Synchrotron Radiation
ver 1.0

Yuji Chinone

1　座標・表記

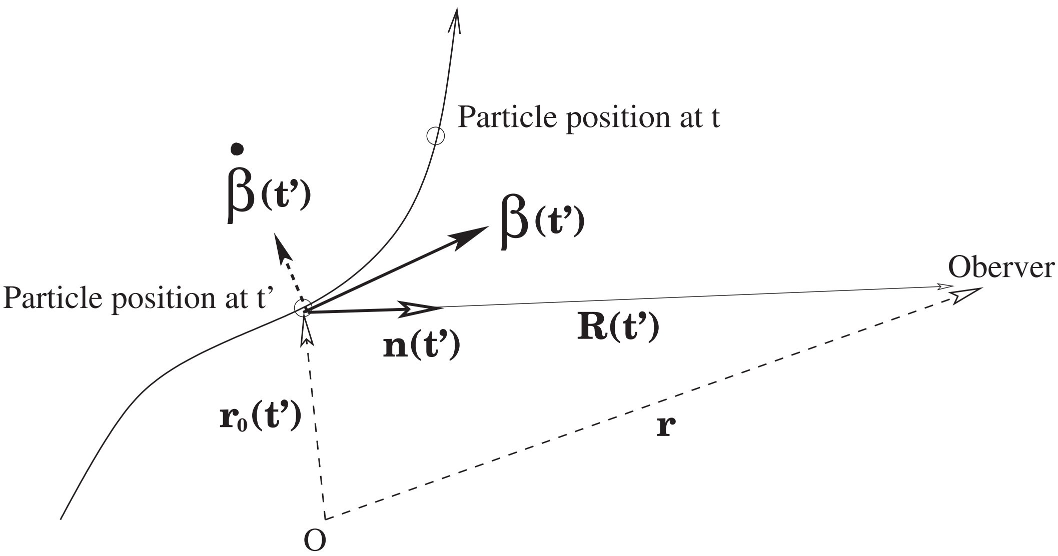

図 1　Geometry for caluculation of the radiation field at $R(\mathbf{r}, t)$ from the position of the radiating particle at the retarted time ($t' = t_{\rm ret}$).

座標、表記は以下の通り：

$$t' = t_{\rm ret} \tag{1}$$
$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t') \tag{2}$$
$$R(t') = \left|\mathbf{R}(t')\right| \tag{3}$$
$$t' = t - \frac{R(t')}{c} \tag{4}$$
$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \tag{5}$$
$$\boldsymbol{\beta}(t') = \frac{\mathbf{v}(t')}{c} \tag{6}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}} \tag{7}$$
$$\kappa(t') = 1 - \mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t') \tag{8}$$

$$\frac{\partial f(t')}{\partial t'} \equiv \dot{f}(t'), \quad \frac{\partial \mathbf{f}(t')}{\partial t'} \equiv \dot{\mathbf{f}}(t'). \tag{9}$$

又、

$$R(t') = \mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{n}(t') = (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t'))\cdot\mathbf{n}(t') = \mathbf{n}(t')\cdot\mathbf{r} - \mathbf{n}(t')\cdot\mathbf{r}_0(t')$$

$$R^2(t') = \mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{R}(t') \longrightarrow \dot{R}(t') = \mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{R}}(t'), \quad \therefore\ dt' = dt - \frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'}dt' = dt - \mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{R}}(t')dt'$$

であるから、以下を得る：

$$\therefore \quad R(t') = \mathbf{n}(t')\cdot\mathbf{r} - \mathbf{n}(t')\cdot\mathbf{r}_0(t'), \quad dt = \kappa(t')dt'; \quad t = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c} + t' - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')}{c}. \tag{10}$$

2 Fourier Spectrum

位置 $\mathbf{r}$ に居る観測者が時刻 t に観測する加速荷電粒子からの輻射場のフーリエスペクトルを求める。これは以下の積分を実行すればよい：

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{q}{c}\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathbf{n}(t')\times\left\{(\mathbf{n}(t')-\boldsymbol{\beta}(t'))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\}}{R(t')\kappa^3(t')}e^{-i\omega t}dt. \tag{11}$$

ここで $R(t') = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|$ は遅延時間 $t' = t - R(t')/c$ に $\mathbf{r}_0(t')$ にいた荷電粒子と観測者との相対距離である。又、$T_1 < t < T_2$ はスペクトルを得る為の観測が行われた期間である。但しこの間に荷電粒子の加速度が有限の値を持つとした。

荷電粒子と観測者は十分離れている為、$R(t')$ の時間内のでの変化は無視できるとし、$R(t') = R = \mathrm{Const}$ とする。又、同様の理由で $\mathbf{n}(t')$ も時間に依存しないとする。これらの近似を用いて積分変数を t から t' に変換すると、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) &= \frac{q}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\int_{T_1-R(T_1')/c}^{T_2-R(T_2')/c}\frac{\mathbf{n}(t')\times\left\{(\mathbf{n}(t')-\boldsymbol{\beta}(t'))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\}}{R(t')\kappa^2(t')}e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}dt' \\ &= \frac{q}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\int_{T_1'}^{T_2'}\frac{\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}(t'))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\}}{\kappa^2(t')}e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}dt'; \quad \left[T_i' = T_i - \frac{R}{c},\ i=1,2\right]\end{aligned} \tag{12}$$

を得る。被積分関数は

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}(t'))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\} &= -\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}(t'))\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + \left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}(t')) \\ \mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t')) &= -\boldsymbol{\beta}(t') + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}(t'))\,\mathbf{n}\end{aligned}$$

であり、又、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt'}\left\{\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')}\right\} &= \frac{\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right)\kappa(t') - \dot{\kappa}(t')\left\{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))\right\}}{\kappa^2(t')} \\ &= \frac{\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right)(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}(t')) + \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\left\{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))\right\}}{\kappa^2(t')} \\ &= \frac{-\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + \left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right)\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}(t'))\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') - \left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right)\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^2(t')} \\ &= \frac{-\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}(t'))\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + \left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa^3(t')} = \frac{\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}(t'))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\}}{\kappa^2(t')}\end{aligned}$$

であるから、以下のように書ける：

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) &= \frac{q}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\int_{T_1'}^{T_2'}\frac{d}{dt'}\left\{\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')}\right\}e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}dt' \\
&= \frac{q}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')}e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}\right]_{T_1'}^{T_2'} - \frac{q}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\int_{T_1'}^{T_2'}\left\{\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')}\right\}\frac{d}{dt'}\left\{e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}\right\}dt' \\
&= \frac{q}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')}e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}\right]_{T_1'}^{T_2'} \\
&\qquad - \frac{q}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\int_{T_1'}^{T_2'}\left\{\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')}\right\}e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}\frac{d}{dt'}\left\{-i\omega\left(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c\right)\right\}dt' \\
&= \frac{q}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')}e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}\right]_{T_1'}^{T_2'} + \frac{iq\omega}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\int_{T_1'}^{T_2'}\left\{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))\,e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}\right\}dt'.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

以下の計算では、長時間平均を行うものとする。つまり部分積分を行ったとき、積分の外に出た項の寄与は無視できるので、始めから無視することにする。よって **Eq.(13)** は以下のように書ける：

$$
\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) = \frac{iq\omega}{2\pi cR}e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c}\int_{T_1'}^{T_2'}\left\{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))\,e^{-i\omega(t'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0(t')/c)}\right\}dt'. \tag{14}
$$

3 Synchrotron Radiation

一様磁場 **B** の中を運動する相対論的電子からの放射の周波数分布の厳密な形を導く。電場が存在しない状況を考える。

3.1 電場

電荷 q を持つ荷電粒子の運動方程式は

$$
\frac{d}{dt}(\gamma m\boldsymbol{\beta}) = \frac{q}{c}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B} \tag{15}
$$

である。これから以下の式を得る：

$$
\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{\omega}_B\times\boldsymbol{\beta};\quad \boldsymbol{\omega}_B = \frac{q\mathbf{B}}{mc}\frac{1}{\gamma}. \tag{16}
$$

磁場に平行な成分を ||、垂直な成分を ⊥ と書くと、

$$
\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\parallel} = 0,\quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp} = -\boldsymbol{\omega}_B\times\boldsymbol{\beta}_{\perp} \tag{17}
$$

と書ける。そこで右手系の座標 $\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{z}}$ をとり、この **z** 軸と磁場 **B** の方向を一致させる。

今は単一の電子だけを考えて $q=-e$ とすると、

$$
\omega_B = |\boldsymbol{\omega}_B| = \frac{eB}{m_e c}\frac{1}{\gamma} = \frac{\omega_{\rm ce}}{\gamma} = \omega_{\rm se}. \tag{18}
$$

この時の方程式の解は、

$$
\frac{\mathbf{r}_0(t')}{c} = \frac{\beta}{\omega_{\rm se}}\left[\hat{\mathbf{x}}\cos(\omega_{\rm se}t') + \hat{\mathbf{y}}\sin(\omega_{\rm se}t')\right] \tag{19}
$$

$$
\boldsymbol{\beta}(t') = \beta\left[-\hat{\mathbf{x}}\sin(\omega_{\rm se}t') + \hat{\mathbf{y}}\cos(\omega_{\rm se}t')\right] \tag{20}
$$

となる。

以上のような座標の取り方で電子の運動を考えることで、一般性を失うことなく視線方向を yz 平面内に限定することが出来る。視線方向と z 軸との成す角を θ とし、$\mathbf{n} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$ と書く。

以上から、

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t')) &= (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}(t'))\,\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t') = \beta\sin\theta\cos(\omega_{\mathrm{se}}t')\,(\hat{\mathbf{y}}\ \sin\theta + \hat{\mathbf{z}}\ \cos\theta) - \beta\,[-\hat{\mathbf{x}}\ \sin(\omega_{\mathrm{se}}t') + \hat{\mathbf{y}}\ \cos(\omega_{\mathrm{se}}t')] \\ &= \hat{\mathbf{x}}\beta\sin(\omega_{\mathrm{se}}t') - \hat{\mathbf{y}}\beta\cos^2\theta\cos(\omega_{\mathrm{se}}t') + \hat{\mathbf{z}}\beta\sin\theta\cos(\omega_{\mathrm{se}}t') \end{aligned} \tag{21}$$

と書ける。この式を Eq.(14) に代入する。

始めに x 成分について考える。

$$\hat{E}_x(\mathbf{r},\omega) = -\frac{ie\omega\beta}{2\pi cR}e^{i\phi}\int_{T_1'}^{T_2'}\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]}dt'\,; \qquad \phi = -\omega\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{se}}}\sin\theta \tag{22}$$

Eq.(42)

$$e^{i\lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda)e^{in(\omega_{\mathrm{se}}t')}\,; \qquad J_n(\lambda)\ \text{:Bessel Function}$$

の両辺を λ で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{i\lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(\lambda)e^{in(\omega_{\mathrm{se}}t')}\,; \quad \frac{\partial}{\partial\lambda}J_n(\lambda) \equiv J_n'(\lambda)$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]} = i\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(\lambda)e^{-i(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})t'}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin(\omega_{\mathrm{se}}t')e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]} = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(\lambda)e^{-i(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})t'}$$

を得る。この式を Eq.(22) に代入すると、

$$\hat{E}_x(\mathbf{r},\omega) = -\frac{e\omega\beta}{2\pi cR}e^{i\phi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(\lambda)\int_{T_1'}^{T_2'} e^{-i(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})t'}dt' \tag{23}$$

となる。残された積分は $T_1' = T_0' - T'/2$, $T_2' = T_0' + T'/2$ と置くことで実行でき、

$$\begin{aligned}\int_{T_1'}^{T_2'} e^{-i(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})t'}dt' &= \left[\frac{e^{-i(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})t'}}{-i(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})}\right]_{T_0' - \frac{T'}{2}}^{T_0' + \frac{T'}{2}} = T' e^{-i(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})T_0'}\mathrm{sinc}\left[\frac{(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})T'}{2}\right] \\ &= T' e^{i\psi}\mathrm{sinc}\left[\frac{(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})T'}{2}\right]\,; \qquad \psi = -(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})T_0' \end{aligned} \tag{24}$$

となる。以上から、

$$\hat{E}_x(\mathbf{r},\omega) = -\frac{e\omega\beta}{2\pi cR}e^{i\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(\lambda)T'\mathrm{sinc}\left[\frac{(\omega - n\omega_{\mathrm{se}})T'}{2}\right]\,; \qquad \varphi = \phi + \psi = -\omega\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c} - (\omega - n\omega_{\mathrm{se}})T_0' \tag{25}$$

を得る。

次に y 成分について考える。y 成分は

$$\hat{E}_y(\mathbf{r},\omega) = \frac{ie\omega}{2\pi cR}\cos^2\theta e^{i\phi}\int_{T_1'}^{T_2'}\beta\cos(\omega_{\mathrm{se}}t')e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]}dt' \tag{26}$$

と書けるが、$e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]}$ を t' で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t'}e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]} = -i\,[\omega - \lambda\omega_{\mathrm{se}}\cos(\omega_{\mathrm{se}}t')]\,e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]} = -i\omega\,[1 - \beta\sin\theta\cos(\omega_{\mathrm{se}}t')]\,e^{-i[\omega t' - \lambda\sin(\omega_{\mathrm{se}}t')]}$$

$$\Longrightarrow \quad \beta\cos(\omega_{\rm se}t')e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]} = \frac{1}{i\omega\sin\theta}\frac{\partial}{\partial t'}e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]} + \frac{1}{\sin\theta}e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]}$$

であるから。この関係を使い、また積分の第一項目を無視することで以下を得る：

$$\begin{aligned}
\hat{E}_y(\mathbf{r},\omega) &= \frac{ie\omega}{2\pi cR}\cos^2\theta e^{i\phi}\int_{T_1'}^{T_2'}\left[\frac{1}{i\omega\sin\theta}\frac{\partial}{\partial t'}e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]} + \frac{1}{\sin\theta}e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]}\right]dt' \\
&= \frac{ie\omega}{2\pi cR}\cos^2\theta e^{i\phi}\left\{\left[\frac{1}{i\omega\sin\theta}e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]}\right]_{T_2'}^{T_1'} + \int_{T_1'}^{T_2'}\frac{1}{\sin\theta}e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]}dt'\right\} \\
&= \frac{ie\omega}{2\pi cR}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}e^{i\phi}\int_{T_1'}^{T_2'}e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]}dt' = \frac{ie\omega}{2\pi cR}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}e^{i\phi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)\int_{T_1'}^{T_2'}e^{-(\omega-n\omega_{\rm se})t'}dt'\,; \quad \because \text{Eq.(42)} \\
&= \frac{ie\omega}{2\pi cR}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}e^{i\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)T'\mathrm{sinc}\left[\frac{(\omega-n\omega_{\rm se})T'}{2}\right].
\end{aligned} \tag{27}$$

最後に z 成分について考える。z 成分は、

$$\hat{E}_y(\mathbf{r},\omega) = \frac{ie\omega}{2\pi cR}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}\int_{T_1'}^{T_2'}\beta\cos(\omega_{\rm se}t')e^{-i[\omega t'-\lambda\sin(\omega_{\rm se}t')]}dt' \tag{28}$$

であり、y 成分の $-\cos^2\theta$ が $\sin\theta\cos\theta$ に変わっただけである。よって以下を得る：

$$\hat{E}_z(\mathbf{r},\omega) = -\frac{ie\omega}{2\pi cR}\cos\theta e^{i\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda)T'\mathrm{sinc}\left[\frac{(\omega-n\omega_{\rm se})T'}{2}\right]. \tag{29}$$

4 Energy Spectrum (前半)

4.1 放射強度

各成分の単位時間あたり、単位周波数あたり、単位立体角あたりのエネルギーを求める。x 成分は

$$\frac{dW_x}{d\omega d\Omega dt} = \frac{c\left|\hat{E}_x\right|^2R^2}{T} = \frac{e^2\beta^2}{4\pi^2c}\sum_{n,n'=-\infty}^{\infty}\omega^2J_{n'}(\lambda)J_n(\lambda)\mathrm{sinc}\left[\frac{(\omega-n'\omega_{\rm se})T'}{2}\right]\mathrm{sinc}\left[\frac{(\omega-n\omega_{\rm se})T'}{2}\right] \tag{30}$$

であるが、sinc function の性質から異なる次数 n が掛け合わさった項を零とすると以下を得る：

$$\frac{dW_x}{d\omega d\Omega dt} = \frac{e^2\beta^2}{4\pi^2c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega^2J_n'^2(\lambda)T'\mathrm{sinc}^2\left[\frac{(\omega-n\omega_{\rm se})T'}{2}\right]. \tag{31}$$

同様に y,z 成分につても計算すると以下を得る：

$$\frac{d(W_y+W_z)}{d\omega d\Omega dt} = \frac{e^2}{4\pi^2c}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega^2J_n^2(\lambda)T'\mathrm{sinc}^2\left[\frac{(\omega-n\omega_{\rm se})T'}{2}v\right]. \tag{32}$$

4.2 周波数積分

sinc function の二乗の $[-\infty,+\infty]$ 積分は、

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}^2XdX = \pi$$

である。これより、

$$\lim_{T'\to\infty}\int_{-T'}^{T'}T'\mathrm{sinc}^2\left[\frac{(\omega-n\omega_{\rm se})T'}{2}\right]d\omega = 2\pi \iff \lim_{T'\to\infty}T'\mathrm{sinc}^2\left[\frac{(\omega-n\omega_{\rm se})T'}{2}\right] = 2\pi\delta(\omega-n\omega_{\rm se}) \tag{33}$$

となる。よって Eq.(31),(32) の周波数積分は以下のように書ける：

$$\frac{dW_x}{d\Omega dt} = \int d\omega \frac{dW_x}{d\omega d\Omega dt} = \frac{e^2\beta^2}{2\pi c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2 J_n'^2(\lambda_n) \tag{34}$$

$$\frac{d(W_y+W_z)}{d\Omega dt} = \int d\omega \frac{d(W_y+W_z)}{d\omega d\Omega dt} = \frac{e^2}{2\pi c}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2 J_n'^2(\lambda_n). \tag{35}$$

ここで、$\omega_n = n\omega_{\rm se}, \lambda_n = n\beta\sin\theta$ である。

5 Bessel Function

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi \tag{36}$$

で定義される Bessel Function について考える。

5.1 漸化式

Bessel Function について以下の関係式が成り立つ：

$$\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \tag{37}$$

$$2\frac{d}{dz}J_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z). \tag{38}$$

■証明

$$\text{RHS of Eq.(37)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\cos([n-1]\varphi - z\sin\varphi) + \cos([n+1]\varphi - z\sin\varphi)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$$

$$n\varphi - z\sin\varphi = \xi \to d\xi = nd\varphi - z\cos\varphi\,d\varphi;\quad \therefore\ \cos\varphi\,d\varphi = \frac{-d\xi + nd\varphi}{z};\qquad \begin{array}{c|ccc} \varphi & 0 & \to & \pi \\ \hline \xi & 0 & \to & n\pi \end{array}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2n}{z}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - z\sin\varphi)\ d\varphi - \frac{2}{z\pi}\int_0^{n\pi}\cos\xi\,d\xi$$

$$= \frac{2n}{z}J_n(z) + 0 = \text{LHS of Eq.(37)}$$

$$\text{LHS of Eq.(38)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{-\sin(n\varphi - z\sin\varphi)\}(-\sin\varphi)\ d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\cos([n-1]\varphi - z\sin\varphi) - \cos([n+1]\varphi - z\sin\varphi)\}\,d\varphi = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)$$

$$= \text{RHS of Eq.(38)}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2};\quad \cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

5.2 Bessel 微分方程式

Bessel Function: $J_n(z)$ は以下の微分方程式の解である：

$$\frac{d^2}{dz^2}y_n(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}y_n(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)y_n(z) = 0. \tag{39}$$

■証明

$$2\frac{d}{dz}J_n(z)=J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_n(z)-J_{n+1}(z)-J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_n(z)-2J_n(z)$$

$$\Longrightarrow\quad\left(-\frac{d}{dz}+\frac{n}{z}\right)J_n(z)=J_{n+1}(z)\qquad\text{：上昇演算子}$$

$$2\frac{d}{dz}J_n(z)=J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)=J_{n-1}(z)-\frac{2n}{z}J_n(z)+J_{n-1}(z)=-\frac{2n}{z}J_n(z)+2J_{n+1}(z)$$

$$\Longrightarrow\quad\left(\frac{d}{dz}+\frac{n}{z}\right)J_n(z)=J_{n-1}(z)\qquad\text{：下降演算子}$$

$$\therefore\quad\left(\frac{d}{dz}+\frac{n+1}{z}\right)\left(-\frac{d}{dz}+\frac{n}{z}\right)J_n(z)=J_n(z)\longrightarrow\text{Eq.(39)}$$

5.3 Bessel Function の exponential の積分形での定義

Bessel Function は exponential の積分で以下のように書ける。

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iz\sin\varphi-in\varphi}d\varphi \tag{40}$$

$$=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iz\cos\varphi+in\varphi}d\varphi \tag{41}$$

■証明

$$\begin{aligned}
J_n(z)&=\frac{1}{\pi}\int^{\pi}\cos(n\varphi-z\sin\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(e^{iz\sin\varphi-in\varphi}+e^{-iz\sin\varphi+in\varphi}\right)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{iz\sin\varphi-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{+iz\sin\xi-in\xi}d\xi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{iz\sin\varphi-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{+iz\sin\xi-in\xi}d\xi;\qquad \zeta=\xi+2\pi,\quad \begin{array}{c|ccc}\xi&-\pi&\to&0\\\hline\zeta&\pi&\to&2\pi\end{array}\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{iz\sin\varphi-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}e^{+iz\sin\zeta-in\zeta}d\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iz\sin\varphi-in\varphi}d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_n(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iz\sin\varphi-in\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{-3/2\pi}e^{iz\cos\xi+in\xi}\cdot i^{-n}(-d\xi);\quad;\qquad \varphi=\frac{\pi}{2}-\xi,\quad \begin{array}{c|ccc}\varphi&0&\to&2\pi\\\hline\xi&\pi/2&\to&-3/2\pi\end{array}\\
&=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int\{-3/2\pi\}^{\pi/2}e^{iz\cos\xi+in\xi}d\xi=\frac{i^{-n}}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}+\int_{2\pi}^{\pi/2}+\int_{-3/2\pi}^{0}\right)e^{iz\cos\xi+in\xi}d\xi\\
&\quad\int_{-3/2\pi}^{0}e^{iz\cos\xi+in\xi}d\xi=\int_{\pi/2}^{2\pi}e^{iz\cos\varphi+in\varphi}d\varphi=-\int_{2\pi}^{\pi/2}e^{iz\cos\varphi+in\varphi}d\varphi;\qquad \xi+2\pi=\varphi,\quad \begin{array}{c|ccc}\xi&-3/2\pi&\to&0\\\hline\varphi&\pi/2&\to&2\pi\end{array}\\
&=\frac{i^{-n}}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}+\int_{2\pi}^{\pi/2}-\int_{2\pi}^{\pi/2}\right)e^{iz\cos\xi+in\xi}d\xi\\
&=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iz\cos\varphi+in\varphi}d\varphi
\end{aligned}$$

5.4 Bessel Function の Fourier 級数表示

Bessel Function は以下のような複素 Fourier 級数表示出来る：

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{+in\varphi}. \tag{42}$$

■証明　複素 Fourier 級数：

$$f(x) = f(x+n\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+in(2\pi/\lambda)x}; \quad c_n = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x) e^{-in(2\pi/\lambda)x} dx.$$

$$\Longrightarrow \quad f(\varphi) = e^{iz\sin\varphi} = e^{iz\sin(\varphi+2\pi)} = f(\varphi+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+in\varphi}; \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\sin\varphi - in\varphi} d\varphi = J_n(z), \quad \because \text{ Eq.(40)}$$

$$\therefore\ e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{+in\varphi}$$

6 Modified Bessel Function

以下の式で定義される関数を Modified Bessel function(or Macdonald function) と呼ぶ：

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t)\, dt; \qquad \text{here} \quad z > 0. \tag{43}$$

6.1 漸化式

Modified Bessel function: $K_\nu(z)$ 配下の関係式を満たす：

$$\frac{2\nu}{z} K_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) \tag{44}$$

$$2K'_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z); \qquad K'_\nu(z) \equiv \frac{d}{dz} K_\nu(z) \tag{45}$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z). \tag{46}$$

■証明

$$\begin{aligned}
\text{RHS of Eq.(44)} &= \int_0^\infty e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) dt = \int_0^\infty e^{-z\cosh(t)} \left(-\cosh\left[(\nu-1)t\right] + \cosh\left[(\nu+1)t\right]\right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-z\cosh(t)} 2\sinh(\nu t)\sinh(t) dt; \quad \because\ \cosh(x) - \cosh(y) = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2} \\
&= -\frac{2}{z}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-z\cosh(t)}\right)\sinh(\nu t) dt; \quad \because\ (\sinh x)' = \cosh x,\ (\cosh x)' = \sinh x, \\
&= -\frac{2}{z}\left(\left[e^{-z\cosh(t)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) dt\right) = \frac{2}{z}\int_0^\infty e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) dt \\
&= \text{LHS of Eq.(44)}
\end{aligned}$$

$$\text{LHS of Eq.(45)} = 2\frac{d}{dz}\int_0^\infty e^{-z\cosh(t)}\cosh(\nu t)dt = -2\int_0^\infty e^{-z\cosh(t)}\cosh(t)\cosh(\nu t)dt$$

$$\begin{aligned}\text{RHS of Eq.(45)} &= -\left(K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)\right) = -\int_0^\infty e^{-z\cosh(t)}\left(\cosh\left[(\nu-1)t\right]+\cosh\left[(\nu+1)t\right]\right)\\ &= -2\int_0^\infty e^{-z\cosh(t)}\cosh(\nu t)\cosh(t)dt\,; \quad \because\ \cosh x+\cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2},\ \cosh(-x)=\cosh x\end{aligned}$$

6.2

Modified Bessel Function は以下の微分方程式を満たす：

$$K_\nu''(z)+\frac{1}{z}K_\nu'(z)-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)=0. \tag{47}$$

■証明　Eq.(44),(45) より、

$$-\left(\frac{2\nu}{z}K_\nu(z)+2K\prime(z)\nu\right)=2K_{\nu-1}(z) \quad\Longrightarrow\quad -\left(\frac{d}{dz}+\frac{\nu}{z}\right)K_\nu(z)=K_{\nu-1}(z) \quad ：下降演算子$$

$$\frac{2\nu}{z}K_\nu(z)-2K\prime(z)\nu=2K_{\nu+1}(z) \quad\Longrightarrow\quad -\left(\frac{d}{dz}-\frac{\nu}{z}\right)K_\nu(z)=K_{\nu+1}(z) \quad ：上昇演算子$$

$$\therefore\quad \left(\frac{d}{dz}-\frac{\nu-1}{z}\right)\left(\frac{d}{dz}+\frac{\nu}{z}\right)K_\nu(z)=K_\nu(z) \longrightarrow \text{Eq.(47)}$$

7　Airy Function

以下の式で定義される関数をエアリー関数 (Airy function) と呼ぶ：

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\cos\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi z\right)d\xi \tag{48}$$

7.1　微分方程式

Airy Function は以下の微分方程式を満たす。但し $\lim_{x\to\infty}\sin x\to 0$：

$$\Phi''(z)=z\Phi(z). \tag{49}$$

■証明

$$\frac{d}{dz}\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{d}{dz}\cos\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi z\right)d\xi=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\sin\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi z\right)\xi d\xi$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\cos\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi z\right)\xi^2d\xi; \quad \frac{\xi^3}{3}+\xi z=\zeta\to\xi^2d\xi=d\zeta-zd\xi, \quad \begin{array}{c|ccc}\xi & 0 & \to & \infty\\ \hline \zeta & 0 & \to & \infty\end{array}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty\cos\xi d\xi-z\int_0^\infty\cos\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi z\right)d\xi\right]=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\sin\xi\right]_0^\infty+z\int_0^\infty\cos\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi z\right)d\xi\\ &= z\Phi(z)\end{aligned}$$

7.2

Airy Function と Modified Bessel Function の間には以下の関係が成り立つ：

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{z}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \tag{50}$$

■証明

$$\text{RHS of Eq.(50)} = \frac{z^{1/2}}{\sqrt{3z}} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}\cosh(t)} \cosh\left(\frac{t}{3}\right) dt = y(z)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy(z)}{dz} &= \frac{z^{-1/2}}{2\sqrt{3\pi}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}\cosh(t)} \cosh\left(\frac{t}{3}\right) dt - \frac{z}{\sqrt{3\pi}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{3}z^{2/3}\cosh(t)} \cosh\left(\frac{t}{3}\right) \cosh(t) dt \\
&= \frac{z^{-1/2}}{2\sqrt{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) - \frac{z}{2\sqrt{3\pi}} \left(K_{-2/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + K_{4/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right) = -\frac{z}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \qquad (51) \\
\frac{d^2y(z)}{dz^2} &= -\frac{1}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + \frac{z^{3/2}}{2\sqrt{3\pi}} \left[K_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + K_{5/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right] = \frac{z^{3/2}}{\sqrt{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \\
&= z\sqrt{\frac{z}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) = z\Phi(z) \qquad (52)
\end{aligned}$$

これで、Eq.(50) の右辺が Eq.(49) の解であることは示せた。更に、２つの境界 $z = 0, z = \infty$ での両辺の値が

$$\lim_{z\to\infty} \Phi(z) = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} \sqrt{\frac{z}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\frac{\xi^3}{3} d\xi = \frac{3^{1/3}\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{t^3} dt \\
&= \frac{3^{1/3}}{2\sqrt{3\pi}} \int_0^\infty x^{-2/3} e^{-x} dx\,; \quad x = t^3 \to dt = \frac{1}{3}\frac{dx}{x^{2/3}} \\
&= \frac{3^{1/3}}{2\sqrt{3\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{z\to 0} \sqrt{\frac{z}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\sqrt{3\pi}} z^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(2\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{4}{9}z^3\right)^{5/6}}$$

ここでは、

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2 + z^2)^{\nu+1/2}} dt$$

の関係式を使った。更に、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{3\pi}} z^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(2\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{4}{9}z^3\right)^{5/6}} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{3}\,\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} z \int_0^\infty \frac{\left(\frac{4}{9}z^3\right)^{1/2}}{\left[\left\{\frac{t}{(4z^3/9)^{1/2}}\right\}^2 + 1\right]^{5/6}} \frac{d\left(\frac{t}{[4z^3/9]^{1/2}}\right)}{(4z^3/9)^{5/6}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{3}\,\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{2/3}{(2/3)^{5/3}} \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^{5/6}} = \frac{2^{1/3}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{3}\,\pi} \frac{(2/3)^{1/3}(2/3)}{(2/3)^{5/3}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \\
&= \frac{2^{1/3}}{\sqrt{3}\,\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3^{1/3}}{2\sqrt{3\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

となる。よって２つの境界での両辺の値が等しいことが分かる。二階の微分方程式の解の一意性から、２つの境界条件を与えれば、解が一意に決まることにより、Eq.(50) が正しいことが証明された。

7.3 $n \gg 1$ の場合の Bessel Function

$n \gg 1$ の時

$$J_n(n\epsilon) = \frac{1}{\pi}\int_0 \pi \cos\left[n\left(\xi - \epsilon\sin\xi\right)\right] d\xi \tag{53}$$

が、以下の式で書ける：

$$J_n(n\epsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos\left[n\left(\dfrac{1-\epsilon^2}{2}\xi + \dfrac{\xi^3}{6}\right)\right] d\xi & \text{for} \quad \epsilon \sim 1 \\ 0 & \text{for} \quad \epsilon \ll 1 \end{cases}. \tag{54}$$

この積分には小さい角度 ξ のみが影響を与え、上限の値には殆ど依存しないので上限を $\xi \to \infty$ とした。小さい角度 ξ では $1-\epsilon^2 \sim o(\xi^2)$ なので三次まで残した。

■証明

$$\text{for } \epsilon \sim 1: \quad J_n(n\epsilon) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left[n\left\{\xi - \epsilon\left[\xi - \frac{\xi^3}{6} + o(\xi^3)\right]\right\}\right] d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(n\left[\xi(1-\epsilon) + \frac{\xi^3}{6}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(\frac{1-\epsilon^2}{2}\xi + \frac{\xi^3}{6}\right); \quad \because \xi \sim o(1) \to \xi \sim \frac{1+\epsilon}{2}$$

$$\text{for } \epsilon \ll 1: \quad J_n(n\epsilon) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\xi) d\xi = \frac{1}{n\pi}\left[\sin(n\xi)\right]_0^\pi = 0$$

8 Energy Spectrum (後半)

8.1 立体角積分

Eq.(31),(32) の立体角積分、

$$\frac{dW}{dt} = \int_\Omega \frac{d(W_x + W_y + W_z)}{d\Omega dt} = \frac{e^2}{c}\int_0^\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n^2 \left[\beta^2 J_n^2(\lambda_n) + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} J_n'^2(\lambda_n)\right] \sin\theta d\theta$$

を行う。この角括弧の中は (Bessel Function の引数 λ_n は省略する)、

$$\left[\beta^2 J_n^2 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} J_n'^2\right] = \beta^2\left(\frac{J_{n-1} - J_{n+1}}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} J_n^2 - J_n^2 = \beta^2\left(\frac{J_{n-1} - J_{n+1}}{2}\right)^2 + \frac{n^2\beta^2}{\lambda_n^2} J_n^2 - J_n^2; \quad \lambda_n = n\beta\sin\theta$$

$$= \beta^2\left[\left(\frac{J_{n-1} - J_{n+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{J_{n-1} + J_{n+1}}{2}\right)^2\right] - J_n^2 = \frac{\beta^2}{2}\left(J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2\right) - J_n^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\beta^2\left(J_{n-1}^2 - 2J_n^2 + J_{n+1}^2\right)\right] - \left(1 - \beta^2\right) J_n^2$$

と書ける。これより立体角積分は、

$$\int_0^\pi \left[\beta^2 J_n^2(\lambda_n) + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} J_n'^2(\lambda_n)\right] \sin\theta d\theta = \frac{\beta^2}{2}\left(\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}\right)\left(\sin\theta J_{n-1}^2 - 2\sin\theta J_n^2 + \sin\theta J_{n-1}^2\right) d\theta - \left(1-\beta^2\right)\left(\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}\right)\sin\theta J_n^2 d\theta$$

であるが、今

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta J_n^2(n\beta\sin\theta) d\theta = \int_{\pi/2}^{0} \sin\theta' J_n^2(n\beta\sin\theta')(-d\theta'); \quad \theta' = \pi - \theta,\ d\theta' = -d\theta, \quad \begin{array}{c|ccc} \theta & \pi/2 & \to & \pi \\ \hline \theta' & \pi/2 & \to & 0 \end{array}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta J_n^2(\lambda_n) d\theta$$

であることから、

$$\int_0^\pi \left[\beta^2 J_n^2(\lambda_n) + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} J_n'^2(\lambda_n)\right] \sin\theta d\theta = \beta^2 \int_0^{\pi/2} \left(\sin\theta J_{n-1}^2 - 2\sin\theta J_n^2 + \sin\theta J_{n-1}^2\right) d\theta - 2\left(1-\beta^2\right) \int_0^{\pi/2} \sin\theta J_n^2 d\theta$$

$$= \beta^2 \frac{1}{2n\beta} \int_0^{2n\beta} \left(J_{(2n-1)-1}(t) - 2J_{(2n-1)+1}(t) + J_{(2n+1)+1}(t)\right) dt - \frac{2\left(1-\beta^2\right)}{2n\beta} \int_0^{2n\beta} J_{2n}(t)dt$$

$$\because \int_0^{\pi/2} J_n^2(z\sin\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2z} J_{2n}(t)dt$$

$$= \frac{\beta}{n} \int_0^{2n\beta} \left(J'_{2n-1}(t) - J'_{2n+1}(t)\right) dt - \frac{1-\beta^2}{n\beta} 2n \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi)d\xi; \quad t = 2m\xi,\ dt = 2nd\xi, \quad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 2n\beta \\ \hline \xi & 0 & \to & \beta \end{array}$$

$$= \frac{\beta}{n} \left[J_{2n-1}(t) - J_{2n+1}(t)\right]_0^{2n\beta} - 2\frac{1-\beta^2}{\beta} \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi)d\xi = \frac{2\beta}{n} J'_{2n}(2n\beta) - 2\frac{1-\beta^2}{\beta} \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi)d\xi$$

を得る。以上より立体角積分をした結果は以下のようになる：

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2e^2\omega_{\rm se}}{c\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[n\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - n^2\left(1-\beta^2\right) \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi)d\xi\right]. \tag{55}$$

8.2 $n \gg 1$ の時の $J_{2n}(2n\xi)$ の振る舞い

$n \gg 1$ の時以下の式が成り立つ：

$$J_{2n}(2n\xi) \sim \frac{1}{n^{1/3}\sqrt{\pi}} \Phi\left(n^{2/3}\left[1-\xi^2\right]\right). \tag{56}$$

■証明 $n \gg 1, , \xi \sim 1$

$$J_{2n}(2n\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left[2n\left(\frac{1-\xi^2}{2}\zeta + \frac{\zeta^3}{6}\right)\right] d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left[\frac{n\zeta^3}{3} + n\left(1-\xi^2\right)\zeta\right] d\zeta; \quad n\zeta^3 = \eta^3,\ d\zeta = n^{-1/3} d\eta$$

$$= \frac{n^{-1/3}}{\pi} \int_0^\infty \cos\left[\frac{\eta^3}{3} + n^{2/3}\left(1-\xi^2\right)\eta\right] d\eta = \frac{1}{n^{1/3}\sqrt{\pi}} \Phi\left(n^{2/3}\left[1-\xi^2\right]\right)$$

Eq.(56) の両辺を $2n\xi$ で微分すると以下を得る：

$$\frac{d}{d(2n\xi)} J_{2n}(2n\xi) = J'_{2n}(2n\xi) = \frac{1}{n^{1/3}\sqrt{\pi}} \Phi'\left(n^{2/3}\left[1-\xi^2\right]\right) \frac{d\left(n^{2/3}\left[1-\xi^2\right]\right)}{d(2n\xi)} = -\frac{1}{n^{2/3}\sqrt{\pi}} \xi \Phi'\left(n^{2/3}\left[1-\xi^2\right]\right). \tag{57}$$

8.3 $\gamma \gg 1$ のときの Energy Spectrum

$\gamma \gg 1$ の時、Eq.(55) は $n \gg 1$ が主に寄与する。$[\omega, \omega + d\omega]$ の間には、$d\omega/\omega_{\rm se}$ 個のモードが存在する。従って Eq.(55) を $\omega_{\rm se}$ で割ることで、連続的に分布した周波数あたりの強度に変換することが出来る。今 $u = n^{2/3}\left(1-\xi^2\right), u_0 = n^{2/3}\left(1-\beta^2\right) \to du = -2n^{2/3}\xi d\xi$ とおくと、

$$\frac{dW}{d\omega dt} = \frac{2e^2\omega_{\rm se}}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[n\left(-\frac{1}{n^{2/3}\sqrt{\pi}}\Phi'(u_0)\right) - n^2\left(1-\beta^2\right) \int_0^\beta \frac{1}{n^{2/3}\sqrt{\pi}} \Phi\left(n^{2/3}\left[1-\xi^2\right]\right) d\xi\right]$$

$$= \frac{2e^2\omega_{\rm se}}{c\sqrt{\pi}} \left[-n^{1/3}\Phi'(u_0) - n^{5/3}\left(1-\beta^2\right) \int_{u_0}^\infty \Phi(u) \frac{du}{2n^{2/3}\xi}\right]$$

$$= \frac{2e^3}{\sqrt{\pi}} \frac{B}{mc^2} \left(\sqrt{u_0}\left[-\Phi'(u_0) - \frac{u_0}{2}\int_{u_0}^\infty \Phi(u)du\right]\right); \quad \text{here } \xi \sim \beta \sim 1, \text{ but } 1-\beta^2 \neq 0,\ n = \left(\frac{u_0}{1-\beta^2}\right)^{3/2} \tag{58}$$

を得る。更に、

$$\Phi'(z) = -\frac{z}{\sqrt{3}\pi} K_{2/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad \Phi(z) = \sqrt{\frac{z}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{u_0}\Phi'(u_0) - \frac{u_0^{3/2}}{2}\int_{u_0}^{\infty}\Phi(u)du &= \frac{u_0^{3/2}}{\sqrt{3}\pi}K_{2/3}\left(\frac{2}{3}u_0^{3/2}\right) - \frac{u_0^{3/2}}{2}\int_{u_0}^{\infty}\sqrt{\frac{u}{3\pi}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)du \\
&= \frac{3}{2}\frac{\chi_0}{\sqrt{3}\pi}K_{2/3}(\chi_0) - \frac{3}{4\sqrt{3}}\chi_0\int_{\chi_0}^{\infty}K_{1/3}(\chi)d\chi\,; \quad \text{here } \chi = \frac{2}{3}u^{3/2}\ \chi_0 = \frac{2}{3}u_0^{3/2} \ \rightarrow \ d\chi = u^{1/2}du \\
&= \frac{3}{2}\frac{\chi_0}{\sqrt{3}\pi}K_{2/3}(\chi_0) - \frac{3}{4\sqrt{3}}\chi_0\int_{\chi_0}^{\infty}K_{1/3}(\chi)d\chi = \frac{3\chi_0}{2\sqrt{3}\pi}\left[K_{2/3}(\chi_0) - \frac{1}{2}\int_{\chi_0}^{\infty}K_{1/3}(\chi)d\chi\right] \\
&= \frac{3\chi_0}{2\sqrt{3}\pi}\left[-\int_{\chi_0}^{\infty}K'_{2/3}(\chi)d\chi - \int_{\chi_0}^{\infty}K_{1/3}(\chi)d\chi\right] = \frac{3\chi_0}{2\sqrt{3}\pi}\left[\int_{\chi_0}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{K_{-1}(\chi) + K_{5/3}(\chi) - K_{1/3}(\chi)\right\}d\chi\right] \\
&= \frac{3\chi_0}{4\sqrt{3}\pi}\int_{\chi_0}^{\infty}K_{5/3}(\chi)d\chi
\end{aligned}
$$

を得る。よって、

$$
\frac{dW}{d\omega dt} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{e^3B}{mc^2}F(\chi_0) \tag{59}
$$

$$
\text{here} \qquad F(\chi_0) = \chi_0\int_{\chi_0}^{\infty}K_{5/3}(\chi)d\chi, \quad \chi_0 \equiv \frac{\omega}{\omega_c}, \quad \omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_{se} = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_{ce} \tag{60}
$$

を得る。

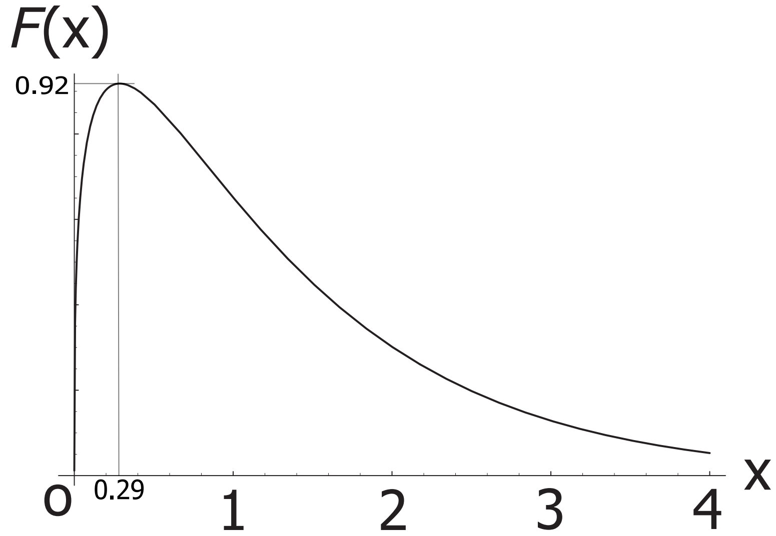

図 2　$F(\chi)$ の概形。$\chi = 0.29$ で最大値 0.92 をとる。

8.4　電子のエネルギー分布が与えられた場合

電子のエネルギー分布が power law:

$$
N(\gamma)d\gamma = C\gamma^{-p}d\gamma \tag{61}
$$

で与えられるとき、輻射の周波数分布を計算する。Eq.(60) より、

$$
\chi_0 = \frac{2\omega m_e c}{3eB}\gamma^{-2} \quad \rightarrow \quad \gamma = \left(\frac{2\omega m_e c}{3eB}\right)^{1/2}\chi_0^{-1/2}, \ d\chi_0 = -\frac{3eB}{4\omega m_e c}\gamma^3 d\chi_0\,; \qquad \begin{array}{c|ccc} \gamma & 0 & \rightarrow & \infty \\ \hline \chi_0 & \infty & \rightarrow & 0 \end{array}
$$

であるから、

$$\begin{aligned}
P(\omega) &= \int_0^\infty \frac{dW}{d\omega dt} N(\gamma) d\gamma = \int_0^\infty \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 B}{m_e c^2} F(\chi_0) C \gamma^{-p} \frac{3eB}{4\omega m_e c} \gamma^3 d\chi_0 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 B}{mc^2} \frac{3eB}{4\omega mc} C \left(\frac{2\omega m_e c}{3eB} \right)^{(3-p)/2} \int_0^\infty \chi_0^{(p-3)/2} F(\chi_0) d\chi_0 \\
&= \frac{\sqrt{3}\, e^3 CB}{2\pi m_e c^2} \frac{3eB}{4\omega m_e c} \left(\frac{m_e c\omega}{3eB} \right)^{-(p-1)/2} \frac{m_e c\omega}{3eB} 2^{(3-p)/2} \cdot 2 \cdot 2^{(p-3)/2} \frac{2}{p+1} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12} \right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}\, e^3 CB}{2\pi mc^2 (p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12} \right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12} \right) \left(\frac{mc\omega}{3eB} \right)^{-(p-1)/2}
\end{aligned} \tag{62}$$

を得る。ここで Γ は Gamma function で、以下の関係式を用いた：

$$\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3} \right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3} \right). \tag{63}$$