物 理（1）

図1に示すような、質量 m の2つの質点を3つのばねで結合した系を考え、ばね定数を図のように左から k_1、k_3、k_2 とする。それぞれの質点を以下では左から質点1と質点2とよぶことにする。また、この系は、ばねに沿った方向にのみ運動を行い、両端は固定されているものとする。以下の問に答えよ。

問1. 質点1と質点2の平衡位置からの変位をそれぞれ x_1 と x_2 として、この系のラグランジアン L を書け。

問2. ラグランジアン L を用いて質点1と質点2が従う運動方程式を求めよ。

問3. この系は2つの基準振動数で特徴づけられる振動を示す。それぞれの振動数を求めよ。

問4. 以下の問では $k_1 = k_2$ とする。質点1と質点2の変位 x_1 と x_2 が従う運動方程式の一般解を書け。

問5. この系の $t = 0$ における初期条件として、$x_1 = s$、$dx_1/dt = 0$、$x_2 = 0$、$dx_2/dt = 0$ の場合を考える。また、真ん中のばね定数は他のそれよりも十分小さくて、$k_3 \ll k_1 (= k_2)$ が成り立つとする。この場合の x_1 と x_2 の解を求め、縦軸を x_1 と x_2、横軸を時間とした模式図を描いて解の振る舞いを説明せよ。

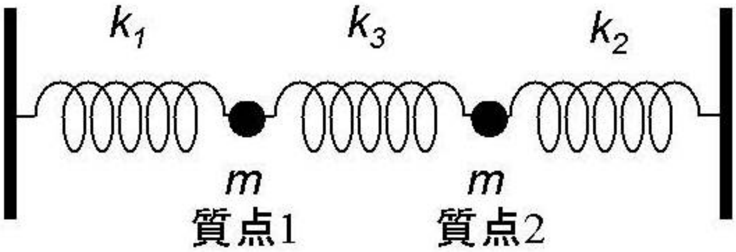

図1

物 理（2）

問 1. 温度 T の熱浴と熱的・拡散的に接している、多数の同種粒子からなる系を考える。この系の大きな状態和 $\mathcal{Z}$ を

$$\mathcal{Z} \equiv \sum_N \sum_l \exp\left[\frac{N\mu - \epsilon_l(N)}{k_B T}\right]$$

で定義する。ここで、N は系に含まれる粒子の数、μ は粒子の化学ポテンシャル、$\epsilon_l(N)$ は粒子の数が N のときの系の量子状態 l のエネルギー、k_B はボルツマン定数である。

(a) 系に含まれる平均粒子数 $\langle N \rangle$ が

$$\langle N \rangle = k_\mathrm{B} T \partial \ln \mathcal{Z} / \partial \mu$$

で与えられることを導け。ここで、$\langle \cdots \rangle$ は系のアンサンブル平均を表す。

(b) 系に含まれる粒子数 N の $\langle N \rangle$ からのずれを $\Delta N \equiv N - \langle N \rangle$ で定義するとき、

$$\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle = k_\mathrm{B} T \partial \langle N \rangle / \partial \mu$$

を示せ。

問 2. 次に、一つのエネルギー準位 ϵ だけを持つ系を考え、それが温度 T の熱浴と熱的・拡散的に接している場合を考える。系に含まれる粒子の数を N_ϵ とする。問 1 の結果を用いて以下の問に答えよ。

(a) 粒子が Fermi 統計に従うとき、$\mathcal{Z}$ と $\langle N_\epsilon \rangle$ を求めよ。また、$\langle (\Delta N_\epsilon)^2 \rangle$ を $\langle N_\epsilon \rangle$ を用いて表せ。強く縮退しているとき、$\epsilon < \mu$ なるエネルギー状態に対して $\langle (\Delta N_\epsilon)^2 \rangle / \langle N_\epsilon \rangle^2$ の値を求めよ。

(b) 粒子が Bose 統計に従うとき、$\mathcal{Z}$ と $\langle N_\epsilon \rangle$ を求めよ。ここで、$\mu < \epsilon$ とする。また、$\langle (\Delta N_\epsilon)^2 \rangle$ を $\langle N_\epsilon \rangle$ を用いて表せ。凝縮を起こしているときの $\langle (\Delta N_\epsilon)^2 \rangle / \langle N_\epsilon \rangle^2$ の値を求めよ。

(c) Boltzmann 統計は、Fermi 統計や Bose 統計のどのような極限に対応するか簡単に述べよ。粒子が Boltzmann 統計に従うとき、$\langle N_\epsilon \rangle$ を求めよ。

物 理（３）

問 1. **(a)** 半径 b の孤立した導体球に電荷 Q を与えた。このときの電場 $\mathbf{E}$、静電ポテンシャル Φ、電荷分布を求めよ。ただし、真空の誘電率は ε_0 とし、ポテンシャルは無限遠でゼロとせよ。

(b) (a) の導体球を、一様な誘電率 ε を持つ、厚さ $a-b$ $(a>b)$ の誘電体球殻で隙間なく覆った。このときの電場 $\mathbf{E}$、静電ポテンシャル Φ、電荷分布、分極電荷分布を求めよ。ただし、ポテンシャルは無限遠でゼロとし、全電荷は保存するとせよ。

(c) (a) と (b) の場合の静電エネルギーをそれぞれ計算し、エネルギーの大きさを比較せよ。また、得られたエネルギーの大小関係の物理的な理由を述べよ。

問 2. 一様に磁化した半径 a の球を考える。このとき、球内部および外部には電流が存在しないため、磁束密度 $\mathbf{B}$ は次のマクスウェル方程式に従う。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0\,.$$

(a) このとき、$\mathbf{B}$ は $\mathbf{B} = \nabla\psi$ と表せることを示せ。ただし、ψ はスカラー関数である。

(b) スカラー関数 ψ の満たす方程式を導け。

(c) 球内部の磁束密度 $\mathbf{B}$ は、$\mathbf{B} = B_0\,\mathbf{e}_z$ で与えられるとする。ここで、B_0 は定数、$\mathbf{e}_z$ は z 方向の単位基底ベクトルである。このとき、球外部の磁束密度 $\mathbf{B}$ は、極座標 (r, θ, φ) を用いると、スカラー関数 ψ を $\psi = F(r)\cos\theta$ とおくことで求められる。導体球外部の磁束密度 $\mathbf{B}$ を求めよ。

(d) x-z 平面上の磁力線の概形を図示せよ。

必要であれば、次の公式を使ってよい。

$$\nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\,K_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\,K_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi}$$

物 理（4）

問. 量子力学では、ポテンシャル $V(\vec{x})$ 内での質量 m の粒子の状態は、波動関数 $\psi(\vec{x},t)$ で表され、次のシュレディンガー方程式に従う。

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x},t)$$

ここで、$\hbar \equiv h/2\pi$ はプランク定数 h を 2π で割ったもの、Δ は 3 次元のラプラス演算子である。今、水素原子内の電子の運動を考えよう。したがって、ポテンシャルは陽子 (電荷 e) のつくるクーロンポテンシャルで与えられる。

$$V(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ここで、ϵ_0 は真空の誘電率、r は陽子と電子の距離である。以下の問に答えよ。

(a) 半古典的な考えで電子の基底状態での軌道半径が、次の式で表されるボーア半径 a_B となることを示せ。

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

半古典的な量子化条件として、以下のボーア・ゾンマーフェルトの条件を使え。

$$\frac{1}{2\pi}\oint pdq = n\hbar$$

ここで、p と q は一般化運動量とそれに共役な一般化座標、n は整数、積分は電子の軌道についての一周積分である。

(b) 基底状態の波動関数の満たす式を導け。3 次元ラプラス演算子は極座標 (r,θ,ϕ) で次のように表される。

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

(c) 波動関数が指数関数に比例するとして、基底状態の規格化された波動関数を求め、ボーア半径を使って表せ。

(d) 電子が微小体積素片 dv に存在する確率を求めよ。

(e) 電子の陽子からの平均距離を求め、(a) で求めた値との違いの理由を考察せよ。必要があれば次の公式を使ってもよい。

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} = n!$$