天体物理学弐 課題番号参番
解答例
[20060427 出題]

Yuji Chinone

1

1-1

Lorentz gauge には、

$$\nabla^2\chi(\mathbf{r}) = 0 \tag{1}$$

を満たす、時間に依らない関数 $\chi(\mathbf{r})$ を用いて、

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \nabla\chi(\mathbf{r}) \tag{2}$$

なる gauge 変換の自由度が残されていることを証明せよ。

1-1 解答

Lorentz gauge は、

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

を満たす。これに Eq.(2) を代入すると、

$$\nabla\cdot\left[\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \nabla\chi(\mathbf{r})\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

$$\because)\quad \text{Eq.(1) and } \frac{\partial\chi(\mathbf{r})}{\partial t} = 0\,;\left[\phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi(\mathbf{r})}{\partial t} = \phi(\mathbf{r},t)\right]$$

であるから、Eq.(2) なる gauge 変換の自由度が残されていることが分かる。

Lorentz gauge に於けるベクトルポテンシャルは、

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{4}$$

を満たす。Eq.(2) を Eq.(4) に代入すると、

$$\nabla^2\left(\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \nabla\chi(\mathbf{r})\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \nabla\chi(\mathbf{r})\right) = \nabla^2\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla^2\chi(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi(\mathbf{r})}{\partial t^2}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

$$\Longrightarrow\quad \therefore\ \nabla^2\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\quad \because)\quad \text{Eq.(1) and } \frac{\partial\chi(\mathbf{r})}{\partial t} = 0$$

となり、$\mathbf{A}'$ も Eq.(4) を満足する。よって Lorentz gauge に於ける電磁ポテンシャルには Eq.(2) なる自由度が許されていることが分かる。

2

http://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/Radiation_from_moving_charges/index.html 参照。

3

http://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/Radiation_from_moving_charges/index.html 参照。

4

4-1

$\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ の電荷も電流も存在しない真空中での Maxwell 方程式から、次の二つの式を導け。

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

4-1 解答

$\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ のとき、Maxwell 方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

と書ける。Rotation を含む項に左から $\nabla\times$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\
&= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}; \qquad \therefore \text{ Eq.(5)} \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\
&= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}; \qquad \therefore \text{ Eq.(6)}
\end{aligned}$$

となり確かに導けた。

5

5-1

Maxwell 方程式から、Maxwell の変位電流 $(1/4\pi)\partial \mathbf{E}/\partial t$ の項を落とし、問題 4 と同様の変形をして Maxwell 方程式から得られる、電場、磁場が満たす方程式を導け。問題 4 同様に $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ の電荷も電流も存在しない真空中とする。

5-1 解答

$(1/4\pi)\partial\mathbf{E}/\partial t = 0, \rho = 0, \mathbf{j} = 0$ のとき、Maxwell 方程式は、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$$

と書ける。Rotation を含む項に左から $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) = 0 \\
&\qquad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \qquad (7)\\
&\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \\
&\qquad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \qquad (8)
\end{aligned}$$

を得る。

6

ダランベール方程式

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (9)$$

の球面波解について考察する。球面極座標の動経座標を R とする。関数 f は動経方向と時刻のみの関数 $f(R,t)$ であるとする。

6-1

ダランベール方程式が

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R}f(R,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(R,t) = 0 \qquad (10)$$

と書けることを示せ。

6-1 解答

計量 $g^{\mu\nu}$ でのラプラス演算子は

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\xi^\nu}, \qquad \sqrt{g} = \sqrt{\det(g^{\mu\nu})} \qquad (11)$$

と書ける。球面極座標 (R,θ,ϕ) では

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{g} = R^2\sin\theta$$

であるので、

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] = \frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \qquad (12)$$

となる。$f(\mathbf{r},t)$ は (R,t) のみの関数であるので、Eq.(9) と Eq.(12) より Eq.(10) を得る。

6-2

Eq.(10) に

$$f(R,T) = \frac{U(R,t)}{R}$$

を代入し、$U(R,t)$ が満たす方程式が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2}\right) U(R,t) = 0 \tag{13}$$

となることを示せ。

6-2 解答

$f = U/R$ を Eq.(10) の左辺に代入すると、それぞれの項は

$$(\text{第壱項}) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial}{\partial R}\right) f(R,t) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial U(R,t)}{\partial R} - U(R,t)\right) = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial U(R,t)}{\partial R} + R\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2} - \frac{\partial U(R,t)}{\partial R}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2}$$

$$(\text{第弐項}) = \frac{\partial^2 f(R,t)}{\partial (ct)^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial (ct)^2}$$

より、Eq.(13) を得る。

6-3

Eq.(13) を以下で定義される ξ, η を用いて変形せよ。

$$\xi = R - ct, \quad \eta = R + ct \tag{14}$$

6-3 解答

Eq.(14) を用いると、

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial \xi}{\partial R}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial R}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} = \frac{\partial}{\partial (ct)}\left(\frac{\partial \xi}{\partial (ct)}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial (ct)}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial (ct)}\left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

と書けるので、

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{15}$$

を得る。

6-4

6-3 の結果より以下の二つがダランベール方程式の解であることを示せ。

$$f(R,t) = \frac{g(R-ct)}{R}, \quad f(R,t) = \frac{h(R+ct)}{R} \tag{16}$$

ここで $g(\xi), h(\eta)$ はそれぞれ ξ, η にのみ依存する任意の関数である。

6-4 解答

Eq.(15) を ξ で積分すると、

$$\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta} = H(\eta)$$

となり、更に η で積分すると、

$$U(\xi,\eta) = \int H(\eta)d\eta + g(\xi) = g(\xi) + h(\eta)$$

を得る。よって、

$$f(R,t) = \frac{g(R-ct)}{R} + \frac{h(R+ct)}{R} \tag{17}$$

が Eq.(9) の球面波解である。

6-5

6-4 で得られた解の物理的性質を考察せよ。

6-5 解答

関数 $g(R-ct)$ は時刻 $t=0$ での形 $g(R_0)$ が、時刻 t では $g(R_t - ct = R_0), R_t = R_0 + ct$ で実現されることから、$g(R-ct)$ は動経方向正の方向に速度 c で伝搬する波を表している。関数 $h(R+ct)$ は同様にして、動経方向負の方向に速度 c で伝搬する波を表している。又振幅が $1/R$ に比例して落ちるのは、波のエネルギーが $1/R^2$ に比例し、球の表面積が R^2 に比例することを考えると、エネルギー保存則を表していることがわかる。

二つの解について考える。以下、中心に delta 関数的な電荷があり、中心以外で空間は真空である場合で考える。電荷の作る波は外向きに進む波だけであると仮定すると、電磁波は電荷の運動で起きるので、波は中心から外向きに進行すると考えるのが普通である。電荷が動き出す前に無限遠から球面波がやって来て、電荷が動き始める時に丁度中心に到着すると考えるのは寧ろ奇妙である。このような解も可能ではあるが、経験によると電荷が加速されると電磁波が電荷から外へ出ていく。

Maxwell 方程式はその形から明らかに時間反転に対して不変であるから、どちらの可能性も許すが、経験的事実に基づいて、外向きの波の解だけが「物理的に意味がある」ということになる。

6-6

問題 5 で得られた方程式に以上と同様の手続きを行って得られる解を求めよ。この解とダランベールの球面波解の違いについて考察せよ。

6-6 解答

ダランベール方程式の場合と同様に $f = U/R$ とおくと、

$$\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2} = 0$$

を得る。これを積分すると、

$$U(R) = AR + B\,;\ A, B = \mathrm{Const},\ \therefore\ f(R) = A + \frac{B}{R} \tag{18}$$

を得る。これは時間発展しない定常ポテンシャル型の解である（ラプラス方程式の解）。一見すると無限遠でも場 (B) が存在しているかに見えるが、これは境界条件から決まるので、一様場が存在すれば有限であるし、中心に点源のみがあるような場合は零である。

ダランベール方程式の場合でもそうであるが、中心に電荷も電流もなければ場も外向きの球面波も存在しないはずではあるが、不思議に Eq.(17),(18) の解の形は、中心に電荷が存在する場合の解を与える結果となっている。

7

7-1

次の式を示せ。但し $\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$

$$\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & \cos\delta_2 \\ -\sin\delta_1 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & -\sin\delta_1 \\ \cos\delta_2 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

7-1 解答

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sin\delta_2 & \cos\delta_2 \\ -\sin\delta_1 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & -\sin\delta_2 \\ \cos\delta_2 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin^2\delta_2 + \cos^2\delta_2 & -(\sin\delta_1\sin\delta_2 + \cos\delta_1\cos\delta_2) \\ -(\sin\delta_1\sin\delta_2 + \cos\delta_1\cos\delta_2) & \sin^2\delta_1 + \cos^2\delta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\delta_2 - \delta_1) \\ -\cos(\delta_2 - \delta_1) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8

8-1

次の行列の固有値を求め共に零以上の値をとることを示せ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

8-1 解答

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \cos^2\delta = [(1-\lambda) + \cos\delta][(1-\lambda) - \cos\delta] = 0$$

$$\therefore\ \lambda = 1 \pm \cos\delta \geq 0, \quad \because)\ -1 \leq \cos\delta \leq +1$$

9

9-1

Eq.(20) の固有ベクトルを求めこの行列を対角化するユニタリー行列 U とその逆行列 U^{-1} を求めよ。

9-1 **解答**

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (1 \pm \cos\delta)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \therefore\ Y = \mp X$$

より、

$$\text{固有値：}(1+\cos\delta)\,,\text{固有ベクトル：}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \text{固有値：}(1-\cos\delta)\,,\text{固有ベクトル：}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left[UU^{-1} = E\right] \tag{21}$$

を得る。

10

10-1

X, Y は完全二次形式

$$X^2 + Y^2 - 2XY\cos\delta = \sin^2\delta \tag{22}$$

を満たす。今

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

なる変換によってこの二次形式は ξ, η ではどのように書けるか。

10-1 **解答**

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \xi + \eta \\ -\xi + \eta \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 - XY\cos\delta = \frac{1}{2}(\xi+\eta)^2 + \frac{1}{2}(-\xi+\eta)^2 - (\xi+\eta)(-\xi+\eta)\cos\delta &= \xi^2 + \eta^2 + \left(\xi^2 - \eta^2\right)\cos\delta \\ &= \sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta \end{aligned}$$

となるが、これを整理すると、

$$\begin{array}{ll} \text{when } \delta = n\pi, (n = 2m;\ m \in \mathbf{N}), & \xi = 0 \\ \text{when } \delta = n\pi, (n = 2m+1;\ m \in \mathbf{N}), & \eta = 0 \\ \text{otherwise} & \dfrac{\xi^2}{\left(\sqrt{2}\,\sin\dfrac{\delta}{2}\right)^2} + \dfrac{\eta^2}{\left(\sqrt{2}\,\cos\dfrac{\delta}{2}\right)^2} = 1 \end{array} \tag{23}$$

を得る。

11

連続媒質からの放射を考える。N 個の電子からなる系を考える。各電子は、パルス状の電磁波を放射しており、その波形は共通で $E_0(t)$ であるとする。各電子からパルスが観測者に到着する時刻を $t = t_i, (i =$

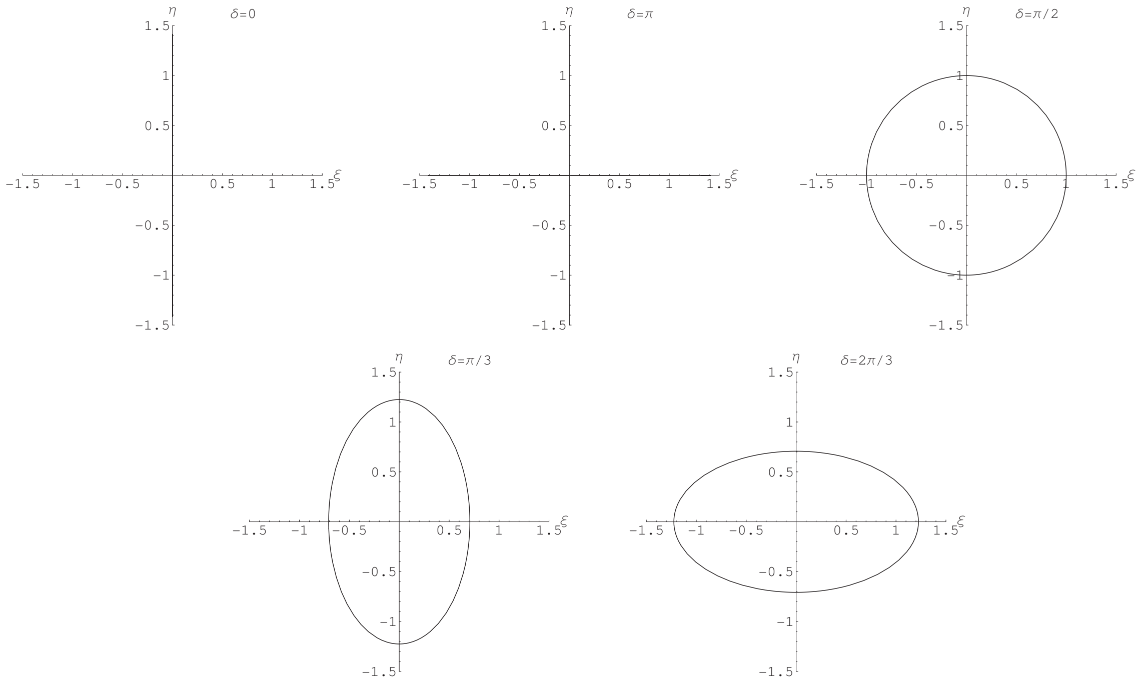

図 1　Eq.(23) の概形

$1, 2, 3, \ldots, N$) とし、到着時刻は random であるとする。観測者が観測する電磁波の電場は、全ての重ね合わせで、

$$E(t) = \sum_{i=1}^{N} E_0(t - t_i) \tag{24}$$

である。

11-1

$E_0(t)$ の Fourier スペクトルが

$$\hat{E}(\omega) = \hat{E}_0(\omega) \sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i} \tag{25}$$

であることを示せ。但し、$\hat{E}_0(\omega)$ は $E_0(t)$ の Fourier スペクトル。

11-1 解答

$E_0(t - t_i)$ の Fourier 変換は、

$$\hat{E}_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dT\, E_0(T) e^{i\omega T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d(t - t_i)\, E_0(t - t_i) e^{i\omega(t - t_i)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, E_0(t - t_i) e^{i\omega t} \times e^{-i\omega t_i}$$

と書け、また

$$\hat{E}_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, E_0(t) e^{i\omega t}$$

であるから、辺々を比較すると、

$$E_0(t - t_i) = E_0(t) e^{i\omega t_i}$$

を得る。これは、Fourier 変換の平行移動の表式である。これを用いると、

$$\hat{E}(\omega) = \mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^{N} E_0(t-t_i)\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}\left[E_0(t-t_i)\right] = \sum_{i=1}^{N} \hat{E}_0(\omega) e^{i\omega t_i} = \hat{E}_0(\omega) \sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}$$

を得る。

11-2

N が十分大きい数として、

$$\left|\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right|^2 = N \tag{26}$$

が近似的に成り立つことを示せ。

11-2 解答

$$\left|\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right)^* = \left(\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} e^{-i\omega t_i}\right) = \sum_{i,j}^{N} e^{i\omega(t_i-t_j)} = \sum_{i=j}^{N} e^{i\omega(t_i-t_j)} + \sum_{i\neq j}^{N} e^{i\omega(t_i-t_j)}$$
$$= N, \quad \because) \sum_{i\neq j}^{N} e^{i\omega(t_i-t_j)} = 0$$

となる。ここで乱雑なことにより $e^{i\omega(t-t_i)}$ 各項の位相 $\omega(t-t_i)$ も乱雑となり、和の各成分が相殺し合って全体としての寄与が無視できるほど小さくなる、**RPA(Random Phase Approximation)** を用いた。

12

12-1

11 の時、観測される電磁波のスペクトルが、

$$\frac{dW}{dAd\omega} = cN\left|\hat{E}_0(\omega)\right|^2 \tag{27}$$

であることを示せ。

12-1 解答

単位時間、単位面積当たりの電磁波のエネルギーは Poynting vector を考えて、

$$\frac{dW}{dtdA} = \frac{c}{4\pi} E^2(t) \tag{28}$$

と書ける。これより単位面積当たりのエネルギーは時間積分して、

$$\frac{dW}{dA} = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)dt = c\int_{0}^{\infty}\left|\hat{E}(\omega)\right|^2 d\omega$$

となる。ここで、Parseval の公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)dt = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{E}(\omega)\right|^2 d\omega \tag{29}$$

及び、Reality condition

$$E^*(\omega) = E(-\omega) \tag{30}$$

を用いた。以上より、単位時間、単位周波数、単位面積当たりのエネルギーである電磁波のスペクトルは

$$\frac{dW}{dAd\omega} = c\left|\hat{E}(\omega)\right|^2 \tag{31}$$

と書け、11 の時 Eq.(27) で書ける。

12-2

もし全ての電子が、放射する電磁波の波長より十分小さい領域に存在して、それらが同時に電磁波を放射したとしたら、観測される電磁波のスペクトルが、

$$\frac{dW}{dAd\omega} = cN^2\left|\hat{E}_0(\omega)\right|^2 \tag{32}$$

であることを示せ。

12-2 解答

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right)^* = \left(\sum_{i=1}^{N} e^{i\omega t_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} e^{-i\omega t_i}\right) = \sum_{i,j} e^{i\omega(t_i-t_j)} = \sum_{i=j} e^{i\omega(t_i-t_j)} + \sum_{i\neq j} e^{i\omega(t_i-t_j)} \\ &= N + N(N-1) = N^2, \quad \because \sum_{i\neq j}^{N} e^{i\omega(t_i-t_j)} = N(N-1)\end{aligned}$$

となる。ここで電磁波の放射領域が十分小さいので、$i \neq j$ であっても $t_i = t_j$ となる様なコヒーレントな状況が実現されている。以上を元に 12-1 同様に考えれば、Eq.(32) を得る。

13

双極モーメントは

$$\mathbf{d} \equiv \sum_j \begin{pmatrix} q_j x_j \\ q_j y_j \end{pmatrix} \tag{33}$$

で表せ、四重極モーメントは

$$Q \equiv \begin{pmatrix} \sum_j q_j x_j x_j & \sum_j q_j x_j y_j \\ \sum_j q_j y_j x_j & \sum_j q_j y_j y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j q_j x_j^2 & \sum_j q_j x_j y_j \\ \sum_j q_j x_j y_j & \sum_j q_j y_j^2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

で定義される。ここで q_j は j 番目の粒子の電荷、$\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$ は j 番目の粒子の位置ベクトルで、粒子は二次元平面内にいるものとする。以下の場合について $\mathbf{d}, Q$ を求めよ。

13-(a)

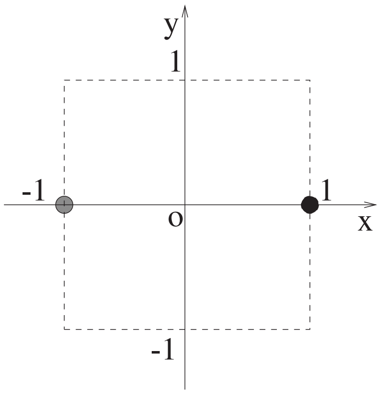

図 2　(a)

13-(a) **解答**

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 0)\,,\ (-q, -1, 0)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q+q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q-q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13-(b)

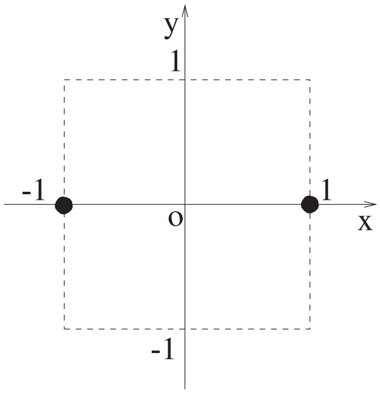

図 3　(b)

13-(b) **解答**

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 0)\,,\ (q, -1, 0)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q-q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q+q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13-(c)

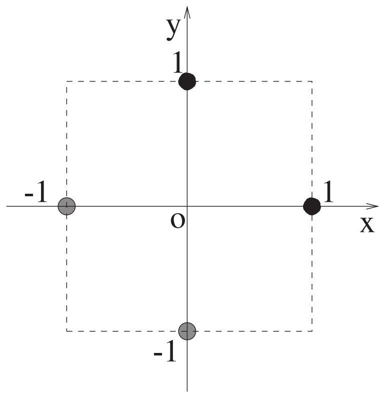

図 4 (c)

13-(c) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 0)\,, (q, 0, 1)\,, (-q, -1, 0)\,, (-q, 0, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q+q \\ q+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 2q \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q-q & 0 \\ 0 & q-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13-(d)

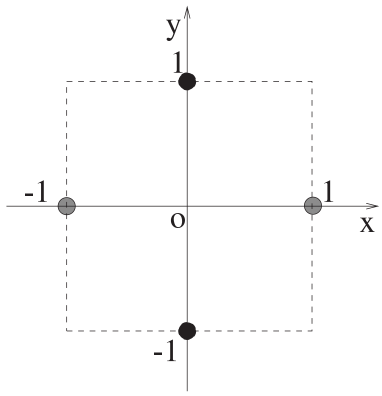

図 5 (d)

13-(d) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (-q, 1, 0)\,, (q, 0, 1)\,, (-q, -1, 0)\,, (q, 0, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -q+q \\ q-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -q-q & 0 \\ 0 & q+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q & 0 \\ 0 & 2q \end{pmatrix}$$

13-(e)

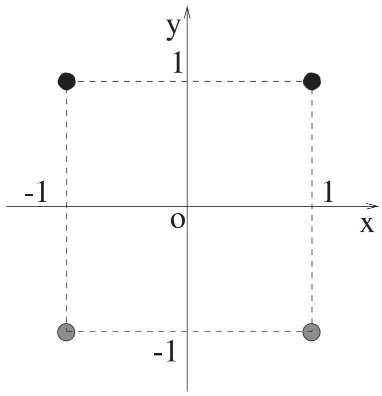

図 6　(e)

13-(e) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 1)\,,\ (q, -1, 1)\,,\ (-q, -1, -1)\,,\ (-q, 1, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q - q + q - q \\ q + q + q + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4q \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q + q - q - q & q - q - q + q \\ q - q - q + q & q + q - q - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13-(f)

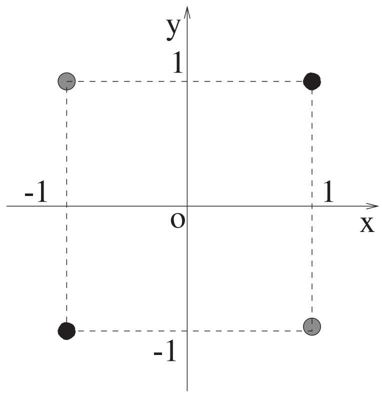

図 7　(f)

13-(f) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 1)\,,\ (-q, -1, 1)\,,\ (q, -1, -1)\,,\ (-q, 1, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q + q - q - q \\ q - q - q + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q - q + q - q & q + q + q + q \\ q + q + q + q & q - q + q - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4q \\ 4q & 0 \end{pmatrix}$$

13-(g)

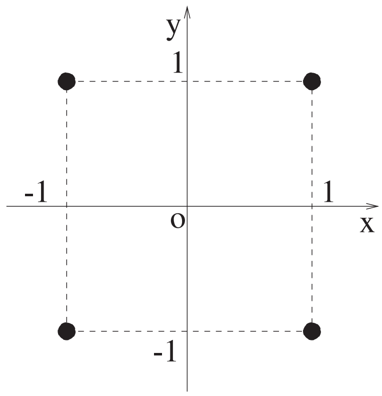

図 8　(g)

13-(g) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 1)\,,\ (q, -1, 1)\,,\ (q, -1, -1)\,,\ (q, 1, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q - q - q + q \\ q + q - q - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q + q + q + q & q - q + q - q \\ q - q + q - q & q + q + q + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4q & 0 \\ 0 & 4q \end{pmatrix}$$

13-(h)

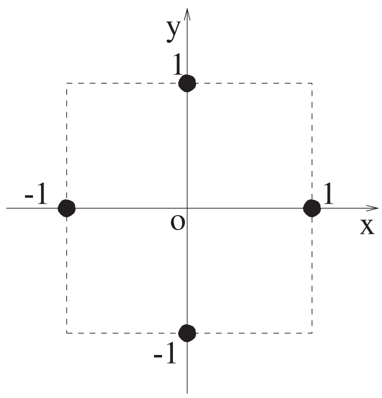

図 9　(h)

13-(h) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 0)\,,\ (q, 0, 1)\,,\ (q, -1, 0)\,,\ (q, 0, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q - q \\ q - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q + q & 0 \\ 0 & q + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q & 0 \\ 0 & 2q \end{pmatrix}$$

13-(i)

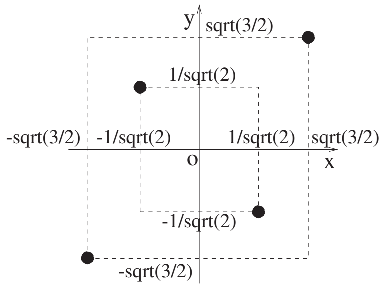

図 10　(i)

13-(i) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = \left(q,\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(q, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(q, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(q,\ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q\sqrt{\frac{3}{2}} - q\frac{1}{\sqrt{2}} - q\sqrt{\frac{3}{2}} + q\frac{1}{\sqrt{2}} \\ q\sqrt{\frac{3}{2}} + q\frac{1}{\sqrt{2}} - q\sqrt{\frac{3}{2}} - q\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q\frac{3}{2} + q\frac{1}{2} + q\frac{3}{2} + q\frac{1}{2} & q\frac{3}{2} - q\frac{1}{2} + q\frac{3}{2} - q\frac{1}{2} \\ q\frac{3}{2} - q\frac{1}{2} + q\frac{3}{2} - q\frac{1}{2} & q\frac{3}{2} + q\frac{1}{2} + q\frac{3}{2} + q\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4q & 2q \\ 2q & 4q \end{pmatrix}$$

13-(j)

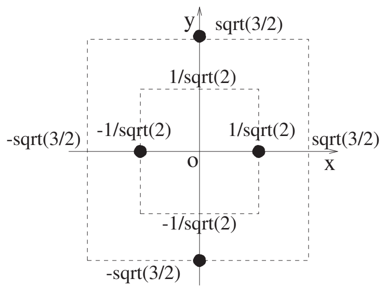

図 11　(j)

13-(j) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = \left(q, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(q, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(q, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(q, 0, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q\frac{1}{\sqrt{2}} - q\frac{1}{\sqrt{2}} \\ q\sqrt{\frac{3}{2}} - q\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & q\frac{3}{2} + q\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 3q \end{pmatrix}$$