天体物理学弐 課題番号八番
解答例
[20060608 出題]

Yuji Chinone

1

1-1

プラズマの温度が $T = 10^4$ [K]、電子の密度が $n_e = 1$ [cm^{-3}] とし、デバイ波長を求めよ。半径がデバイ波長に等しい球内に含まれる全電子数を求めよ。

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_p}} \tag{1}$$

1-1 解答

$$\begin{aligned}\lambda_D &= \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_p}} = \left[\frac{T\hbar c}{4\pi n_e \hbar e^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{T}{4\pi n_e \alpha}\right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{10^4 \cdot 137.03599911 \cdot 2\pi \cdot 6.950356 \times 10^{-1}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}{4\pi [\mathrm{cm}^{-3}]}\right]^{1/2} \\ &= 690.0902037524454\,[\mathrm{cm}] \sim 7\,[\mathrm{m}]\end{aligned} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \lambda_D = 6.900902 \times 10^2 \left(\frac{T\,[\mathrm{K}]}{10^4}\right)^{1/2} \left(\frac{n_e\,[\mathrm{cm}^{-3}]}{1}\right)^{-1/2} \,[\mathrm{cm}] \tag{3}$$

$$N_e = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n_e = \frac{4}{3}\pi\,(690.0902037524454)^3 = 1.3765950273736365 \times 10^9 \sim 1.4 \times 10^9 \text{ 個} \tag{4}$$

2

2-1

中心に点電荷 q_0 が存在する時のプラズマ中の静電場ポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{q_0}{r} e^{-r/\lambda_D} \tag{5}$$

と書ける。空間全体で積分した時、全電荷が零であることを示せ。

2-1 解答

前回の課題で導出したように電荷密度は

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \sim n_0 \left[1 + \frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}\right] \tag{6}$$

と書ける。ここで n_0 は無限遠での電荷の密度である。これを空間全体で積分すると[*1]

$$\begin{aligned}
\int_{V_\varepsilon} d^3r\, n_e(r) &= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\varepsilon}^{\infty} 4\pi r^2\, e\left(n_p - n_e(r)\right) dr = \int_{+0}^{\infty} dr \left(-4\pi r^2 e^2 n_0 \frac{\phi(r)}{k_B T}\right) = \int_{+0}^{\infty} dr \left(-4\pi r^2 e^2 n_0 \frac{q_0 e^{-r/\lambda_D}}{r k_B T}\right) \\
&= -q_0 \int_{+0}^{\infty} dr\, r e^{-r/\lambda_D} \frac{4\pi e^2 n_0}{k_B T} = -q_0 \int_{+0}^{\infty} d\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) \frac{r}{\lambda_D} e^{-r/\lambda_D} = -q_0 \int_{+0}^{\infty} dr'\, r' e^{-r'} \\
&= q_0 \int_{+0}^{\infty} -e^{-r'} dr' = q_0 \left[e^{-r'}\right]_{+0}^{\infty} \\
&= -q_0
\end{aligned}$$

となる。これは中心を除く全空間での電荷である。よってから中心の電荷が q_0 より、全電荷は零であることが分かる。

3 弱結合プラズマ

3-1

プラズマの粒子間のクーロン力と熱運動のエネルギーの比

$$\Gamma = \frac{e^2/a}{k_B T} = \frac{e^2 n^{-1/3}}{k_B T} \tag{7}$$

とデバイ長内の電子の数

$$\Lambda_c \equiv n_e \lambda_D^3 \tag{8}$$

の間に次の関係があることを示せ。

$$\Gamma \sim \frac{1}{\Lambda_c^{2/3}} \tag{9}$$

3-1 解答

Eq.(7),(8) より

$$\Gamma = \frac{e^2 n^{1/3}}{k_B T} = \frac{n^{1/3}}{4\pi\lambda_D^2 n_e} \sim \frac{1}{(\lambda_D^3 n_e)^{2/3}} = \frac{1}{\Lambda_c^{2/3}}$$

となる。

3-2

電子のイオンによる散乱の平均自由行程 λ_e とデバイ波長の比が

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_e} \sim \Gamma^{3/2} \tag{10}$$

になることを示せ。

[*1] 中心の点電荷が存在する点は除く。なぜなら $\lim_{r\to+0}\phi(r) \to +\infty$、及び中心にはソースとなる点電荷 $+q_0$ がある。計算上このように極限操作する必要はないが、物理的な考察の元でこのようにする。

3-2 解答

電子の平均自由行程は

$$\lambda_e = \frac{1}{\sigma_R n_p} = \frac{1}{\pi\left(\frac{e^2}{m_e v_e^2}\right)^2 n_p} \sim \frac{1}{\pi\left(\frac{e^2}{k_B T}\right)^2 n_p} = \frac{k_B^2 T^2}{\pi e^4 n_p} \tag{11}$$

で与えられるので、λ_D との比を考えると

$$\frac{\lambda_D^2}{\lambda_e^2} \sim \frac{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_p}}{\frac{k_B^4 T^4}{\pi^2 e^8 n_p^2}} = \frac{\pi}{4}\frac{e^6 n_p}{k_B^3 T^3} \sim \frac{e^6 n_p}{k_B^3 T^3} = \Gamma^3\,; \quad \therefore\ \frac{\lambda_D}{\lambda_e} \sim \Gamma^{3/2}$$

となる。

3-3

これらの結果を用いて弱結合プラズマでは、デバイ遮蔽は無衝突プラズマの現象であり、非常に多数の電子が協調的に関与していることを示せ。

3-3 解答

一個一個の電子の、中心電荷に対する関与[*2]を考えた場合それは小さいが、その領域には中心電荷を中和するのに十分な数の電子が存在している[*3]。これがデバイ遮蔽である。

無衝突プラズマは衝突することがないので、相互作用し合うことはない為、互いに協調し合うことは不可能である。にもかかわらずデバイ遮蔽が起こるのは、多数の電子の非協調的な作用の結果であり、それはあたかも全体が協調しているように見える。

4　電子プラズマの振動

$+e$ に帯電したイオンの海を考える。イオンは密度 n_i で一様に分布している。そこで自由に動き回れる電荷 $-e$ の電子が一様に分布しており、全体で電気的中性を保っているとする。従って電子の密度は $n_e = n_i$ である。イオンは電子に比べて圧倒的に質量が大きいので慣性が大きく殆ど動かない。そこでイオンは常に静止しているとする。何らかの外的要因により電子の分布が図のように変化したとする。

4-1

領域 A に於ける電場を求めよ。

4-1 解答

電子分布のずれにより図のような電荷分布が実現されているので、変位 δx について

$$E_x = 4\pi n_i \delta x \tag{12}$$

となる。

[*2] 中心電荷に僅かに引き寄せられる、つまりラザフォード散乱により散乱される。
[*3] 1 の結果

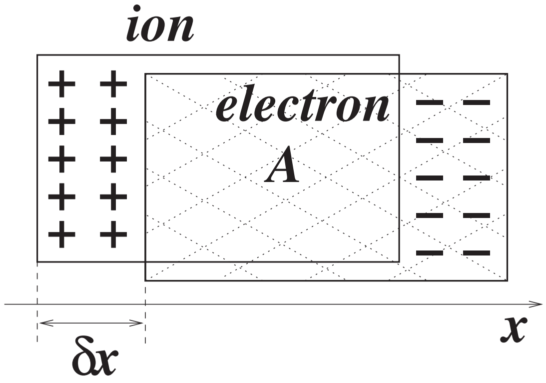

図１　イオン成分（背景）に対する電子成分のずれ

4-2

領域 A 内のでの任意の電子について運動方程式をたて、電子が各周振動数

$$\omega_{\rm pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} \tag{13}$$

の単振動をすることを示せ。

4-2 解答

電子の運動方程式は

$$m_e \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = -eE_x = -4\pi n_e \delta x \tag{14}$$

となる。これは単振動の式であるのでこの時の角振動数は Eq.(13) となる。

$$\begin{aligned}
\omega_{\rm pe} &= \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} = \left(\frac{4\pi e^2 n_e \hbar c}{m_e \hbar c}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi e^2 n_e \alpha}{m_e}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{4\pi}{0.510998918 \times 10^6 \cdot 137.03599911 \cdot 2\pi \cdot 8.06554476 \times 10^3}\right)^{1/2} \sqrt{n_e\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\ \ [\mathrm{Hz}] \\
&= 5.641460119565182 \times 10^4 \sqrt{n_e\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\ \ [\mathrm{Hz}] = 5.6 \times 10^4 \sqrt{n_e\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\ \ [\mathrm{Hz}]
\end{aligned} \tag{15}$$

5

図のように $N+1$ 個、質量 m の質点が長さ l の振り子に吊され、撥条定数 κ の撥条で結ばれている。重力加速度は g とする。全ての振り子が垂直に垂れ下がった状態の時、撥条が自然長になったとする。

5-1

j 番目（$j \neq 1, N+1$）の質点の平衡点からの位置のずれを u_j とし、この質点の運動方程式をたてよ。但し振り子の振れ角は非常に小さいとする。

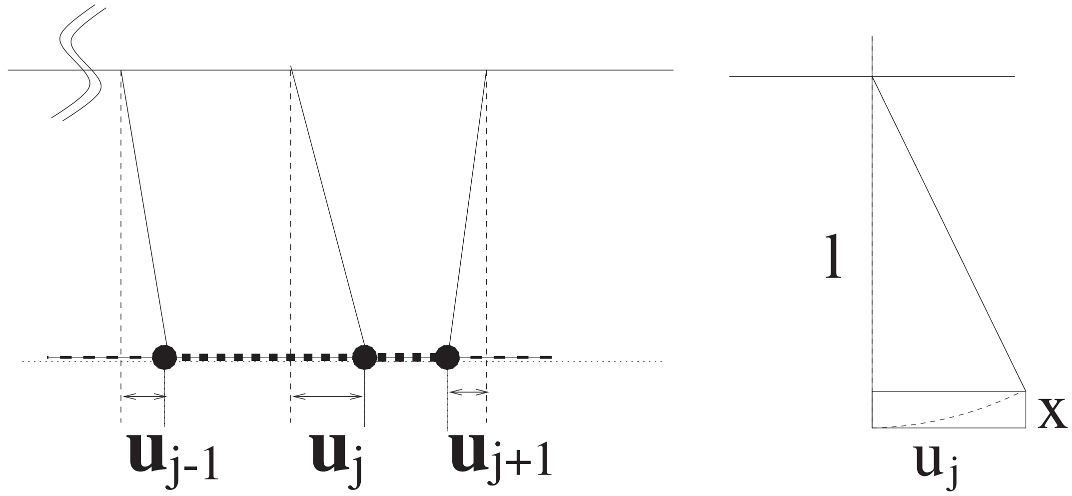

図２　連成振動とその変分成分

5-1 **解答**

系全体の運動エネルギーは

$$K = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{u}_j^2 \tag{16}$$

である。ポテンシャルエネルギーは撥条以外にも重力ポテンシャルを考慮する。図より鉛直成分の変位 x は

$$u_j^2 = l^2 - (l - x)^2 = 2lx - x^2 \sim 2lx \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{u_j^2}{2l}$$

であるから

$$U = \sum_j \left[\frac{1}{2} \kappa \left(u_{j+1} - u_j \right)^2 + \frac{mg}{2l} u_j^2 \right] \tag{17}$$

である。以上より系全体のラグランジアンは

$$L = K - U = \sum_j \left[\frac{1}{2} m \dot{u}_j^2 - \frac{1}{2} \kappa \left(u_{j+1} - u_j \right)^2 - \frac{mg}{2l} u_j^2 \right] \tag{18}$$

である。以上をラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0 \tag{19}$$

に代入すると、運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_j &= \kappa \left\{ \left(u_{j+1} - u_j \right) - \left(u_j - u_{j-1} \right) \right\} - \frac{mg}{l} u_j \\ &= \kappa \left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} \right) - \frac{mg}{l} u_j \qquad j = 2, 3, \ldots N \end{aligned} \tag{20}$$

となる。

5-2

撥条の自然長を h として、解を

$$u_j = A \exp \{ i (kjh - \omega t) \} \tag{21}$$

としてこの系を伝わる波が次のような分散関係式を満たすことを示せ。

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m}\sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) + \frac{g}{l} \tag{22}$$

5-2 解答

Eq.(21) を運動方程式に代入すると

$$-\omega^2 mA\exp\{i(kjh-\omega t)\} = \kappa\Big[A\exp\{i[k(j+1)h-\omega t]\} - 2A\exp\{i(kjh-\omega t)\} + A\exp\{i[k(j-1)h-\omega t]\}\Big] - \frac{mg}{l}A\,\exp\{i(kjh-\omega t)\}$$

$$\therefore\ -m\omega^2 = \kappa\{\exp(ikh)+\exp(-ikh)-2\} - m\frac{g}{l} = 2\kappa\left(\frac{e^{ikh}+e^{-ikh}}{2}-1\right) - \frac{mg}{l} = 2\kappa(\cos(hk)-1) - \frac{mg}{l}$$
$$= -4\kappa\sin^2\frac{kh}{2} - \frac{mg}{l}$$

であるから、これを ω^2 について解くと Eq.(22) を得る。

5-3

長波長極限 $\lambda \gg l$ での分散関係式が、以下のようになることを示せ。

5-3 解答

$$\omega^2 = \frac{\kappa h^2}{m}k^2 + \frac{g}{l} \tag{23}$$

5-3 解答

長波長極限 $\lambda \gg h$ では $kh/2 \ll 1$ となるので

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m}\left(\sin\frac{kh}{2}\right)^2 + \frac{g}{l} \cong \frac{4\kappa}{m}\left(\frac{kh}{2}\right)^2 + \frac{g}{l} = \frac{\kappa h^2}{m}k^2 + \frac{g}{l}$$

となり Eq.(23) を得る。

5-4

3 の結果から系を伝わる波の位相速度を求め、それが $k \to 0$ の極限で発散することを示せ。又この結果は光速度を越えるという意味で相対性理論の光速度不変の原理を破っているように見えるが、相対論と矛盾しないことを説明せよ。

5-4 解答

定義より

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\kappa h^2}{m} + \frac{g}{l}\frac{1}{k^2}} \tag{24}$$

を得る。$k \to 0$ の極限では

$$\lim_{k\to 0} v_{\text{phase}} = \lim_{k\to 0}\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\kappa h^2}{m} + \frac{g}{l}\frac{1}{k^2}} \ \propto\ \lim_{k\to 0}\frac{1}{k} \to \infty \tag{25}$$

となり、無限大に発散する。

光速度不変の原理は、物理的な情報を伝達する最高速度が光速度 c であるということである。よって物理的な情報を伝えない位相速度が光速度を越えても相対論と矛盾しない。

6

温度零のプラズマ中を伝播する電磁波を考える。簡単の為に直線偏光した電磁波を考える。以下、電子とイオンの電荷密度が等しく至る所で n で全電荷密度は常に零であるとし、イオンは静止しているとする。電磁波の電場、磁場、及び電磁波によって引き起こされる電子の運動速度は

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathbf{j}, \rho \propto e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{26}$$

と書けるとする。又電磁波によって引き起こされる電子の運動は非相対論的であるとする。

6-1

Maxwell 方程式から以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{27}$$

$$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{28}$$

$$i\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \tag{29}$$

$$i\mathbf{k}\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(-en\mathbf{v}) - \frac{i\omega}{c}\mathbf{E} \tag{30}$$

6-1 解答

真空中の Maxwell 方程式

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{31}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{32}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{33}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(-en\mathbf{v}) + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{34}$$

に Eq.(26) を代入すると

$$\nabla\cdot \;\rightarrow\; i\mathbf{k}\cdot\,; \quad \nabla\times \;\rightarrow\; i\mathbf{k}\times\,; \quad \frac{\partial}{\partial t} \;\rightarrow\; -i\omega \tag{35}$$

であるから、上記の関係式を得る。

6-2

電子の運動方程式から以下の関係式を導け。ここで m_e は電子の質量である。

$$\mathbf{v} = \frac{e}{i\omega m_e}\mathbf{E} \tag{36}$$

6-2 **解答**

電子について運動方程式を立てると

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$$

であるので、Eq.(35) より

$$m_e(-i\omega)\mathbf{v} = -e\mathbf{E} + 0 \qquad \because \text{ 非相対論的な場合を考えて } \frac{v}{c} \ll 1$$

となる。よって

$$\mathbf{v} = \frac{e}{i\omega m_e}\mathbf{E}$$

を得る。

6-3

1,2 から以下の関係式を導け。ここで ω_{pe} は Eq.(13) と同じである。

$$\left(\frac{ck^2}{\omega} + \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c}\right)\mathbf{E} = 0 \tag{37}$$

6-3 **解答**

Eq.(29) より

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

であるから、これを Eq.(30) に代入すると

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \times \mathbf{B} &= i\mathbf{k} \times \frac{c}{\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = i\frac{c}{\omega}(\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]) = i\frac{c}{\omega}\{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{k} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{E}\} = -i\frac{c}{\omega}k^2\mathbf{E} \\ &= -\frac{4\pi en}{c}\cdot\frac{e}{i\omega m_e}\mathbf{E} - \frac{i\omega}{c}\mathbf{E} \qquad \because \text{ Eq.(36)} \\ &= -\frac{4\pi ne^2}{im_e}\frac{1}{\omega c}\mathbf{E} - \frac{i\omega}{c}\mathbf{E} \end{aligned}$$

となるので、これを整理すると

$$-\frac{c}{\omega}k^2\mathbf{E} = \frac{4\pi ne^2}{m_e}\frac{1}{\omega c}\mathbf{E} - \frac{\omega}{c}\mathbf{E} \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{c}{\omega}k^2 + \frac{4\pi ne^2}{m_e}\frac{1}{\omega c} - \frac{\omega}{c}\right]\mathbf{E} = 0$$

と書けるが Eq.(13) を代入すると Eq.(37) を得る。

6-4

3 の結果からプラズマ中を伝搬する電磁波の分散関係式を導け。

6-4 **解答**

プラズマ中を伝播する電磁波の分散関係式は、Eq.(37) の括弧内いが恒等的に零であるから

$$\frac{ck^2}{\omega} + \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c} = 0$$

より、

$$\omega^2 = \omega_{\mathrm{pe}}^2 + k^2c^2 \tag{38}$$

となる。これより

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{\rm pe}^2}{c^2}$$

であるから、

$$k = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\rm pe}^2}}{c} & \text{when} \quad \omega \geq \omega_{\rm pe} \\ i\dfrac{\sqrt{\omega_{\rm pe}^2 - \omega^2}}{c} & \text{when} \quad \omega < \omega_{\rm pe} \end{cases} \tag{39}$$

となる。

7　電磁波の複素表示

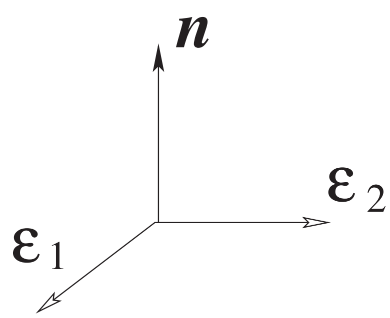

図 3　$\mathbf{n}$：進行方向、$\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$：偏光ベクトル

図の様に偏光ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ を定義する。これらはお互いに直交する単位ベクトルであるり、$\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \mathbf{n}$ の順番で右手系を成している。$\mathbf{n}$ は電磁波の進行方向である。

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 = 1, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 = 1, \quad \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2 = \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\epsilon}_1, \quad \mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}_2 \tag{40}$$

実数部が実際の成分を表すと約束して電場成分を次のように書く。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \left[a_1 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_1 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_2)} \boldsymbol{\epsilon}_2\right] & (41) \\ &= \left[a_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta} \boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} & (42) \\ \delta &\equiv \delta_2 - \delta_1, \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R} & (43) \end{aligned}$$

7-1

電場の振幅の二乗が $\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}$ で計算できることを示せ。

7-1 解答

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} &= \left\{\left[a_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta} \boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)}\right\}^* \left\{\left[a_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta} \boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)}\right\} \\ &= \left[a_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{+i\delta} \boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{+i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} \left[a_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta} \boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} \\ &= a_1^2 + a_2^2 \end{aligned}$$

7-2

円偏光の場合は $a_1 = a_2 = E_0$ である。この時右回りの円偏光が

$$\mathbf{E}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2}\, E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} \boldsymbol{\epsilon}_- \tag{44}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) \tag{45}$$

となり、左回り円偏光が

$$\mathbf{E}_{\mathrm{l}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2}\, E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} \boldsymbol{\epsilon}_+ \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) \tag{47}$$

と書けることを示せ。ここで $\boldsymbol{\epsilon}_+, \boldsymbol{\epsilon}_-$ はそれぞれ電磁波の helicity が正、負の時の偏光ベクトルである。

7-2 解答

右回り円偏光の時 $\delta = \pi/2$ であるから

$$\mathbf{E} = E_0 \left(a_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 \boldsymbol{\epsilon}_2 e^{-i\pi/2} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)$$

より Eq.(44) を得る。左回り円偏光の時 $\delta = -\pi/2$ であるから

$$\mathbf{E} = E_0 \left(a_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 \boldsymbol{\epsilon}_2 e^{+i\pi/2} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)$$

より Eq.(46) を得る。

7-3

Show

$$\boldsymbol{\epsilon}_+ \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* = 1, \quad \boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* = 1, \quad \mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_+^* = i\boldsymbol{\epsilon}_+^*, \quad \boldsymbol{\epsilon}_+ \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* = 0, \quad \mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_-^* = -i\boldsymbol{\epsilon}_-^* . \tag{48}$$

7-3 解答

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_+ \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\
\boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\
\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_+^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_2 + i\boldsymbol{\epsilon}_1) = \frac{i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) = i\boldsymbol{\epsilon}_+^* \\
\boldsymbol{\epsilon}_+ \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) = 0 \\
\boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) = 0 \\
\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_2 - i\boldsymbol{\epsilon}_1) = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) = -i\boldsymbol{\epsilon}_-^*
\end{aligned}$$

7-4

任意の電磁波の電場成分は二つの直行する直線偏光の重ね合わせとして **Eq.(41)** の様に書ける。これを書き換えて、右回りの円偏光と左回りの円偏光の重ね合わせで、次のように書けることを示せ。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_+ \boldsymbol{\epsilon}_+ + E_- \boldsymbol{\epsilon}_-)\, e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{49}$$

$\mathbf{E}_\pm$ は $a_1, a_2, \delta_1, \delta_2$ を用いて表せ。

7-4 解答

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_+ + \boldsymbol{\epsilon}_-}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = -i\frac{\boldsymbol{\epsilon}_+ - \boldsymbol{\epsilon}_-}{\sqrt{2}}, \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \left[a_1 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} \boldsymbol{\epsilon}_1 + a_1 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_2)} \boldsymbol{\epsilon}_2\right] \\
&= \left[a_1 \frac{\boldsymbol{\epsilon}_+ + \boldsymbol{\epsilon}_-}{\sqrt{2}} e^{-i\delta_1} - i a_2 \frac{\boldsymbol{\epsilon}_+ - \boldsymbol{\epsilon}_-}{\sqrt{2}} e^{-i\delta_2}\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \left[\boldsymbol{\epsilon}_+ \frac{a_1 e^{-i\delta_1} - i a_2 e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{\epsilon}_- \frac{a_1 e^{-i\delta_1} + i a_2 e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}}\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\
&= (E_+ \boldsymbol{\epsilon}_+ + E_- \boldsymbol{\epsilon}_-)\, e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$E_+ = \frac{a_1 e^{-i\delta_1} - i a_2 e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}}, \quad E_- = \frac{a_1 e^{-i\delta_1} + i a_2 e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}} \tag{51}$$

7-5

$\boldsymbol{\epsilon}_1$ 方向に直線偏光した電磁波を、右回りにに円偏光した電磁波と左回りに円偏光した電磁波の重ね合わせで表せ。

7-5 解答

$\boldsymbol{\epsilon}_1$ 方向に直線偏光しているので、$a_1 \neq 0, a_2 = 0$ であるから

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\epsilon}_1}(\mathbf{r}, t) = \frac{a_1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_+ + \boldsymbol{\epsilon}_-)\, e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} = \frac{\mathbf{E}_\mathrm{l} + \mathbf{E}_\mathrm{r}}{2}; \quad \because \text{Eq.(44),(46)} \tag{52}$$

を得る。

8

8-1

$B_0 = 1\,[\mu\mathrm{G}]$ の時、Electron cyclotron frequency

$$\omega_\mathrm{ce} = \frac{eB_0}{m_e c} \tag{53}$$

を求めよ。

8-1 **解答**

$$\text{Bohr magnetron:}\quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788381804\times 10^{-11}\,[\text{MeV T}^{-1}] \tag{54}$$

$$1\,[\text{eV}] = 2\pi\cdot 2.41798949\times 10^{14}\,[\text{Hz}] \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\omega_{\text{ce}} &= \frac{eB_0}{m_e c} = \frac{\mu_B}{\frac{e\hbar}{2m_e}}\frac{eB_0}{m_e} = 2\mu_B B_0 \\ &= 2\cdot\left(5.788381804\times 10^{-11}\times 10^{6}\right)\cdot\left(2\pi\cdot 2.41798949\times 10^{14}\right)\cdot 10^{-4}\ (B_0\,[\mu\text{G}])\quad [\text{Hz}] \\ &= 17.5882\ (B_0\,[\mu\text{G}])\quad [\text{Hz}]\end{aligned} \tag{56}$$

9　古典電子半径

9-1

真空中で静止している電子が作る自己電場の全エネルギーを求めよ。但し電子は半径 r_0 の球とし、$0 < r \le r_0$ では電荷分布が一様で全電荷が $-e$ であるとする。

9-1 **解答**

電磁場が作る場のエネルギー密度は

$$u_{\text{field}} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right) \tag{57}$$

と書ける。今、静止している電荷を考えているの電磁場は電場だけである。電場は対称性より動径方向のみを持ち、ガウスの定理より、$r > r_0$ の場合

$$4\pi r^2 E(r) = -4\pi e \quad\Longrightarrow\quad E(r) = -\frac{e}{r^2} \tag{58}$$

となり、$0 < r \le r_0$ の場合

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi\rho_e(r)V(r) = 4\pi\frac{-e\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = -\frac{4\pi e}{r_0^3}r^3 \quad\Longrightarrow\quad E(r) = -\frac{e}{r_0^3}r \tag{59}$$

を得る。

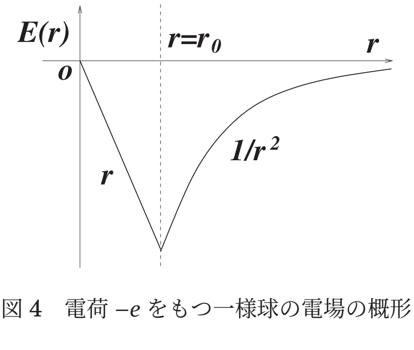

図 4　電荷 $-e$ をもつ一様球の電場の概形

これより電子が作る全自己エネルギーは

$$
\begin{aligned}
U_{\text{field}} &= \int_V u_{\text{field}} d^3r = \frac{e^2}{2}\left[\int_0^{r_0} \frac{r^2}{r_0^6} r^2\, dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2\, dr\right] = \frac{e^2}{2}\left[\int_0^{r_0} \frac{r^4}{r_0^6}\, dr + \int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\, dr\right] \\
&= \frac{e^2}{2}\left(\left[\frac{r^5}{5r_0^6}\right]_0^{r_0} + \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{\infty}\right) = \frac{3e^2}{5r_0}
\end{aligned} \tag{60}
$$

となる。

9-2

1 で求めた全自己場エネルギーが電子の静止質量エネルギーと等しいとして、r_0 を m_e, c, e を用いて表せ。

9-2 解答

Eq.(60) より、

$$
\frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0} = m_e c^2 \quad \Longrightarrow \quad r_0 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{m_e c^2} \tag{61}
$$

を得る。