

天体物理学式 課題番号六番

解答例

[20060525 出題]

Yuji Chinone

1

式本の平行に置かれた dipole antenna からの放射を考える。dipole antenna を antenna に平行な dipole moment $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ で置き換える。 $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ は振幅がそれぞれ d_1, d_2 で in phase な角振動数 ω で振動している。antenna の向きを z 軸とし、二つの antenna の中心の位置がそれぞれ $(x,y) = (0, -l/2), (0, +l/2)$ であるとする。

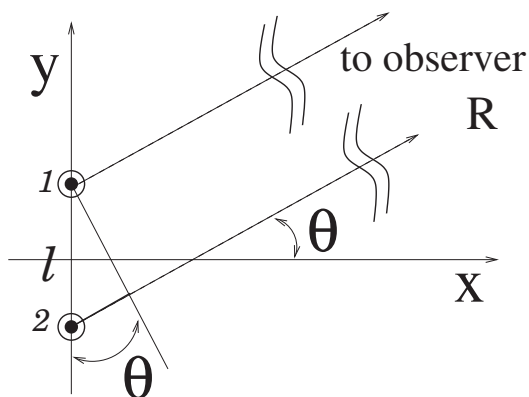


図1 式本の dipole antenna と観測者の位置関係

1-a)

xy 平面内で antenna から十分離れた点で antenna からの電磁波を観測したとする。観測者の位置ベクトルと x 軸との成す角を θ とする。この点での The power per solid angle が

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} (d_1^2 + 2d_1 d_2 \cos \delta + d_2^2); \quad \text{ここで、} \delta \equiv \frac{\omega l \sin \theta}{c}, \quad (1)$$

であることを示せ。但しここでは時間平均をとっている。

1-a) 解答

dipole antenna を antenna に平行な dipole moment $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ で置き換えているので、

$$\mathbf{d}_1(t_1) = d_1 \mathbf{e}_z \cos(i\omega t_1)$$

$$\mathbf{d}_2(t_2) = d_2 \mathbf{e}_z \cos(i\omega t_2)$$

と書くことができる。ここで \mathbf{e}_z は単位 z ベクトルである。

観測者と antenna 間は十分距離が大きく、これを R とする。観測者の時刻 t と antenna の時刻 t' の対応は、電磁波が有限の時間を経てやってくることから、

$$\begin{aligned} \text{antenna 1: } t' &= t - \frac{R}{c} \\ \text{antenna 2: } t' &= t - \frac{R + l \sin \theta}{c} \end{aligned}$$

となり、生じる位相差 δ は

$$\delta = \frac{\omega l \sin \theta}{c} \quad (2)$$

である。以後計算の簡略化のために 1,2 共通の θ に依らない位相 $\omega R/c$ は省略する。

前回までのレポートで導出した様に、非相対論的な輻射場の大きさは

$$E_{\text{rad}}(t) = \left[\frac{q\ddot{\mathbf{v}}}{Rc^2} \sin \Theta \right]_{\text{ret}} \quad (3)$$

と書ける。ここで Θ は $\dot{\mathbf{v}}$ と観測者の位置ベクトルが成す角である。今の場合 dipole moment は粒子の位置座標 $\mathbf{r}_0(t)$ を用いて $\mathbf{d}(t) = q\mathbf{r}_0(t)$ と書けるので、これを用いると Eq.(3) は

$$E_{\text{rad}}(t) = \left[\ddot{d} \frac{\sin \Theta}{c^2 R} \right]_{\text{ret}} = - \left[\omega^2 d \frac{\sin \Theta}{c^2 R} \right]_{\text{ret}}$$

となる。式本の z 軸正の向きの dipole antenna からの輻射場を xy 平面内で観測するとき $\Theta = \pi/2$ となるので、先に計算した位相差に注意すると、1,2 の重ね合わせで

$$E_{\text{rad}}(t) = \left[\frac{\ddot{d}_1 + \ddot{d}_2}{Rc^2} \right]_{\text{ret}} = - \frac{\omega^2}{Rc^2} \{d_1 \cos(\omega t) + d_2 \cos(\omega t - \delta)\} = - \frac{\omega^2}{Rc^2} \{(d_1 + d_2 \cos \delta) \cos \omega t + d_2 \sin \delta \sin \omega t\} \quad (4)$$

を得る。この二乗時間平均は

$$\langle E_{\text{rad}}^2 \rangle = \frac{\omega^4}{R^2 c^4} \left\langle d_1^2 \cos^2 \omega t + d_2^2 \left\{ \cos^2 \delta \cos^2 \omega t + \sin^2 \delta \sin^2 \omega t + \cos \delta \sin \delta \sin(2\omega t) \right\} + 2d_1 d_2 \left\{ \cos \delta \cos^2 \omega t + \frac{\sin \delta \sin(2\omega t)}{2} \right\} \right\rangle$$

と書ける。実際に時間平均を取ると、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega T} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega T} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[-\frac{\cos(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\omega T} - \frac{\cos(2\omega T)}{2\omega T} \right\} = 0$$

であるから、

$$\langle E_{\text{rad}}^2 \rangle = \frac{\omega^4}{2R^2 c^4} (d_1^2 + 2d_1 d_2 \cos \delta + d_2^2)$$

を得る。以上より The power per solid angle = The recieved power は、

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \langle R^2 E_{\text{rad}}^2 \rangle = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} (d_1^2 + 2d_1 d_2 \cos \delta + d_2^2)$$

となり、Eq.(1) を得る。

1-b)

$l \ll \lambda$ の時、振幅が $d_1 + d_2$ の一つの dipole moment からの放射と同等になることを示せ。

1-b) 解答

$l \ll \lambda$ であるから、

$$\delta = \frac{\omega l \sin \theta}{c} = 2\pi \sin \theta \frac{l}{\lambda} \sim 0$$

となり、

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} (d_1^2 + 2d_1 d_2 + d_2^2) = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} (d_1 + d_2)^2$$

と書けるので、振幅が $d_1 + d_2$ の一つの dipole moment からの放射と同等である。

2

1 を $N + 1$ 個の平行な dipole antenna が間隔 l で並んだ場合に拡張する。各 dipole antenna を、振幅がそれぞれ d で等しく、角振動数 ω で in phase で振動する dipole moment で置き換える。antenna の中心を通り antenna に垂直な面を xy 平面とする。antenna の中心は、 y 軸上に並んでいるとし、 xy 平面内で x 軸と角度 θ 成す方向にいる十分遠方にいる観測者を考える。

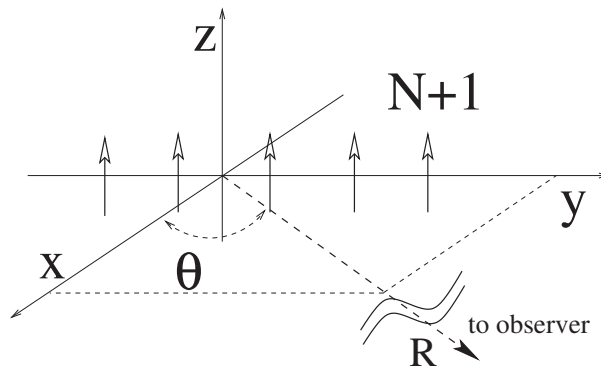


図2 $N + 1$ 本の dipole antenna と観測者の位置関係

2-a)

観測者は全ての antenna からの電場を重ね合わせた電場を感じる。観測される電場の振幅を求めよ。ここでは電場を複素数で表して足し合わせ、最後に実部をとるようにすると、等比級数列の和の公式が使って計算が楽である。結果は $\delta = \omega l \sin \theta / c$ を用いて表せ。

2-a) 解答

1 同様に考えると

$$E_{\text{rad}}(t) = \frac{1}{Rc^2} \sum_{i=1}^{N+1} \ddot{d}_i(t) = -\frac{\omega^2}{Rc^2} \sum_{i=1}^{N+1} d_i(t)$$

と書ける。ここで $d_i(t)$ は、

$$d_1(t) = d \exp(i\omega t), d_2(t) = d \exp[i(\omega t - \delta)], \dots, d_i(t) = d \exp(i\omega t) \exp[-i(n-1)\delta]$$

である。これより $\delta = 0 \rightarrow \theta = 0, \pm\pi$ の時、

$$\sum_{i=1}^{N+1} d_i = (N+1)d \exp(i\omega t)$$

となり、 $\delta \neq 0 \rightarrow \theta \neq 0, \pm\pi$ の時

$$\sum_{i=1}^{N+1} d_i = d \exp(i\omega t) \sum_{i=1}^{N+1} \exp(i\delta) = d \frac{1 - \exp[-i(N+1)\delta]}{1 - \exp(-i\delta)} \exp(i\omega t)$$

となるが、この時

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - \exp[-i(N+1)\delta]}{1 - \exp(-i\delta)} \right|^2 &= \frac{1 - \exp[+i(N+1)\delta]}{1 - \exp(+i\delta)} \frac{1 - \exp[-i(N+1)\delta]}{1 - \exp(-i\delta)} = \frac{1 - \cos[(N+1)\delta]}{1 - \cos\delta} = \frac{\sin^2\left(\frac{(N+1)\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \\ &= (N+1)^2 \left\{ \frac{\text{Sinc}\left(\frac{(N+1)\delta}{2}\right)}{\text{Sinc}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right\}^2 \end{aligned}$$

である。以上より振幅は

$$\sqrt{\langle E_{\text{rad}}^2 \rangle} = \frac{\omega^2 d(N+1)}{\sqrt{2} R c^2} \frac{\text{Sinc}\left(\frac{(N+1)\delta}{2}\right)}{\text{Sinc}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (5)$$

となる。

2-b)

$\theta = 0$ での電場の大きさ、及び The power per solid angle を計算せよ。

2-b) 解答

$$\sqrt{\langle E_{\text{rad}}^2 \rangle} = \frac{\omega^2 d(N+1)}{\sqrt{2} R c^2} \quad (6)$$

$$\therefore \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \langle R^2 E_{\text{rad}}^2 \rangle = \frac{\omega^4 d^2 (N+1)^2}{8\pi c^3} \quad (7)$$

2-c)

θ を増やすと δ が増加し電場の振幅が変化する。 θ を $-\pi$ から $+\pi$ まで変化させた時の振幅の変化の様子を $l < \lambda$ の時、 $l > \lambda$ の時の二つの場合に分けて図示せよ。

2-c) 解答

$-\pi \leq \theta \leq +\pi$ で成り立つ The power per solid angle の式は

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \langle R^2 E_{\text{rad}}^2 \rangle = \frac{\omega^4 d^2 (N+1)^2}{8\pi c^3} \left(\frac{\text{Sinc}\left(\frac{(N+1)\delta}{2}\right)}{\text{Sinc}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2 \quad (8)$$

であるので、今、

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\omega l \sin \theta}{2c} = \frac{l}{\lambda} \pi \sin \theta = x\pi \sin \theta; \quad x = \frac{l}{\lambda}$$

として、この関数の振る舞いを見るために次の関数を定義する。

$$y(\theta) = \left(\frac{\text{Sinc}[(N+1)x\pi \sin \theta]}{\text{Sinc}[x\pi \sin \theta]} \right)^2 \quad (9)$$

$l < \lambda$ の時、 $x < 1$ であるから Eq.(9) 分母の sinc 関数の引数は $[-\pi : \pi]$ の範囲しかとれないので、極大になるのは分子が極大の時であり、

$$\{(N+1)x\pi \sin \theta\} = 0 \implies \theta = m\pi \quad ; m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

となり、極小値となるのは、分子が零になるときのなので、

$$(N+1)x\pi \sin \theta = m\pi \implies \sin \theta = \frac{m\lambda}{(N+1)l} \leq 1 \quad ; m = 1, 2, \dots \quad (11)$$

となるが、 m は不等式満たす範囲しかとれない。

$l > \lambda$ の時、 $x > 1$ であるから分母に先のような制限はなく、極大になるのは分母が零になるとき、つまり

$$x\pi \sin \theta = m\pi \implies \sin \theta = \frac{m\lambda}{l} \leq 1 \quad ; m = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

となる。このとき m を干渉 (回折) の次数という。極小値となるのは分子が零になるときのなので、

$$(N+1)x\pi \sin \theta = n\pi \implies \sin \theta = \frac{n\lambda}{(N+1)l} \leq 1 \quad ; n = 1, 2, \dots; \text{ただし } \frac{n}{N+1} = m \text{ の時は除く} \quad (13)$$

となる。

具体的に $N+1 = 3$ の場合、どのようなことが起こっているのか簡単な考察を試みる。強度の極小点は、何れかの antenna からの位相のずれが*1、丁度 2π になったときであり、長さにして λ である。この時の様子は図3の様になる。始めの極小点は $2lp = \lambda$ である。 $l < \lambda$ の場合、 p が増えても隣同士の antenna で位相差が 2π 以上ずれることはないので、 $[0 : 2\pi]$ の間で強度がうち消し合い、ピークは減衰することになる。 $l > \lambda$ の場合、 $lp' = \lambda, 2lp'' = 2\lambda, 2lp''' = 2\lambda, \dots$ の様に位相が 2π ずれる点が存在するが、隣同士の場合はうち消さず (今の場合 $lp' = \lambda$ の場合) 減衰の効果が「リセット」され強度が「復活」することになる。

*1 隣り同士は除く。なぜなら隣同士で位相が 2π ずれた場合、それはうち消すのではなく coherent になる。

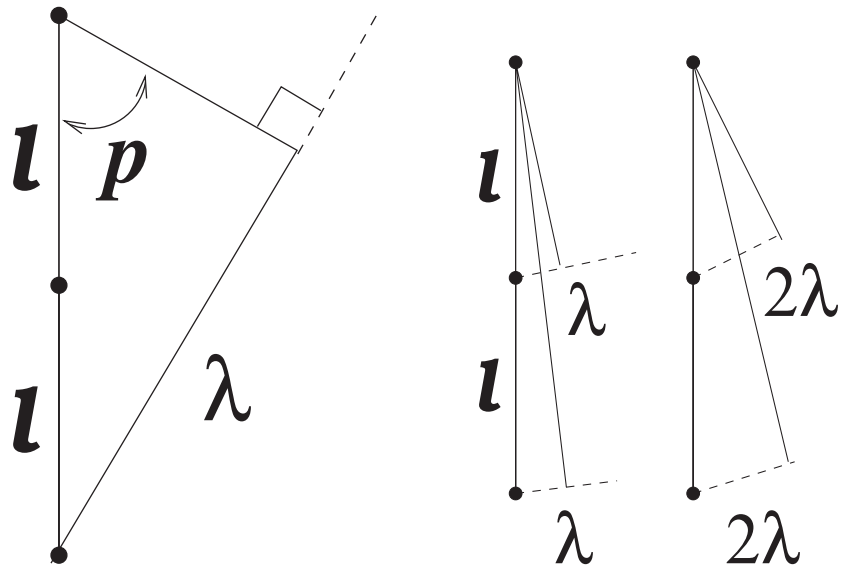


图3 左: $l < \lambda$, 右: $l > \lambda$

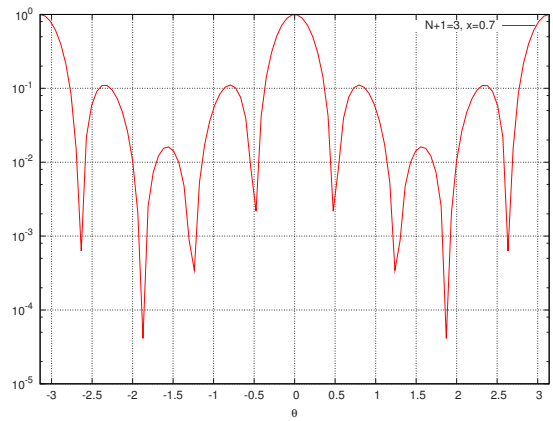
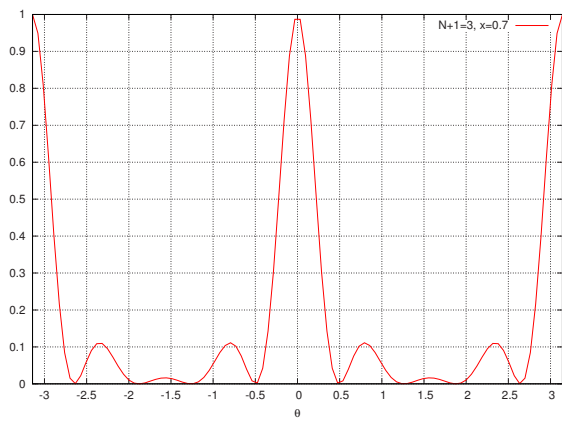


图4 $N+1=3, x=l/\lambda=0.7 < 1$

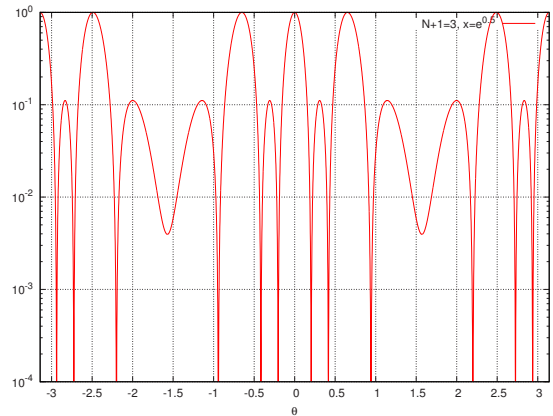
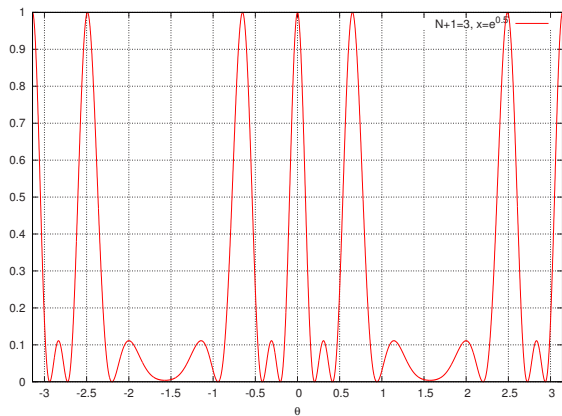


图5 $N+1=3, x=l/\lambda=e^{0.5} > 1$

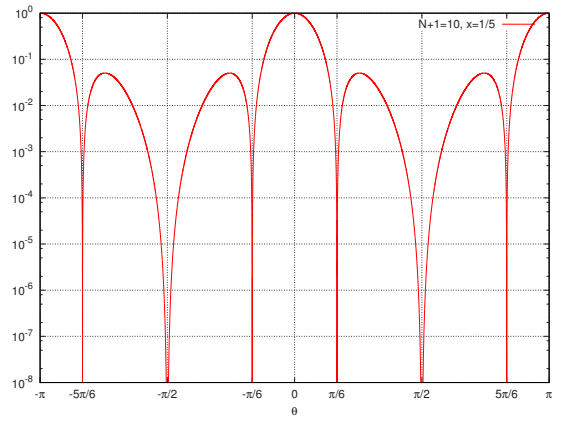
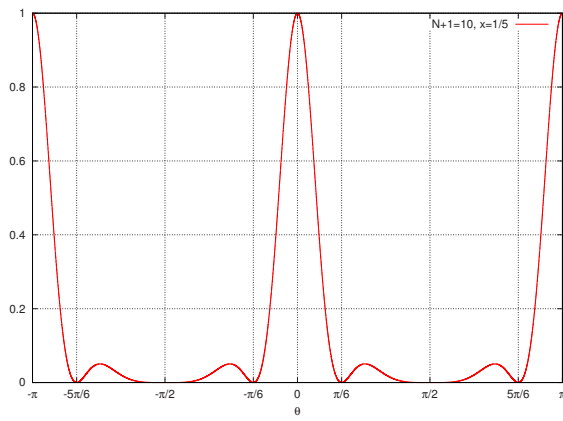


图 6 $N + 1 = 10, x = l/\lambda = 1/5$

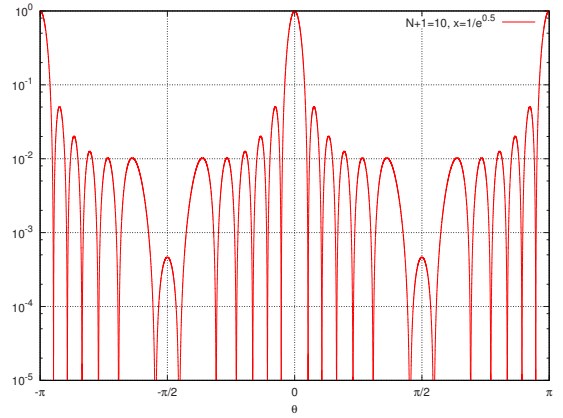
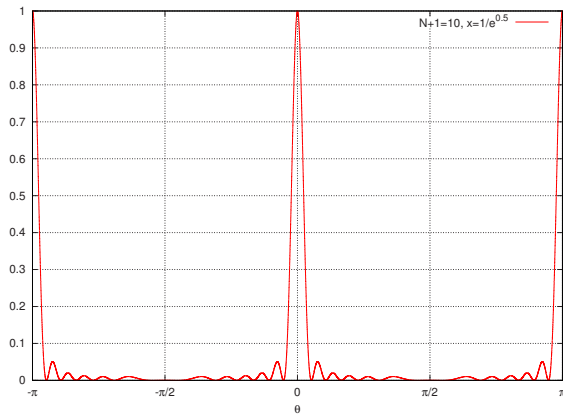


图 7 $N + 1 = 10, x = l/\lambda = 1/e^{0.5}$

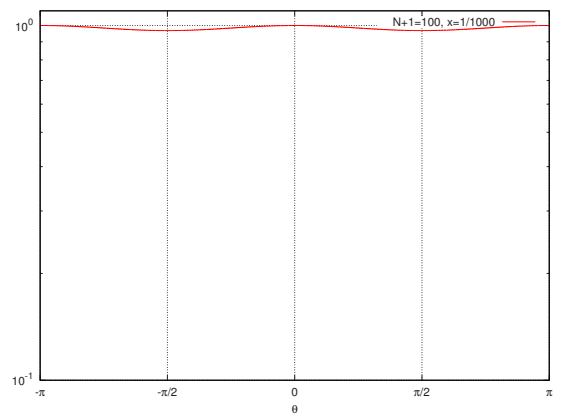
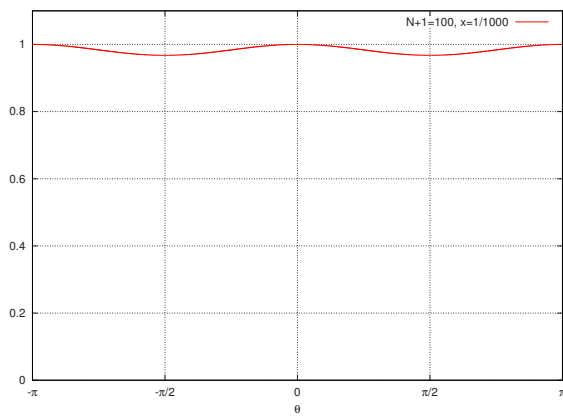


图 8 $N + 1 = 100, x = l/\lambda = 1/1000$

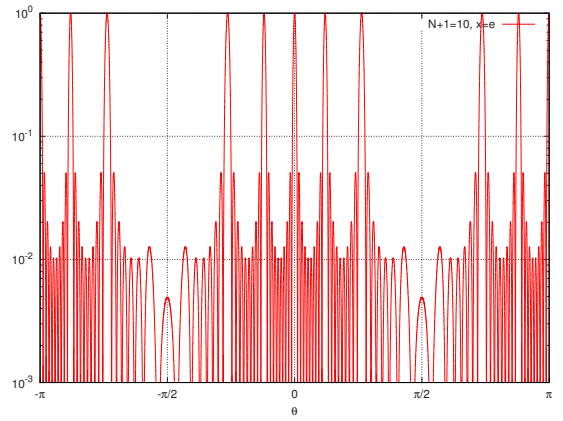
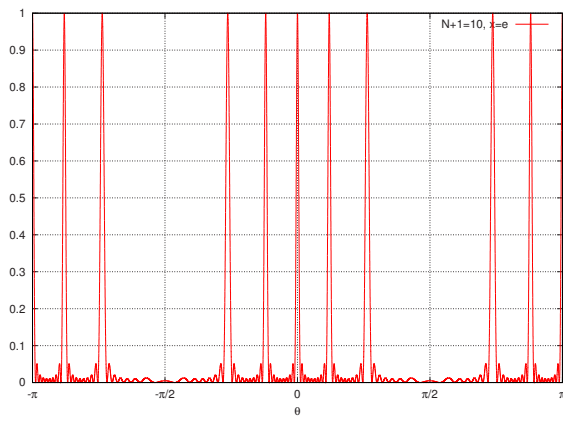


图 9 $N + 1 = 10, x = l/\lambda = e$

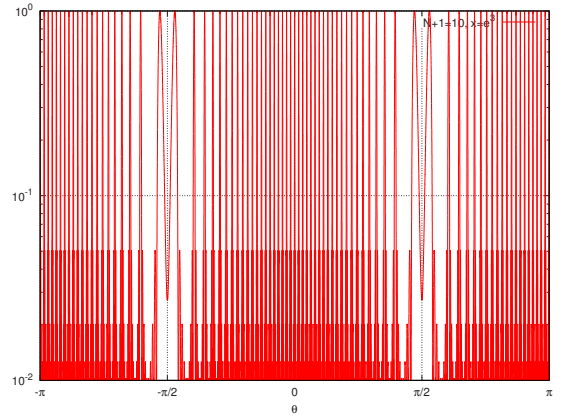
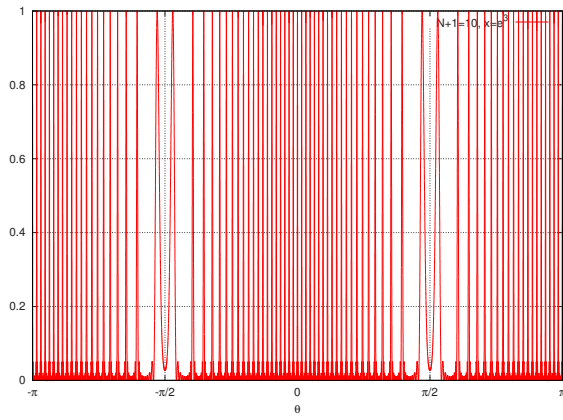


图 10 $N + 1 = 10, x = l/\lambda = e^3$

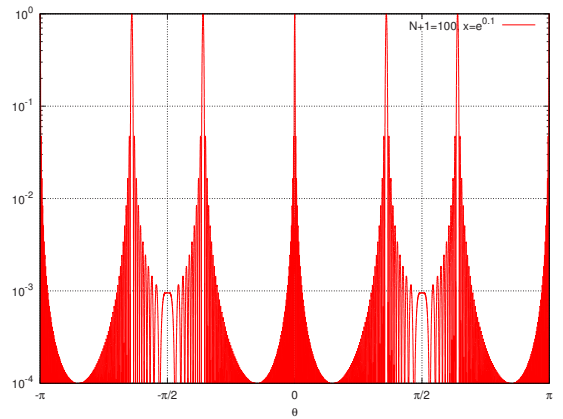
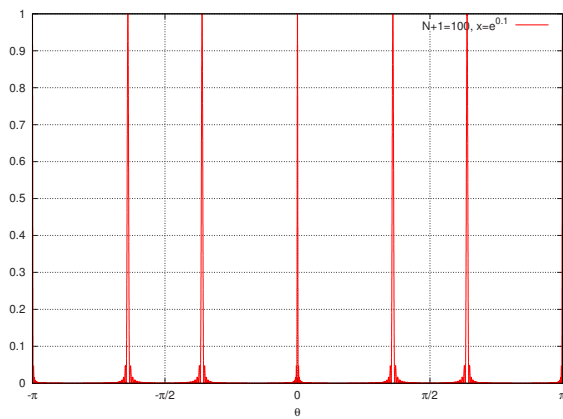


图 11 $N + 1 = 100, x = l/\lambda = e^{0.1}$

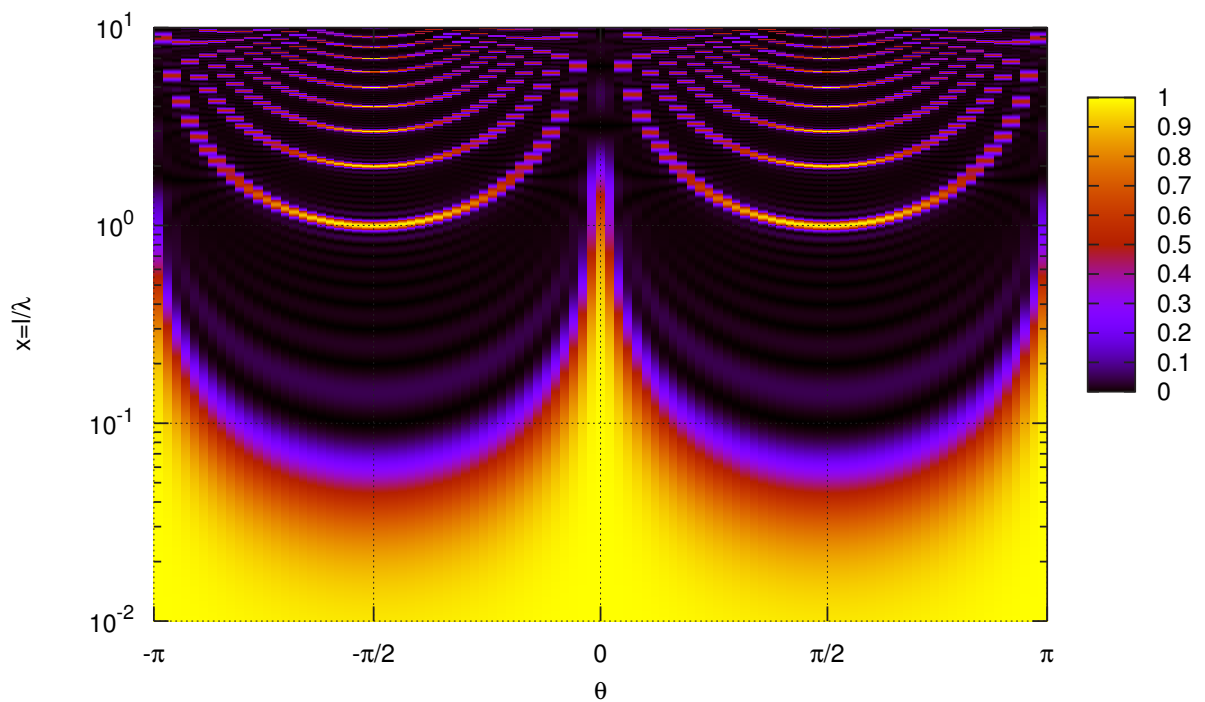


図 12 $y(\theta, x)$: $x < 1$ では単一の sinc 関数として揺るまう。 $x > 1$ では m 個、間隔 λ/l の sinc 関数として揺る舞う。

Normal plot

```
clear
reset
set grid
set samples 1000
set xtics 0.5
set xlabel "{/Symbol q}"
N = 99.0
X = pi
y(x) = ( sin( (N+1)*X*pi*sin(x) ) / sin( X*pi*sin(x) ) ) / (N+1.0)
z(x) = ( sin( (N+1)*X*pi*sin(x) ) / sin( X*pi*sin(x) ) ) ** 2 / (N+1.0) ** 2
set xrange[-pi:pi]
set yrange[-1.1:+1.1]
p y(x),z(x)
```

Log plot

```
clear
reset
set grid
set samples 1000
set xtics 0.5
set xlabel "{/Symbol q}"
N = 99.0
X = 1.0/pi
```

```

z(x) = ( sin( (N+1)*X*pi*sin(x) ) / sin( X*pi*sin(x) ) ) **2 / (N+1.0) **2
set xrange[-pi:pi]
set yrange[1e-8:1e-0]
set format y "10^{%L}"
set logscale y
p z(x)

```

2D counter plot

```

reset
set grid
set isosample 1000
set pm3d map
set xtics ("0", "{/Symbol p}/2*pi/2, "-{/Symbol p}/2"-pi/2, "{/Symbol p}"pi-0.05, "-{/Symbol p}"-pi+0.05)
set xlabel "{/Symbol q}"
set ylabel "x=1/{/Symbol l}"
N = 9.0
Y(x,y) = ( sin( (N+1)*y*pi*sin(x) ) / sin( y*pi*sin(x) ) ) **2 / (N+1) **2
set format y "10^{%L}"
set logscale y
set xrange[-(pi-0.05):(pi-0.05)]
set yrange[1e-2:1e+1]
set zrange[0.0:1.0]
sp Y(x,y) notitle

```

2-d)

antenna の端から端までの距離を $D = Nl$ ($N \gg 1$) とする。最初に振幅が零になる角度が十分小さいとして、その角が

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D} \quad (14)$$

であることを示せ。

2-d) 解答

Eq.(11),(13) より

$$\sin \theta \sim \theta = \frac{\lambda}{(N+1)l} \sim \frac{\lambda}{Nl} = \frac{\lambda}{D}$$

を得る。

2-e)

d) の結果を波の発生場所 (位置) の不確定性さと波数ベクトルの不確定さの間の観測の不確定性原理を用いて導け。

2-e) 解答

http://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/Uncertainty_of_Observation/index.html

3 Rutherford 散乱

http://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/Rutherford_Scattering/index.html

4

電子、陽子、中性子、 π 中間子の静止質量エネルギーを [eV] 単位で答えよ。

4-解答

電子	m_e	0.510998918(44) [MeV]	$9.1093826(16) \times 10^{-31}$ [kg]
陽子	m_p	938.272029(80) [MeV]	$1.67262171(29) \times 10^{-27}$ [kg]
中性子	m_n	939.565360 ± 0.000081 [MeV]	
π 中間子	m_{π^\pm}	139.57018 ± 0.00035 [MeV]	
	m_{π^0}	134.9766 ± 0.0006 [MeV]	

Particle Data Group(<http://pdg.lbl.gov/>) より。以後、各種値はこのものを用いる。

5

古典電子半径、電子コンプトン半径を定義から自分で計算し [cm] 単位で答えよ。

5-解答

CGS-Gauss 単位系、及び自然単位系 (Natural Unit)^{*2}では

$$\text{微細構造係数: } \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.03599911(46)} = 7.297352568(24) \times 10^{-3} \quad (15)$$

$$\hbar c = 197.326968(17) \text{ [MeV fm]} \quad (16)$$

を使う。原子核物理、素粒子物理ではこの二つを合わせた単位系が良く用いられる。以後これを用いることにする。

古典電子半径

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{\frac{e^2}{\hbar c}}{\frac{m_e c}{\hbar c}} = \frac{\alpha \hbar c}{m_e} \\ &= \frac{(7.297352568 \times 10^{-3})(197.326968) \text{ [MeV fm]}}{0.510998918 \text{ [MeV]}} = \frac{(7.297352568 \times 10^{-3})(197.326968)}{0.510998918} \text{ [fm]} \\ &= 2.817940325 \times 10^{-13} \text{ [cm]} \end{aligned}$$

電子コンプトン波長

$$\begin{aligned} \frac{h}{m_e c} &= \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = \frac{2\pi\hbar c}{m_e c^2} = \frac{2\pi\hbar c}{m_e} \\ &= \frac{(2\pi) \cdot (197.326968) \text{ [MeV fm]}}{0.510998918 \text{ [MeV]}} = \frac{(2\pi) \cdot (197.326968)}{0.510998918} \text{ [fm]} \\ &= 2.426310238 \times 10^{-10} \text{ [cm]} \end{aligned}$$

^{*2} $\hbar = k = c = 1$ とする単位系である。