天体物理学弐 課題番号伍番
Liénard's formula and Larmor's formula
解答例
[20060518 出題]

Yuji Chinone

1

電荷 q の粒子の加速運動によって作られる輻射場は以下のように書けた。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c}\left[\frac{\mathbf{g}}{R}\right]_{\mathrm{ret}} \tag{1}$$

$$t' = t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} \tag{2}$$

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t') \tag{3}$$

$$R(t') = \left|\mathbf{R}(t')\right| \tag{4}$$

$$\mathbf{g}(t') \equiv \frac{\mathbf{n}(t') \times \left\{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\}}{\kappa^3(t')}; \quad \left[\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t'}, \dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t'}\right] \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \frac{\mathbf{v}(t')}{c}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t') = -\dot{\mathbf{R}}(t') \tag{6}$$

$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \tag{7}$$

$$\kappa(t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \tag{8}$$

ここで $\mathbf{r}$ は観測者の位置、$\mathbf{r}_0(t')$ は遅延時間 t' での加速荷電粒子の位置である。以下、観測者かは粒子から十分遠方にいて、その距離 R と単位ベクトル $\mathbf{n}$ の粒子の運動による変化を無視できるとする。

観測者が受信する粒子からの放射の単位立体角当たりの強度は、

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left[R^2 E^2\right] \tag{9}$$

である。これを received power と呼び、$dP_r/d\Omega$ と書く。

1-1

観測者が dt 間に受信した放射は、粒子が dt' 間に放射した電磁波である。

$$dt = \kappa(t') dt' \tag{10}$$

であることを示せ。

1-1 解答

定義より、

$$R^2(t') = \mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{R}(t') \longrightarrow 2\dot{R}(t')R(t') = 2\dot{\mathbf{R}}(t')\cdot\mathbf{R}(t'); \quad \therefore\ \dot{R}(t') = \mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{R}}(t') = -c\mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t')$$

であるから、Eq.(2) を t' で微分すると、

$$1 = \frac{dt}{dt'} - \frac{\dot{R}(t')}{c} = \frac{dt}{dt'} + \mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t'); \quad \therefore\ \frac{dt}{dt'} = 1 - \mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t') = \kappa(t')$$

であるから、Eq.(10) が示された。

1-2

粒子が単位時間当たりに放射した電磁波の強度を emitted power といい、$dP_e/d\Omega$ と書く。Emitted power が

$$\frac{dP_r}{d\Omega} \equiv \frac{dW}{dt'd\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left[\kappa R^2 E^2\right] \tag{11}$$

で書けることを示せ。

1-2 解答

Emitted power の定義より Eq.(11) との比は $\kappa(t')$ であるから、

$$\frac{dW}{dt'd\Omega} = \kappa(t')\frac{dW}{dtd\Omega} = \kappa(t')\cdot\left(\frac{c}{4\pi}R^2(t')E^2(t')\right) = \frac{c}{4\pi}\left[\kappa R^2 E^2\right]$$

となるので、確かに Eq.(9) が成り立つ。

2

1 から total emitted power は以下のように書ける。

$$P_e = \frac{q^2}{4\pi c}\int d\Omega\,\left[\kappa g^2\right] \tag{12}$$

以下の手順に従って立体角積分を実行する。$\mathbf{v}$ の方向に z 軸をとり、$\dot{\mathbf{v}}$ を xz 平面内にとって $\mathbf{v}$ と成す角を i とする。また $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ とする。座標系に関しては次の図を参照。

2-a

以下の関係式を示せ。

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta, \quad \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\,(\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\cos i)\,, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\beta} = \dot{\beta}\beta\cos i \tag{13}$$

$$\kappa g^2 = \dot{\beta}^2\left\{\frac{1}{\kappa^3} + \frac{2}{\kappa^4}\beta\left(\cos i\,\sin i\,\sin\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos\theta\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\kappa^5}\gamma^{-2}\left(\sin^2 i\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi + 2\sin i\,\cos i\,\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos^2\theta\right\}\right) \tag{14}$$

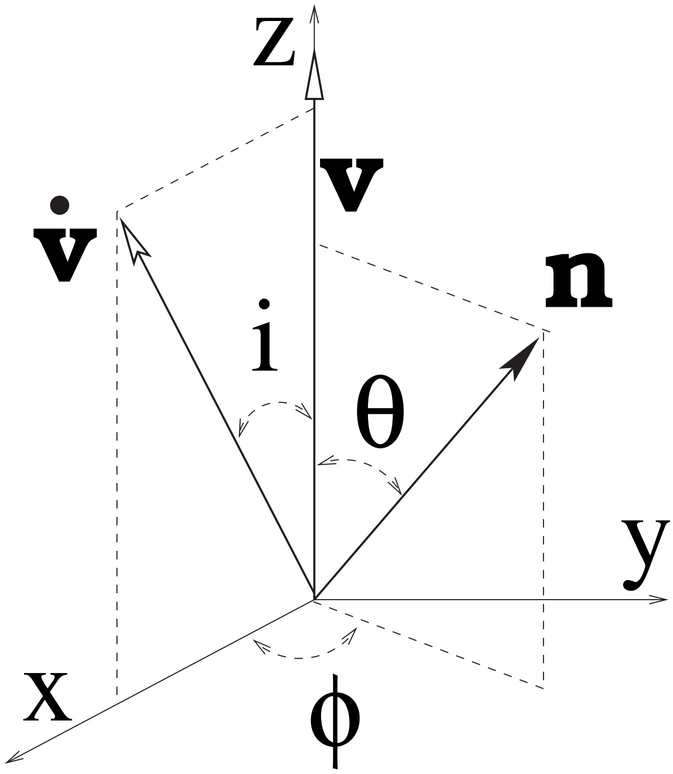

図 1　$\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{n}$

$$I_{n+1} \equiv \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{(1+\beta)^n - (1-\beta)^n}{n\beta\,(1-\beta^2)^n} \tag{15}$$

$$J_{n+1} \equiv \int_{-1}^{+1} \frac{\mu d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n}\frac{dI_n}{d\beta} \tag{16}$$

$$K_{n+1} \equiv \int_{-1}^{+1} \frac{\mu^2 d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n}\frac{dJ_n}{d\beta} \tag{17}$$

2-a 解答

図より、

$$\boldsymbol{\beta} = \beta\,(\,0,\ 0,\ 1\,), \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\,(\,\sin i,\ 0,\ \cos i)$$

であり、又 $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ であるから、

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta$$
$$\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\,(\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\,\cos i)$$
$$\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\beta} = \dot{\beta}\beta\cos i$$

を得る。この関係より

$$
\begin{aligned}
\kappa g^2 &= \kappa \frac{1}{\kappa^6}\left[\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]^2 = \frac{1}{\kappa^5}\left\{\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) - (1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}^2 \\
&= \frac{1}{\kappa^5}\left[\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2\left(1+\beta^2-2\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) + (1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - 2\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\kappa^5}\Big[\dot{\beta}^2\left(\sin^2\theta\,\cos^2\phi\,\sin^2 i + \cos^2\theta\cos^2 i + 2\sin\theta\,\cos\theta\,\sin i\,\cos i\,\cos\phi\right)\left(\beta^2-1+2\kappa\right) \\
&\qquad + \kappa^2\dot{\beta}^2 - 2\dot{\beta}\left(\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\,\cos i\right)\kappa\dot{\beta}\left(\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\,\cos i - \beta\cos i\right)\Big] \\
&= \frac{\dot{\beta}^2}{\kappa^3} + \frac{2\dot{\beta}^2\beta}{\kappa^4}\left(\cos i\,\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\,\cos^2 i\right) \\
&\qquad + \dot{\beta}^2\frac{\left(\beta^2-1\right)}{\kappa^5}\left(\sin^2\theta\,\sin^2 i\,\cos^2\phi + 2\sin i\,\cos i\,\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos^2\theta\right) \\
&= \dot{\beta}^2\Big\{\frac{1}{\kappa^3} + \frac{2}{\kappa^4}\beta\left(\cos i\,\sin i\,\sin\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos\theta\right) \\
&\qquad - \frac{1}{\kappa^5}\gamma^{-2}\left(\sin^2 i\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi + 2\sin i\,\cos i\,\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos^2\theta\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

を得る。次に Eq.(15),(16),(17) は

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}}; \qquad 1-\beta\mu = x,\ -\beta d\mu = dx,\ \begin{array}{c|ccc} \mu & -1 & \to & +1 \\ \hline x & 1+\beta\mu & \to & 1-\beta\mu \end{array} \\
&= -\int_{1+\beta}^{1-\beta}\frac{x^{-(n+1)}}{\beta}dx = \frac{1}{\beta}\left[\frac{x^{-n}}{n}\right]_{1+\beta}^{1-\beta} = \frac{1}{\beta n}\left[\frac{1}{(1-\beta)^n} - \frac{1}{(1+\beta)^n}\right] = \frac{(1+\beta)^n-(1-\beta)^n}{n\beta\,(1-\beta^2)^n} \\
\frac{dI_n}{d\beta} &= \frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^n} = \int_{-1}^{+1}\frac{(-n)(-\mu)\,d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \int_{-1}^{+1}\frac{n\mu\,d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}}, \quad \therefore\ J_{n+1} = \frac{1}{n}\frac{dI_n}{d\beta} \\
\frac{dJ_n}{d\beta} &= \frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1}\frac{\mu\,d\mu}{(1-\beta\mu)^n} = \int_{-1}^{+1}\frac{(-n)(-\mu)\mu\,d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}}, = \int_{-1}^{+1}\frac{n\mu^2\,d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}}, \quad \therefore\ K_{n+1} = \frac{1}{n}\frac{dJ_n}{d\beta}
\end{aligned}
$$

となるので、諸関係式が導けた。

2-b

以上の結果を使って以下の式を示せ。

$$
\begin{aligned}
\int\left[\kappa g^2\right]d\Omega &= 2\pi\left[\dot{\beta}^2\left\{I_3 + 2\beta J_4 - \gamma^{-2}K_5 - \left(2\beta J_4 + \frac{1}{2\gamma^2}\left\{I_5 - 3K_5\right\}\right)\sin^2 i\right\}\right] \\
&= \frac{8\pi}{3c^2}\left[\dot{v}^2\gamma^6\left(1-\beta^2\sin^2 i\right)\right] \qquad (18)
\end{aligned}
$$

2-b **解答**

立体角積分の中で

$$
\int\cos\phi\,d\Omega = \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi = \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\Big[\sin\phi\Big]_0^{2\pi} = 0
$$

であるから、$\cos\phi$ を含む項は零である[*1]。また γ^{-2}/κ^5 で括ってある項の中身で $\sin^2 i\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi + \cos^2 i\,\cos^2\theta$ の箇所は

$$
\sin^2 i\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi + \cos^2 i\,\cos^2\theta = \sin^2 i\left[\cos^2\phi - \left(1+\cos^2\phi\right)\cos^2\theta\right] + \cos^2\theta
$$

[*1] もちろん $\cos^2\phi$ の項は違う。

と書くことが出来る。これらを用いると上記立体角積分は

$$\int \left[\kappa g^2\right] d\Omega = \dot{\beta}^2 \Bigg[\int d\Omega \frac{1}{\kappa^3} + 2\beta(1-\sin^2 i) \int \frac{\cos\theta}{\kappa^4} d\Omega - \sin^2 i\, \gamma^{-2} \int \frac{\cos^2\phi - \left(1+\cos^2\phi\right)\cos^2\theta}{\kappa^5} d\Omega$$

$$- \gamma^{-2} \int \frac{\cos^2\theta}{\kappa^5} d\Omega + 2 \underbrace{\int \cos i \sin i \sin\theta \cos\phi \left(\frac{\beta}{\kappa^4} - \frac{\cos\theta}{\gamma^2 \kappa^5}\right) d\Omega}_{=0} \Bigg]$$

$$= \dot{\beta}^2 \left[2\pi I_3 + 4\pi\beta(1-\sin^2 i) J_4 - \sin^2 i\, \gamma^{-2} \left(\pi I_5 - 3\pi K_5\right)\right]$$

$$= 2\pi \left[\dot{\beta}^2 \left(I_3 + 2\beta J_4 - \gamma^{-2} K_5 - \left(2\beta J_4 + \frac{1}{2\gamma^2}\left(I_5 - 3K_5\right)\right)\sin^2 i\right)\right]$$

となる。これを具値的な形を書き下すと、

$$I_3 = \frac{(1+\beta)^2 - (1-\beta)^2}{2\beta\left(1-\beta^2\right)^2} = \frac{2}{\left(1-\beta^2\right)^2} = 2\gamma^4$$

$$I_5 = \frac{(1+\beta)^4 - (1-\beta)^4}{4\beta\left(1-\beta^2\right)^4} = 2\frac{1+\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^4} = 2(1+\beta^2)\gamma^8$$

$$J_4 = \frac{1}{3}\frac{dI_3}{d\beta} = \frac{1}{3}\left[2(-2)(-2\beta)\left(1-\beta^2\right)^{-3}\right] = \frac{8}{3}\frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)^3} = \frac{8}{3}\beta\gamma^6$$

$$K_5 = \frac{1}{4}\frac{dJ_4}{d\beta} = \frac{2}{3}\frac{\left(1-\beta^2\right)^3 - \beta(3)(-2\beta)\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(1-\beta^2\right)^6} = \frac{2}{3}\frac{5\beta^2+1}{\left(1-\beta^2\right)^4} = \frac{2}{3}(5\beta^2+1)\gamma^8$$

であるから、

$$I_3 + 2\beta J_4 - \gamma^{-2} K_5 = 2\gamma^4 + 2\beta\frac{8}{3}\beta\gamma^6 - \gamma^{-2}\frac{2}{3}\left(5\beta^2+1\right)\gamma^8 = \gamma^6\left(\frac{2}{\gamma^2} + \frac{16}{3}\beta^2 - \frac{10}{3}\beta^2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \gamma^6 \frac{4}{3}$$

$$2\beta J_4 + \frac{\gamma^{-2}}{2} I_5 - \frac{3}{2}\gamma^{-2} K_5 = 2\beta\frac{8}{3}\beta\gamma^6 + \frac{\gamma^{-2}}{2} 2\left(1+\beta^2\right)\gamma^8 - \frac{3}{2}\gamma^{-2}\frac{2}{3}\left(5\beta^2+1\right)\gamma^8 = \gamma^6\left[\frac{16}{3}\beta^2 + \left(1+\beta^2\right) - 5\beta^2 - 1\right]$$

$$= \gamma^6 \frac{4}{3}\beta^2$$

となるので、これを代入し整理すると Eq.(18) を得る。

2-c

(b) の結果から以下の式を示せ。

$$P_e = \frac{2q^2}{3c^3}\left[\gamma^6\left(\dot{v}^2 - |\dot{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\beta}|^2\right)\right] \tag{19}$$

2-c 解答

Eq.(12),(18) 及び

$$\dot{v}^2\left(1 - \beta^2 \sin^2 i\right) = \dot{v}^2 - (\dot{v}\beta\sin i)^2 = \dot{v}^2 - |\dot{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\beta}|^2$$

から Eq.(19) を得る。

2-d

(c) の結果から、次の荷電粒子の運動が非相対論的な場合の放射強度の公式を求めよ。

$$P = \frac{2q^2\dot{v}^2}{3c^3} \tag{20}$$

2-d **解答**

$\beta \ll 1$ とし、β の $O(\beta^4)$ まで考えると、

$$\gamma^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^6 = \left(1-\beta^2\right)^{-3} = 1 + 3\beta^2 + O(\beta^4), \quad \frac{\dot{v}^2}{c^2} = O(\beta^2)$$

であるから、これより Eq.(19) を評価すると、

$$\begin{aligned}\frac{2q^2}{3c^3}\left[\gamma^6\left(\dot{v}^2 - |\dot{\mathbf{v}}\times\boldsymbol{\beta}|^2\right)\right] &= \frac{2q^2}{3c^3}\dot{v}^2\left(1+3\beta^2+O(\beta^4)\right)\left(1-\beta^2\sin^2 i\right)\\ &= \frac{2q^2\dot{v}^2}{3c^3} + O(\beta^4)\end{aligned}$$

となるので、Eq.(20) を得る。