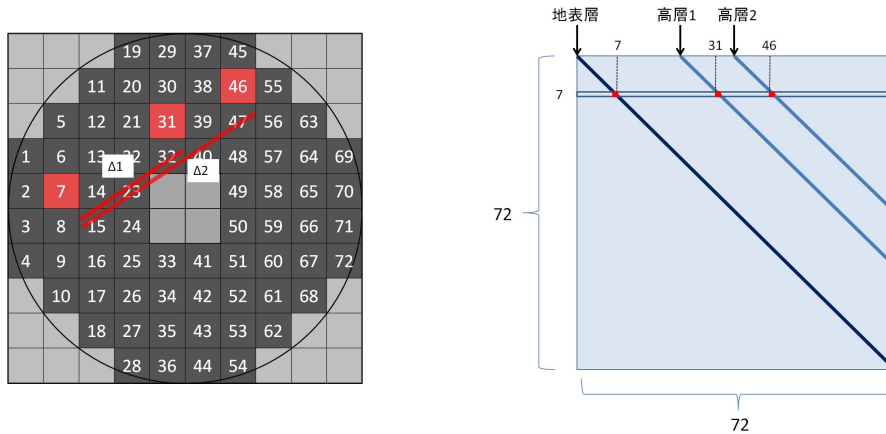


図 6.3: 高層大気の設定とトモグラフィック再構成行列に現れるパターンとの関係。左図は例として 7 番目の副開口に着目し、高層 1、2 におけるずれ量 Δ_1 、 Δ_2 が副開口のマスク上のどの副開口に対応するかを表している。右図は高層の寄与がトモグラフィック再構成行列の区画にどのようなパターンを描くかを示している。

している情報も失う可能性があるため、除去する特異値の基準値は慎重に決めなくてはならない。本研究では、無関係なモードは除去しても推定精度には影響しないという仮定のもと、特異値を小さい側から除去した時の経験的トモグラフィック再構成行列による推定の波面誤差が増加に転じる限界を特異値除去の基準値として使用する。

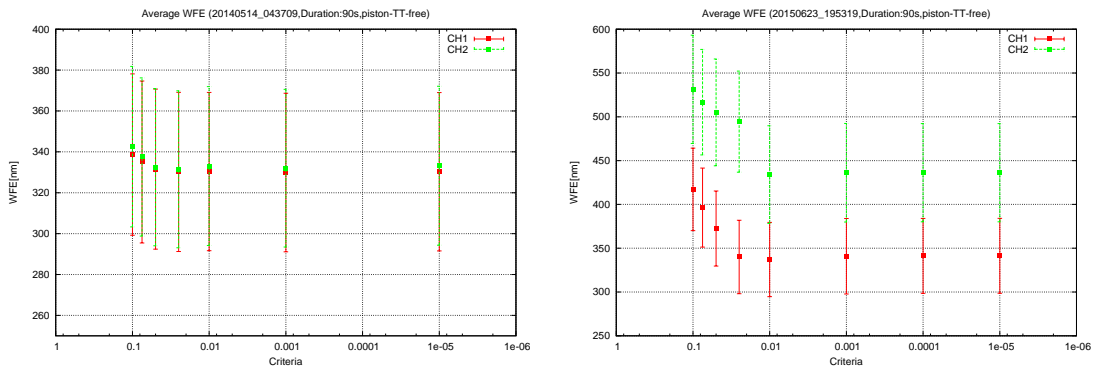


図 6.4: 特異値の除去が及ぼす経験的トモグラフィック推定精度の変化。上図がデータセット 20140514_043709、下図データセット 20150623_195319 の結果。横軸は特異値の除去の際の基準値を表す。

図 6.1.2 の結果より、データセット 20140514_043709 では基準値 0.05 まで、データセット 20150723_195319 では基準値 0.01 まで除去しても推定精度に影響が無いことが分かった。よってこの章の議論では、上記の基準値以上の特異値のみを用いて計算した経験的トモグラフィック再構成行列を使用する。

6.1.3 評価方法

経験的トモグラフィック再構成行列 R_{EM} は古典的トモグラフィック再構成行列 R_{TM} と差分の行列 E の線形な足し合わせで書けるとする。

$$R_{EM} = R_{TM} + E \quad (6.1)$$

つまり、

$$E = R_{EM} - R_{TM} \quad (6.2)$$

この行列 E は、古典的トモグラフィックモデルでは考慮されていないが、経験的トモグラフィック再構成行列には含まれているパラメータを含んだ構造となっていると考えられる。今回の行列構造の分析では、2つのトモグラフィック再構成行列 R_{EM} と R_{TM} の差をとった行列 E の構造から特徴を読み取ることにする。

6.1.4 方針

経験的トモグラフィックによる推定精度が古典的トモグラフィックに比べ上回っているのは、オンサイト観測環境では古典的モデルでは含みきれていないパラメータがためであると考え、こうしたパラメータの寄与経験的トモグラフィック再構成行列に反映されているはずである。以降の解析には前章の結果から経験的トモグラフィックの推定精度は古典的手法に比べて優位になることが分かっている2つのデータセット、20150623_195319 と 20140514_043709 について、6.1 で求めた限界の特異値まで除去した経験的トモグラフィック再構成行列について分析する。

- トモグラフィック再構成行列の各区分に現れるパターンを再構成行列の差分 $E = R_{EM} - R_{TM}$ をとることにより比較する。
- 再構成行列を行方向に抽出し、WFS のマスク状にマップすることで、CL-WFS のある副開口の推定に寄与している OL-WFS の副開口を比較する。

6.2 トモグラフィック再構成行列構造の比較

まず、トモグラフィック再構成行列の比較結果について考察していく。経験的、古典的両手法に基づくトモグラフィック再構成行列と差分行列 E を図 6.5、図 6.6 に示す。

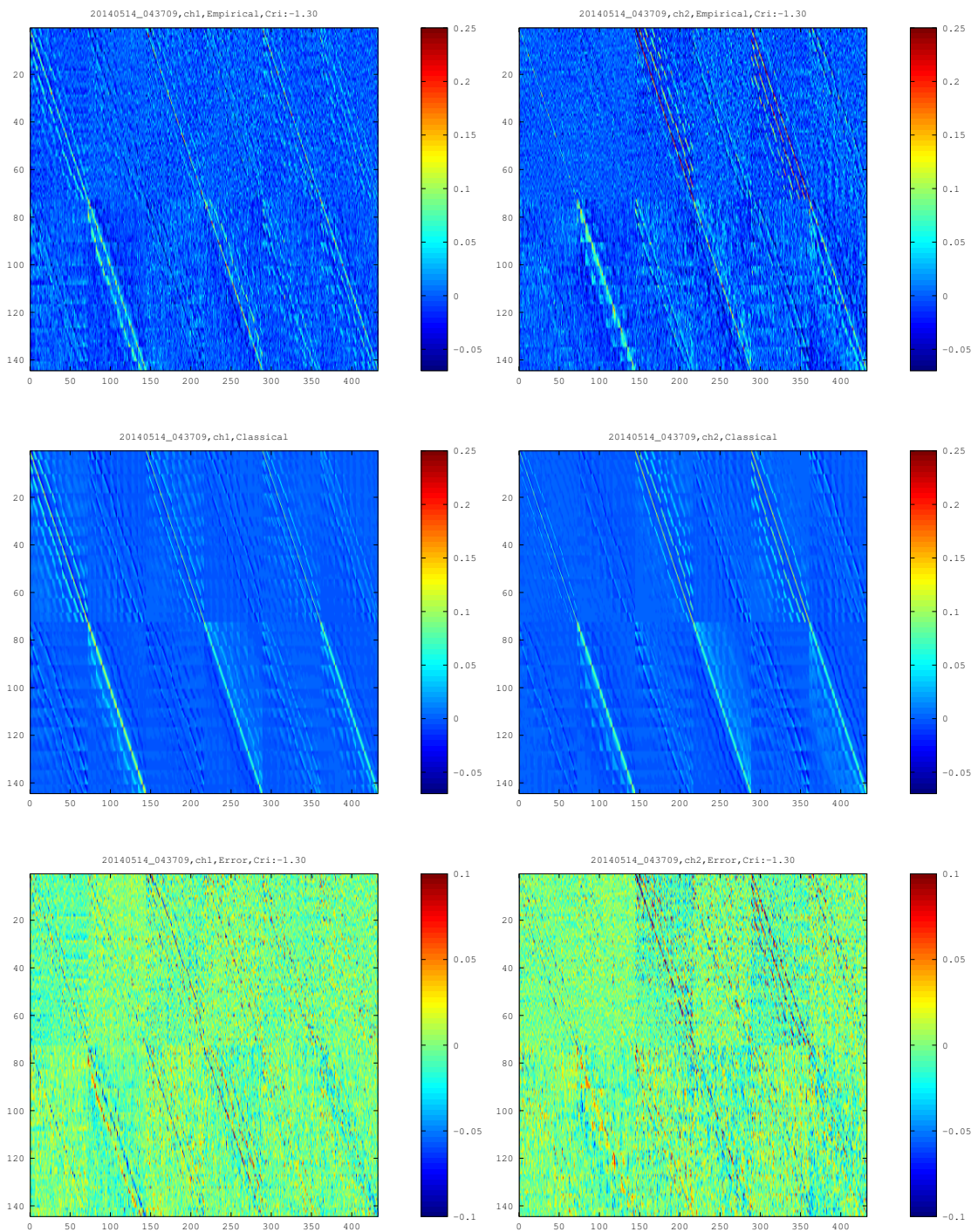


図 6.5: データセット 20140514_043709 におけるトモグラフィック再構成行列の比較。上段は経験的トモグラフィック再構成行列、中段は古典的トモグラフィック再構成行列、下段は行列の差分をマップした結果である。経験的トモグラフィック再構成行列はデータ記録時間帯：40-130 秒、特異値の基準値：0.05 とした時のものを使用した。

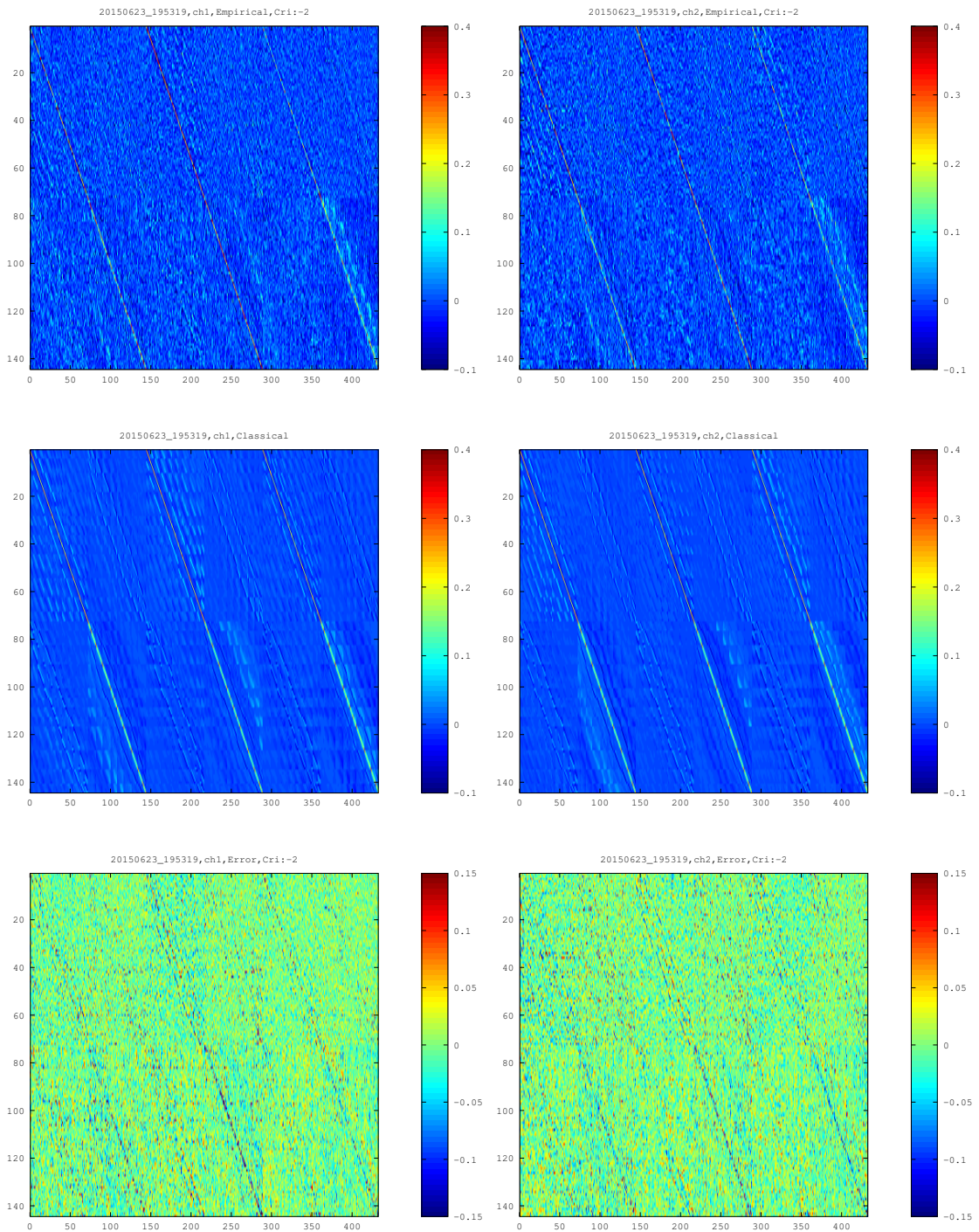


図 6.6: データセット 20150623_195319 におけるトモグラフィック再構成行列の比較。上段は経験的トモグラフィック再構成行列、中段は古典的トモグラフィック再構成行列、下段は行列の差分をマップした結果である。経験的トモグラフィック再構成行列はデータ記録時間帯：30-120 秒、特異値の基準値：0.001 とした時のものを使用した。

古典的トモグラフィック再構成行列の構造

古典的モデルによるトモグラフィック再構成行列は図 6.5、図 6.6 の中段に示した通りである。いずれのデータセットでも地表層の寄与を示すパターンと、高層の寄与を示すパターンが共通して見られる。特に大気揺らぎパワースペクトルの結果（図 4.6）から高層の寄与が比較的多いことが分かっているデータセット 20140514_043709 のについては高層の寄与がより顕著に現れている。また古典的モデルではサイエンスタージット方向とガイド星との距離に近いほど大きいほど、対応する波面センサーからの寄与が大きくなる。このため再構成行列の6つの区画のうち、距離が近い波面センサーの組み合わせに対応する区画でパターンが強くなる様子が見られる。例えば図 4.5 から、データセット 20140514_043709 の時間帯は CL-WFS1 と OL-WFS1、CL2-WFS2 と OL-WFS2、WFS3 は比較的近いガイド星配置となっているが、図 6.5 ではそれらの波面センサーの組み合わせに対応した区画のパターンが強くなっていることが分かる。

一方で、データセット 20150623_195319 は地表層の割合が高い時間帯である（図 4.6）。このため高層の寄与を示すパターンは比較的弱くなっている。

データセット 20140514_043709

経験的トモグラフィック再構成行列であるが、地表層と高層の寄与によるパターンをおおよそ再現していることが確認できたが、行列の差分を見てみるとパターンの強度が一致していないことが分かった。特に差が大きかったのは、1, CL-WFS1(y-Slope) に対する OL-WFS2(y-Slope) の区分、2, CL-WFS2(x-Slope) に対する OL-WFS2(x-Slope) の区分、CL-WFS2(x-Slope) に対する OL-WFS3(x-Slope) の区分のパターンである。

1, CL-WFS1(y-Slope) の対する OL-WFS1(y-Slope) の区分では経験的トモグラフィック再構成行列では地表層の強度が弱く、高層の強度が強く見積もられていることが分かる。ガイド星配置（図 4.5）を見ると CL-WFS1 と OL-WFS1 は他の WFS と比べて近い距離にあることが分かる。また、2, CL-WFS2(x-Slope) の対する OL-WFS2(x-Slope) の区分、3, CL-WFS2(x-Slope) の対する OL-WFS3(x-Slope) の区分のいずれの組み合わせにおいても、古典的、経験的共に同様のパターンが見られたが、地表層、高層共に経験的トモグラフィック再構成行列の方が強度が強く見積もられていた。この場合もガイド星配置を見ると CL-WFS2 と OL-WFS2,3 は OL-WFS1 に比べて距離が近い。再構成行列の他の区分では特徴的な差が見られたことから、これらの差はガイド星とサイエンスタージット方向に近いことが原因と考えられる。

データセット 20150623_195319

データセット 20140514_043709 と同様に経験的トモグラフィック再構成行列で古典的モデルによるものと類似したパターンを得ることができたが、パターンの強度に差が生じた。特にこのデータセットは大気揺らぎの地表層成分が強い観測時間帯であったので、地表層の寄与によるパターン（各区分の対角成分）の差分が顕著に現れた。特に CL-WFS1 に対する OL-WFS2 の区分 (x-,y-Slope 両方) で地表層成分の強度が強く見積もられていた。ガイド星配置（図 4.9）を見ると CL-WFS1 は比較的 OL-WFS2 に近い距離を向いていることが分かる。この地表層成分の強度の違いは CL-WFS2 と OL-WFS2 の区分でも見られたが CL-WFS1 ほど明瞭には差が出ていないことから、この場合もガイド星との距離が影響している可能性がある。

6.2.1 高層大気の影響についての考察

図 6.9 から図 6.16 にはトモグラフィック再構成行列の行成分を波面センサーの副開口状にマップした結果の比較をそれぞれ掲載した。

各データセットにおける高層の大気揺らぎの強度 (4.6 の高度プロファイル参照) から予想されるサイエンスタージェット方向への OL-WFS の寄与を考えていく。RAVEN の大気揺らぎの測定から得られる大気揺らぎの高度プロファイルから、各高さにおけるサイエンスタージェット方向の CL-WFS と各 OL-WFS の開口面のずれ量を求める。望遠鏡口径上での各副開口のサイズが 0.8m であるので、高さ $h_i[m]$ でのずれ量 Δ は次の式で求まる。

$$\Delta_i \approx \frac{1}{0.8} h_i \|\theta^{OL} - \theta^{CL}\| \quad (6.3)$$

各データセットが得られた観測時間の大気の高層プロファイルと WFS の視線方向の角度差から、CL-WFS と OL-WFS の組に対して各高さにおける開口面のずれが副開口何個分に相当するか計算した結果表 6.1 のようになった。

移動量 Δ (sub-aperture)		標高 (km)					
		4	6	8	10	12	16
20140514_043709	CL1-OL1	1.2847	1.9271	2.5694	3.2117		5.1388
	CL1-OL2	2.7874	4.1811	5.5748	6.9685		11.149
	CL1-OL3	3.0652	4.9578	6.1304	7.6631		12.260
	CL2-OL1	3.5770	5.3655	7.1540	8.9425		14.308
	CL2-OL2	1.8256	2.7384	3.6512	4.5640		7.3025
	CL2-OL3	1.6439	2.4658	3.2877	4.1097		6.5754
20150623_195319	CL1-OL1						9.2334
	CL1-OL2						7.6090
	CL1-OL3						8.2209
	CL2-OL1						6.4974
	CL2-OL2						11.933
	CL2-OL3						4.2098

表 6.1: 各高さでの開口面上における移動量。空欄はこの高さの強度が無いことを示す。

高層大気の影響は着目する副開口の位置から表 6.1 の移動量の分だけずれた位置に現れる。また、ずれの方向はガイド星とサイエンスタージェットの角度差に対応する。しかしながら今回解析に使用したデータは、OL-WFS の座標は CL-WFS の座標系に対応するように回転が施されているため、ガイド星配置との単純な比較ができない。そこで、RAVEN で使用しているモデルで上空 5km の層に仮想的な大気を設けた場合のトモグラフィック再構成行列から WFS マスク上のマップを作成し、おおよそのずれの方向の見当を付けた。各データセットの WFS の組み合わせに対応するトモグラフィック再構成行列をマップした時の高層大気のパターン出現位置を図 6.7、図 6.8 に示す。今後の議論で着目する副開口の位置は各図で赤く塗った領域である。

6.1 章で示した通り、サイエンスタージェット方向の波面を見ている CL-WFS のある副開口に着目した時に、古典的トモグラフィック再構成行列と経験的トモグラフィック再構成行列の対応する行成分が、トモグラフィック推定における 3 つの OL-WFS の各副開口の測定値の寄与の分布を与える。ここからは、再構成行列の行成分を図 6.1 の 6 つの OL-WFS の寄与を表す区画に分割し、RAVEN の WFS マスク上にマップした結果を比較する。

20140514_043709

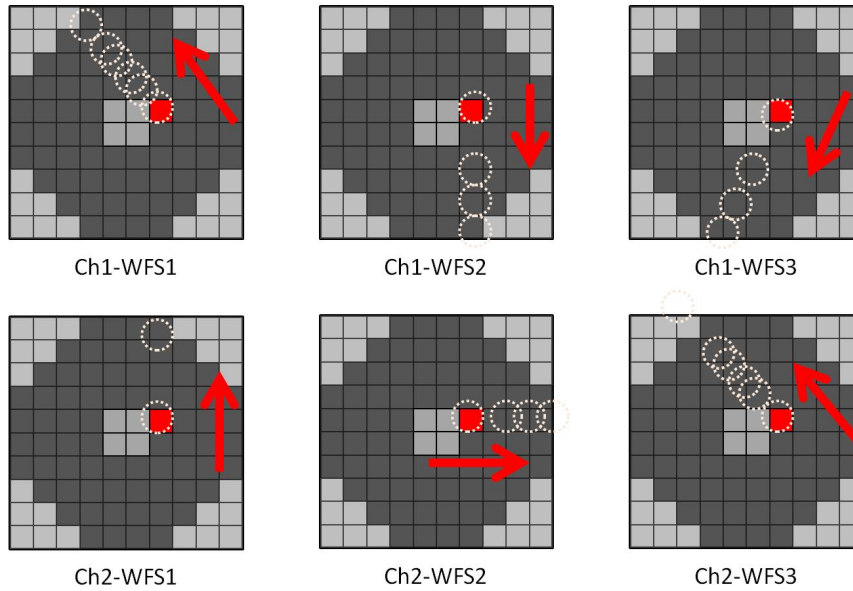


図 6.7: 高層大気の仮定とトモグラフィック再構成行列に現れるパターンの関係

20150623_195319

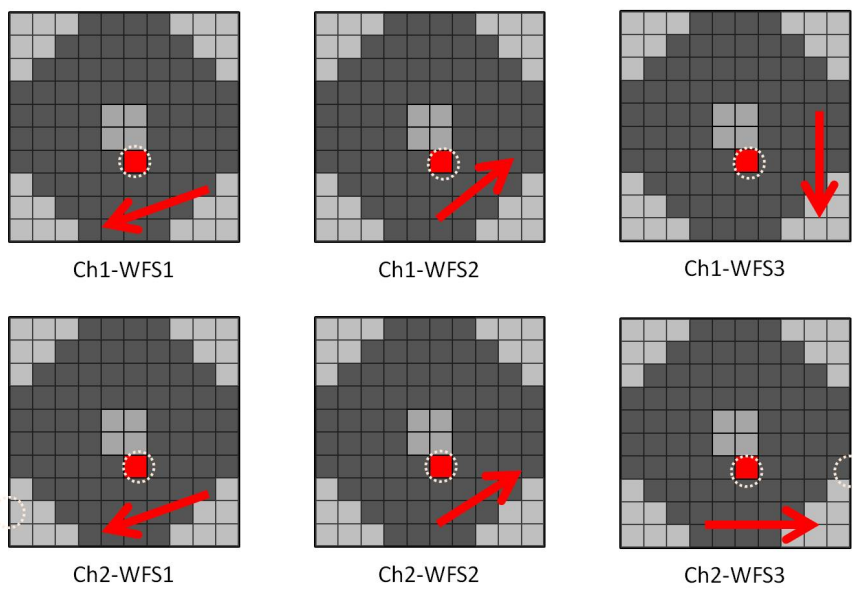


図 6.8: 高層大気の仮定とトモグラフィック再構成行列に現れるパターンの関係

図 6.9-図 6.12 はデータセット 20140514_043709、図 6.13-図 6.16 はデータセット 20150623_195319 の行列のマップを示している。また各図において、左列が古典的トモグラフィック再構成行列の行成分のマップ、中列が経験的トモグラフィック再構成行列のマップ、右列が両者の差分をマップしたものである。

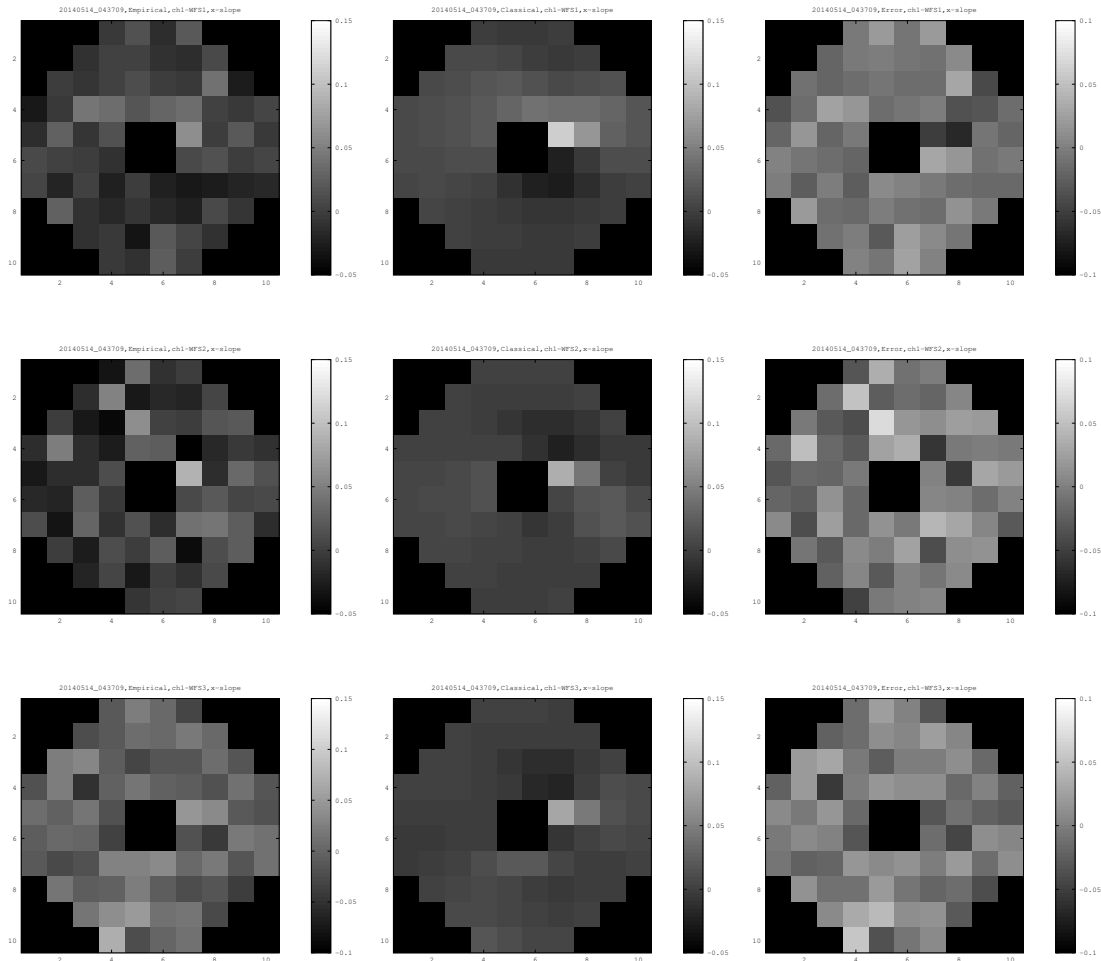


図 6.9: CL-WFS の 65 番目の副開口での x -Slope 推定値への各 OL-WFS の測定値の寄与。左：経験的トモグラフィック再構成行列。中：古典的トモグラフィック再構成行列。右：差分。経験的トモグラフィック再構成行列はデータセット 20140514_043709 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 1 方向の CL-WFS のデータから構成。データ記録時間 90 秒。Criteria:0.01。

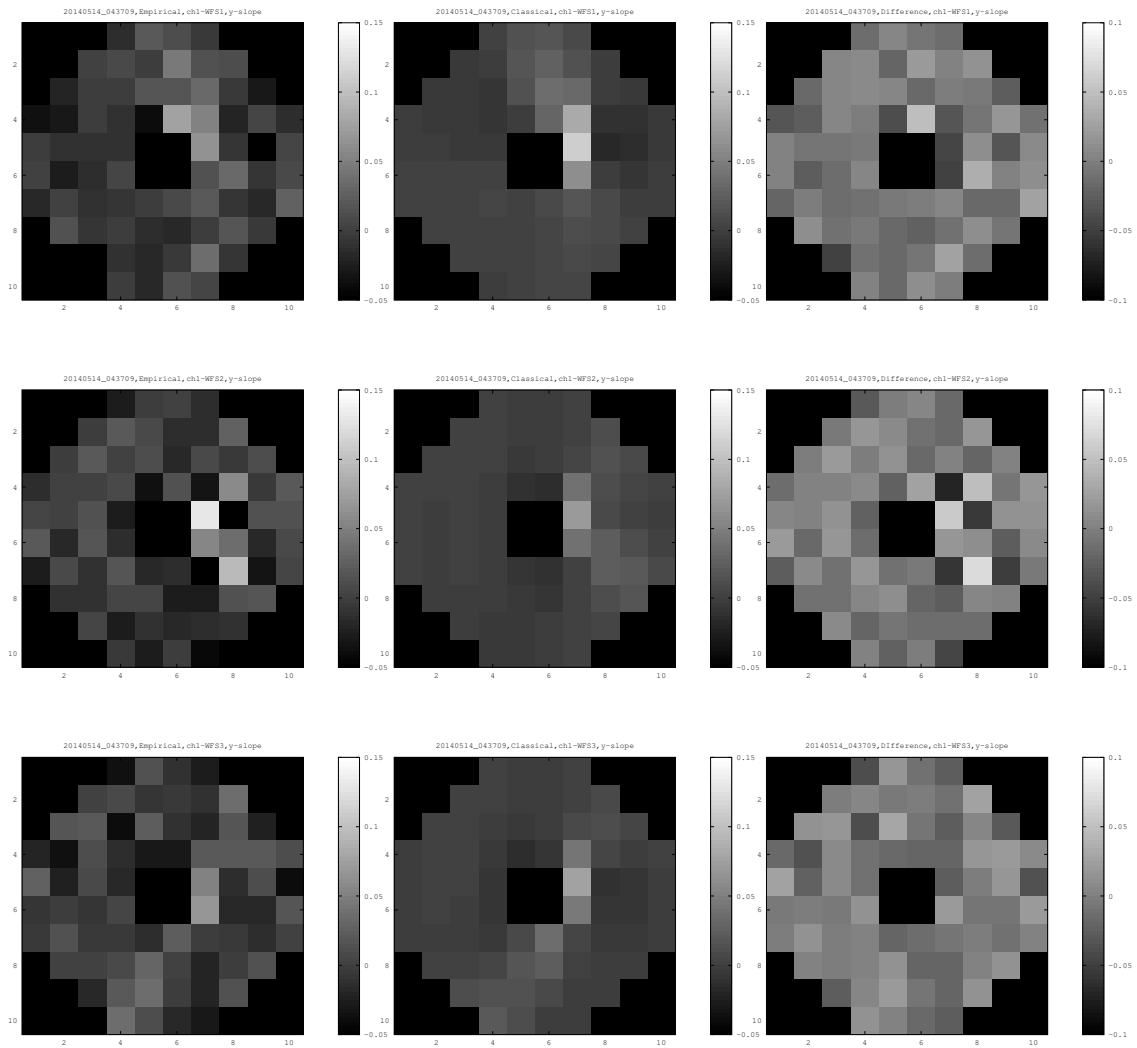


図 6.10: CL-WFS の 65 番目の副開口での y-Slope 推定値への各 OL-WFS の測定値の寄与。左：経験的トモグラフィック再構成行列。中：古典的トモグラフィック再構成行列。右：差分。経験的トモグラフィック再構成行列はデータセット 20140514_043709 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 1 方向の CL-WFS のデータから構成。データ記録時間 90 秒。Criteria:0.01。

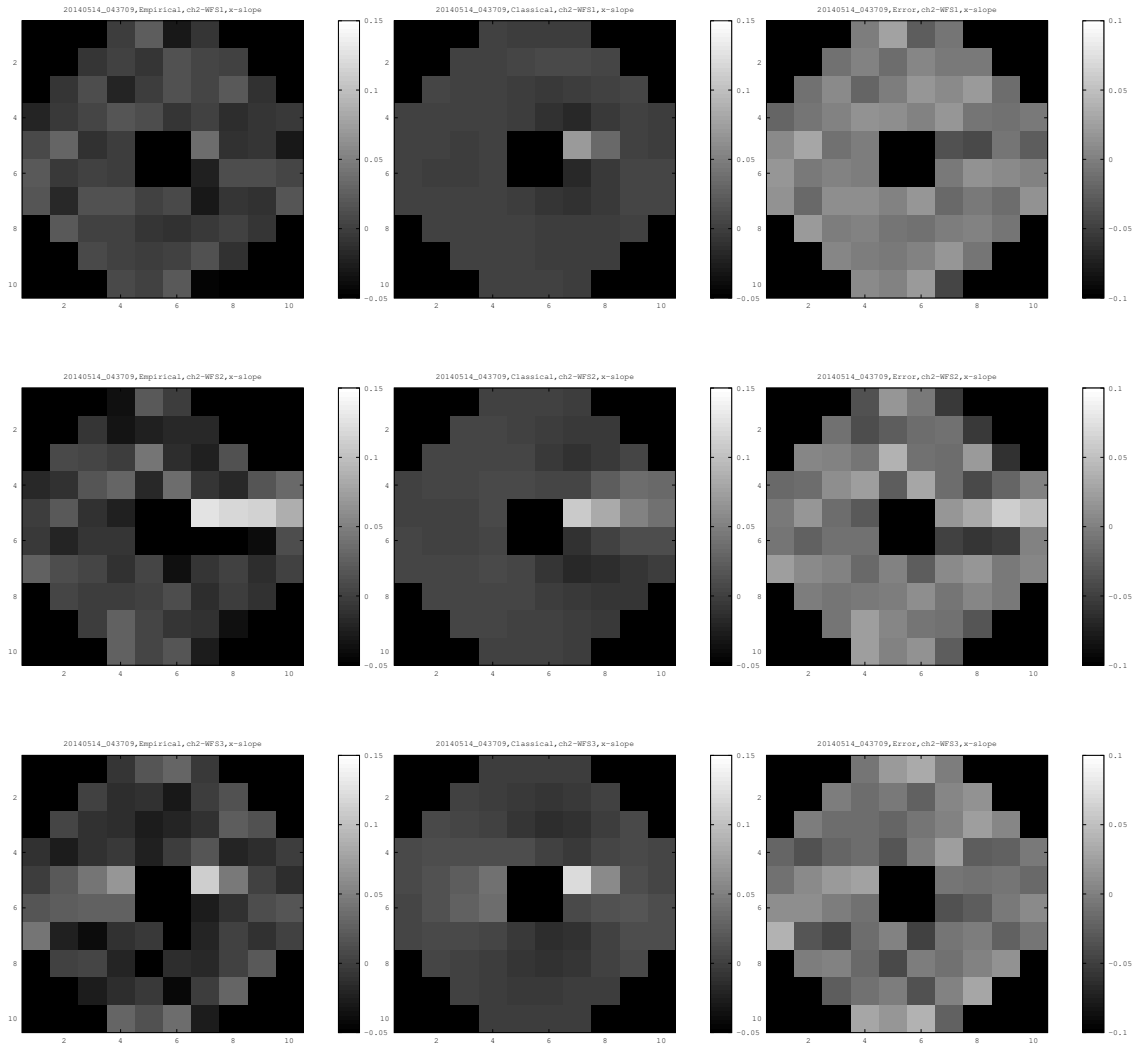


図 6.11: CL-WFS の 65 番目の副開口での x -Slope 推定値への各 OL-WFS の測定値の寄与。左：経験的トモグラフィック再構成行列。中：古典的トモグラフィック再構成行列。右：差分。経験的トモグラフィック再構成行列はデータセット 20140514_043709 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 2 方向の CL-WFS のデータから構成。データ記録時間 90 秒。Criteria:0.01。

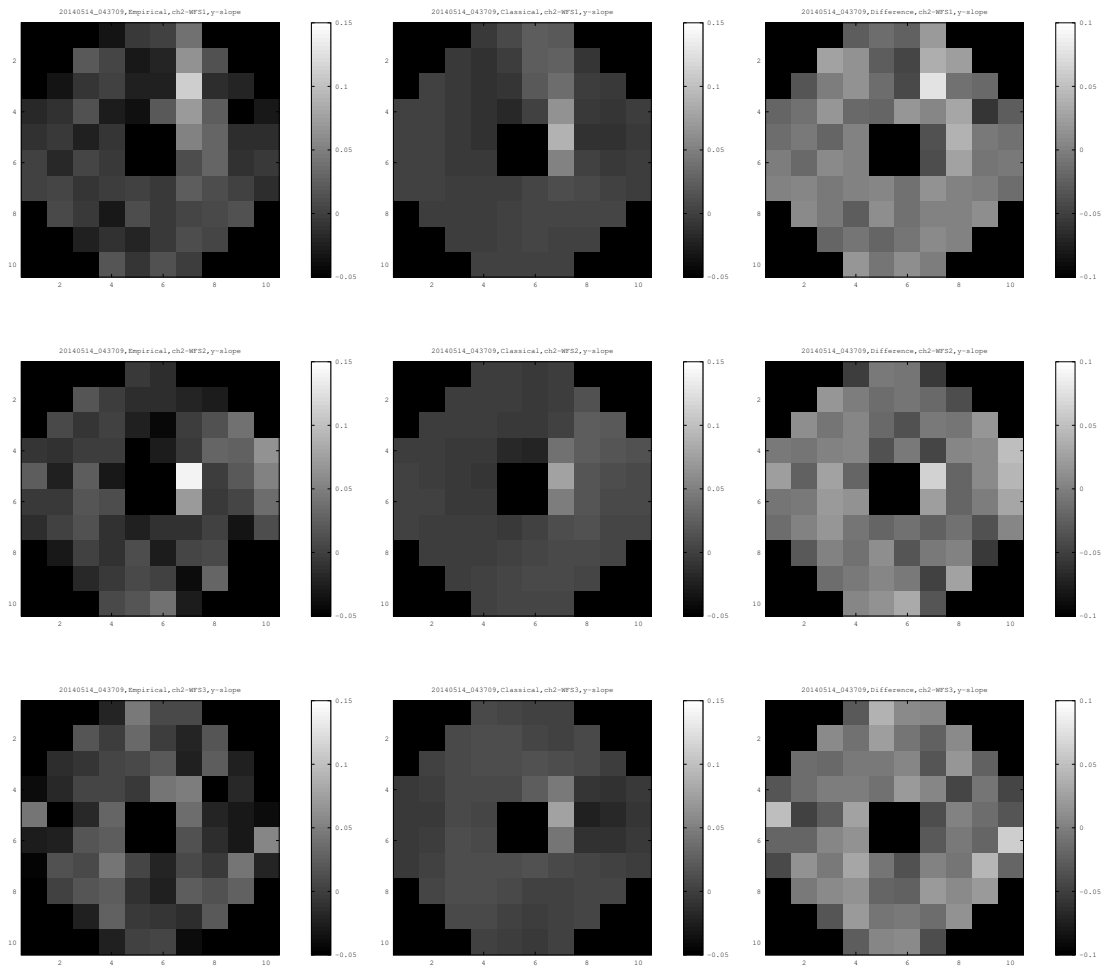


図 6.12: CL-WFS の 65 番目の副開口での y-Slope 推定値への各 OL-WFS の測定値の寄与。左：経験的トモグラフィック再構成行列。中：古典的トモグラフィック再構成行列。右；差分。経験的トモグラフィック再構成行列はデータセット 20140514_043709 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 2 方向の CL-WFS のデータから構成。データ記録時間 90 秒。Criteria:0.01。

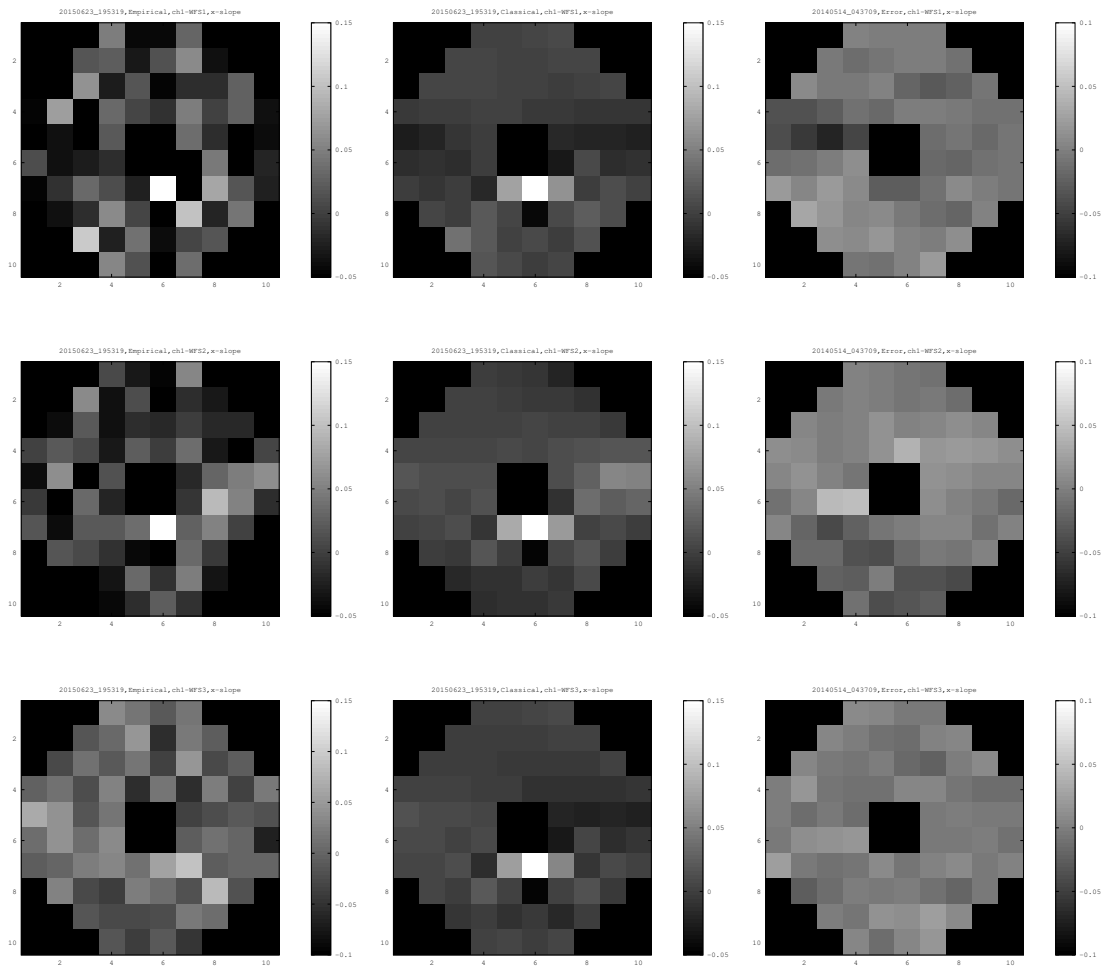


図 6.13: CL-WFS の 57 番目の副開口での x-Slope 推定値への各 OL-WFS の測定値の寄与。左：経験的トモグラフィック再構成行列。中：古典的トモグラフィック再構成行列。右；差分。経験的トモグラフィック再構成行列はデータセット 20150623_195319 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 1 方向の CL-WFS のデータから構成。データ記録時間 90 秒。Criteria:0.05。

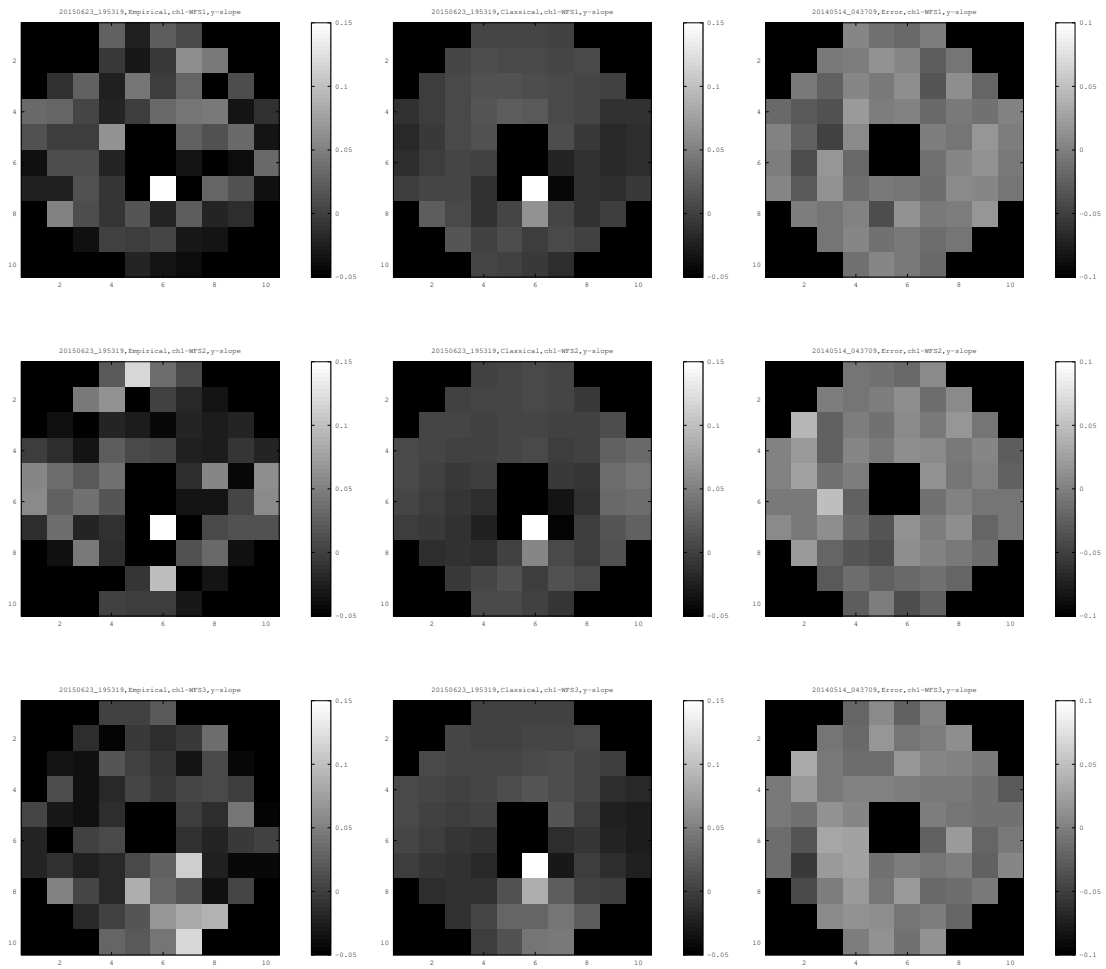


図 6.14: CL-WFS の 57 番目の副開口での y -Slope 推定値への各 OL-WFS の測定値の寄与。左：経験的トモグラフィック再構成行列。中：古典的トモグラフィック再構成行列。右：差分。経験的トモグラフィック再構成行列はデータセット 20150623_195319 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 1 方向の CL-WFS のデータから構成。データ記録時間 90 秒。Criteria:0.05。

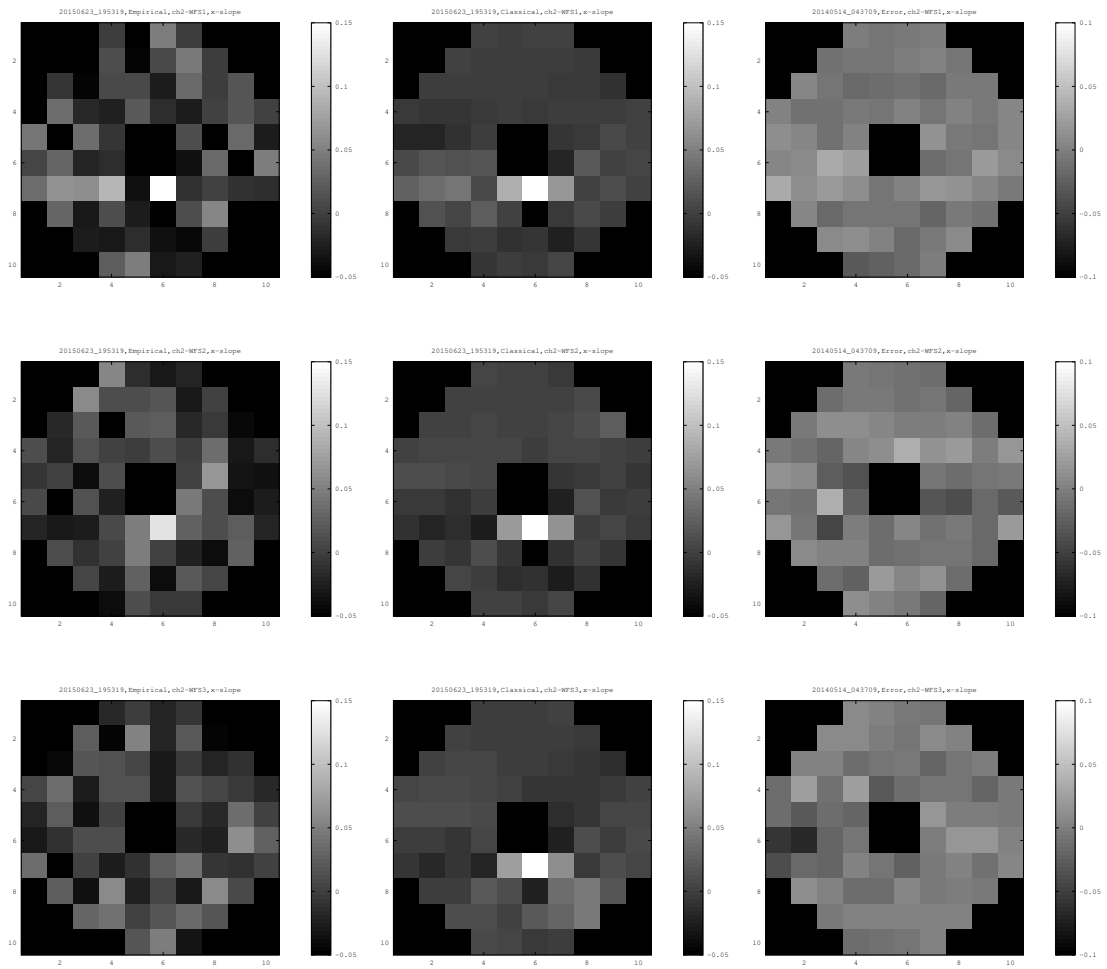


図 6.15: CL-WFS の 57 番目の副開口での x-Slope 推定値への各 OL-WFS の測定値の寄与。左：経験的トモグラフィック再構成行列。中：古典的トモグラフィック再構成行列。右；差分。経験的トモグラフィック再構成行列はデータセット 20150623_195319 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 2 方向の CL-WFS のデータから構成。データ記録時間 90 秒。Criteria:0.05。

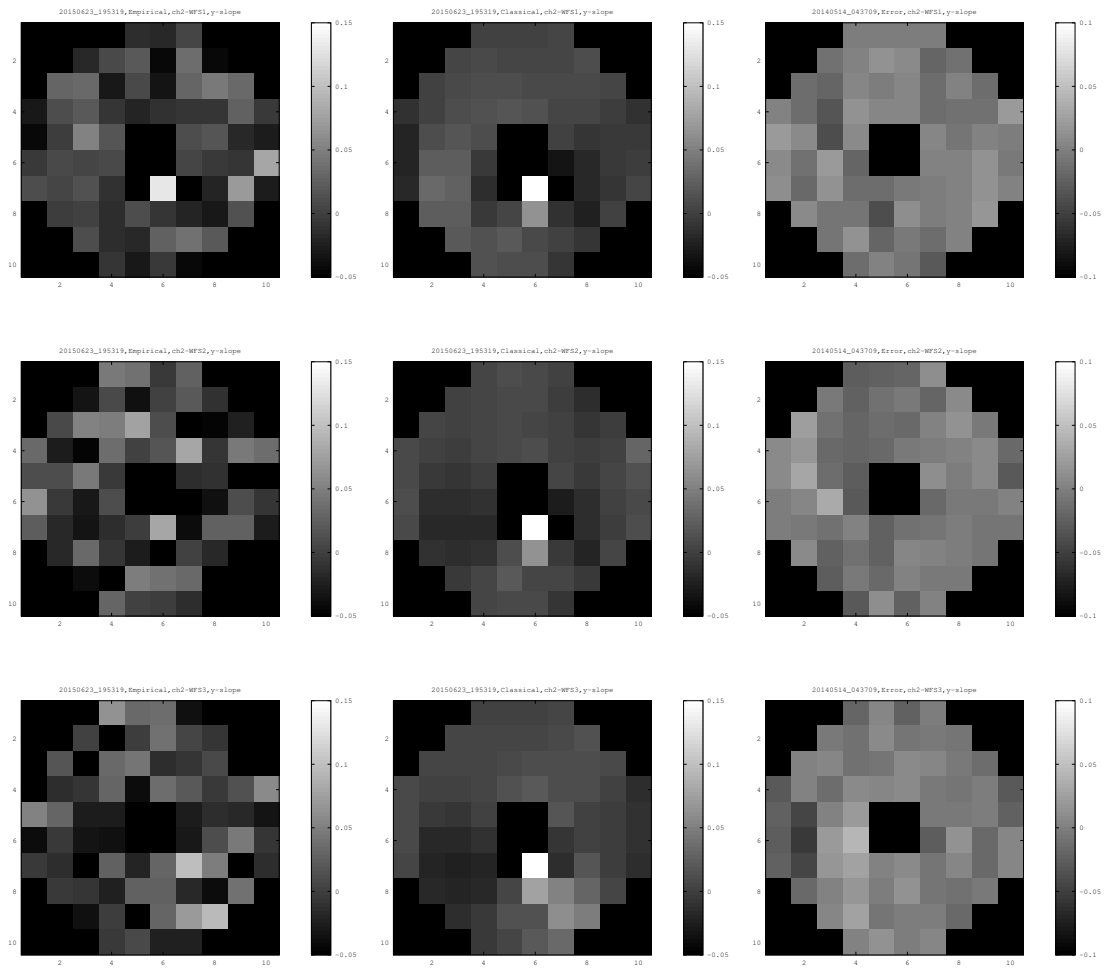


図 6.16: CL-WFS の 57 番目の副開口での y-Slope 推定値への各 OL-WFS の測定値の寄与。左：経験的トモグラフィック再構成行列。中：古典的トモグラフィック再構成行列。右；差分。経験的トモグラフィック再構成行列はデータセット 20150623_195319 の OL-WFS とサイエンスチャンネル 2 方向の CL-WFS のデータから構成。データ記録時間 90 秒。Criteria:0.05。

高層大気の寄与を示すパターンについて

古典的トモグラフィック再構成行列のマップに現れたパターンは大気揺らぎの高度プロファイルと WFS とサイエンスタージット方向の角度差から推定したものと一致した。一方、これらの高層大気によるパターンは経験的トモグラフィック再構成行列のマップでも見られた。これらのパターン以外にの副開口の寄与も少なからずあり、全体としてかなり不明瞭であったものの、おおよそ似た様なパターンが経験的に構成された。

差分行列のマップ

経験的手法による推定精度が古典的モデルを上回ったことから、オンスカイの観測データから構成した経験的トモグラフィック再構成行列の中に、古典的モデルでは考慮しきれていない要因が現れていると予想していたが、両手法による再構成行列のマップの差分はかなり不明瞭であった。少なくとも今回の解析からは行列構造の差分から高層大気の影響に関する特定の傾向やパターンを抽出することはできず、古典的モデルの改善に繋がる要因を発見するには至らなかった。逆に言えば、古典的なトモグラフィックモデルにおける高層大気の設定はオンスカイ観測において不十分であるという証拠は無く、既存のモデルでもある程度はオンスカイ観測に対応できていることを示していると考えられる。

6.3 推定波面誤差の比較

次に、経験的トモグラフィックによる推定が古典的手法に比べて精度が良くなる結果について、推定誤差に残った収差の分析から考察していく。

ツェルニケ係数の変動の傾向

収差の分析にはツェルニケ多項式による関数展開を用いる。ツェルニケ多項式は円形の領域内で値を持った正規直交関数系であり、光学系の収差の評価によく用いられる（ツェルニケ多項式の詳細は Appendix A 参照）。特に次数が低いツェルニケモードは光学収差のパターンを表現するのに都合が良い。光学系の円形開口に入射した任意の光学波面 $w(\rho)$ は、次のようにツェルニケ多項式を基底とした関数展開によって一意に表すことができる。

$$w(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i Z_i(\rho) \quad (6.4)$$

ここで、 ρ を開口面 Ω 上で定義した座標 $\rho = (\rho_x, \rho_y) \in \Omega$ 、 $Z_i(\rho)$ は i 番目のモードのツェルニケ多項式を表す。 $Z_i(\rho)$ が正規直行基底より係数 c_i は次のように求まる。

$$c_i = \frac{\int_{\Omega} Z_i(\rho) w(\rho) d\rho}{\int_{\Omega} d\rho} \quad (6.5)$$

式 (6.5) から求まる展開係数は i 番目のツェルニケモードが示す収差が波面 $w(\rho)$ にどれだけ含まれているかを表す指標として使うことができる。今回は、データセット 20150623_195319 と 20140514_043709 について古典的トモグラフィックと経験的トモグラフィックを行ったときの推定誤差にどれだ

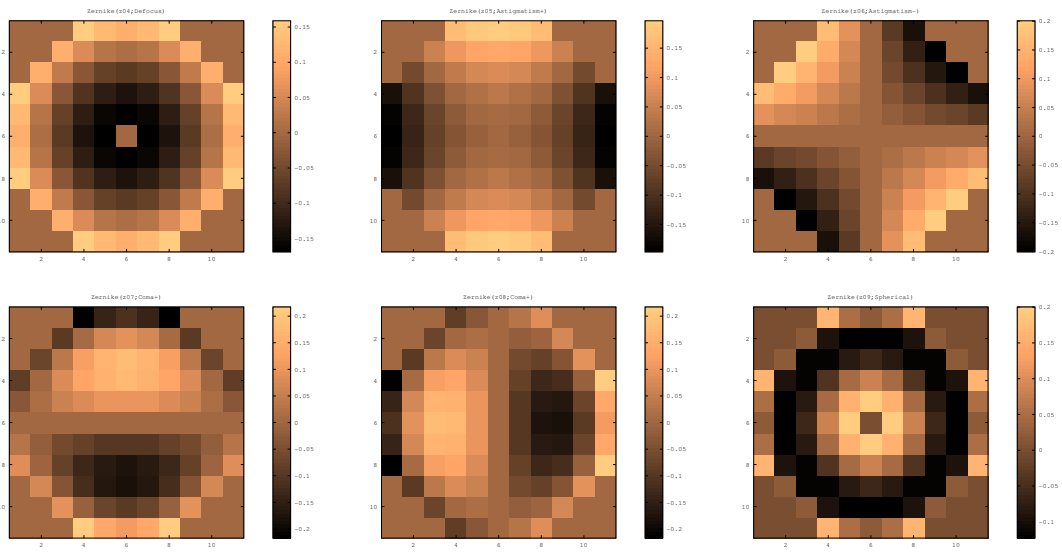


図 6.17: RAVEN のマスク上で規格化したツェルニケ多項式のマップ。左上から焦点ずれ ($i = 4$)、非点収差 ($i = 5, 6$)、コマ収差 ($i = 7, 8$)、球面収差 ($i = 9$) に対応する。

けの収差が残っているかを調べるために、図 6.17 に示した 6 つのツェルニケパターンについて展開係数 c_j を求めた。なお、ツェルニケモード $i = 1$ は平行移動成分に対応し波面補償には一切関係しない。また $i = 2, 3$ のモードは x, y 方向の傾斜 (Tip-Tilt) に対応するが AO の補償プロセスでは別に制御を行うことが多く、本研究の解析では予め取り除いてある。

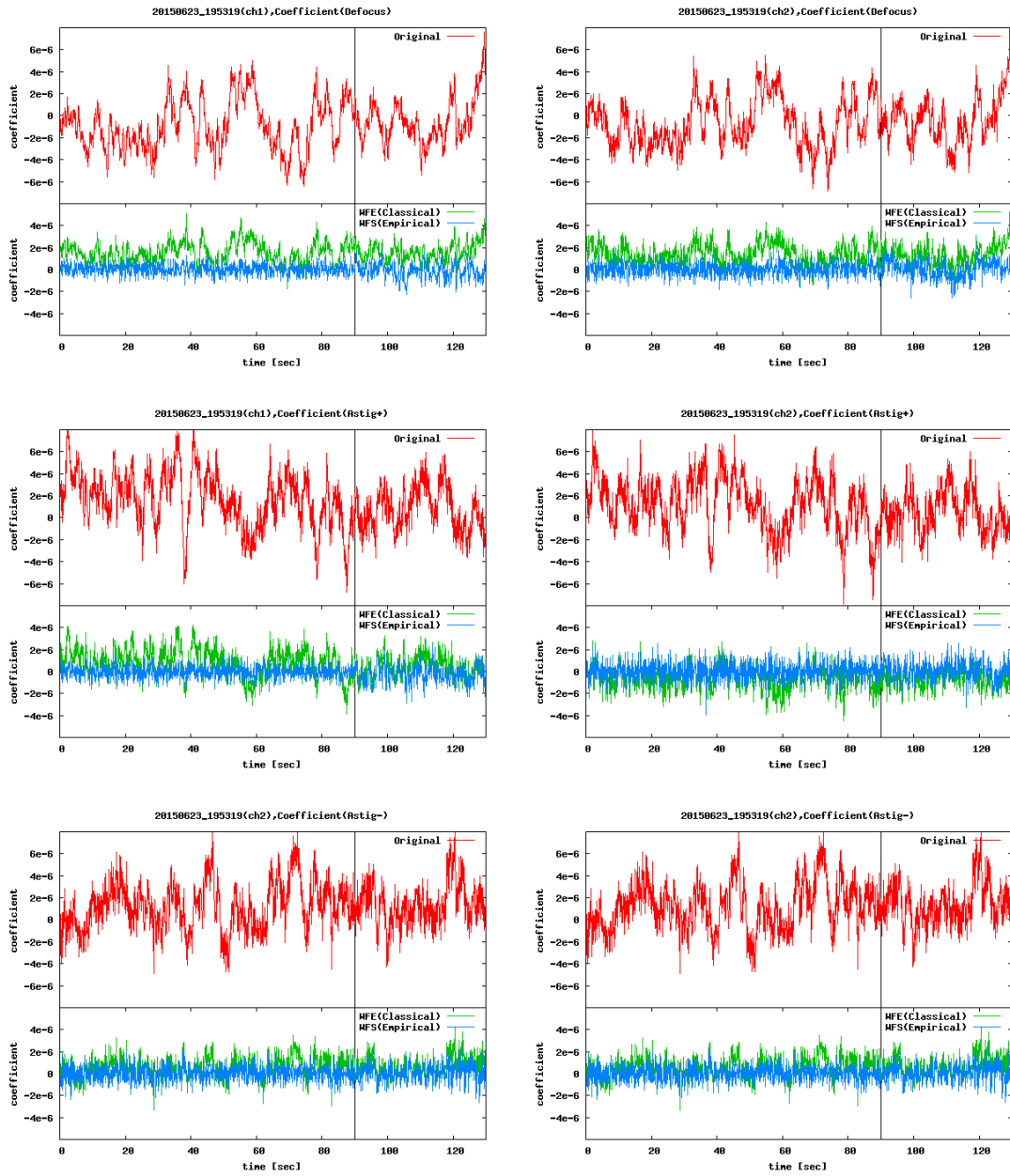


図 6.18: データセット 20150623_195319 のトモグラフィー推定残差のツェルニケ展開係数の時間変動。上からツェルニケモード $i = 4, 5, 6$ の結果。右: Ch1、左: Ch2。各図で上側のプロットはオリジナル波面から求めた係数、下側が推定残差から求めた係数 (緑: 古典的手法、青: 経験的手法) を表す。また経験的トモグラフィック再構成行列の計算のためのデータ記録時間は 0-90 秒 (縦線で区切られた領域) である。

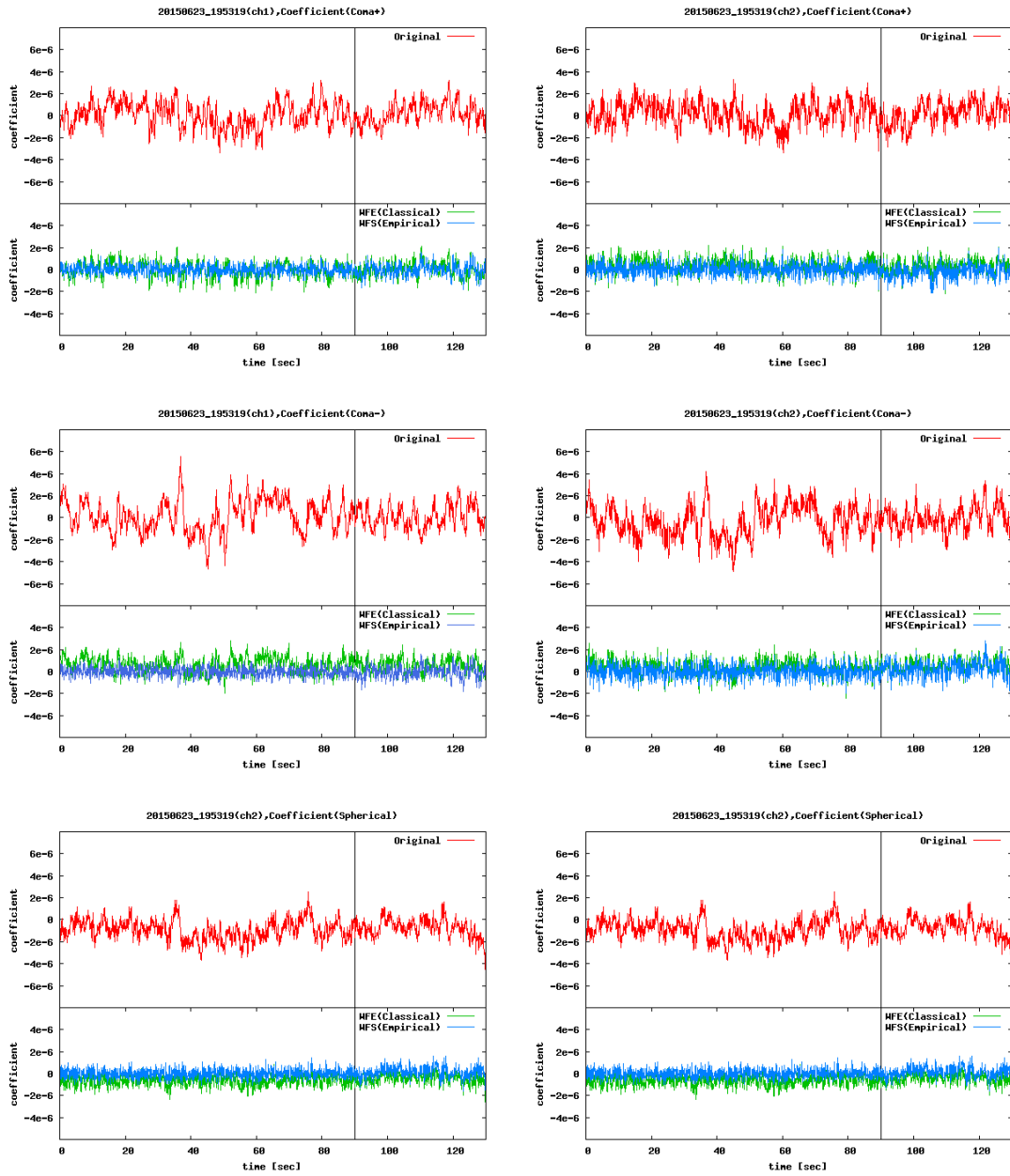


図 6.19: データセット 20150623_195319 のトモグラフィック推定残差のゼルニケ展開係数の時間変動。上からツェルニケモード $i = 7, 8, 9$ の結果。右: Ch1、左: Ch2。各図で上側のプロットはオリジナル波面から求めた係数、下側が推定残差から求めた係数 (緑: 古典的手法、青: 経験的手法) を表す。また経験的トモグラフィック再構成行列の計算のためのデータ記録時間は 0-90 秒 (縦線で区切られた領域) である。

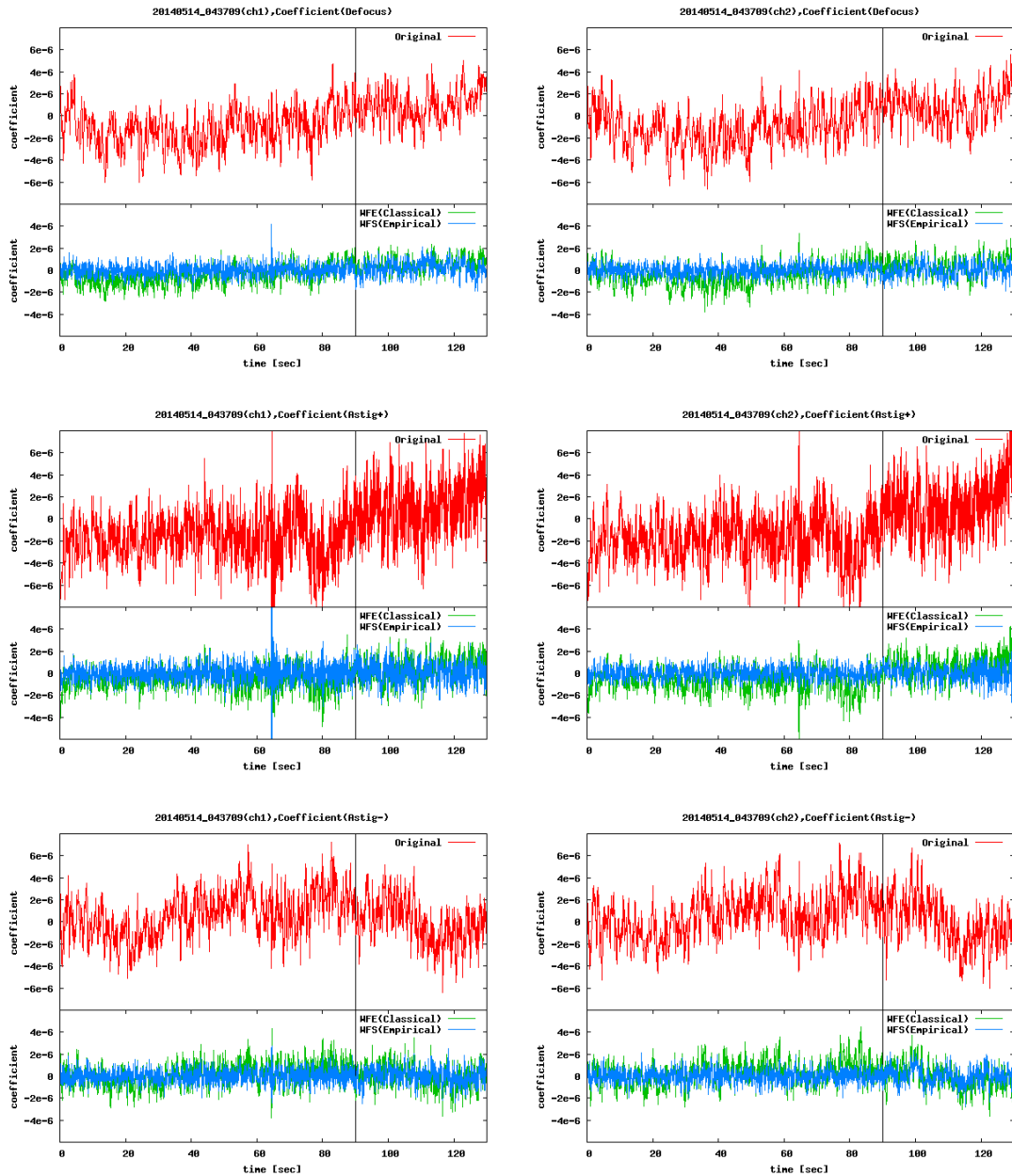


図 6.20: データセット 20140514_043709 のトモグラフィック推定残差のゼルニケ展開係数の時間変動。上からゼルニケモード $i = 4, 5, 6$ の結果。右: Ch1、左: Ch2。各図で上側のプロットはオリジナル波面から求めた係数、下側が推定残差から求めた係数 (緑: 古典的手法、青: 経験的手法) を表す。また経験的トモグラフィック再構成行列の計算のためのデータ記録時間は 0-90 秒 (縦線で区切られた領域) である。

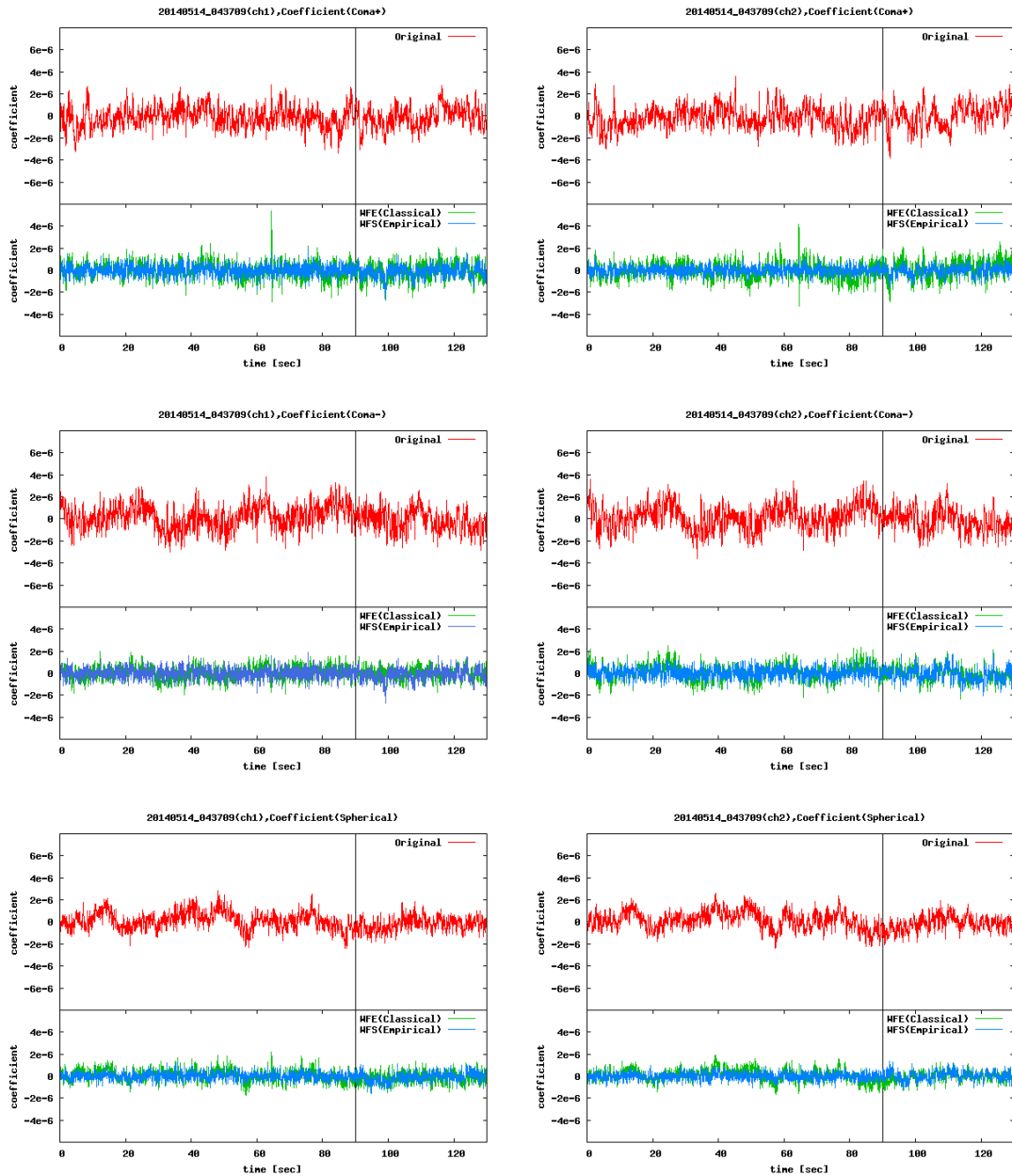


図 6.21: データセット 20140514_043709 のトモグラフィック推定残差のゼルニケ展開係数の時間変動。上からツェルニケモード $i = 7, 8, 9$ の結果。右: Ch1、左: Ch2。各図で上側のプロットはオリジナル波面から求めた係数、下側が推定残差から求めた係数 (緑: 古典的手法。青: 経験的手法) を表す。また経験的トモグラフィック再構成行列の計算のためのデータ記録時間は 0-90 秒 (縦線で区切られた領域) である。

サイエンスチャンネル方向の CL-WFS で測定したオリジナルの波面をツェルニケ展開したところ、焦点ずれと非点収差の係数が比較的強く変動も大きいことが分かった。更にサイエンスチャンネルの違いによらず、係数の変動の様子はほぼ同じであった。トムグラフィー推定による波面残差をツェルニケ係数展開したところ、経験的トムグラフィーでは係数の変動は低く抑えられているが、古典的トムグラフィーでは推定後の波面残差にオリジナルの収差の成分が残っている様子が確認できた。経験的手法よりも古典的手法で収差が残る傾向は特に焦点ずれや非点収差といった低次の収差成分でよく見られ、それより高次の収差では差はあまり見られなかった。また、経験的トムグラフィーでもデータ記録時間帯の中では推定残差に残る収差成分の変動は低いが、データ記録に使っていない時間帯の推定残差は古典的手法と同様にオリジナルの収差が残る傾向を示した。これらの結果から、古典的トムグラフィーが経験的トムグラフィーに比べオンスカイでの推定精度が低い原因として、推定しきれない低次の収差の影響がある可能性が考えられる。オリジナルの波面収差の変動のパターンがサイエンスチャンネル 1、2 で似ている点を踏まえると、これらの収差は 1, どのサイエンスチャンネルの方向に関係なく共通な大気揺らぎ層である地表層の影響、もしくは 2, 装置自体の変形・振動の影響などに起因したものと考えられる。これらの可能性についてより詳細に考察していく。

1, 装置本体の変形、振動の影響

光学収差が残る原因としてまず考えられるのが観測装置内部の光学系の影響である。今回の結果はサイエンスチャンネルの違いによらず収差が同じような変動のパターンを持つことから、サイエンスチャンネルごとの独立した光学系の変形や振動ではなく、望遠鏡本体の振動及びそれに付随する装置全体の変形に伴う光学系の歪みが生じた原因となっていると考えられる。

望遠鏡や装置等の機械的な振動はランダムではなくある決まった周期を持った時間変動の成分として現れる。すばる望遠鏡のケースでは、国立天文台の神澤氏の調査によって表 6.2 のような振動成分が現れることが確認されている [37]。もし収差の変動の原因が望遠鏡や観測装置の振動の影響によるものであるとすると、収差の変動をフーリエ変換した時にある特徴的なピークを持つはずであるので、周波数解析によって収差の変動に装置由来の成分があることを確かめることができる。そこでサイエンスターゲット方向の CL-WFS で測定した波面に含まれるツェルニケモードの係数 c_i の変動を MATLAB の高速フーリエ変換関数 `fft` を用いて周波数解析した。

まず、望遠鏡の振動の影響が現れやすい波面の平均傾斜 (Tip-Tilt) 成分についてフーリエ変換を行い、観測機器等の振動の成分が見られるか確認した (図 6.22)。データセット 20140514_043709 のパワースペクトルでは 5Hz 付近に強いピークが見られた。この時間帯は望遠鏡の高度が約 80° であることが分かっているので、このピークは表 6.2 の EL 方向の 5.47Hz の振動によるものだと考えられる。また 74Hz 付近にピークがあるが、これは RAVEN の装置内部の振動に由来することが実験室での調査から判明している。また、y 方向の Tip-Tilt で ch1 で 50Hz 付近、ch2 で 60Hz 付近にやや強いピークが見られたが、これについては原因は不明である。一方データセット 20150623_195319 のパワースペクトルでは原因が分からない鋭いピークが 10-30Hz の間に幾つか見られる。大気揺らぎの振動成分がこのような一定周期の振動を持つとは考えにくいので、これらのピークも何かしらの機械的振動によるものと考えられる。また、20140514_043709 と同様に 5-10Hz 付近と 74Hz 付近にピークが見られた。

次に、解析にデータセット 20140514_043709、201150623_195319 の各サイエンスチャンネル方向のオリジナルの波面揺らぎについてツェルニケモード $i = 4 \sim 9$ (焦点ずれ、非点収差 (+, -)、コマ収差 (+, -)、球面収差) の係数の時間変動の周波数分析を行い、装置の機械的変形、振動の成

振動方向	周期	頻度	特徴
AZ 方向	3.61 Hz	小	EL80° 以上でのみ見られる
AZ 方向	7.62 Hz	小	
AZ 方向	8.59 Hz	小	
EL 方向	4.5 Hz	小	
EL 方向	5.47 Hz	大	EL80° 以上でのみ見られる
EL 方向	11.52 Hz	小	

表 6.2: すばる望遠鏡で見られる周期振動。観測は 2005/1/20,1/21,1/22,5/3,5/4,5/13,5/14 の 7 日間にわたって PM6 時から AM6 時の時間帯で行われた。振動方向の AZ、EL はそれぞれ方位角方向、エレベーション方向を示す。

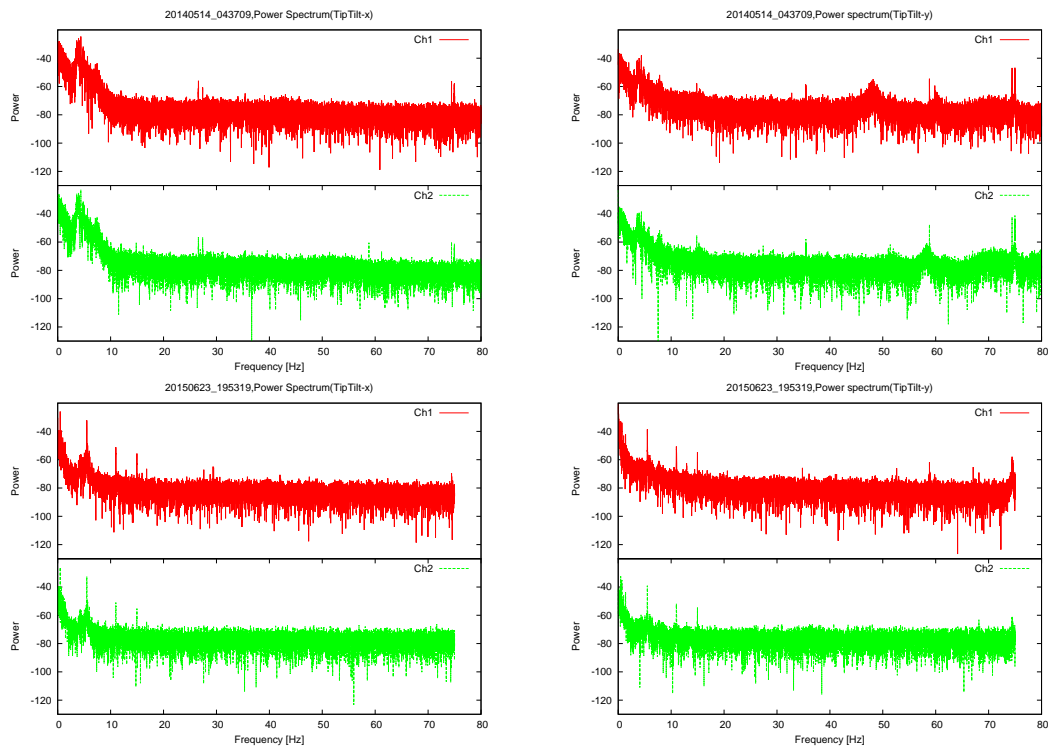


図 6.22: Tip-Tilt のパワースペクトル (右が x 成分、左が y 成分)。上段がデータセット 20140514_043709、下段がデータセット 20150623_195319 の結果を示す。縦軸はフーリエ係数の二乗の対数 ($10 \log_{10}(|\text{振幅}|^2)$)

分が見られないか確認する。各データセットのサイエンスターゲット方向のオリジナル波面におけるそれぞれのモードのパワースペクトルをそれぞれ図 6.23、図 6.24 に示した。

まず、いずれのデータセットでも焦点ずれと非点収差の変動のスペクトルに細かいピークが見られ、それ以降のモードではスペクトルが比較的滑らかであることが分かる。これは特に低次のモードの収差成分の変動に振動成分と同じく望遠鏡もしくは装置自体の変形の影響が出ていることを示している。また、例えば非点収差のモードなどで望遠鏡由来の低周期の振動の影響を受けているように見える箇所もあるが、それ以外のピークについてはモードによって現れる周波数が異なっていることも分かった。更に、全体として低周期の変動のパワーが高く、高周期になるほどなだらかにパワーが減少する傾向があるが、これは大気由来の変動成分であると考えられる。従って大気揺らぎは比較的長時間スケールの大きな成分が波面揺らぎの支配的な変動成分となっていると考えられる。

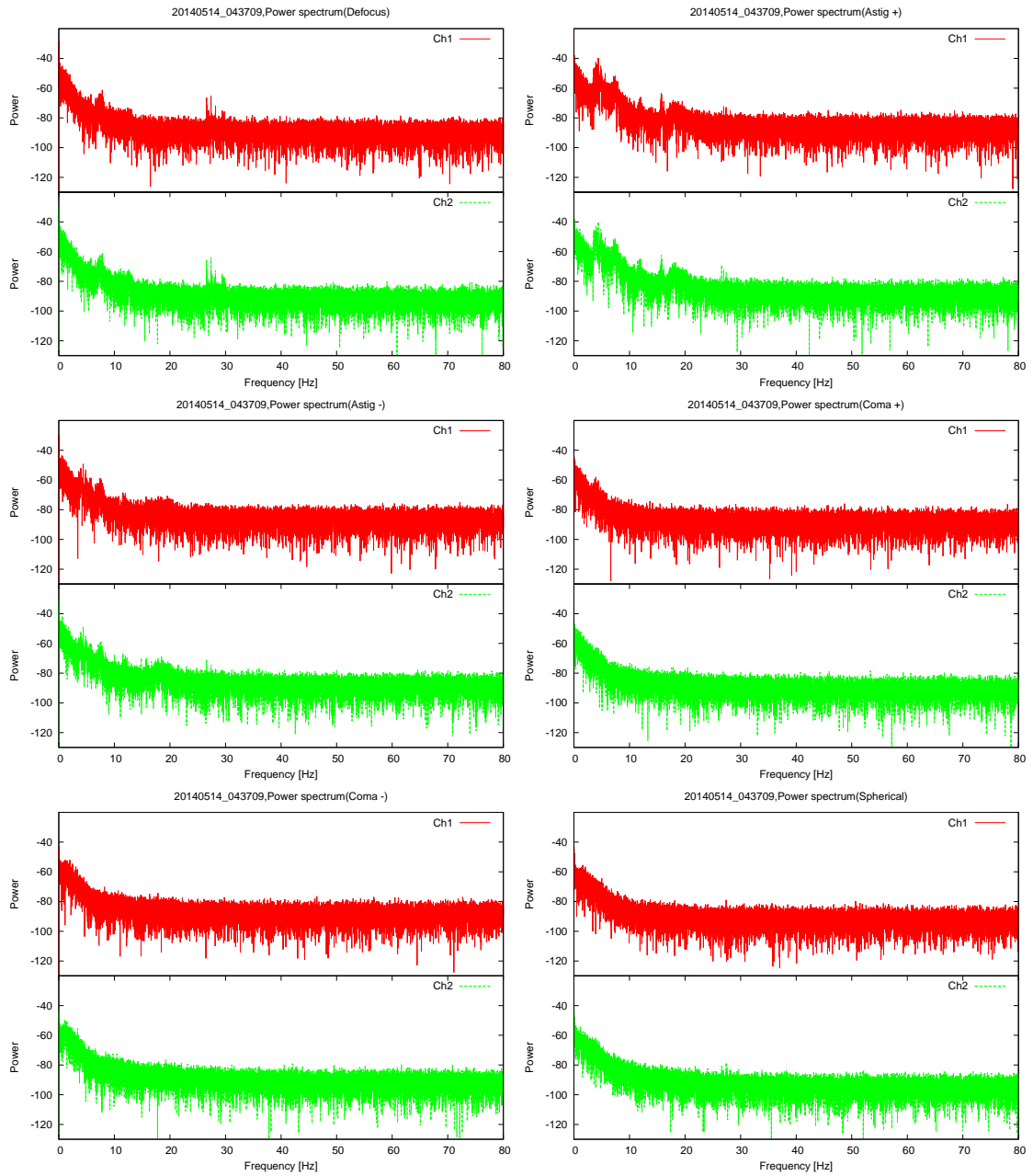


図 6.23: データセット 20140514_043709 のパワースペクトル。左上から焦点ずれ、非点収差 (+, -)、コマ収差 (+, -)、球面収差を指す。縦軸はフーリエ係数の二乗の対数 ($10 \log_{10}(|\text{振幅}|^2)$)

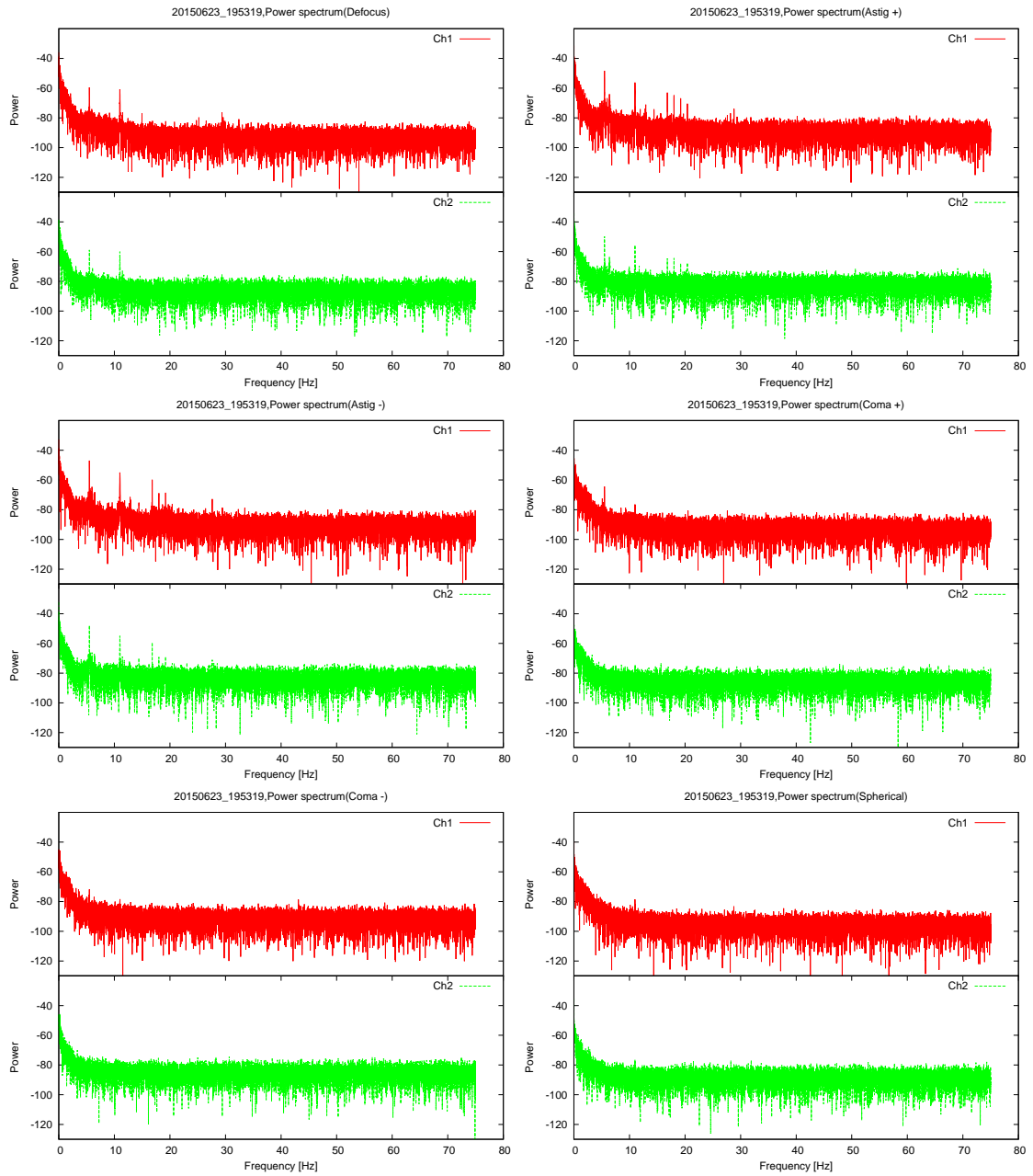


図 6.24: データセット 20150623_195319 のパワースペクトル。左上から焦点ずれ、非点収差 (+, -)、コマ収差 (+, -) を指す。球面収差。縦軸はフーリエ係数の二乗の対数 ($10 \log_{10}(|\text{振幅}|^2)$)

これまでの議論から、古典的トモグラフィーと経験的トモグラフィーによる推定誤差に残る収差の変動のうち、特に低次のモード（焦点ずれ、非点収差 (+,-)）で差が生じることが分かった。また収差変動の周波数解析からこれらの収差成分には望遠鏡もしくは装置自体の振動、変形が起源の収差変動が混ざっていることも判明した。最後に、古典的トモグラフィーと経験的トモグラフィーによる推定誤差に残る収差変動のパワースペクトルを比較する（6.25 と 6.26）。

まず古典的トモグラフィーによる推定誤差（各図上段）と経験的トモグラフィーによる推定誤差（各図中段）の結果を比較すると、経験的トモグラフィーの推定では取り除けている装置由来の成分の鋭いピークがいくつかあることが分かった。顕著に現れたのはデータセット 20150623_195319 で、特に非点収差のスペクトルの鋭いピークで古典的手法と経験的手法に差が生じていることが分かる（図 6.25）。この結果は古典的トモグラフィーでは装置の振動・変形に起因する収差変動に対応できていないことを示している。またわずかではあるが低周期の変動成分も経験的トモグラフィーの方が良く推定できていた。特に低周期の変動成分で差が生じたのは経験的トモグラフィーをデータ記録時間内とデータ記録時間外にそれぞれ適用した場合の比較である。経験的トモグラフィック再構成行列の計算に使ったデータに対して経験的トモグラフィーを行った場合、低周期のパワーが明らかに下がっている様子が確認できた。これはデータ記録時間内の WFE だけが大幅に低くなっていたことに対応していると考えられる。

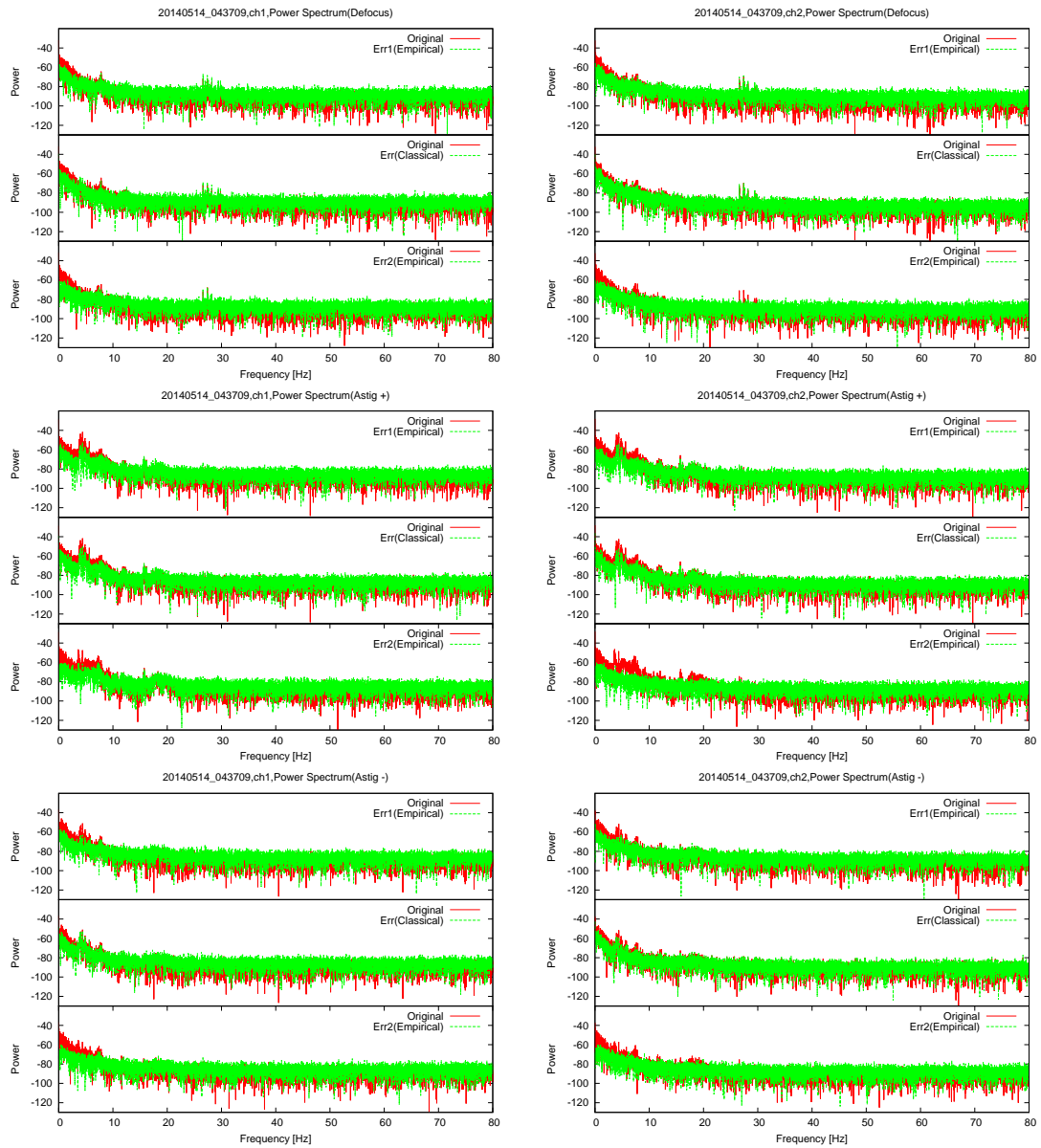


図 6.25: データセット 20140514_043709 のトモグラフィー推定残差のゼルニケ展開係数の時間変動のパワースペクトル。上からツェルニケモード $i = 4$ (焦点ずれ)、 $i = 5$ (非点収差 (+))、 $i = 6$ (非点収差 (-)) の結果 (赤: オリジナル。緑: 経験誤差)。右: Ch1、左: Ch2。各図で上段のプロットは経験的トモグラフィーのデータ記録時間帯以外の推定残差、中段が古典的トモグラフィー推定残差、下段は経験低トモグラフィーのデータ記録時間内の結果をそれぞれ示す。また経験的トモグラフィック再構成行列の計算のためのデータ記録時間は 0-90 秒とした。

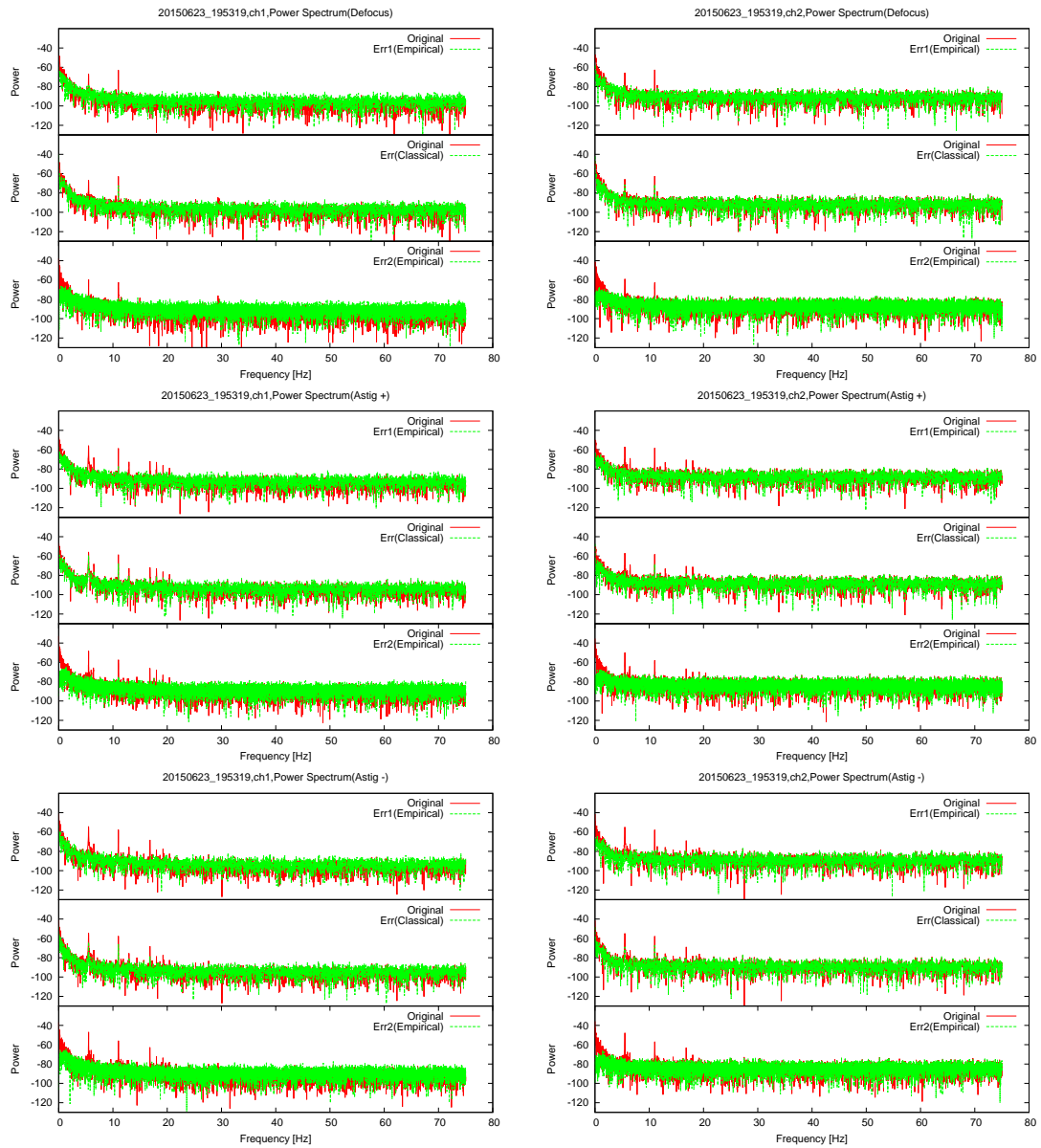


図 6.26: データセット 20150623_195319 のトモグラフィー推定残差のゼルニケ展開係数の時間変動のパワースペクトル。上からツェルニケモード $i = 4$ (焦点ずれ)、 $i = 5$ (非点収差 (+))、 $i = 6$ (非点収差 (-)) の結果 (赤: オリジナル。緑: 推定誤差)。右: Ch1、左: Ch2。各図で上段のプロットは経験的トモグラフィーのデータ記録時間帯以外の推定残差、中段が古典的トモグラフィー推定残差、下段は経験低トモグラフィーのデータ記録時間内の結果をそれぞれ示す。また経験的トモグラフィック再構成行列の計算のためのデータ記録時間は 0-90 秒とした。

2. 地表層の影響

古典的トモグラフィーでは大気揺らぎの地表層成分の変動を十分に推定しきれていない可能性について考察していく。6.2節ではともグラフィック再構成行列を区画に分けて高層大気の寄与について比較したが、ここでは地表層の寄与に対応する各区画の対角成分のみを取り出して比較する。

図 6.27、図 6.27 はトモグラフィック再構成行列をサイエンスチャンネルと OL-WFS の組み合わせに対応した区画に分割し、各区画の対角成分をプロットしたものである。これは各 OL-WFS の地表層がどの程度推定に寄与するかを示している。地表層成分はどの OL-WFS でも共通の成分なので、古典的モデル（図左側）の分布にはあまり差は生じないはずである。中には（例えばデータセット 20140514 の OL-WFS など）特定の OL-WFS の地表層の寄与が強くなっているものもあるが、これはサイエンスチャンネル方向と OL-WFS が見ているガイド星の方向の距離に依るものであると考えられる。一方で、経験的トモグラフィック再構成行列の対角成分（図右側）は古典的モデルと大きく異なる分布を持つことが分かった。例えばデータセット 20150623 の CHI に体する OL-WFS2 の y-Slope の寄与（図 6.28 1 段目右側）を見ると、古典的モデルでは他の OL-WFS と差があまりないにも関わらず、経験的トモグラフィック再構成行列では非常に強い分布になっている。この結果は古典的モデルから導かれる大気揺らぎの地表層は現実のオンスカイ観測環境では対応できていないことを示している。経験的トモグラフィーの地表層の寄与がモデルと異なる原因としては、経験的手法では OL-WFS の検出器の感度差や、ガイド星の等級の違いを反映した重み付けを含んでいる可能性が考えられる。

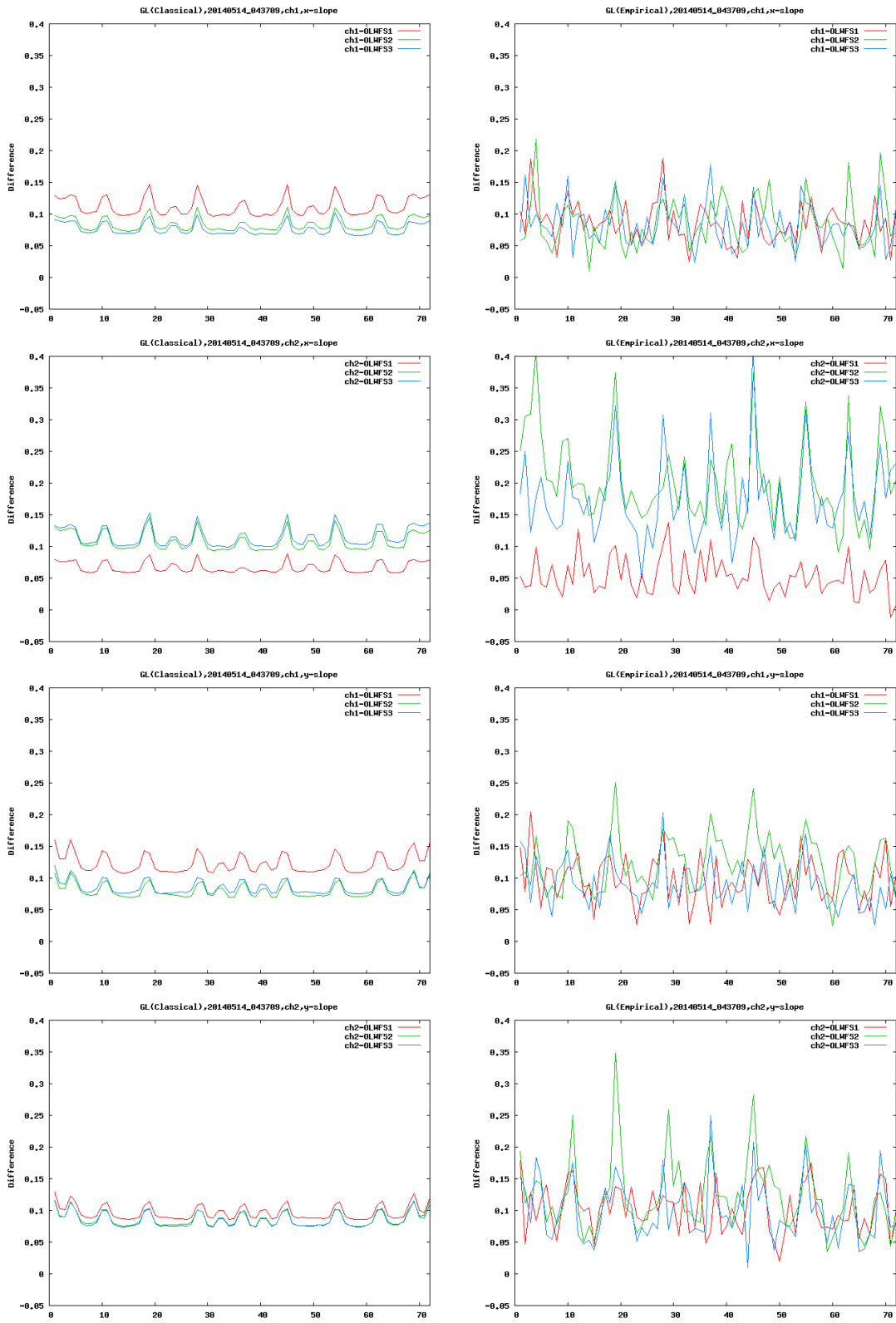


図 6.27: データセット 20140514_043709 のトモグラフィック再構成行列の地表層成分の比較。

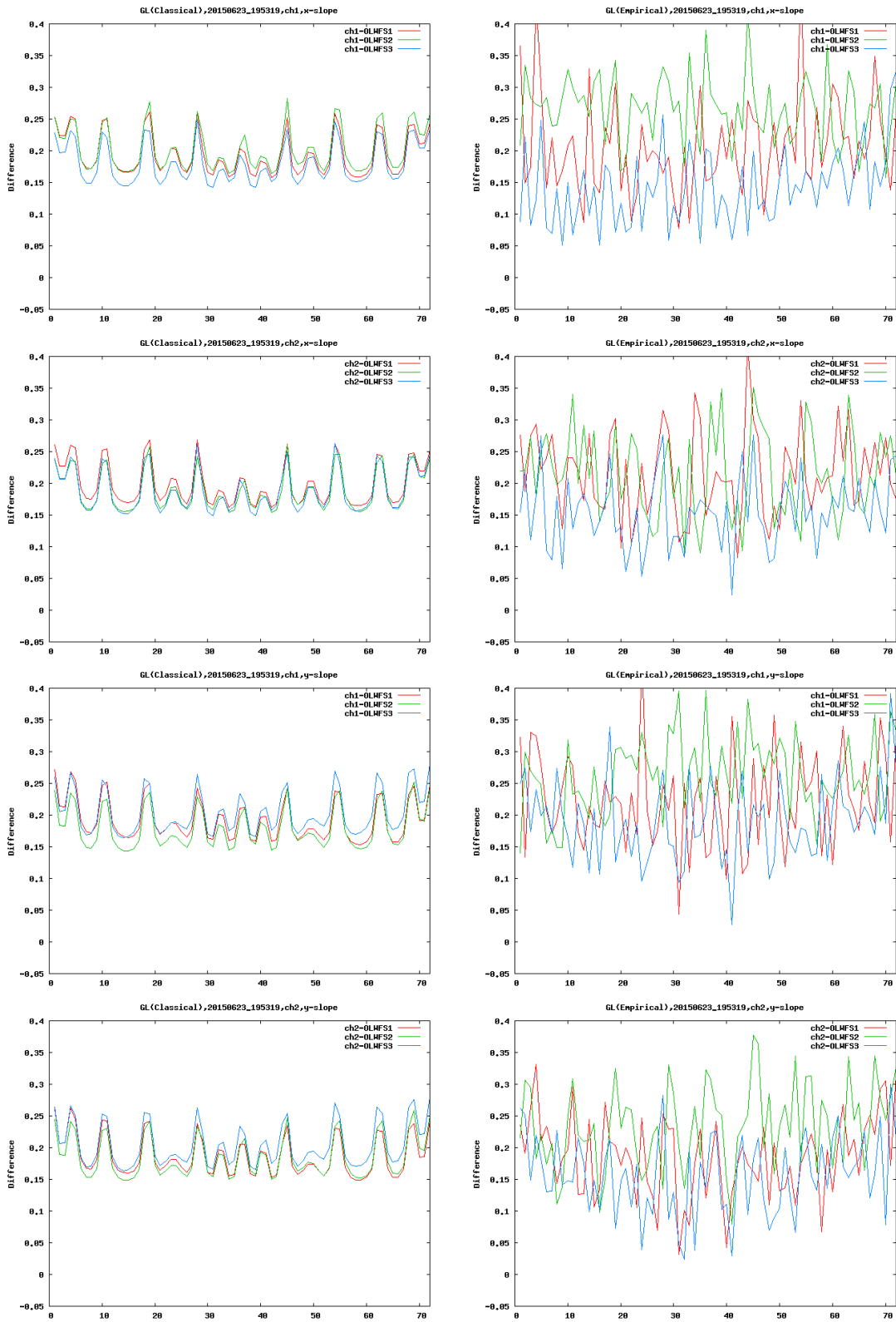


図 6.28: データセット 20150623_195319 のトモグラフィック再構成行列の地表層成分の比較。

6.4 議論のまとめ

今回私が解析した結果からより、オンスカイ観測の測定データから構成した経験的トモグラフィーによる推定が、古典的トモグラフィーへの推定精度を上回ることが確認された。この結果は従来仮定してきたトモグラフィーモデルではオンスカイ観測の環境下で推定性能に寄与するパラメータを含めきれていない可能性を示唆しているものである。本章では経験的手法と古典的手法の推定性能に差を生じさせている要因を、トモグラフィック再構成行列の比較、及び推定残差の分析から推測できないか試みた。その結果、以下の結論を導くに至った。

- 経験的トモグラフィック再構成行列で再現された高層大気の寄与によるパターンは古典的モデルと大きくは違わなかった。また差分のマップは全体的に不明瞭で特に傾向はを見いだすことはできなかった。この結果から古典的モデルの高層大気の仮定はオンスカイでもある程度妥当であると思われる。
- 推定誤差波面のツェルニケ係数の分析から特に古典的トモグラフィーで推定誤差に収差成分が残ることが判明した。収差の原因としては1, 望遠鏡本体もしくは装置全体の振動・変形、2, 大気揺らぎの地表層成分が考えられる。
- 周波数解析により、望遠鏡本体もしくは装置全体の振動等に起因する収差変動を古典的モデルでは推定しきれていないことが分かった。経験的トモグラフィーなら装置由来の寄与は反映することが可能である。
- トモグラフィック再構成行列の大気揺らぎの地表層成分の寄与をプロットしたところ、古典的手法と経験的手法でかなりの違いが見られた。このことから古典的モデルによる地表層の仮定は現実のオンスカイ観測環境に対応できていない可能性があることを示している。

第7章 結論

今回私は、2014年5月と2015年6月にすばる望遠鏡で行われた多天体補償光学実証装置 RAVEN のオンスカイ観測で得られた波面センサーの測定データについて Learn & Apply 法の適用し、実際のオンスカイ観測による測定データを利用から構成したトモグラフィック波面再構成行列を用いたトモグラフィック波面推定（経験的トモグラフィー）の検証を行った。そして経験的トモグラフィーによる推定と、従来のモデルを仮定した古典的トモグラフィーとの推定の結果を比較したところ、以下のことが分かった。

- 経験的トモグラフィック再構成行列の計算に使用するデータの記録サイズを増やしていくにつれて、同じデータセット内でデータ記録に使用しなかった時間帯の推定波面誤差が減少する傾向がある。
- 大気揺らぎのコンディションが著しく良かったデータセットを除いて、あるデータ記録のタイムスケールを超えると経験的トモグラフィーの推定精度が古典的手法を上回る。

これは、経験的トモグラフィック再構成行列が実際のオンスカイの測定データの統計的性質を反映し、古典的モデルでは考慮されていなかったパラメータからの寄与を回収できているためだと考えられる。つまりこの結果は、従来の古典的トモグラフィーモデルには含みきれていないが、オンスカイ観測で波面推定精度に結びつくパラメータの存在を示唆するものであり、現在の古典的トモグラフィーモデルではオンスカイ観測環境に十分対応して来ておらず、更なる推定性能改善の余地があることを示していると考えられる。

次に、古典的トモグラフィーモデルには含まれていないが、経験的手法では反映されている要素の洗い出しを行う目的で1、トモグラフィック再構成行列の構造の比較、2、トモグラフィック推定波面誤差の低次のツェルニケ係数の変動の性質の比較を行った。

経験的トモグラフィック再構成行列のマップからは、古典的トモグラフィック再構成行列と同様に大気揺らぎの高層の寄与のパターンが見られた。これは高層大気の仮定がオンスカイ観測環境でも妥当であることを示すものである。

また、光学系の収差を示す低次のツェルニケ係数の変動を見ると、古典的手法による推定ではオリジナルの波面収差が十分に取り除ききれていないことが分かった。この収差の由来として、1、地表層に近い大気揺らぎ、2、望遠鏡、装置本体の振動・変形、が考えられる。ツェルニケ係数の変動のパワースペクトル及びトモグラフィック再構成行列の地表層成分の寄与を分析した結果。

- 古典的トモグラフィーでは装置固有の周期的な変動を推定しきれいていない。
- 古典的モデルでは地表層の寄与はガイド星とサイエンス方向の距離にわずかに影響を受けるだけのおおよそ共通であったが、経験的手法ではモデルとかなりの違いが生じていた。

ということが分かった。特に地表層の違いについては、波面センサーのノイズやガイド星の明るさなどの影響を重み付けしている可能性があるため、更なる議論のためにはガイド星の等級や波面センサーの感度をより詳細に比較していく必要があると考えられる。

謝辞

まず、指導教官の秋山正幸准教授には学部の卒業研究から3年間にわたって大変お世話になりました。就職活動をはさみなかなか研究の方向性が定まらず結果が出せないでいた時も辛抱強く見守ってくださり、また沢山のアドバイスをいただきました。おかげさまでこの度修士論文という形で研究をまとめることができたと思っています。心より感謝いたします。

国立天文台ハワイ観測所の大屋真氏には日頃のゼミや研究会などで学部の卒業研究の時から多くの助言をしていただき、ハワイでの観測の際にもサポートしていただきました。また本学博士課程の大野良人先輩には研究に必要な観測データの提供やプログラミングに関する助言など、多忙の中でも快く引き受けてくださいました。お二方の力無しにはこの研究を進めることはできませんでした。この場を借りて感謝申し上げます。最後に学部生の頃から支え合ってきた天文学専攻の同期の皆さん、私の研生活を応援してくれた家族、親戚の方々に感謝いたします。

Appendix A

数学

A.1 最小二乗解の導出

最小二乗のコスト関数を行列の各成分の差の二乗のアンサンブル平均をとったものとして

$$F = \langle \|Y - RX\|^2 \rangle \quad (\text{A.1})$$

と定義した時、最小二乗法による行列 R の推定値 \hat{R} は

$$\hat{R} = \underset{R}{\operatorname{argmin}} F = \underset{R}{\operatorname{argmin}} \langle \|Y - RX\|^2 \rangle \quad (\text{A.2})$$

として求めることができる。以後、具体的な計算に移る。

まず、式 A.2 を展開すると、

$$\begin{aligned} F &= \underset{R}{\operatorname{argmin}} \langle \|Y - RX\|^2 \rangle \\ &= \operatorname{tr}[(Y - RX)^T(Y - RX)] \\ &= \operatorname{tr}[Y^T Y - X^T R^T Y - Y^T R X + X^T R^T R X] \end{aligned}$$

となる。この F を最小にする R は、 F を R で微分した時の値がゼロであるという条件から導くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial R} \operatorname{tr}[Y^T Y - X^T R^T Y - Y^T R X + X^T R^T R X] \\ &= -\frac{\partial}{\partial R} \operatorname{tr}(X^T R^T Y) - \frac{\partial}{\partial R} \operatorname{tr}(Y^T R X) + \frac{\partial}{\partial R} \operatorname{tr}(X^T R^T R X) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

以下、一般的な場合を考え、OL-WFS のデータ数を N 、CL-WFS のデータ数を M とする。

スカラー F を行列 A で微分するとは、 (p, q) 成分が、

$$\frac{\partial F}{\partial A_{pq}} \quad (\text{A.4})$$

の行列を新たに生成することである。このことを踏まえて式 A.3 の各項を順に計算していく。

(1). 式 A.3 右辺第一項の計算

$$\operatorname{tr}(X^T R^T Y) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Y_{ji} R_{jk} X_{ki}$$

これを R の (p, q) 成分で微分すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \text{tr}[\mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{Y}] &= \frac{\partial F}{\partial R_{pq}} \left[\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N X_{ji} R_{kj} Y_{ki} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left[\sum_{i=1}^L X_{qi} R_{pq} Y_{pi} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^L X_{qi} Y_{pi} \\
 &= (\mathbf{Y} \mathbf{X}^T)_{pq}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

となる。よって全ての要素について同様の計算をすると、式 A.5 より

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{Y} \mathbf{X}^T \tag{A.6}$$

となる。

(2). 式 A.3 右辺第二項の計算

$$\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Y_{ji} R_{jk} X_{ki}$$

これを R の (p, q) 成分で微分すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \text{tr}[\mathbf{Y}^T \mathbf{R} \mathbf{X}] &= \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left[\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Y_{ji} R_{jk} X_{ki} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left[\sum_{i=1}^L Y_{pi} R_{pq} X_{qi} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^L Y_{pi} X_{qi} \\
 &= (\mathbf{Y} \mathbf{X}^T)_{pq}
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

となる。よって全ての要素について同様の計算をすると、式 A.7 より

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{Y} \mathbf{X}^T \tag{A.8}$$

となる。

(3). 式 A.3 右辺第三項の計算

$$\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N X_{ji} R_{kj} R_{kl} X_{li}$$

これを R の (p, q) 成分で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \text{tr}[\mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{X}] &= \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left[\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N X_{ji} R_{kj} R_{kl} X_{li} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left\{ \sum_{i=1}^L \left[\sum_{j \neq q}^N X_{ji} \left(\sum_{\substack{j \neq p \\ l \neq q}}^M \sum_{l \neq q}^N R_{kj} R_{kl} X_{li} + R_{pj} R_{pq} X_{qi} \right) + X_{qi} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N R_{kq} R_{kl} X_{li} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

式 A.9 の前半部の微分は、

$$\frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left\{ \sum_{i=1}^L \left[\sum_{j \neq q}^N X_{ji} \left(\sum_{\substack{j \neq p \\ l \neq q}}^M \sum_{l \neq q}^N R_{kj} R_{kl} X_{li} + R_{pj} R_{pq} X_{qi} \right) \right] \right\} = \sum_{i=1}^L \sum_{j \neq q} X_{ji} R_{pj} X_{qi} \quad (\text{A.10})$$

式 A.9 の後半部の微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left[\sum_{i=1}^L X_{qi} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N R_{kq} R_{kl} X_{li} \right] &= \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left\{ \sum_{i=1}^L X_{pi} \left[H_{pq} \sum_{l=1}^N R_{pl} X_{li} + \sum_{k \neq p}^M \sum_{l=1}^N R_{kq} R_{kl} X_{li} \right] \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \left\{ \sum_{i=1}^L X_{pi} \left[R_{pq} \left(R_{pq} X_{li} + \sum_{l \neq q}^N R_{pl} X_{li} \right) + \sum_{k \neq p}^M \sum_{l=1}^N R_{kq} R_{kl} X_{li} \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^L X_{qi} \left(\sum_{l \neq q}^N R_{pl} X_{li} + 2R_{pq} X_{li} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

となる。式 A.10、A.11 より式 A.9 は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^L \sum_{j \neq q} X_{ji} R_{pj} X_{qi} + \sum_{i=1}^L X_{qi} \left(\sum_{l \neq q}^N R_{pl} X_{li} + 2R_{pq} X_{li} \right) \\ &= \sum_{i=1}^L \sum_{j \neq q} X_{ji} R_{pj} X_{qi} + \sum_{i=1}^L X_{qi} R_{pq} X_{li} + \sum_{i=1}^L X_{qi} \left(\sum_{l \neq q}^N R_{pl} X_{li} + R_{pq} X_{li} \right) \\ &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N X_{ji} R_{pj} X_{qi} + \sum_{i=1}^L X_{li} R_{pl} \sum_{i=1}^L X_{qi} \end{aligned}$$

第二項で $l \rightarrow j$ とすれば結局、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_{pq}} \text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{X}) &= 2 \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N R_{pj} X_{ji} X_{qi} \\ &= 2(\mathbf{R} \mathbf{X} \mathbf{X}^T) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

となる。式 A.6、A.8、A.12 から式 A.3 の計算結果は、

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{R}} = -2\mathbf{Y} \mathbf{X}^T + 2\mathbf{R} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \quad (\text{A.13})$$

となる。 F が最小となるのは式 A.13 の右辺がゼロの時であることから、

$$\begin{aligned} -2YX^T + 2\hat{R}XX^T &= 0 \\ \hat{R}XX^T &= YX^T \end{aligned}$$

ここで、 XX^T は正方行列なので逆行列を求めることができる。故に \hat{R} は次のように求まる。

$$\hat{R} = YX^T(XX^T)^{-1} \quad (\text{A.14})$$

式 A.14 が、OL-WFS の測定値からサイエンスパス方向の揺らぎ波面へと変換する行列を最小二乗法で推定する式である。

A.2 固有値

$[M \times M]$ の行列 A において、

$$Au_j = \lambda_j u_j \quad (\text{A.15})$$

を満たす M 組の列ベクトル u_j と定数 λ_j が存在する時、 λ_j を行列 A の固有値、 u_j を固有ベクトルという。本論文では、固有値は大きい順にインデックスが振られているものとする。

固有値を用いて A の行列式と、 A のトレースをそれぞれ表すと、

$$|A| = \prod_{j=1}^M \lambda_j \quad (\text{A.16})$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \quad (\text{A.17})$$

となる。

A が実対象行列、すなわち、 A の全ての要素が実数であり、かつ $A = A^T$ が成立する場合に限り、固有値 λ_j は全て実数となり、固有ベクトルの組は正規直行系をなす。 M 組の固有ベクトル u_j を列ベクトルとして持つ行列 $U = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_M]$ を考えると、

$$U^T U = U U^T = I \quad (\text{A.18})$$

が成り立つ。ここで I は単位行列を表す。

一方、固有値を対角成分に持つ行列 Λ を

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

と定義すれば、

$$AU = [Au_1 \ Au_2 \ \cdots \ Au_M] \quad (\text{A.20})$$

$$U\Lambda = [\lambda_1 u_1 \ \lambda_2 u_2 \ \cdots \ \lambda_M u_M] \quad (\text{A.21})$$

$$(\text{A.22})$$

と書くことができるので、式 (A.15) は

$$AU = U\Lambda \quad (\text{A.23})$$

と表される。式 (A.23) の右から U^{-1} を掛ければ

$$A = U\Lambda U^{-1} \quad (\text{A.24})$$

という形にはる。式 (A.24) を固有値 λ_j 、固有ベクトル u_j で表すと

$$\begin{aligned} A &= U\Lambda U^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_M^T \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^M \lambda_j u_j u_j^T \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

が成り立つ。式 (A.11) を行列 A の固有値展開と呼ぶ。

仮に全ての固有値について $\lambda_j \neq 0$ なら、式 (A.25) から行列 A の逆行列が求まる。

$$A^{-1} = U\Lambda^{-1}U^T = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j} u_j u_j^T \quad (\text{A.26})$$

また、全ての固有値が正またはゼロならば $A^{1/2}$ を

$$\begin{aligned} A^{1/2} &= U \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M^{1/2} \end{bmatrix} U^T \\ &= \sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j} u_j u_j^T \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

と定義することができる。ここで、 $A^{1/2}$ とは $A^{1/2}A^{1/2} = A$ を満たす行列を意味する。

A.3 特異値分解

A.3.1 基本性質

$[M \times N]$ の非正方行列 X に対して、正方行列で行ったような固有値展開式 (A.25) と同様の展開を行うことができる。

$$X = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_N^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

ただしここでは $M < N$ の場合のみを考えている。これは X をデータ行列したとき、大抵はサンプル数（列数 N ）の方が推定点の数（行数 M ）よりも遥かに大きい状況になっているからである。

式 (A.28) を行列 X の特異値分解（Singular Value Decomposition）略して SVD と呼ばれる。ここで、 γ_j は行列の j 番目に大きい特異値である。またベクトル u_j と v_j を特異値ベクトルと呼ぶ。固有値展開の場合と同じく特異値ベクトルも正規直交系を成す。すなわち、

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_M \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

と定義すると、 U と V は共に直交行列で $U^T U = I$ と $V V^T = I$ の関係を満たす。つまり、

$$u_i^T u_j = I_{i,j} \quad (\text{A.31})$$

$$v_i^T v_j = I_{i,j} \quad (\text{A.32})$$

を満たす。ここで $I_{i,j}$ は単位行列の (i, j) 成分を意味する。

式 (A.29)、式 (A.30)、を用いれば A.28 は

$$X = U \Gamma V^T \quad (\text{A.33})$$

と表せる。ただし上式で行列 Γ は

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_M & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

と定義した。

更に式 (A.33) は次のように展開できる。

$$X = \sum_{j=1}^M \gamma_j u_j v_j^T \quad (\text{A.35})$$

ここで、

$$X X^T = U \Gamma^2 U^T \quad (\text{A.36})$$

$$X^T X = V \Gamma^2 V^T \quad (\text{A.37})$$

$$(\text{A.38})$$

という計算から、 U は行列 $X X^T$ の固有ベクトルから、 V は行列 $X^T X$ の固有ベクトルからそれぞれ求めることができる。また、特異値は $X X^T$ もしくは $X^T X$ の固有値の平方根から求めることができる。

A.3.2 低特異値の最小二乗解への寄与

$[M \times N]$ の行列 X と $[L \times N]$ の行列 Y が $[L \times M]$ の変換行列 R によって線形な関係で結ばれているとする。

$$Y = RX \quad (\text{A.39})$$

このとき行列 R の線形最小二乗解は次のように書ける。

$$\hat{R} = YX^T (XX^T)^{-1} \quad (\text{A.40})$$

式 (A.40) の左辺 \hat{R} 行列は X と行列 Y が与えられたとき、両者を繋ぐ線形関係を線形最小二乗法の下で最適化した推定解を表している。ここで問題となるのが、ここで求めた推定解が真の線形関係を表す行列からどれだけ逸脱しているかということである。

推定解 \hat{R} と区別して真の変換行列を R と置き、式 (A.39) を誤差 E を含む形にする。

$$Y = RX + E \quad (\text{A.41})$$

ここで行列 E は Y に付随するノイズ成分を表すと考えられる。式 (A.41) を用いて最小二乗推定解式 (A.40) を書き下すと、

$$\begin{aligned} \hat{R} &= YX^T (XX^T)^{-1} \\ &= (RX + E)X^T (XX^T)^{-1} \\ &= R + EX^T (XX^T)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

ここで式 (A.35) から

$$\begin{aligned} X^T (XX^T)^{-1} &= \left(\sum_{i=1}^M \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right)^T \left[\sum_{j=1}^M \gamma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \left(\sum_{k=1}^M \gamma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T \right)^T \right]^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^M \gamma_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \left[\sum_{j=1}^M \gamma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \left(\sum_{k=1}^M \gamma_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^T \right) \right]^{-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^M \gamma_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \right) \left(\sum_{j=1}^M \gamma_j^2 \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T \right)^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^M \gamma_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \sum_{l=1}^M \frac{1}{\gamma_l^2} \\ &= \sum_{j=1}^M \frac{1}{\gamma_j} \mathbf{v}_j \mathbf{u}_j^T \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

であるので最終的に

$$\hat{R} = R + \sum_{j=1}^M \frac{(\mathbf{E} \mathbf{v}_j \mathbf{u}_j^T)}{\gamma_j} \quad (\text{A.44})$$

を得る。式 (A.44) の右辺第一項は真の変換行列、右辺第二項は真の行列からの逸脱を表している。この式から、ノイズ E の影響によって最小二乗解における真の行列からのずれが生じることが分かる。

ここで行列 X の特異値がある順位 r より下で非常に小さくなる場合を考える。この時、非常に小さい特異値 $\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_M$ の逆数がノイズ E を増幅してしまう結果となる

A.3.3 擬似逆行列を用いた推定

以上で議論した通り、非常に小さい特異値があると無関係なモード由来の誤差の影響を受けて最小二乗解が真の行列から逸脱してしまうことが予想される。このように無関係なモードに起因するノイズに対して強固な推定結果を得るための方策として、式 (A.43) において非常に小さい特異値 $\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_M$ を除外した

$$\mathbf{X}^\dagger = \sum_{j=r+1}^M \frac{1}{\gamma_j} \mathbf{v}_j \mathbf{u}_j^T \quad (\text{A.45})$$

を $\mathbf{X}^T (\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^{-1}$ の代わりとして用いる方法がある。これにより推定解 $\hat{\mathbf{R}}$ は

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Y} \mathbf{X}^\dagger \quad (\text{A.46})$$

$$= \mathbf{Y} \left(\sum_{j=r+1}^M \frac{1}{\gamma_j} \mathbf{v}_j \mathbf{u}_j^T \right) \quad (\text{A.47})$$

と求めることができる。式 (A.45) で導入した \mathbf{X}^\dagger は擬似逆行列の形になっている。

このように、 \mathbf{X}^\dagger を用いれば、非常に小さな特異値の逆数を含む項はとり除かれているため、極端な無関係なモードの増幅に伴う問題を回避することができる。ノイズの増幅を軽減するためには特異値除去の基準値をなるべく大きく採る、つまりなるべく小さな r を設定する必要があるが、その場合、推定解 $\hat{\mathbf{R}}$ の期待値が真の行列と一致しない。すなわち解にバイアスを許してしまうことになる。従って、擬似逆行列を用いた推定は、低特異値の除去することで多少のバイアスを許すことで解の分散を低減しようという試みであり、解のバイアスと無関係モードの影響による分散との間にトレードオフが存在する。また、擬似逆行列を用いた推定は形式的には $\mathbf{Y} = \mathbf{R} \mathbf{X}$ に右から行列 \mathbf{X} の逆行列に相当する \mathbf{X}^\dagger を掛けることに対応し、最小二乗解とは異なる推定法であることに注意する。

A.4 ツェルニケ多項式

ツェルニケ（円形）多項式（Zernike Polynomials）は、単位円で囲まれた領域で定義された直交する関数系を表現するものである。この多項式で表現される円形の領域内の数値の分布はツェルニケモードと呼ばれ、古典的な収差（焦点ずれ、非点収差、コマ収差など）と良い対応関係がある。そのため、レンズや鏡など円形な素子が使われることが多い光学システムの収差の評価によく使われる。また、ツェルニケ多項式を用いた大気揺らぎ収差の表現が Noll によって研究されている (Noll, 1975[30])。

単位円内の位置を ρ とすると、

$$Z_i(\rho) = R_n^m(r) \Theta^m(\theta) \quad (\text{A.48})$$

ここで、動径方向多項式と角度方向の三角関数は次のように表される。

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{n-m/2} \frac{(-1)^s \sqrt{n+1} (n-s)! r^{n-2s}}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} \quad (\text{A.49})$$

$$\Theta^m(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(m\theta) & m \neq 0 \text{ even term} \\ \sqrt{2} \sin(m\theta) & m \neq 0 \text{ odd term} \\ 1 & m = 0 \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

動径方向の次数 n と角度方向の次数 m は $n \leq m$ かつ $n - |m|$ が偶数となるように決められる。

ツェルニケ多項式は正規直交系をなす関数系である。したがって半径 R の開口面上での任意の波面 $w(R\rho)$ に対してツェルニケ多項式を基底とした関数展開による表現を与えることができる。

$$w(R\rho) = \sum_i^{\text{inf}} c_i Z_i(R\rho) \quad (\text{A.51})$$

また、ツェルニケ係数 c_i は、開口面の定義域 $R\rho \in \Omega$ 上での積分として、

$$c_i = \int_{\Omega} w(R\rho) Z_i(R\rho) d^2\rho \quad (\text{A.52})$$

と求まる。

大気揺らぎで歪められた波面の場合は異なるツェルニケモード同士の係数が相関を持つことが知られている (Noll,1975[30])。ツェルニケ多項式のフーリエ変換 (Noll,1975[30]) からコロモゴロフ乱流を仮定した大気揺らぎによって歪められた波面についてツェルニケ係数の相関の解析的な表現が与えられる (Dai,1995[28])。

$$\langle c_i c_{i'} \rangle = \frac{c_0 (-1)^{(n+n'-2m)/2} [(n+1)(n'+1)]^{1/2} \delta_{mm'} \Gamma[(n+n'-5/3)/2]}{\Gamma[(n-n'+17/3)/2] \Gamma[(n'-n+17/3)/2] \Gamma[(n+n'+23/3)/2]} \quad (\text{A.53})$$

ここで c_0 は

$$c_0 = \Gamma(14/3) [4.8\Gamma(6/5)]^{5/6} [\Gamma(11/6)]^2 / 2^{8/3} \pi \text{ rad}^2$$

である。また $m \neq 0$ のとき $i - i'$ は必ず偶数とする。 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均、 Γ はガンマ関数を表す。

参考文献

- [1] Subaru Telescope AO188. Subaru telescope ao188. <http://www.naoj.org/Observing/Instruments/AO/performance.html>, 19.
- [2] M. Azouit and J. Vernin. Optical turbulence profiling with balloons relevant to astronomy and atmospheric physics. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Vol. 117, pp. 536–543, 2005.
- [3] Victor A. Banakh and Dimitrii A. Marakasov. Wind profiling based on the optical beam intensity statistics in a turbulent atmosphere. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 24, pp. 3245–3254, 2007.
- [4] Johnathan M. Bardsley. Wavefront reconstruction methods for adaptive optics systems on ground-based telescopes. *SIAM J. Matrix Analysis Applications*, Vol. 30, pp. 67–83, 2008.
- [5] R. J. Bouwens, G. D. Illingworth, P. A. Oesch, I. Labbe, M. Trenti, P. van Dokkum, M. Franx, M. Stiavelli, C. M. Carollo, D. Magee, and V. Gonzalez. Ultraviolet luminosity functions from 132 $z\sim 7$ and $z\sim 8$ lyman-break galaxies in the ultra-deep hudf09 and wide-area early release science wfc3/ir observations. *ApJ*, Vol. 737, p. 90, 2011.
- [6] CANALY. Canaly. <https://www.dur.ac.uk/cfai/projects/canary/>, 19.
- [7] Rodolphe Conan, Colin Bradley, Olivier Lardire, Celia Blain, Kim Venn, David Andersen, Luc Simard, Jean-Pierre Vran, Glen Herriot, David Loop, Tomonori Usuda, Shin Oya, Yutaka Hayano, Hiroshi Terada, and Masayuki Akiyama. Raven: a harbinger of multi-object adaptive optics-based instruments at the subaru telescope. *Proc. SPIE*, Vol. 7736, , 2010.
- [8] C. Correia, K. Jackson, J.-P. Véran, D. Andersen, O. Lardiére, and C. Bradley. Static and predictive tomographic reconstruction for wide-field multi-object adaptive optics systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 31, No. 1, pp. 101–113, Jan 2014.
- [9] Jean-Gabriel Cuby, Simon Morris, Philip Parr-Burman, Matthew Lehnert, Chris Evans, Thierry Fusco, Pascal Jagourel, David Le Mignant, Richard Myers, Grard Rousset, Hermine Schnetler, Jean-Philippe Amans, Francois Assemat, Stephen Beard, Mathieu Cohen, Nigel Dipper, Marc Ferrari, Eric Gendron, Jean-Luc Gimenez, Peter Hastings, Zoltan Hubert, Emmanuel Hugot, Philippe Laporte, Brice Leroux, Fabrice Madec, Helen McGregor, Tim Morris, Benoit Neichel, Mathieu Puech, Clelia Robert, Stephen Rolt, Mark Swinbank, Gordon Talbot, William Taylor, Francois Vidal, Sbastien Vivs, Pascal Vola, and Martyn Wells. Eagle: a moao fed multi-ifu nir workhorse for e-elt. *SPIE Proc*, Vol. 7735, , 2010.
- [10] Jo Thomas-Osip David J. E. Floyd and Gabriel Prieto. Seeing, wind, and outer scale effects on image quality at the magellan telescopes. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Vol. 122, pp. 731–742, 2010.

- [11] Brent L. Ellerbroek. Efficient computation of minimum-variance wave-front reconstructors with sparse matrix techniques. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 19, pp. 1803–1816, 2002.
- [12] S. Els, T. Travouillon, M. Schck, R. Riddle, W. Skidmore, J. Seguel, E. Bustos, and D. Walker. Thirty meter telescope site testing vi: Turbulence profiles. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Vol. 121, pp. 527–543, 2009.
- [13] ESO. Smos hp. <https://www.eso.org/sci/facilities/paranal/instruments/kmos.html>, 2015.
- [14] AO for ELS 2. Nfiraos multiconjugate ao system for tmt. <http://ao4elt2.lesia.obspm.fr/spip.php?article518>, 2011.
- [15] Francois Hammer Francois Assemat, Eric Gendron. The falcon concept: multi-object adaptive optics and atmospheric tomography for integral field spectroscopy. principles and performances on an 8 meter telescope. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, Vol. 376, pp. 287–312, 2006.
- [16] D. L. Freid. Adaptive optics for imaging within the atmosphere: reference generatopm and field-of-view widening. *Optical Science Company*, Vol. Technical Report TR-273, , 1977.
- [17] E. Gendron, F. Vidal, M. Brangier, T. Morris, Z. Hubert, A. Basden, G. Rousset, R. Myers, F. Chemla, A. Longmore, T. Butterley, N. Dipper, C. Dunlop, D. Geng, D. Gratadour, D. Henry, P. Laporte, N. Looker, D. Perret, A. Sevin, G. Talbot, and E. Younger. Moao first on-sky demonstration with canary. *A&A*, Vol. 529, p. L2, 2011.
- [18] Luc Gilles, Brent L. Ellerbroek, and Curtis R. Vogel. Preconditioned conjugate gradient wave-front reconstructors for multiconjugate adaptive optics. *Applied Optics*, Vol. 42, pp. 5233–5250, 2003.
- [19] Luc Gilles, Curtis R. Vogel, and Brent L. Ellerbroek. Multigrid preconditioned conjugate-gradient method for large-scale wave-front reconstruction. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 19, pp. 1817–1822, 2002.
- [20] Fran §oisHammer, Frdric SayÅde, Eric Gendron, Thierry Fusco, Denis Burgarella, Vronique Cayatte, Jean-Marc Conan, Frdric Courbin, Hector Flores, Isabelle Guinouard, Laurent Jocu, ArianeLan §on, Guy Monnet, Mustapha Mouhcine, Fran §oisRigaud, Daniel Rouan, Grard Rousset, Vronique Buat, Frdric Zamkotsian. The falcon concept: Multi-object spectroscopy combined with mcao in near-ir. In Jaqueline Bergeron and Guy Monnet, editors, *Scientific Drivers for ESO Future VLT/VLTI Instrumentation*, ESO ASTROPHYSICS SYMPOSIA, pp. 139–148. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [21] John W. Hardy. *Adaptive Optics for Astronomical Telescope*. Oxford University Press, New York, 1998.
- [22] Glen Herriot, David Andersen, Jenny Atwood, Corinne Boyer, Peter Byrnes, Kris Caputa, Brent Ellerbroek, Luc Gilles, Alexis Hill, Zoran Ljusic, John Pazder, Matthias Rosensteiner, Malcolm Smith, Paolo Spano, Kei Szeto, Jean-Pierre Vran, Ivan Wevers, Lianqi Wang, and Robert Wooff. Nfiraos: first facility ao system for the thirty meter telescope. *Proc. SPIE*, Vol. 9148, pp. 914810–914810–11, 2014.
- [23] RAVEN HP. Raven hp. <http://web.uvic.ca/ravenmoa/index.html>, 2015.

- [24] TMT HP. Tmt hp. <http://www.tmt.org/>, 19.
- [25] Luke C. Johnson, Donald T. Gavel, and Donald M. Wiberg. Bulk wind estimation and prediction for adaptive optics control systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 28, pp. 1566–1577, 2011.
- [26] Olivier LardiÅre, Dave Andersen, Clia Blain, Colin Bradley, Darryl Gamroth, Kate Jackson, Przemek Lach, Reston Nash, Kim Venn, Jean-Pierre Vran, Carlos Correia, Shin Oya, Yutaka Hayano, Hiroshi Terada, Yoshito Ono, and Masayuki Akiyama. Multi-object adaptive optics on-sky results with raven. *Proc. SPIE*, Vol. 9148, pp. 91481G–91481G–14, 2014.
- [27] Olivier LardiÅre, Reston Nash, J.-P. Markes, Dave Andersen, Colin Bradley, Clia Blain, Ronald Desmarais, Darryl Gamroth, Meguru Ito, Kate Jackson, Przemek Lach, and Laurie Pham. Final opto-mechanical design of raven, a moao science demonstrator for subaru. *Proc. SPIE*, Vol. 8447, pp. 844753–844753–15, 2012.
- [28] Guang ming Dai. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of zernike polynomials and karhunen–loève functions. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 12, pp. 2182–2193, 1995.
- [29] Benoit B Neichel, Thierry T Fusco, and Jean-Marc JM Conan. Tomographic reconstruction for wide-field adaptive optics systems: Fourier domain analysis and fundamental limitations. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 26, pp. 219–35, 2009.
- [30] Robert J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence*. *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 66, No. 3, pp. 207–211, Mar 1976.
- [31] GEMINI Observatory. Mcao in a nutshell. <http://www.gemini.edu/sciops/instruments/gems/mcao-nutshell>, 19.
- [32] Lisa A. Poyneer, Donald T. Gavel, and James M. Brase. Fast wave-front reconstruction in large adaptive optics systems with use of the fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 19, pp. 2100–2111, 2002.
- [33] Daniel Szomoru, Marijn Franx, Rychard J. Bouwens, Pieter G. van Dokkum, Ivo Labb, Garth D. Illingworth, and Michele Trenti. Morphological evolution of galaxies from ultra-deep hubble space telescope wide field camera 3 imaging: The hubble sequence at $z \sim 2$. *The Astrophysical Journal Letters*, Vol. 735, No. 1, p. L22, 2011.
- [34] Fabrice Vidal, Eric Gendron, and Gérard Rousset. Tomography approach for multi-object adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 27, pp. A253–A264, 2010.
- [35] E. Wisnioski, N. M. Förster Schreiber, S. Wuyts, E. Wuyts, K. Bandara, D. Wilman, R. Genzel, R. Bender, R. Davies, M. Fossati, P. Lang, J. T. Mendel, A. Beifiori, G. Brammer, J. Chan, M. Fabricius, Y. Fudamoto, S. Kulkarni, J. Kurk, D. Lutz, E. J. Nelson, I. Momcheva, D. Rosario, R. Saglia, S. Seitz, L. J. Tacconi, and P. G. van Dokkum. The kmos3d survey: Design, first results, and the evolution of galaxy kinematics from $0.7 < z < 2.7$. *The Astrophysical Journal*, Vol. 799, No. 2, p. 209, 2015.
- [36] 関原謙介. 統計的信号処理. 共立出版, 2011.
- [37] 神澤富雄. 望遠鏡トップリングの振動と星像の伸び. Technical report, 国立天文台, August 2005.