

# 天体物理学式 課題番号七番

## 解答例

[20060601 出題]

Yuji Chinone

### 1 円偏光の電子による散乱

---

左回りに円偏光した角周波数  $\omega_0$  の電磁波が自由な電子（質量  $m_e$ 、電荷  $e$ ）にぶつかった。電磁波は  $z$  軸正の方向に進むとし、電子は  $z = 0$  の平面内にいるとする。又、電子の速度は光速に比べて十分小さいものとする、

1-1

電子の運動方程式を求めよ。電磁波の電場は  $z = 0$  の平面内で

$$E_x(t) = E_0 \cos \omega_0 t \quad (1)$$

$$E_y(t) = E_0 \sin \omega_0 t \quad (2)$$

のように時間変化するとする。又、電子の運動が非相対論的なので電磁波の磁場による力は無視できるとする。

1-1 解答

運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]$$

で与えられるが、今電磁波の磁場による力は無視できるとしているので、運動方程式は次の様書き下せる。

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = qE_x = qE_0 \cos \omega_0 t = -eE_0 \cos \omega_0 t \quad (3)$$

$$m_e \frac{d^2 y}{dt^2} = qE_y = qE_0 \sin \omega_0 t = -eE_0 \sin \omega_0 t \quad (4)$$

$$m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (5)$$

1-2

$z$  軸成す角  $\theta$  の  $\mathbf{n}$  方向に散乱される電磁波の微分散乱断面積を以下のコメントに従って求めよ。簡単のため  $\mathbf{n}$  が  $yz$  平面にあるとせよ。

1-2-(a)

電磁波の入射により電子が 1-1 で導いた運動方程式に従って加速度運動する為、電子が電磁波を放射し  
 する。以下この電子による二次波の放射の性質を調べることで左回りに円偏光した電磁波の電子による散乱  
 の詳細を調べる。x,y,z 方向の単位ベクトルを  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  とする。偏光方向を表す単位ベクトルを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  とする。  
 $\mathbf{a}_1 = -\hat{x}_1$  としたとき、 $\mathbf{a}_2$  を  $\hat{y}, \hat{z}$  を用いて表せ。

1-2-(a) 解答

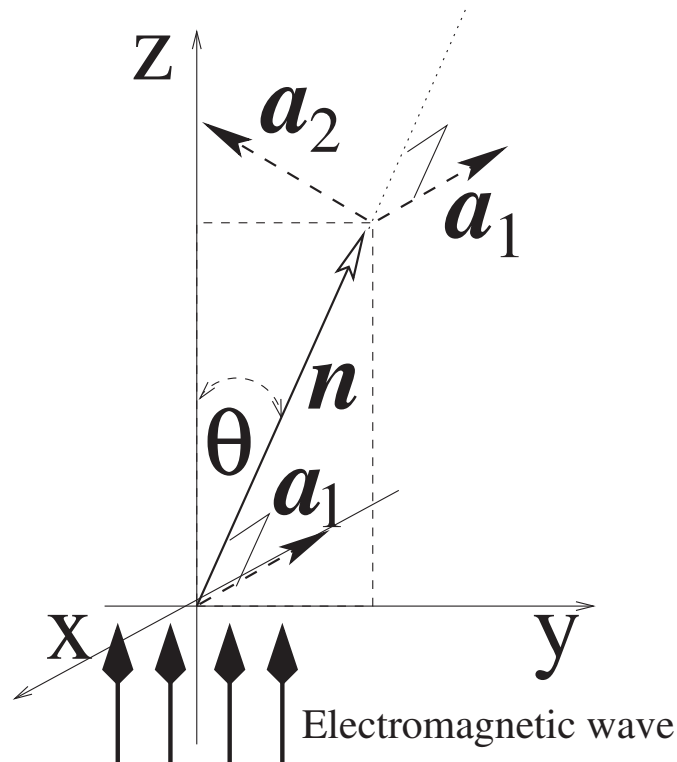


図 1  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  と  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の関係

図より

$$\mathbf{a}_2 = \hat{z} \sin \theta - \hat{y} \cos \theta \quad (6)$$

$$\mathbf{n} = \hat{y} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta \quad (7)$$

となる。このようにとることで  $\mathbf{E}_{\text{rad}}$  を  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  だけで表すことができる。

1-2-(b)

Radiation field の電場

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \left[ \frac{q}{Rc^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}}) \right]_{\text{ret}} \quad (8)$$

を求めよ。基底ベクトルは  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  を用いよ。ここで観測者から電子までの距離  $R$  は、電子の運動による距離の  
 変化に比べて十分大きく、電子の運動による距離の変化は無視できるものとする。

1-2-(b) 解答

$\mathbf{E}_{\text{rad}}$  を求めるのにまず、 $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}})$  を計算する。運動方程式より、

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}}) &= (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{n} - \dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \mathbf{n} - \ddot{\mathbf{r}} = \frac{qE_0}{m_e} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{n} - \frac{qE_0}{m_e} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{eE_0}{m_e} \sin \theta \sin \omega_0 t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \frac{eE_0}{m_e} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{eE_0}{m_e} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \cos^2 \theta \\ -\sin \omega_0 t \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できる。よって

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \left[ \frac{q}{Rc^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}}) \right] = -\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} (\cos \omega_0 t \hat{\mathbf{x}} + \sin \omega_0 t \cos^2 \theta \hat{\mathbf{y}} - \sin \omega_0 t \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{z}})$$

であるが、これを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  を用いて表すと

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} (\mathbf{a}_1 \cos \omega_0 t + \mathbf{a}_2 \sin \omega_0 t \cos \theta) = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \left[ \mathbf{a}_1 \cos \omega_0 t + \mathbf{a}_2 \cos \theta \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (9)$$

となる。

1-2-(c)

$\mathbf{n}$  の方向に放射される電磁波の単位時間、単位立体角当たりのエネルギー (The power per solid angle)

$$\frac{dP}{d\Omega} \quad (10)$$

を求めよ。次にこれの時間平均

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dP}{d\Omega} \quad (11)$$

を求めよ。又、放射される電磁波の角振動数分布はどのようなものになるか。

1-2-(c) 解答

ここで

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cR^2}{4\pi} |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2$$

であるから、前問の結果より

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{4\pi m_e^2 c^3} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t \cos^2 \theta)$$

となる。次にこれを時間平均すると

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{e^4 E_0^2}{4\pi m_e^2 c^3} \frac{1}{T} \int_0^T dt (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t \cos^2 \theta) = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\pi} dt \left( \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2} \cos^2 \theta \right) \\ &= \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \frac{\omega_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{\omega_0} + \frac{\pi}{\omega_0} \cos^2 \theta \right) = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。Eq.(9) より、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の成分として

$$E_1 = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \cos \omega_0 t \quad (13)$$

$$E_2 = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \sin \omega_0 t \cos \theta \quad (14)$$

と書くことができる。これを Fourier 変換すると

$$\begin{aligned}\hat{E}_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(t) e^{i\omega t} dt = \frac{e^2 E_0}{2\pi m_e R c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt = \frac{e^2 E_0}{2 m_e R c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}}{2\pi} + \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2\pi} dt \\ &= \frac{e^2 E_0}{2m_e R c^2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ \hat{E}_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_2(t) e^{i\omega t} dt = \frac{e^2 E_0}{2\pi i m_e R c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt = \frac{e^2 E_0}{2i m_e R c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}}{2\pi} - \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2\pi} dt \\ &= \frac{e^2 E_0}{2i m_e R c^2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]\end{aligned}$$

となる。このことより  $\hat{E}_i(\omega)$  は、 $\omega = \omega_0$  のときのみ値を持つことから、放射される電磁波の各周波数は  $\omega_0$  だけであり、これは入射時の角振動数に等しい。これは散乱により角振動数が変化しないという古典的な結果と一致していると言える。

### 1-2-(d) 散乱波の偏光

$\mathbf{n}$  方向に散乱された電磁波の  $\mathbf{a}_1$  方向、 $\mathbf{a}_2$  方向の電場の位相差  $\delta_2 - \delta_1$ 、及び電場の振幅を求めよ。四つの Stokes parameters を求めよ。偏光度を求めよ。最後に  $\theta$  を  $0 \sim \pi$  まで変化させるにつれて、偏光の様子がどう変化するか説明せよ。

#### 1-2-(d) 解答

電場の位相差  $\delta_2 - \delta_1$  は Eq.(9) より

$$\delta_2 - \delta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad (15)$$

となる。 $E_1, E_2$  は Eq.(13),(14) の様に見えるので、振幅  $a_1, a_2$  は

$$a_1 = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \quad (16)$$

$$a_2 = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \cos \theta \quad (17)$$

と書くことができる。よって Stokes parameters は

$$I_1 = a_1^2 + a_2^2 = \left( \frac{e^2 E_0}{R m_e c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (18)$$

$$Q_1 = a_1^2 - a_2^2 = \left( \frac{e^2 E_0}{R m_e c^2} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (19)$$

$$U_1 = 2a_1 a_2 \cos \delta = 0 \quad (20)$$

$$V_1 = 2a_1 a_2 \sin \delta = -2 \left( \frac{e^2 E_0}{R m_e c^2} \right)^2 \cos \theta \quad (21)$$

となり、偏光度  $\Pi$  は

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} = \frac{\sqrt{a_1^4 + a_2^4 - 2a_1^2 a_2^2 + 4a_1^2 a_2^2}}{a_1^2 + a_2^2} = 1 \quad (22)$$

と計算される。

偏光の様子を図示しておく。

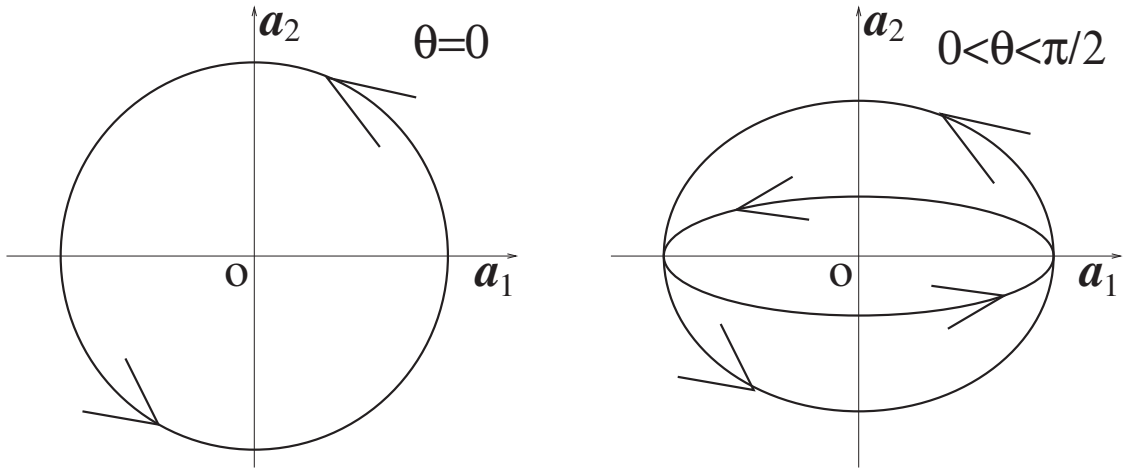


図2 左： $\theta=0$  [左回り円偏光]、右： $0 < \theta < \pi/2$  [左回り楕円偏光]

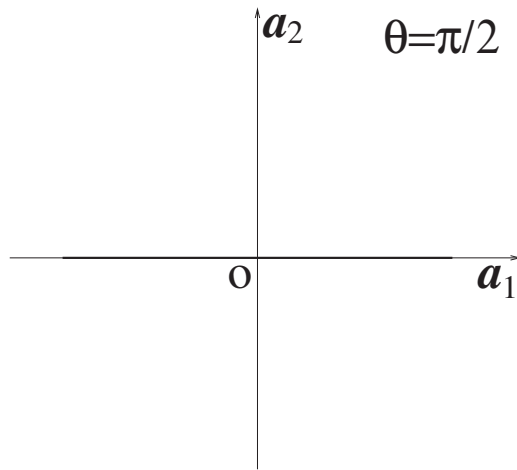


図3  $\theta = \pi/2$  [ $a_1$  方向直線偏光]

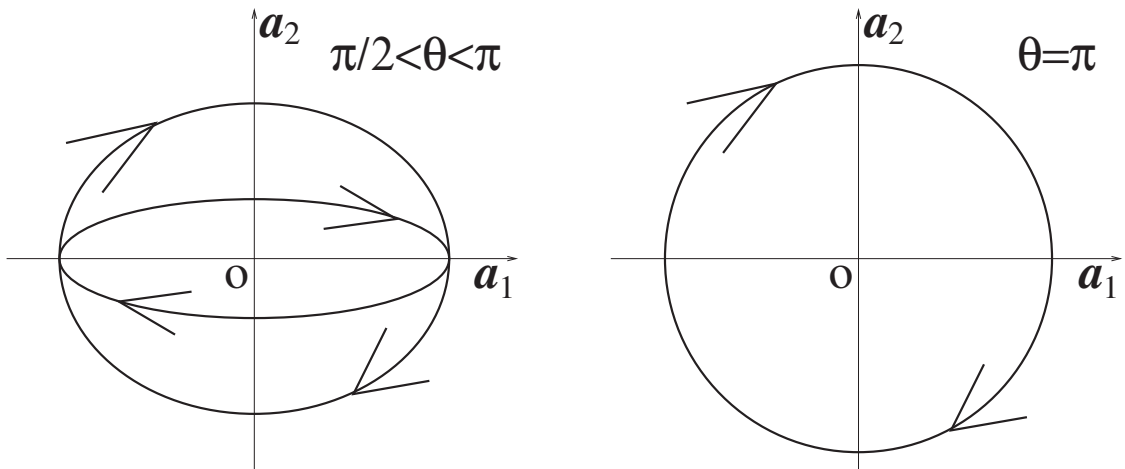


図4 左： $\pi/2 < \theta < \pi$  [右回り楕円偏光]、右： $\theta = \pi$  [右回り円偏光]

Eq.(13),(14) より、 $\theta=0$  のとき  $a_1 = a_2$  であるから左回りの円偏光である。 $0 < \theta < \pi/2$  のとき  $a_1 > a_2$  で

あるから左回りの楕円偏光である。 $\theta = \pi/2$  のとき  $a_2 = 0$  であるから、 $\mathbf{a}$  方向の直線偏光である。 $\pi/2 < \theta < \pi$  のとき  $a_1 > -a_2$  であるから、右回りの楕円偏光である。 $\theta = \pi$  のとき  $a_1 = -a_2$  であるから、右回りの円偏光である。

### 1-2-(e)

左回りの円偏光の電磁波に対する微分散乱断面積を求めよ。

#### 1-2-(e) 解答

前回の Rutherford scattering の場合に倣って、微分散乱断面積を

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \langle S \rangle \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \quad (23)$$

とする。これは単位時間に  $[\Omega : \Omega + d\Omega]$  の間に散乱される光子のエネルギーは、入射光子のエネルギー  $\langle S \rangle$  と  $[\Omega : \Omega + d\Omega]$  の間に散乱される確率  $d\sigma d\Omega$  の積に等しいことから理解できる。今、入射光子の Poynting vector は  $\mathbf{S} = c/(4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} cE_0^2/(4\pi)$  より、その時間平均をとって

$$\langle S \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \left( \frac{cE_0^2}{4\pi} \right) = \frac{cE_0^2}{4\pi} \quad (24)$$

であるから、Eq.(12),(23) より

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{e^4}{2c^4 m_e^2} (1 + \cos^2 \theta) = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta), \quad r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (25)$$

を得る。

### 1-2-(f)

円偏光に対するここまでの結果を用いて、無偏光の電磁波に対する微分散乱断面積、及び全散乱断面積を求めよ。又、散乱波が  $\nu a_1$  方向に直線偏光しており、偏光度が  $(1 - \cos^2 \theta)/(1 + \cos^2 \theta)$  であることを示せ。

#### 1-2-(f) 解答

左回り円偏光、右回り円偏光の電磁波間で  $\delta$  は  $\pi$  だけ違うので、右回りの電磁波の場合 Eq.(9) より

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \left[ \mathbf{a}_1 \cos \omega_0 t + \mathbf{a}_2 \cos \theta \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (26)$$

となることが容易に分かる。この結果から微分散乱断面積が Eq.(23) となることが分かる。この時 Stokes parameters は

$$I_r = I_l; \quad Q_r = Q_l; \quad U_r = U_l = 0; \quad V_r = -V_l \quad (27)$$

となり、偏光度  $\Pi$  は

$$\Pi_r = 1 \quad (28)$$

無偏光の散乱は、分解した左回りの円偏光と右回りの円偏光それぞれの散乱波の非可干渉な重ね合わせである。よって無偏光の電磁波の散乱断面積は、それぞれの結果を足し合わせて式で割ったものであり、Eq.(23) に一致する。全散乱断面積は積分を実行して

$$\sigma_T = \frac{r_0^2}{2} \int (1 + \cos^2 \theta) d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 0.665245873 \times 10^{-24} [\text{cm}^2] \quad (29)$$

となる。以上は完全偏光のときと同じ結果であるが、これはもともと静止した電子には特別な方向は存在しないことから、どんな方向に偏光した電磁波に対しても同じ様に散乱することを反映した結果である。無偏光の電磁波の電子による散乱波の Stokes parameters は、

$$I_u = \frac{1}{2} (I_r + I_l) = I_l = I_r \quad (30)$$

$$Q_u = \frac{1}{2} (Q_r + Q_l) = Q_l = Q_r \quad (31)$$

$$U_u = \frac{1}{2} (U_r + U_l) = 0 \quad (32)$$

$$V_u = \frac{1}{2} (V_r + V_l) = 0 \quad (33)$$

となる。従って無偏光の電磁波の散乱波は直線偏光しており、その方向は

$$\mathbf{E}_{\text{rad},u} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\text{rad},r} + \mathbf{E}_{\text{rad},l}) = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \mathbf{a}_1 \cos \omega t \quad (34)$$

であるから、 $\mathbf{a}_1$  である。偏光度は

$$\Pi_u = \frac{\sqrt{Q_u^2 + U_u^2 + V_u^2}}{I_u} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad (35)$$

となる。

## 2

中心に明るい点状天体を含む球状の一樣星間雲があるとする。星間雲は完全電離しており自由電子が飛び交っており、この電子により中心天体から放出された電磁波が Thomson scattering を受けるとする。この星間雲はこの散乱光にのみ観測されるとする。

### 2-(1)

この星間雲の見かけのサイズより観測装置の空間分解能が十分高いとき、雲の各場所での偏光の方向と偏光度の相対的な大きさを図示せよ。

#### 2-(1) 解答

今までの結果を総合して考えると、星間雲での偏光は図左のように書ける。実際に観測者が観測するのは  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の成分内の卓越した成分であり、このとき  $\mathbf{a}_2$  成分は観測者に対する射影成分を考えなければならぬ。その結果  $\theta = 0$  以外の場合は、 $\mathbf{a}_1$  の直線偏光として観測されることになるのは、先に見たとおりである。また今の場合、当然視線方向について積分を行わなければならない。

$\theta = 0$  の時、つまり星間雲の中心を見た場合  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  は同量なので結果観測される偏光は零となる。 $\theta = \pi/2$  のとき、つまり星間雲の端を見ている場合  $\mathbf{a}_1$  の成分は変化しないが、 $\mathbf{a}_2$  の観測者に対する射影成分は零となり  $\mathbf{a}_1$  成分つまり右図の紙面に垂直な成分の偏光が観測される。 $\theta = 0$  で零、 $\theta = \pi/2$  で最大の偏光度をち、 $0 < \theta < \pi/2$  では必ず  $\mathbf{a}_2$  が射影成分を持つので、 $\theta = \pi/2$  に比べて偏光度は小さくなり、 $\theta = 0$  に向けて連続的に変化することになる。これを図示したのが次の図である。

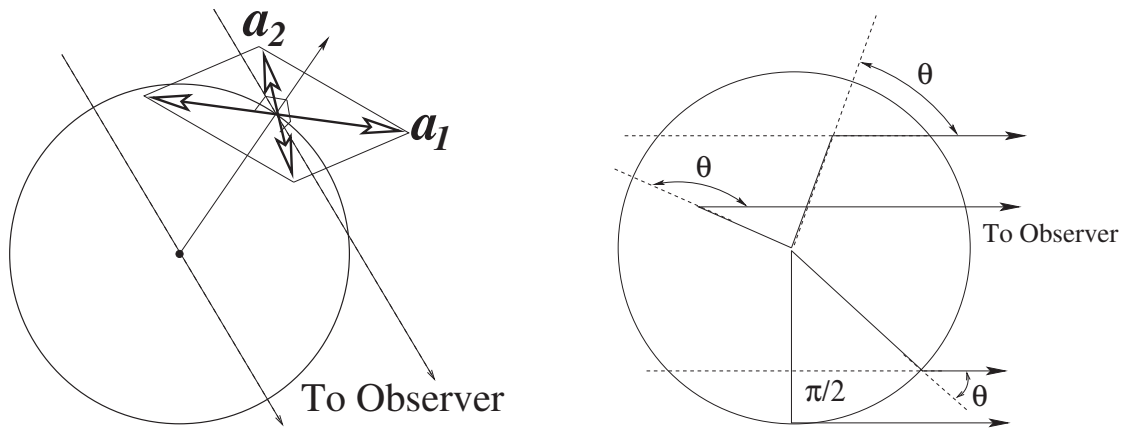


図5 左：偏光の様子、右：星間雲を輪切りにした様子。視線方向についての積分を考慮する必要がある。

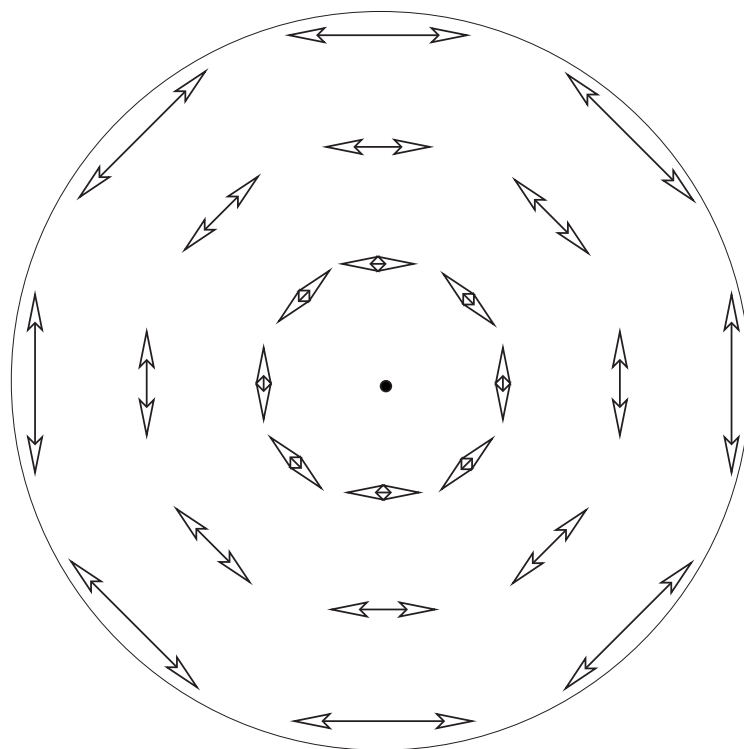


図6 星間雲の天球上での偏光方向と偏光度

## 2-(2)

この星間雲の見かけのサイズより観測装置の空間分解能が悪く、この雲が分解して見えないとき、偏光観測の結果はどのようなものになるか。

### 2-(2) 解答

雲の部分部分を分解することが出来ないで、全体をならして見ることになる。星間雲は球なので対称性より偏光は観測されない。これは物理的には、分解できない部分部分の偏光がお互いのうち消し合ってしまうことによるものである。



## 2-(3)

この雲の大きさを 1 [Mpc] とする。1 [Mpc] =  $3 \times 10^{24}$  [cm] である。中心天体が直接観測できる為の電子の個数密度の上限を求めよ。

### 2-(3) 解答

光の強度  $I_0$  が厚さ  $l$  の層を通った結果、強度が  $I$  になったとする。このとき  $I_0$  と  $I$  の間には次の関係が成り立つ。

$$I = I_0 \exp(-\tau) \quad (36)$$

ここで  $\tau$  は光学的深さ (厚さ) (optical depth) であり、今考えているのは、電磁波の電子による散乱であることから、

$$\tau = (\text{密度}) \times (\text{距離}) \times (\text{散乱断面積}) = n_e l \sigma_T, \quad n_e : \text{電子の密度}, \sigma_T : \text{Thomson Cross Section} \quad (37)$$

と書ける。Eq.(36) より  $\tau$  が増えるにつれ光の強度は弱くなり、 $\tau$  が 1 以上になると急激に弱くなるので、中心天体の光を直接観測することのできる厚さの限界は  $\tau \sim 1$  となる  $l$  である。以上を元に中心天体が直接観測できる為の電子の個数密度の上限を計算すると

$$n_e \sim \frac{1}{l \sigma_T} = \frac{1}{3/2 \times 10^{24} \cdot 0.665 \times 10^{-24}} = 2 \cdot 0.501253 \dots \sim 1 [\text{cm}^{-3}]$$

となる。

## 2-(4)

現在の宇宙は電子密度  $n_e \sim 2 \times 10^{-7} [\text{cm}^{-3}]$  でほぼ完全に電離した状態にある。宇宙が現在の姿のまま永遠に存在していたとして、直接観測することのできる一番遠くの天体までの距離を cm 及び光年単位でそれぞれ求めよ。

### 2-(4) 解答

1 光年は光りが一年かかって進む距離であり、

$$1 [\text{ly}] = 9.46 \times 10^{17} [\text{cm}]; \quad 1 [\text{pc}] = 3.26 [\text{ly}] \quad (38)$$

である。

2-3 同様に考えると

$$\begin{aligned} l &\sim \frac{1}{n_e \sigma_T} = \frac{1}{2 \times 10^{-7} \cdot 0.665 \times 10^{-24}} = 7.518 \dots \times 10^{30} [\text{cm}] \\ &\sim 10^{31} [\text{cm}] \\ &\sim 10^{13} [\text{ly}] \end{aligned}$$

を得る。

### 3

---

3-(1)

$E = 1$  [eV] を  $E = k_B T$  の関係を使って温度に換算せよ。更に  $E = h\nu$ ,  $\lambda\nu = c$  の関係を使って周波数、波長を求めよ。

3-(1) 解答

$$1 \text{ [eV]} = \begin{cases} 1.1604506 \times 10^4 & \text{[K]} \\ 2.41798949 \times 10^{14} & \text{[Hz]} \end{cases}; \quad \lambda = \begin{cases} 1.239841857 \times 10^{-4} & \text{[cm]} \\ 1.239841857 & \text{[}\mu\text{m]} \\ 1.239841857 \times 10^4 & \text{[}\text{\AA}] \end{cases}$$

### 4

---

Fourier 変換の方法を使って次の方程式の解を求めよ。

4-(1)

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) \quad (39)$$

4-(1) 解答

Eq.(39) の各項を Fourier 変換すると

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) \\ \Delta\phi(\mathbf{r}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -(\mathbf{k})^2 \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) \\ \delta^3(\mathbf{r}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \end{aligned}$$

であるから、両辺を Fourier 変換すると

$$-(\mathbf{k}) \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = -4\pi q_0 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$$

であるから結局

$$\tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q_0}{\mathbf{k}^2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$$

を得る。これを逆 Fourier 変換すると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2} d^3k \quad (40)$$

となる。

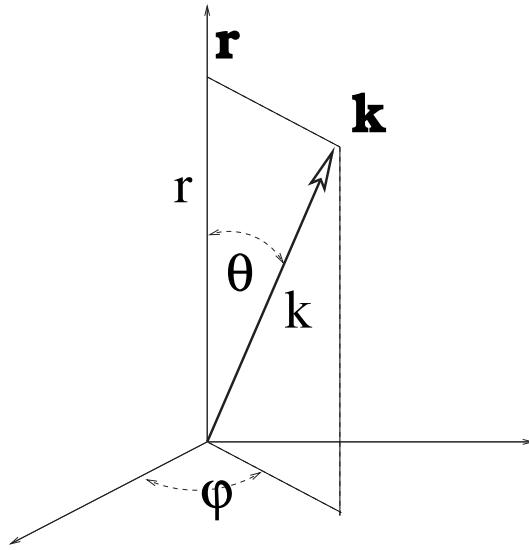


図7  $d^3k$  を積分するための座標系

この積分を実行する。図のような座標系を考えると上記の積分は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2} = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr \cos\theta}; \quad \cos\theta = \mu, \quad \frac{d\mu}{d\theta} = -\sin\theta \\ &= \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^{+1} e^{ikr\mu} d\mu = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{e^{ikr} + e^{-ikr}}{ikr} dk = \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} dk; \quad kr = \xi, \quad \frac{d\xi}{dk} = r \\ &= \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi\end{aligned}$$

となるが、この積分は先の課題番号で導出しており

$$\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}$$

であるから、結局

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = 4\pi q_0 \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}|} = \frac{q_0}{|\mathbf{r}|} \quad (41)$$

を得る。これはクーロンポテンシャルの式である。

4-(2)

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi(\mathbf{r}) = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) \quad (42)$$

4-(2) 解答

両辺を Fourier 変換し整理すると、

$$-\mathbf{k}^2 \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) - \mu^2 \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = -4\pi q_0 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \rightarrow (\mathbf{k}^2 + \mu^2) \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = 4\pi q_0 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3; \quad \therefore \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$$

となる。これを Fourier 逆変換すると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} d^3k$$

となるが、先ほどと同じように座標系を変えると

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2 + \mu^2} = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} dk \int_{-1}^1 e^{ikr\mu} d\mu \\ &= \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \frac{\sin(kr)}{kr} dk = \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi; \quad \xi = kr\end{aligned}$$

となる。今非積分関数は明らかに偶関数であるから

$$\int_0^\infty \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi$$

であるので、

$$\Im \left[ \int_C \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz \right] = \Im \left[ \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz + \int_{-R}^R \frac{xe^{ix}}{x^2 + r^2 \mu^2} dx \right\} \right] = \Im \left[ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi$$

を計算することを考える。

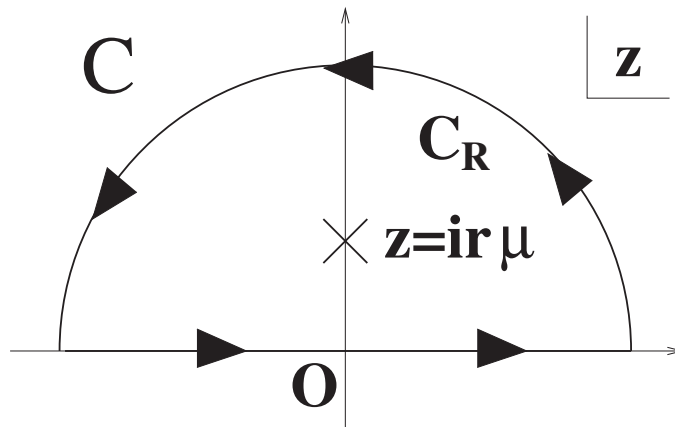


図8 積分経路

複素平面で上半円を考えて

$$\begin{aligned}\int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz &\leq \left| \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{|z||e^{iz}|}{|z^2 + r^2 \mu^2|} |dz| \leq \int_{C_R} \frac{Re^{-R \sin \theta}}{R^2 - r^2 \mu^2} |dz| \\ &\text{ここで、} z = Re^{i\theta} \ [0 \leq \theta \leq \pi], \ |dz| = |z'(\theta)|d\theta = |iRe^{i\theta}|d\theta = Rd\theta \text{とした} \\ &= \int_0^\pi \frac{Re^{-R \sin \theta}}{R^2 - r^2 \mu^2} \cdot Rd\theta = \frac{R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = \frac{R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \left( \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \right) \\ &= \frac{R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \left( \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \psi} d\psi \right) = \frac{2R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &< \frac{2R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \cdot \frac{\pi}{2R} < \frac{R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \cdot \frac{\pi}{R} = \frac{\pi R}{R^2 - r^2 \mu^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

となる。ここではジョルダンの不等式を用いた。よって留数定理より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi = \Im \left[ 2\pi i \left\{ (z - ir\mu) \frac{ze^{iz}}{(z + ir\mu)(z - ir\mu)} \right\}_{z=ir\mu} \right] = \Im \left[ 2\pi i \frac{ir\mu e^{-r\mu}}{2ir\mu} \right] = \Im \left[ 2\pi i \frac{e^{-r\mu}}{2} \right] = \pi e^{-r\mu}$$

となり、結局次のような解を得る。

$$\phi_+(\mathbf{r}) = \frac{8\pi q_0}{4\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \frac{\pi}{2} e^{-r\mu} = \frac{q_0}{|\mathbf{r}|} e^{-\mu|\mathbf{r}|} \quad (43)$$

今は上半円を考えたが、下半円を考えることも出来るので

$$\phi_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{|\mathbf{r}|} e^{\mp\mu|\mathbf{r}|} \quad (44)$$

となる。 $|\mathbf{r}| = 1/\mu$  でシールドされ、無限遠方で零になるようなポテンシャルを考える場合、 $\phi_{+}(\mathbf{r})$  である。

## 5

原子核同士を結びつけている強い力は、核間距離  $1 \text{ [fm]} = 10^{-15} \text{ [m]} = 10^{-13} \text{ [cm]}$  以内では非常に強く働くが、これ以上離れると殆ど力は働かない。これは核力を媒介する粒子である  $\pi$  中間子が有限の質量を持っていることに起因するとして、 $\pi$  中間子の質量  $m_{\pi}c^2$  を MeV 単位で求めよ。

ここでは  $\pi$  中間子のエネルギー不確定性が高々  $m_{\pi}c^2$  であるとして、エネルギーの不確定性原理から質量を求めよ。

5-(0) 解答

エネルギーの不確定性は

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \quad (45)$$

と書けるので、これより  $\pi$  中間子の質量の大おおまかな値は

$$\Delta E \sim m_{\pi}c^2 \sim \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{c\hbar}{c\Delta t} = \frac{197 \text{ [MeV fm]}}{1 \text{ [fm]}} = 197 \text{ [MeV]} \sim O(100) \text{ [MeV]} \quad (46)$$

となる。これは正確な値 に対して、第零近似としてそう悪くないと言える結果である。

$\pi$ 中間子	$m_{\pi^{\pm}}$	$139.57018 \pm 0.00035 \text{ [MeV]}$
	$m_{\pi^0}$	$134.9766 \pm 0.0006 \text{ [MeV]}$

## 6 熱統計力学事始め

温度  $T$  で熱平衡状態にある粒子系 (質量  $m$ ) では、ある粒子のエネルギーが  $E \sim E + dE$  の範囲にある確率は、

$$P(E) dE \propto e^{-\frac{E}{k_B T}} dE \quad (47)$$

で与えられる。特に自由な非相対論的運動をしている粒子系では、速度が  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  と  $\mathbf{v} + d\mathbf{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$  の間の範囲にある確率が

$$P(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z \propto e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} dv_x dv_y dv_z; \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad P(\mathbf{v}) = C e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} \quad (48)$$

で与えられる。

6-(1)

全確率が壹になるように比例定数  $C$  を求めよ。

6-(1) 解答

規格化定数  $C$  を求める。Eq.(48) より

$$P(v) dv_x dv_y dv_z = C \exp \left[ -\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] dv_x dv_y dv_z$$

であるから、全速度空間に渡り積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v) dv_x dv_y dv_z &= C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_B T} v_z^2} dv_z = C \left( \frac{\pi}{m} \right)^{3/2} \\ &= C \left( \frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{3/2} = 1 \end{aligned}$$

となり、全確率は 1 でなければならないので、規格化定数  $C$  は

$$C = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \quad (49)$$

と求まる。

6-(2)

粒子一個の平均運動エネルギーを求めよ。

6-(2) 解答

位相空間中  $d^3 r d^3 v$  中に粒子を見出す確率は  $e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} d^3 r d^3 v$  に比例する。従って粒子一個の平均運動エネルギーは

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{\int \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} d^3 r d^3 v}{\int e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} d^3 r d^3 v} = \frac{\int \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) e^{-\left(\frac{1}{k_B T}\right) \left(\frac{1}{2} m v^2\right)} d^3 v}{\int e^{-\left(\frac{1}{k_B T}\right) \left(\frac{1}{2} m v^2\right)} d^3 v}$$

と書くことができる。これより

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \left( \frac{1}{k_B T} \right)} \left[ \ln \int e^{-\left(\frac{1}{k_B T}\right) \left(\frac{1}{2} m v^2\right)} d^3 v \right]$$

となるので、これを計算すると

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle &= -\frac{\partial}{\partial \left( \frac{1}{k_B T} \right)} \left[ \ln \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{3/2} \right] = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \left( \frac{1}{k_B T} \right)} \ln \left( \frac{1}{k_B T} \right) \\ &= \frac{3}{2} k_B T \end{aligned} \quad (50)$$

を得る。これが粒子一個の平均運動エネルギーである。 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  であり、どの方向も特別なものではないと考えられるので各自由度に対する粒子一個の平均エネルギーは  $k_B T / 2$  であることが分かる。

6-(3)

クーロンポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  が存在する時は、電子の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - e\phi(\mathbf{r}) \quad (51)$$

である。電子は体積  $V$  の領域に存在するとし、 $\mathbf{r} \sim \mathbf{r} + d\mathbf{r}$  で電子が見つかる確率が

$$P(\mathbf{r}) d^3 r = \frac{e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3 r}{A}, \quad A \equiv \int_V d^3 r e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \quad (52)$$

で表されることを示せ。

6-(3) 解答

位相空間  $dx dy dz dv_x dv_y dv_z = d^3 r d^3 v$  で見出される確率は

$$P(\mathbf{r}) P(v) d^3 r d^3 v \propto e^{-\frac{E}{k_B T}} = e^{-\frac{m}{2k_B T} v^2} \cdot e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3 r d^3 v$$

で書けるはずである。 $P(v) d^3 v$  に関する関係は、先に見てきた通りであるので、 $P(\mathbf{r}) d^3 r$  について考えると、規格化定数を  $B$  として

$$P(\mathbf{r}) d^3 r = B e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3 r$$

の関係が成り立つはずである。規格化定数  $B$  は

$$B^{-1} = \int_V d^3 r e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \equiv A$$

と書けることから結局

$$P(\mathbf{r}) d^3 r = \frac{e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3 r}{A} \quad (53)$$

となり、これが体積  $V$  中の  $\mathbf{r} \sim \mathbf{r} + d\mathbf{r}$  で電子が見つかる確率である。

6-(4)

$V \rightarrow \infty$  の極限を考え、無限遠方で  $\phi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0$  とし、このときの電子の数密度を  $n_0$  とする。このとき任意の位置  $\mathbf{r}$  で電子の数密度が

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \quad (54)$$

で与えられることを示せ。

6-(4) 解答

一般的に密度を求めには

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \quad (55)$$

の平均値  $\overline{n(\mathbf{r})}$  を計算すればよい。 $\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r})$  は Delta function である。全体で電子が  $N$  個あるとすると、この平均値は

$$n_e(\mathbf{r}) = \overline{n(\mathbf{r})} = N \frac{\int e^{\frac{e\phi(\mathbf{r}')}{k_B T}} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}'}{\int e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d\mathbf{r}} = D e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}}$$

となる。極限での条件より

$$n_e(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = n_0 = D = \frac{N}{\int_{V \rightarrow \infty} e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3r}$$

であるから、

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \quad (56)$$

となる。