物 理（1）

密度が一様な球の質量分布がつくる重力場を考える。質量 m の質点が、この重力ポテンシャル Φ の中を、球状に分布する物質と衝突せずに運動しているとする。球の密度を ρ、半径を a とし、質点の運動を記述するために軌道面上に平面極座標 (r, θ) をとる。以下の問に答えよ。

問 1. (r, θ) のそれぞれの方向に共役な質点の運動量 (p_r, p_θ) を書け。

問 2. 質点の運動のハミルトニアン H を書け。また、質点の運動に対する r 方向と θ 方向それぞれの運動方程式を書け。

問 3. この球が $r < a$ と $r \geq a$ のそれぞれの領域につくる重力ポテンシャル $\Phi(r)$ を書け。

問 4. $r < a$ と $r \geq a$ のそれぞれの領域における質点の脱出速度を書け。

問 5. 質点が各 r において円運動している場合を考える。$r < a$ と $r \geq a$ のそれぞれの領域でこの円運動の速度を書き、さらにその r 依存性を図示せよ。

問 6. 今、重力場をつくる球の密度が s 倍 (ただし、$0 < s < 1$) に変化した場合を考える。球の半径は一定のままとする。このとき、最初にある半径 r_c で円運動していた質点の運動の変化を考える。以下の問に答えよ。

(a) この球の密度変化が、質点の軌道周期に比べて十分短い時間で、瞬間的に起こったとする。この場合、質点が球の重力場に束縛され続けるための s に対する条件を書け。

(b) この球の密度変化が、質点の軌道周期に比べて十分長い時間かけて起こったとする。この場合、質点の運動はどのように変化するか記述せよ。
ヒント：このようなゆっくりとした系の時間変化の場合には、各空間方向における作用積分 $J_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i dq_i$ $(q_i = r, \theta)$ が断熱不変量となって保存される。

物 理（2）

ひも状のゴムのエントロピーによる弾性を考察したい。そこで、図のように長さ ℓ の棒状の単位分子が直線状に N 個連結してできている高分子の系でモデル化する。単位分子は長さに比べて十分細く、1 次元で取り扱う。単位分子数 N は変化せず、分子の熱運動による振動や回転は無視でき、また、単位分子自体および単位分子間の接合部は伸縮しないものとする。各単位分子は他の単位分子の状態によらず自由に左右どちらかの向きを向くことができ、図のように折り返して高分子全体の長さが変化する。温度 T において高分子の両端間に外力 f を与えたとき、両端間の長さが L の平衡状態になるものとして、以下の問に答えよ。なお、ボルツマン定数は k_B とする。

問 1. 高分子の長さが L となるような単位分子の向きの配列パターンの数（状態数）は、

$$\Omega(L) = \frac{N!}{\left(\dfrac{N+L/\ell}{2}\right)!\left(\dfrac{N-L/\ell}{2}\right)!}$$

で与えられる。分子の熱運動は考えないので、系のエントロピーはこの状態数 $\Omega(L)$ にのみ依存する。$\Omega(L)$ から系のエントロピーを計算せよ。なお、左右どちらを向いている分子の数も十分大きく、$n! \approx (n/e)^n$ (e は自然対数の底、n は十分大きな自然数) の近似を適用してよい。

問 2. この系では断熱的かつ可逆的に L を変化させられないことを説明せよ。

問 3. 一定の温度 T、ある力 f のもと、様々な L を持つカノニカル集団を考える。このとき、分配関数 $\mathcal{Z}$ は、

$$\mathcal{Z} = \left\{\exp\left(\frac{f\ell}{k_BT}\right) + \exp\left(-\frac{f\ell}{k_BT}\right)\right\}^N$$

となる。このカノニカル集団の L の期待値 $\langle L\rangle$ および分散 σ_L^2 を求めよ。さらに、$\langle L\rangle$ と (f/T) の関係を模式図で示して、$(f/T) \approx 0$ および $(f/T) \gg 1$ での $\langle L\rangle$ のふるまいを説明せよ。

問 4. ここまで考えていたモデルにおいては、問 2 で述べたように L を可逆的に断熱変化させることはできない。しかし、これまで無視していた分子の熱運動を考慮したより現実のゴムひもに近いモデルでは、L を可逆的に断熱変化させることが可能である。この場合、系のエントロピーは、問 1 で求めたエントロピーと、分子の熱運動に関わるエントロピーの和となる。この系を可逆的に断熱変化させて L を伸ばすと T はどうなるか、「エントロピー」という語句を用いて定性的に説明せよ。なお、L 一定のときの系の熱容量は正であるとせよ。

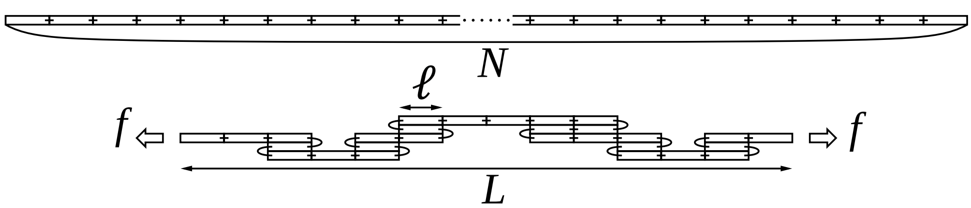

図: 高分子モデルの模式図。単位分子間を結ぶ線は分子のつながり方を示すために便宜的に描いたものであり、接合部は伸縮しないものとして取り扱うこと。

物 理（3）

半径 a の球の内部に正電荷が一様に分布し、その中を電子が電磁的な力を受けて非相対論的 ($|d\vec{r}/dt| \ll c$) な運動をするものとする。ここで、$\vec{r}$ は電子の位置ベクトル、c は光の速度である。球内の正電荷の総量は電気素量 e に等しく、また、電子やその運動は球内の正電荷の分布に影響しないものとする。

問 1. 正電荷による静電ポテンシャルを計算し、球内（$|\vec{r}| \leq a$）における電子の運動方程式が

$$m_e \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$$

で与えられることを示せ。ここで、

$$\omega_0^2 = e^2 / \left(4\pi\epsilon_0 m_e a^3\right)$$

で、m_e は電子の質量、ϵ_0 は真空の誘電率である。

問 2. この系に一様な磁束密度 $\vec{B} = B\vec{e}_z$ の磁場を加えた場合、電子の運動方程式はどうなるか、その x、y、z 成分をそれぞれ書き下せ。ここで、$\vec{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルである。電子の z 方向の運動はどのような運動になるか簡単に述べよ。

問 3. 運動方程式の $x,\ y$ 成分から導かれる電子の周期運動の角振動数 ω を求めよ。ここで、角振動数 ω は正であるとする。

問 4. 加速度運動をしている電荷 q の粒子から放射される電磁波の電場や磁場は、粒子から十分遠方で

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \ddot{\vec{r}}\right)}{R}$$

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}/c$$

で与えられる。ここで、$\vec{n}$ は荷電粒子から観測者に向いた単位ベクトル、R は荷電粒子と観測者の間の距離、$\ddot{\vec{r}} = d^2\vec{r}/dt^2$ で、荷電粒子の運動は非相対論的であるとしている。問 2 と問 3 で考察した加速度運動をしている電子から放射される電磁波を、十分遠方にいる z 軸上の観測者が受信するとき、検出される電磁波の振動数を記せ。もし同じ電磁波を、十分遠方にいる y 軸上の観測者が受信するとき、検出される電磁波の振動数を記せ。いずれの場合もその理由を簡単に述べよ。

物 理（4）

問 1. 二重スリット実験、あるいはヤングの実験と呼ばれる次のような実験を考える。2 つの細いスリットをもつ衝立に単色点光源から光を当て、スリットから出た光を衝立の向こう側においたスクリーンに映す。この実験によって、光が粒子と波動の二重性をもつことが示される。どのように示されるか述べよ。

問 2. 量子力学ではポテンシャル $V(\vec{x})$ の中を運動する質量 m の粒子の状態は、波動関数 $\psi(\vec{x},t)$ で表わされ、次のシュレディンガー方程式に従う。

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x},t)$$

以下の問に答えよ。

(a) 次式で $\rho(\vec{x},t)$ を定義する。

$$\rho(\vec{x},t)=\psi^*(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t)$$

ただし、ψ^* は ψ の複素共役である。このとき次式を満たす $\vec{j}$ を求めよ。

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}(\vec{x},t)=0$$

(b) (a) で求めた式の物理的な意味を述べ、それから示唆される ρ と $\vec{j}$ の物理的な解釈を述べよ。

(c) 波動関数を以下のようにおく。

$$\psi(\vec{x},t)=R(\vec{x},t)\exp\left\{\frac{iS(\vec{x},t)}{\hbar}\right\}$$

ただし、R と S は実数関数である。この式を、シュレディンガー方程式に代入した式の虚数部分と実数部分を計算せよ。

(d) S に対する式が古典力学におけるハミルトン・ヤコビ方程式に一致するための条件を求め、その条件を物理的に解釈せよ。