物 理（1）

図1のように、水平に置かれた滑らかな板の上に質量 m の質点Aがあり、板の下方にある質量 m の質点Bと長さ ℓ の糸で連結されている。鉛直下方に一様な重力加速度 g が作用していて、糸は板に開けられた大きさの無視できる小さな穴を通して鉛直に垂れているとする。質点Aは板から離れずに運動し、質点Bは鉛直方向にのみ運動するとき、以下の問に答えよ。ただし、糸は伸縮したり、たわむことはないとする。

問 1. 質点Aの穴の位置からの距離を r、ある方向から測った角度を θ として、ラグランジアン (ラグランジュ関数) L を求め、r 方向と θ 方向の運動方程式を導け。

問 2. 穴の位置を原点としたときの質点Aの角運動量 J は保存量である。$J = mh\ (\neq 0)$ であるとき、動径方向の運動方程式を $\dfrac{d^2r}{dt^2} + F = 0$ という形に書く。このとき、F を求めよ。ただし、F は θ を含んではいけない。

問 3. 動径方向の運動方程式から新たな保存量 E を求めよ。

問 4. **(a)** 質点Aが穴の周りに回転運動を続けるためには E はどのような値でなければならないか。ℓ、g、h のうち必要なものを用いてあらわせ。

(b) 質点Aが円運動する場合の半径を r_0、このときの保存量 E を E_0 とする。r_0 と E_0 を、ℓ、g、h のうち必要なものを用いてあらわせ。

問 5. 半径 r_0 の円運動をしている質点Aに、突然わずかな動径方向の速度変化が与えられたとき、その後の運動はどのようになるかを考えよう。

(a) 質点Aの動径座標を $r = r_0 + x$ と書くとき、微小量 x の満たすべき方程式を x の1次までの精度で記せ。解答に F を含んでもよい。

(b) 時刻 $t = 0$ において動径方向の速度が δv だけわずかに変化したとき、x の時間変化はどのようになるか。解答に F を含んでもよい。

(c) 質点Aが動径方向に1回振動するとき、穴の周りに何回転するか。

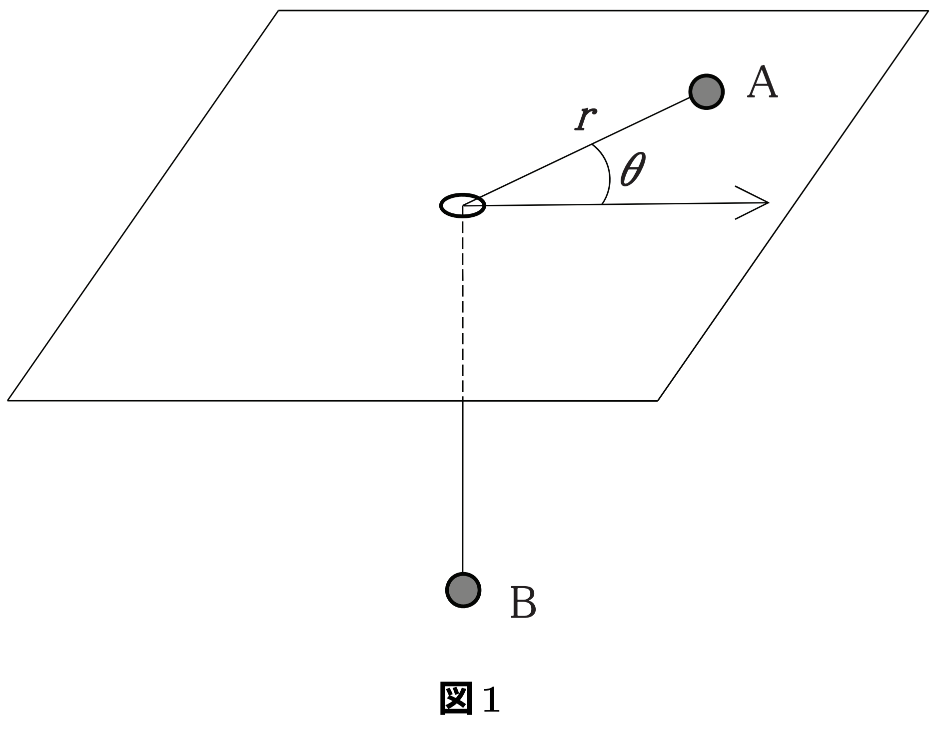

図1

物 理（2）

ガス粒子の統計の性質はフェルミ・ディラック (FD) 統計またはボーズ・アインシュタイン (BE) 統計で記述される。これらにおいて、エネルギー ϵ を持つ一つの状態を粒子が占める数 (占有数) の平均値は

$$\left[\exp\left(\frac{\epsilon-\mu}{kT}\right)\pm 1\right]^{-1}$$

のようにあらわされる。ここで、μ は化学ポテンシャル、k はボルツマン定数、T は絶対温度をあらわす。以下の問に答えよ。

問 1. これら二つのタイプの統計の特徴を記述せよ。

問 2. 熱平衡にある光子 (黒体放射) の統計的性質は、BE 統計であらわされることと共に $\mu=0$ であることが重要である。

(a) 光子の化学ポテンシャル μ がゼロである理由を記せ。

(b) 単位体積当りの状態数を上の占有数平均値にかけることにより、振動数範囲 $(\nu, \nu+d\nu)$ をもつ光子のエネルギー密度をあらわせ。

(c) このエネルギー密度を全振動数領域で積分することにより、黒体放射のエネルギー密度が T^4 に比例することを示せ。

問 3. 質量を持つ非相対論的粒子の統計的性質について以下の問に答えよ。

(a) FD 統計か BE 統計かによらず、古典的分布 (マクスウェル・ボルツマン分布)

$$\exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)\exp\left(-\frac{\epsilon}{kT}\right)$$

で近似できるのはどのような場合か記せ。

(b) この場合の粒子の平均運動エネルギーを求めよ。

問 4. マクスウェル・ボルツマン分布に従う温度 T の (非相対論的) ガスが箱に満たされている。個々のガス粒子 (質量 m) は、粒子の静止系で振動数 ν_0 の光を発する。この箱の一面の小さな窓からその光を観測する。個々の粒子は熱運動をしているので、観測される光の振動数はドップラー効果によって ν_0 からずれている。

(a) 観測される光の平均の振動数 $\overline{\nu}$ および $\overline{(\nu-\overline{\nu})^2}$ を求めよ。ここで、$\overline{(...)}$ はある量 $(...)$ の平均値をあらわす。

(b) 観測される光子数の振動数に対する依存性を書け。

必要であれば、

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることを使ってよい。

物 理（3）

真空中の電場 $\mathbf{E}$、磁場 $\mathbf{B}$ を決めるマクスウェル方程式は、次のように与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \right) \tag{4}$$

ここで、ρ は電荷密度、$\mathbf{J}$ は電流密度、ε_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率である。

問 1. 4 本のマクスウェル方程式のうち (2) 式のあらわす物理的な意味を、$\mathbf{B}$ の面積分を用いて示せ。

問 2. 有限な体積 V 内の電荷の時間変化 $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_V \rho d^3\mathbf{x}$ は、電荷保存則が成り立つとき、$\mathbf{J}$ を含む積分であらわすことができる。これを導け。また、この積分であらわされた電荷保存則から、ρ、$\mathbf{J}$ が満たすべき微分方程式を導け。

問 3. マクスウェル方程式から電荷保存則を導け。

問 4. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$、$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で定義されるスカラーポテンシャル Φ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を導入すると、マクスウェル方程式 (2) と (3) が自動的に満たされることを示せ。

問 5. Φ と $\mathbf{A}$ が条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0 \tag{5}$$

を満たすとき、 Φ が満たすべき方程式をマクスウェル方程式より導け。ここで、$c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ である。

問 6. 条件式 (5) を満たすとき、Φ と $\mathbf{A}$ の特殊解の一つは次のように与えられる。

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{y}, t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} \tag{6}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y}, t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} \tag{7}$$

この特殊解では、時刻 t における解 $\Phi(\mathbf{x}, t)$、$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ に対して、右辺の被積分関数の時刻は、$t - \dfrac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ で評価するようになっている。このことの物理的な意味を述べよ。

問 7. 電荷の時間変化が十分小さいとき、電荷密度 $\rho(\mathbf{y}, t)$、電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{y}, t)$ の広がりに比べて十分遠方の領域 ($|\mathbf{y}|/|\mathbf{x}| \ll 1$) では、次の近似が成り立つ。

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r^3} \tag{8}$$

$$\rho\left(\mathbf{y}, t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\right) \approx \rho\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{cr}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c}\right) \tag{9}$$

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{y}, t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\right) \approx \mathbf{J}\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c}\right) \tag{10}$$

ここで、$r = |\mathbf{x}|$ である。近似式 (8)–(10) の右辺の最終項同士の積は、無視することができる。このとき、(6)、(7) 式であらわされた Φ、$\mathbf{A}$ を、全電荷 $Q = \displaystyle\int \rho(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c}) d^3\mathbf{y}$ および全電気双極子モーメント $\mathbf{D} = \displaystyle\int \mathbf{y}\rho(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c}) d^3\mathbf{y}$ を用いてあらわせ。

物 理（4）

問 1. 量子力学では状態を波動関数で、物理量を演算子であらわす。次の問題に答えよ。

(a) ある物理量がエルミート演算子であらわされるなら、その物理量の測定値は実数であることを示せ。ただし、演算子 A がエルミートであるとは、次の条件を満たすときにいう。

$$A^\dagger = A$$

ここで、$A^\dagger$ は次式で定義される。

$$\int (A\psi_1)^* \psi_2 dx = \int \psi_1^* A^\dagger \psi_2 dx$$

(b) 二つの物理量が同時に観測可能であるための必要十分条件は、それらに対応するエルミート演算子が互いに交換することである。これを証明せよ。ただし、それらの物理量の固有値には縮退はないものとする。

問 2. 次のハミルトニアンをもつ 1 次元調和振動子に対する以下の問に答えよ。

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

(a) 以下の演算子を定義したとき、これらの演算子でハミルトニアンをあらわせ。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right),\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$

ただし、x と p の交換関係は以下のとおりである。

$$[x, p] = i\hbar$$

ここで、$\hbar = h/(2\pi)$ で、h はプランク定数である。

(b) 演算子 a が系のエネルギーを $\hbar\omega$ だけ下げることを示せ。

(c) この系に対する基底状態の波動関数とエネルギーを求めよ。

(d) (a) のハミルトニアンで与えられた調和振動子が距離 R 離れて二つある。各々の調和振動子の平衡点からのずれを x_1、x_2 としたとき、この系に次のような相互作用が働くとする。

$$V(x_1, x_2) = \frac{\epsilon}{R^3}x_1 x_2$$

すなわち、全体のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\epsilon}{R^3}x_1 x_2$$

となる。このとき、新しい座標を導入することによって、この系を二つの独立した調和振動子としてあらわせ。

(e) (c) で与えられた系の基底状態のエネルギーを求め、ϵ が微小量としてあらわせ。

(f) 二つの調和振動子には引力が働くか、斥力が働くか、理由をつけて答えよ。