

# 天体物理学式 課題番号九番

## 解答例

[20060615 出題]

Yuji Chinone

### 1 Dispersion Measure

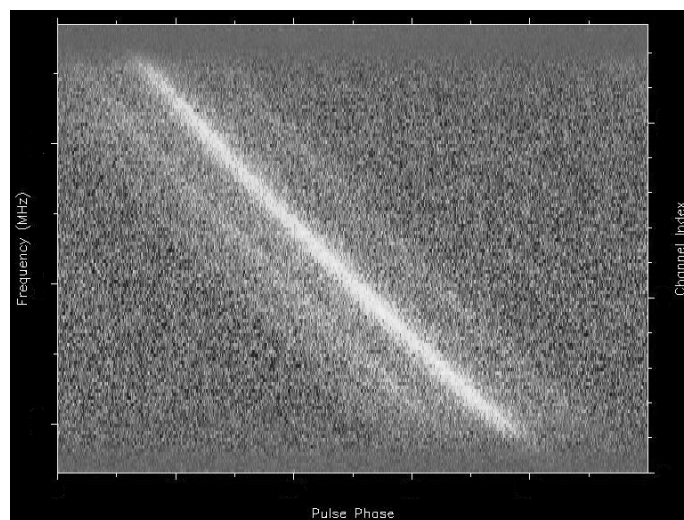


図1 パルサーの電波観測結果

プラズマ中の電磁波による情報伝達速度は群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \sim c \left( 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \right) \quad (1)$$

と書ける。ここでは  $\omega \gg \omega_{pe}$  として展開した。この結果から、天体から発せられたパルスが時間  $t_p$  後に観測者に届いたとすると、これは

$$t_p = \int_0^d \frac{ds}{v_g} \sim \frac{d}{c} + \frac{1}{2c\omega^2} \int_0^d \omega_{pe}^2 ds = \frac{d}{c} + \frac{2\pi e^2}{m_e c \omega^2} \int_0^d n_e dl \quad (2)$$

と書ける。上式で  $d$  は天体までの距離で、最後の項は天体と観測者間にあるプラズマによる到着の遅れを表しており、この部分を

$$\Delta t_p = \frac{2\pi e^2}{m_e c \omega^2} DM = \frac{e^2}{2\pi m_e c v^2} DM = \frac{r_e}{2\pi} v^{-2} DM; \quad DM = \int_0^d n_e dl \quad (3)$$

と書く。DM は dispersion measure といわれ、一般に  $[\text{pc cm}^{-3}]$  で書かれる。具体的に数値を入れると

$$\Delta t_p = \frac{(2.817940325 \times 10^{-13})(3.0856775807 \times 10^{18})(2.99792458 \times 10^{10})}{2\pi \cdot 10^{12}} \left( \frac{\nu}{[\text{MHz}]} \right)^{-2} (\text{DM} [\text{pc cm}^{-3}])$$

$$= 4.15 \times 10^3 \left( \frac{\nu}{[\text{MHz}]} \right)^{-2} \left( \frac{\text{DM}}{[\text{pc cm}^{-3}]} \right) \quad [\text{sec}] \quad (4)$$

$$= (2.41 \times 10^{-4})^{-1} \left( \frac{\nu}{[\text{MHz}]} \right)^{-2} \left( \frac{\text{DM}}{[\text{pc cm}^{-3}]} \right) \quad [\text{sec}] \quad (5)$$

$$= 4.62 \times 10^{-2} \left( \frac{\lambda}{[\text{m}]} \right)^2 \left( \frac{\text{DM}}{[\text{pc cm}^{-3}]} \right) \quad [\text{sec}] \quad (6)$$

となる。

図 1 はパルサーの電波観測の結果である。縦軸は周波数、横軸は時間。斜めに連続なラインが見られるがこれはパルサーからのシグナルである。

### 1-1

図は周波数の高い順に上から並んでいるのか、下から並んでいるのか、根拠と共に答えよ。

#### 1-1 解答

Eq.(3) より  $\Delta t_p \propto \nu^{-2}$  であるから、 $\nu \nearrow$  の時  $\Delta t_p \searrow$ 、 $\nu \searrow$  の時  $\Delta t_p \nearrow$  であるから、図 1 は下に行くほど低周波数、上に行くほど高周波数であることが分かる

### 1-2

400 [MHz] と 300 [MHz] でパルスの到着時間に  $\Delta t = 1.13$  [sec] の差があった。この結果から Dispersion Measure 求めよ。星間物質の電子密度を  $n_e = 0.03$  [ $\text{cm}^{-3}$ ] としパルサーまでの距離を求めよ。

#### 1-2 解答

周波数の違いによるパルスの到着時刻の違いを  $\Delta$  とすると、Eq.(3),(5) より

$$\text{DM} = \frac{2\pi\Delta}{r_e} \left( \frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2} \right)^{-1} = 2.41 \times 10^{-4} \Delta \left[ \left( \frac{\nu_1}{[\text{MHz}]} \right)^{-2} - \left( \frac{\nu_2}{[\text{MHz}]} \right)^{-2} \right]^{-1} \quad [\text{pc cm}^{-3}]; \quad \nu_1 < \nu_2 \quad (7)$$

を得る。よって  $\nu_1 = 300$  [MHz],  $\nu_2 = 400$  [MHz] で  $\Delta = 1.13$  [sec] の場合、

$$\text{DM} = 56.0299 = 56.0 [\text{pc cm}^{-3}]$$

となり、 $n_e = 0.03$  [ $\text{cm}^{-3}$ ] とすると、

$$d = \frac{\text{DM} [\text{pc cm}^{-3}]}{n_e [\text{cm}^{-3}]} = 1867.66 [\text{pc}] = 1.87 [\text{kpc}]$$

となる。

## 2 外部磁場に沿って進む電磁波

外部磁場に沿って進む円偏光した電磁波を考える。

## 2-1

右回りに円偏光した電磁波に対して分散関係式が

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega \omega_{ce}^2}{\omega + \omega_{pe}} \quad (8)$$

となることを示せ。

### 2-1 解答

外部磁場を

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{n} \quad (9)$$

と書くと、磁場に沿って進む右回りの電磁波は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_- e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \boldsymbol{\epsilon}_- \quad (10)$$

と書ける。電子の運動方程式より、電子の速度  $\mathbf{v}$  は

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{eE_-}{im_e \omega} \boldsymbol{\epsilon}_- - i \frac{\omega_{ce}}{\omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{n})$$

と書ける。 $\mathbf{v}$  と  $\boldsymbol{\epsilon}_-^*$  との内積を計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{eE_-}{im_e \omega} - i \frac{\omega_{ce}}{\omega} \boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = \frac{eE_-}{im_e \omega} - i \frac{\omega_{ce}}{\omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_-^*) = \frac{eE_-}{im_e \omega} - i \frac{\omega_{ce}}{\omega} \mathbf{v} \cdot (-i\boldsymbol{\epsilon}_-^*) \\ &= \frac{eE_-}{im_e \omega} - \frac{\omega_{ce}}{\omega} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^*), \quad \therefore \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* = -\frac{ieE_-}{m_e(\omega + \omega_{ce})} \end{aligned}$$

となる。ここでは前回のレポートで導出した  $\boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* = 1$ ,  $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_-^* = -i\boldsymbol{\epsilon}_-^*$  を用いた。同様に  $\mathbf{v}$  と  $\boldsymbol{\epsilon}_+^*$  との内積をとると

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* = -i \frac{\omega_{ce}}{\omega} \boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = -i \frac{\omega_{ce}}{\omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_+^*) = -i \frac{\omega_{ce}}{\omega} \mathbf{v} \cdot (i\boldsymbol{\epsilon}_+^*), \quad \therefore \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* = 0$$

を得る。ここでも前回のレポートで導出した  $\boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* = 0$ ,  $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_+^* = i\boldsymbol{\epsilon}_+^*$  を用いた。以上より電子の速度と電流密度は

$$\mathbf{v} = -\frac{ieE_-}{m_e(\omega + \omega_{ce})} \boldsymbol{\epsilon}_-; \quad \mathbf{j} = -en\mathbf{v} = \frac{in_e e^2 E_-}{m_e(\omega + \omega_{ce})} \boldsymbol{\epsilon}_- \quad (11)$$

と書ける。これを Maxwell 方程式に代入し整理すると、

$$\left[ \omega^2 - c^2 k^2 - \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega + \omega_{ce}} \right] E_- \boldsymbol{\epsilon}_- = 0$$

となり、これより Eq.(8) を得る。

## 2-2

電磁波が存在し無かったとき、速度を持った電子が回転する方向を同じ方向に電場成分（偏光ベクトル）が回転するのは右回り円偏光、左回り円偏光のどちらか？

### 2-2 解答

電子の速度  $\mathbf{v}$  を外部磁場に垂直な成分  $\mathbf{v}_\perp$  と平行な成分  $\mathbf{v}_\parallel$  に分けて考える。電子の運動方程式は

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = -\frac{e}{c} (\mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{B}) \quad m_e \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = 0 \quad (12)$$

であるので、平行成分は等速度運動、垂直方向は Lorentz 力を受ける加速度運動をする。図からも分かるように、この電子は左周り円運動をするので、題意を満たす電磁場の偏光は左回り円偏光である。

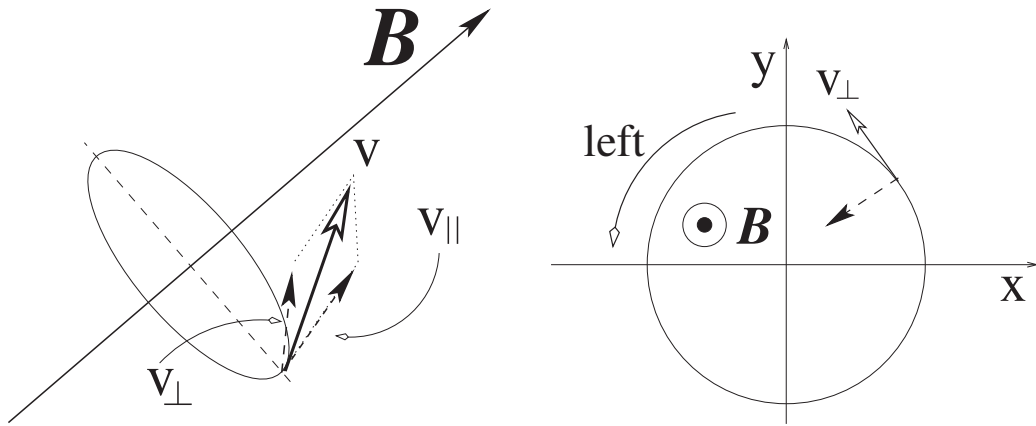


図2 左回り円運動をする電子(サイクロトロン)

## 2-3

右回り円偏光、左回り円偏光でどちらの方が位相速度が速いか。又波長はどちらの方が長い。

### 2-3 解答

外部磁場による電子のサイクロトロン運動の回転方向は、左回り円偏光の電場回転方向と一致しており、電磁波の入射波はサイクロトロン運動を助ける方向に電子に力を及ぼす。同様に考えれば、逆に右回りの円偏光は回転を弱める方向に力を及ぼす。この違いにより、偏光の回転速度が違ってくる。 $\omega \gg \omega_{ce}$  の場合、右回り左回り円偏光の波数は分散関係式より

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ce})}} \sim \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \left( 1 \pm \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \right] \quad (13)$$

である。よって、左回り円偏光電磁波の波長の方が、右回り円偏光電磁波の波長よりも長いことが分かる。

磁場を伴ったプラズマ中を  $d$  進んだ時の電磁波の位相の進みは右回り左回りそれぞれで、

$$\phi_{\pm} = \int_0^d k_{\pm} dl \quad (14)$$

と書ける。これより  $k_+ < k_-$  であるから  $\phi_+ < \phi_-$  である。これは左回り円偏光の方が少ない位相変化でプラズマを抜けることを示しており、つまり位相速度が大きいことを示している\*1。

## 3 Rotation Measure[宇宙磁場]

Eq.(14) より、左回りと右回りの電磁波の位相の進みの差  $\Delta\phi = \phi_- - \phi_+$  は、磁場の電磁波の進行方向成分  $B_{\parallel}$  を用いると以下のように書ける。

$$\Delta\phi = \frac{4\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n_e B_{\parallel} dl = \frac{e^3 \lambda^2}{\pi m_e^2} \int_0^d n_e B_{\parallel} dl = \lambda^2 \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{4\pi^2} \int_0^d n_e B_{\parallel} dl \quad (15)$$

\*1  $v_{\text{phase}} = \omega/k \propto k^{-1} \propto \lambda$

プラズマに入射した電磁波がある方向に直線偏光していたとする。このとき入射直前の電磁波について、簡単のために  $\delta_1 = \delta_2 = 0, a_1 = 0$  とすると、入射電磁波は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\sqrt{2}} a_1 (\boldsymbol{\epsilon}_+ - \boldsymbol{\epsilon}_-) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (16)$$

と書ける。この時偏光面の元の位置からの角度は (時計回り正) Eq.(15) の半分であり、

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{1}{2}\Delta\phi = \lambda^2 \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{8\pi^2} \int_0^d n_e B_{\parallel} dl \\ &= \frac{\lambda^2}{[\text{m}^2]} \frac{(5.641460119565182 \times 10^4)^2 (17.5882012) (3.0856775807 \times 10^{16})}{8\pi^2 (2.99792458 \times 10^8)} \int_0^{d/[\text{pc}]} \left( \frac{B_{\parallel}}{[\mu\text{G}]} \right) \left( \frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]} \right) dl \quad [\text{rad}] \\ &= 0.812 \left( \frac{\lambda}{[\text{m}]} \right)^2 \int_0^{d/[\text{pc}]} \left( \frac{B_{\parallel}}{[\mu\text{G}]} \right) \left( \frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]} \right) dl \quad [\text{rad}] = \frac{\text{RM}}{[\text{rad m}^{-2}]} \left( \frac{\lambda}{[\text{m}]} \right)^2 \quad [\text{rad}] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{RM} = 0.812 \int_0^{d/[\text{pc}]} \left( \frac{B_{\parallel}}{[\mu\text{G}]} \right) \left( \frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]} \right) dl \quad [\text{rad m}^{-2}] \quad (18)$$

と書ける。この時  $\lambda$  は [m]、 $d$  は [pc]、 $G_{\parallel}$  は [ $\mu\text{G}$ ]、 $n_e$  は [ $\text{cm}^{-3}$ ] である。

宇宙を貫くような磁場は存在するであろうか。あったとしたらどれくらいの強度であろうか。Vallee, J. P ApJ Vol.360 (1990) では rotation measure の観測結果から、この様な磁場に対する制限を調べた。

### 3-1

結果そのような Faraday rotation 成分は受からなかった。この結果から、宇宙全体を貫くような磁場が存在したとしても、それによる rotation measure は  $2 [\text{rad m}^{-2}]$  以下であるという制限が得られた。宇宙の半径を 100 億光年、宇宙の電子密度は  $n_e = 2 \times 10^{-7} [\text{cm}^{-3}]$  として、その様な宇宙磁場の強度の上限を Gauss 単位で答えよ。

#### 3-1 解答

$$2 \geq 0.812 \cdot (2 \times 10^{-7}) (10^{10} \cdot 0.3066) \left( \frac{B}{[\mu\text{G}]} \right); \quad \therefore B \leq 0.00401672 = 0.004 [\mu\text{G}] \sim 10^{-9} [\text{G}]$$

### 3-2

$2 [\text{rad m}^{-2}]$  の Faraday rotation を引き起こす宇宙磁場が存在するとして、波長 10 [cm] と波長 1 [cm]、及び波長 1 [mm] での Faraday rotation に依る回転角の差は幾らか。

#### 3-2 解答

$$\Delta\phi_{\lambda=10\text{cm}} = 2 (10^{-1})^2 = 2 \times 10^{-2} [\text{rad}]; \quad \Delta\phi_{\lambda=1\text{cm}} = 2 (10^{-2})^2 = 2 \times 10^{-4} [\text{rad}]$$

$$\Delta\phi_{\lambda=1\text{mm}} = 2 (10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-6} [\text{rad}]$$

$$\Delta_1 = \Delta\phi_{\lambda=10\text{cm}} - \Delta\phi_{\lambda=1\text{cm}} = 2 \times 10^{-2} (1 - 10^{-2}) = 1.98 \times 10^{-2} [\text{rad}]$$

$$\Delta_2 = \Delta\phi_{\lambda=1\text{cm}} - \Delta\phi_{\lambda=1\text{mm}} = 2 \times 10^{-4} (1 - 10^{-2}) = 1.98 \times 10^{-4} [\text{rad}]$$

### 3-3

各天体は天体に付随した磁場や、たまたま手前にいた天体による Faraday rotation を受ける。この様な天体固有の成分が混ざっている中、どのようにしたら宇宙磁場による Faraday rotation 回転の成分だけを引き出すことが出来るであろうか。

#### 3-3 解答

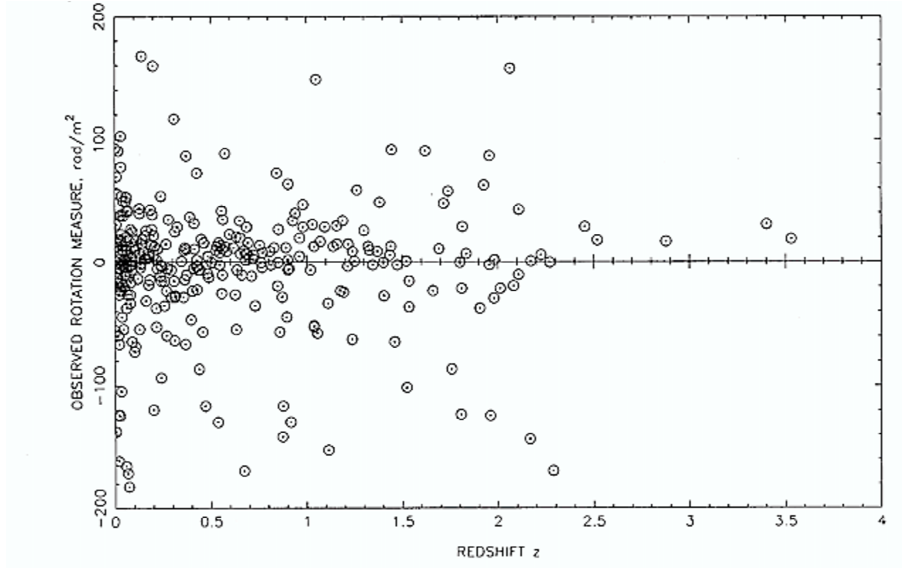


図3 The observed RM for quasars and galaxies vs. redshift, 309 objects over the whole sky.

各天体は天体に付随した磁場や、たまたま手前にいた天体による Faraday rotation はお互いに無関係である。また RM は磁場の向きによってその正負が変化するし、大きさは距離に比例する。つまり全天一様、様々な深さで観測した場合、宇宙磁場起源以外の作用は平均して零になってしまうと考えられる。もし平均が有限の作用が残っていたとすれば、それは宇宙磁場の効果であると言える<sup>\*2</sup>。上図について

$$RM_{\text{obs}} = a + bz \quad (19)$$

とフィッティングを行うことで、 $a$  : our galaxy の効果、 $b$  : 距離変化による効果とに分けることが出来、 $b$  を調べることで宇宙磁場を見積もることが出来る。この図からは  $a = +0.2 \pm 0.2$ ,  $b_{\text{max}} = 1.5 [\text{rad m}^{-2}]$  と求められる。

各視線方向での観測精度を上げることを考える。Eq.(17) より、同じ点を観測した場合、 $\Delta\theta$  は  $\lambda^2$  に比例しているため、波長毎に  $\Delta\theta$  の値は変化する。Eq.(6) より  $\Delta t_p$  も同様な波長依存性を持つので、 $\Delta\theta, \Delta t_p$  共に、多波長観測をすることで精度を上げることが出来る。

$$\frac{d(\Delta\theta)/d\lambda}{d(\Delta t_p)/d\lambda} = \frac{\left(\frac{\text{RM}}{[\text{rad m}^{-2}]}\right)}{4.62 \times 10^{-2} \left(\frac{\text{DM}}{[\text{pc cm}^{-3}]}\right)} = \frac{0.812 \int_0^{d/[\text{pc}]} \left(\frac{B_{\parallel}}{[\mu\text{G}]}\right) \left(\frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]}\right) dl}{\int_0^{d/[\text{pc}]} \left(\frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]}\right) dl}$$

$$\therefore \langle B_{\parallel} \rangle = 5.69 \times 10^{-2} \frac{d(\Delta\theta)/d\lambda}{d(\Delta t_p)/d\lambda} [\mu\text{G}] = 5.69 \times 10^{-2} \frac{d(\Delta\theta)/d\omega}{d(\Delta t_p)/d\omega} [\mu\text{G}] \quad (20)$$

<sup>\*2</sup> 統計的な扱いをすれば、 $\pm 1\sigma$  程度の上限を与えることになる。

## 4

---

二つの電子がお互いにクーロン力で相互作用している運動を考える。

### 4-1

この系の dipole moment の時間二階微分が零であることを示せ。

#### 4-1 解答

この系の dipole moment は定義より

$$\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = -e \sum_i \mathbf{r}_i = -e(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$$

となる。また重心  $\mathbf{r}$  は

$$\mathbf{r} = \frac{m_e \mathbf{r}_1 + m_e \mathbf{r}_2}{m_e + m_e} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$

と書ける。よって

$$\mathbf{d} = -2e\mathbf{r}$$

であるから、両辺を時間で二回微分すると

$$\dot{\mathbf{d}} = -2e\dot{\mathbf{r}}$$

を得る。

二つの電子がお互いにクーロン力で影響を及ぼしあい運動している系では、重心系から見ればクーロン力は内力である為、重心系に外力が働かない限り、重心系は等速直線運動をするだけである。よって  $\ddot{\mathbf{r}} = 0$  であるから、 $\ddot{\mathbf{d}} = 0$  となり、この系に於いて dipole moment の時間二階部分は零であることが分かる。

# 5

## 5-1

ガスの塊に視線方向と直交する方向から光が当たった結果の電子の Thomson 散乱光を観測することを考える。入射光の強度分布が図左右に示した様な場合、観測される散乱光の偏光分布を答えよ。

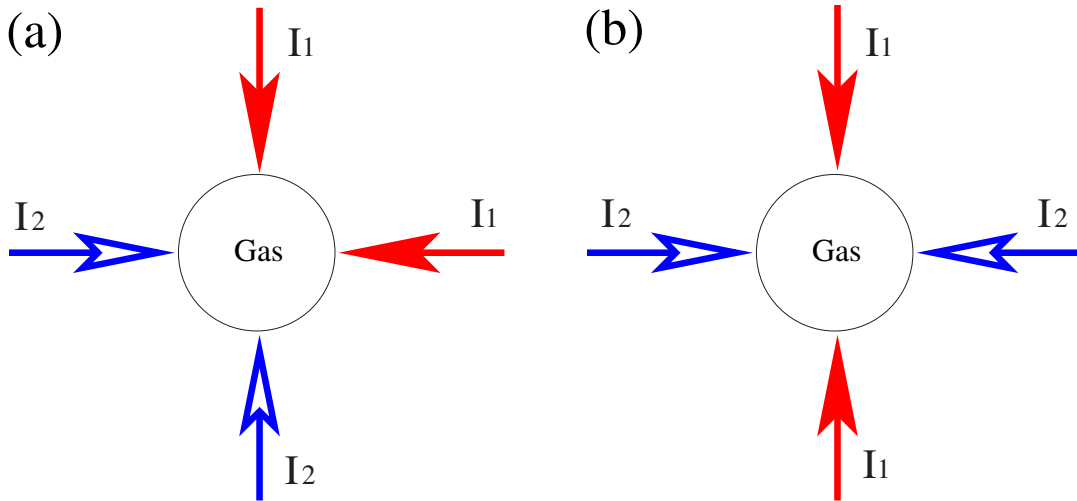


図4 左:(a)、右(b)。何れも強度は  $I_1 > I_2$  である。

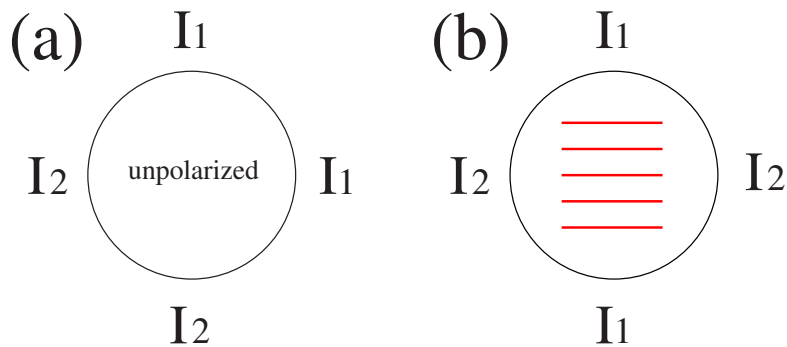
### 5-1 解答

散乱による偏光を考える場合、

1. 偏光は Thomson 散乱による。
2. 無偏光状態を incoherent な直線偏光の重ね合わせで表現する。
3. 光は横波である。
4. 散乱後は incoherent な重ね合わせであり、強さが卓越した成分方向の直線偏光が観測される。

を元に偏光を考える。これを元に散乱の様子を図示したのが次頁図である。

(a) の場合、散乱後は incoherent な強さの等しい成分の重ね合わせとなるので、偏光は観測されない。一方 (b) の場合は散乱後は incoherent な強さの違う成分の重ね合わせとなるので、卓越している成分、つまり  $I_1$  が卓越する方向の直線偏光が観測される。(a) は dipole、(b) は quadrupole に対応している。







## 6 Relativistic beaming effect

輻射場の電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{\kappa^3 R} \right]_{\text{ret}} ; \quad \kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (21)$$

と書けた。Relativistic な状況  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \gg 1$  を考える。 $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = \beta \cos \theta$  とする。

6-1

$\beta$  を  $\gamma$  で書き換えて  $\kappa$  を  $\theta$  の関数として表し、図示せよ。但し

$$\theta \ll 1 \text{ として、} \cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}; \quad \gamma \gg 1 \text{ として、} \beta \sim 1 - \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (22)$$

6-1 解答

$$\begin{aligned} \kappa(\theta) &= 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \beta \cos \theta = 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\theta^2}{2}\right) + O\left(\frac{\theta^2}{\gamma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) + O\left(\frac{\theta^2}{\gamma^2}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

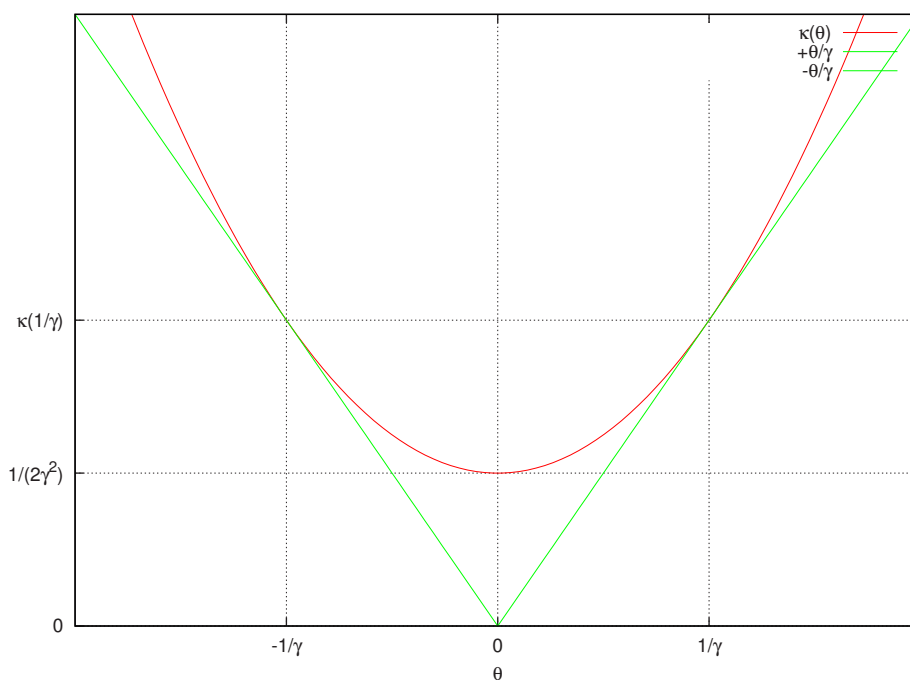


図5  $\gamma \gg 1, \theta \ll 1$  の場合の  $\kappa(\theta)$

6-2

$\theta = 0$  の時の電場の強度が、 $\theta = \pi$  の時の強度の約  $16\gamma^4$  倍になることを示せ。

6-2 解答

$$\frac{|\mathbf{E}|_{\theta=0}}{|\mathbf{E}|_{\theta=\pi}} = \frac{\left| \{-\kappa\dot{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\} / \kappa^3 \right|_{\theta=0}}{\left| \{-\kappa\dot{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\} / \kappa^3 \right|_{\theta=\pi}} \sim \frac{\kappa_{\theta=\pi}^2}{\kappa_{\theta=0}^2} = \frac{(1+\beta)^2}{(1-\beta)^2} = 2^2 \gamma^4 \left(2 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)^2$$

$$\sim 2^4 \gamma^4 = 16\gamma^4$$

6-3

以上の結果から放射強度が電荷の運動方向に集中することが分かる。集中が起きる角度範囲が

$$\theta < \frac{1}{\gamma} \tag{24}$$

であることを 1 の結果から示せ。

6-3 解答

1,2 より

$$|\mathbf{E}|_{\gamma \gg 1} \propto \kappa^{-2} \tag{25}$$

であるから、

$$|\mathbf{E}|_{\theta=x/\gamma} \sim \frac{4\gamma^2}{(1+x^2)^2}, \tag{26}$$

と書ける。この時値が大きいのは  $0 \leq x < 1$  の範囲であるので、集中が起きる角度範囲は Eq.(24) となる。

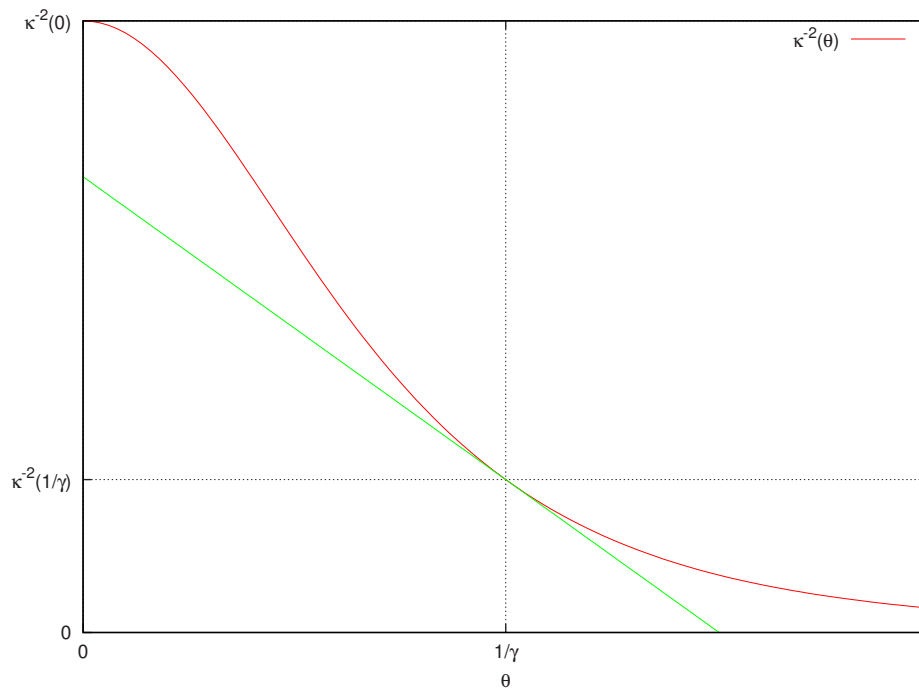


図 6  $|\mathbf{E}|_{\gamma \gg 1} \propto \kappa^{-2}$

6-4

上記の結果を相対論的ビーミング効果という。どうしてこのようなことが起きるのか、時空図を用いて説明せよ。

6-4 解答

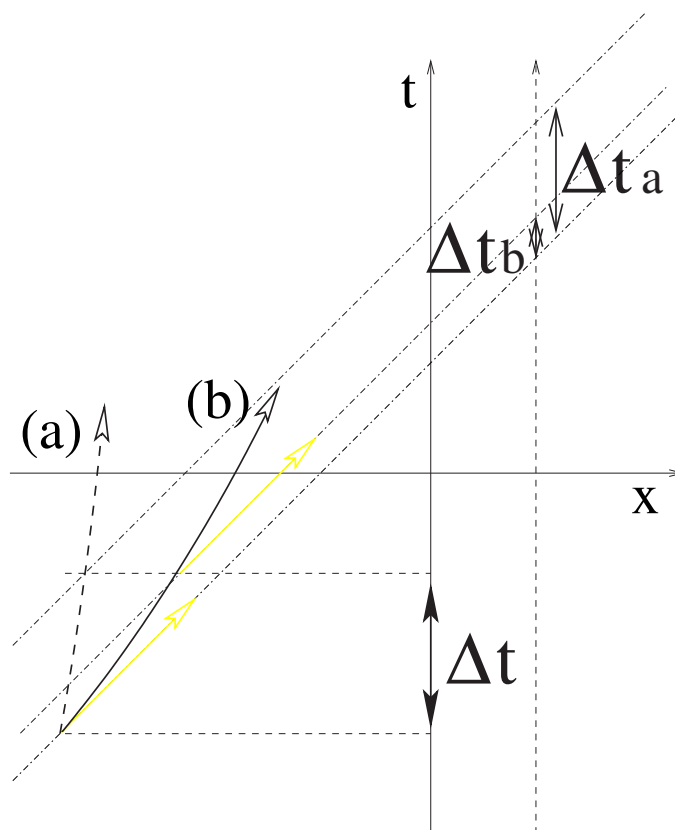


図 7 相対論的な運動をしている粒子の時空図

電磁波は光速  $c$  という有限の速度で時空上を運動しているので、粒子が  $\Delta t$  の間に発した電磁波をそれよりも短い時間間隔で観測した場合、電場強度は大きくなる。これが相対論的ドップラー効果である。

時空図上で (a) は非相対論的な粒子、(b) は相対論的な粒子である。(a) の場合、粒子が  $\Delta t$  の間に発した電磁波を  $\Delta t_a$  の間に観測することになるが、図より  $\Delta t \sim \Delta t_a$  であるから、ビーミングは起こらない。一方 (b) の場合は、 $\Delta t \gg \Delta t_b$  であるので、ビーミングが起きることが分かる。

7

7-1

四元ポテンシャルを

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) = (\phi, A^1, A^2, A^3) \tag{27}$$

で定義する。次のように定義される二回のテンソルの全ての成分を求めよ。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (28)$$

但し、メトリックは

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

とする。

7-1 解答

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = (-\phi, \mathbf{A}) = (-\phi, A_1, A_2, A_3); \quad A^i = A_i \quad (30)$$

- time-time component

$$F_{00} = \partial_0 A_0 - \partial_0 A_0 = 0 \quad (31)$$

- time-space component

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \frac{\partial A_i}{\partial(ct)} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \left( \nabla_i \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) = -E_i \quad (32)$$

$$F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -F_{0i} \quad (33)$$

- space-space component

$$F_{ii} = 0 \quad (34)$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = [\nabla \times \mathbf{A}]_k = \epsilon_{ijk} B_k \quad \text{as } i \neq j \quad (35)$$

$$\therefore F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

## 8

電磁場中を相対論的な運動をする粒子に働く Lorentz 力を求める。Lorentz 力の満たすべき要請は、

1. 相対論的に共変
2. 非相対論的極限でこれまでの Lorentz 力と一致

である。これらの要請から、Lorentz 力は

$$F^\mu = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu U^\nu; \quad U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\nu}{dt} = \gamma(c, \mathbf{u}); \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}} \quad (37)$$

と書ける。ここで  $U^\nu$  は四元速度である。粒子の電荷は  $e$  とした。

8-1

Lorentz 力の時間成分、空間成分を求めよ。

### 8-1 解答

- time component

$$F^0 = \frac{e}{c} F^0_{\nu} U^{\nu} = \frac{e}{c} \eta^{0\alpha} F_{\alpha\nu} U^{\nu} = \frac{e}{c} \eta^{00} F_{0\nu} U^{\nu} = \frac{e}{c} \eta^{00} F_{0i} U^i = \gamma \frac{e}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \quad (38)$$

- space component

$$F^i = \frac{e}{c} F^i_{\nu} U^{\nu} = \frac{e}{c} \eta^{i\alpha} F_{\alpha\nu} U^{\nu} = \frac{e}{c} \eta^{ii} F_{i\nu} U^{\nu} = \frac{e}{c} F_{i0} U^0 + \frac{e}{c} F_{ij} U^j = \frac{e}{c} (\gamma c E_i + \epsilon_{ijk} B^k U^j) = \gamma e \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right]_i \quad (39)$$

### 8-2

要請 2 を満たすことを確かめよ。

### 8-2 解答

非相対論極限  $\gamma \rightarrow 1$  では、Eq.(38) は

$$F^0 = \frac{e}{c} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \quad (40)$$

と書け、 $e\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$  は電磁場の仕事率を表している\*3。Eq.(39) は

$$F^i = e \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right]_i \quad (41)$$

と書ける。以上時間、空間成分はこれまでの Lorentz 力の場合と全く一致している。

### 8-3

一様磁場中を、相対論的に運動する電子の運動方程式の空間成分が、

$$\frac{d}{dt} (\gamma_e \mathbf{u}) = -\frac{e}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (42)$$

と書け、空間成分が

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_e c^2) = -e \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (43)$$

で与えられることを示せ。

### 8-3 解答

電磁場中の電子の運動方程式は

$$\frac{dP^{\mu}}{d\tau} = -\frac{e}{c} F^{\mu}_{\nu} U^{\nu} \quad (44)$$

と書ける。ここで  $P^{\mu}$  は四元運動量で、四元速度を用いて

$$P^{\mu} = m_e U^{\mu} = (\gamma_e m_e c, \gamma_e m_e \mathbf{u}) \quad (45)$$

と書ける。 $\mathbf{E} = 0$  で Eq.(44) の時間成分は

$$\frac{dP^0}{d\tau} = \gamma_e \frac{d}{dt} (\gamma_e m_e c) = F^0 = -\gamma_e \frac{e}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) = 0$$

\*3 time component であるからエネルギーの時間微分の際に  $c$  が出てくるため、両辺で相殺する。

となるので Eq.(43) を得る。同様に空間成分は

$$\frac{dP^i}{d\tau} = \gamma_e \frac{d}{dt} (\gamma_e m_e \mathbf{u}) = F^i = -\gamma_e \frac{e}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_i$$

となるので、Eq.(42) を得る。

## 8-4

一様磁場中の相対論的電子は角振動数

$$\omega_B = \frac{\omega_{ce}}{\gamma_e} \quad (46)$$

の円運動をすることを示せ。電子の磁場に平行な速度成分は零とした。

### 8-4 解答

電子の磁場に平行な速度成分が零の場合、非相対論的電子の運動方程式は

$$m_e \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{e}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

である。この時電子の運動は、磁場に垂直な面内での円運動であり  $\omega_B = eB/(m_e c) = \omega_{ce}$  となる。

この運動が相対論的な場合を考える。Eq.(43) より、

$$\frac{d}{dt} (\gamma_e m_e c^2) = m_e c^2 \frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \therefore \gamma_e = \text{const}$$

であるから、相対論的な場合の運動方程式は、

$$m_e \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{e}{c} \gamma_e^{-1} \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

となる。右辺に  $\gamma_e^{-1} = \text{const}$  がかかっている以外、非相対論的な場合と一致するので、この時の電子の運動も、磁場に垂直な面内での円運動となり、 $\omega_B = \omega_{ce}/\gamma_e$  となることが分かる。

## 8-5

この円運動の半径を求めよ。

### 8-5 解答

$$r = \frac{|\mathbf{u}|}{\omega_B} = \frac{\gamma |\mathbf{u}|}{\omega_{ce}} = \frac{\gamma_e m_e c |\mathbf{u}|}{eB} \quad (47)$$

## 9

相対論的ビーミング効果で磁場の周りを回転する電子からの放射は、進行方向を中心とした図のようなコーンの中に集中する。観測者は視線方向がこのコーン内に入っている時のみ電子からの強い放射を観測すると考えて良い。これを放射コーンと呼ぶ。従って、観測者は灯台からの光の様に、規則的に強いパルス電磁波を観測することになる。

9-1

観測者の視線方向電子の放射コーンに入った時間  $t_1$  と、でる時間  $t_2$  の間隔  $\Delta t = t_2 - t_1$  が

$$\Delta t = \frac{2}{\gamma\omega_B} = \frac{2}{\omega_{ce}} \quad (48)$$

で与えられることを示せ。

9-1 解答

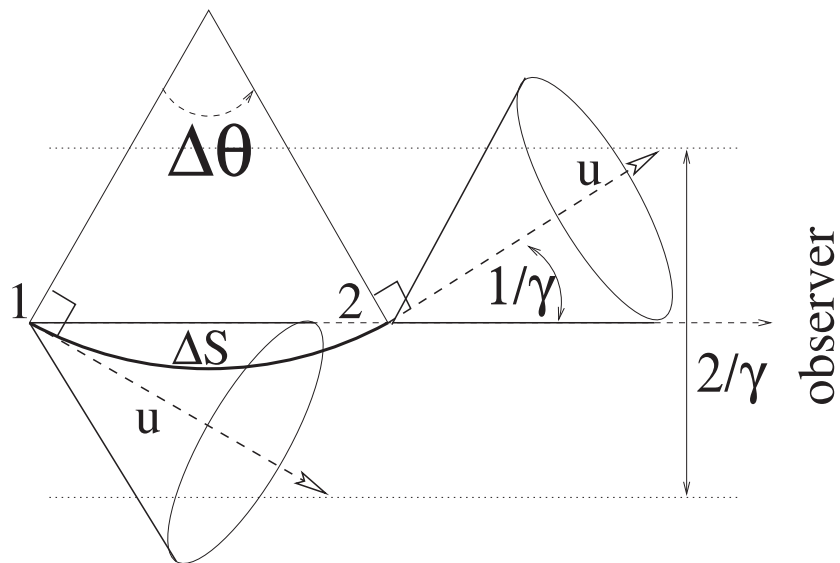


図 8 放射コーンと時間間隔

幾何学的な性質より、

$$\Delta\theta = \frac{2}{\gamma}$$

である。よって観測者の視線が電子の放射コーンに入った時間  $t_1$  とでる時間  $t_2$  の間隔  $\Delta t$  は、

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{2/\gamma}{\omega_B} = \frac{2}{\omega_{ce}}$$

となる。

9-2

時間間隔 Eq.(48) は観測者にとっては

$$\Delta t^0 \sim \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right) \sim (\gamma^2 \omega_{ce})^{-1} \quad (49)$$

となることを示せ。但し  $v$  は電子の速度、 $\gamma \gg 1$  の為放射コーンが観測者の視線方向に入っている間は、電子の速度はほぼ視線方向と平行であるとせよ。



### 9-2 解答

電磁波は有限の時間をかけて空間を伝播するので、電磁波の放射間隔とそれを観測する観測者の時間間隔との間には、差がでてくる。図より点 1 を通過した電子は、点 2 に到達するまでに

$$\Delta S = r\Delta\theta = \frac{2r}{\gamma} = \frac{2u}{\omega_{ce}}$$

だけ移動するので、点 1 で放射された電磁波は、点 2 で放射される電磁波に比べ、観測者に届くまでに  $\Delta S/c$  だけよけいに時間がかかることになる。この分だけ  $\Delta t$  に比べて時間間隔が短くなるので、観測者にとっての時間間隔を  $\Delta t^0$  とすると

$$\Delta t^0 \sim \Delta t - \frac{\Delta S}{c} = \frac{2}{\omega_{ce}} - \frac{2}{\omega_{ce}} \frac{v}{c} = \frac{2}{\omega_{ce}} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right) \sim \frac{2}{\omega_{ce}} \frac{1}{2\gamma^2} = (\gamma^2 \omega_{ce})^{-1}$$

となる。

### 9-3

観測の不確定性原理から、観測されるスペクトルが

$$0 < \nu < \gamma^2 \omega_{ce} \quad (50)$$

の範囲に広がることを示せ。

### 9-3 解答

不確定性原理より

$$\Delta t \Delta \nu > 1$$

なる関係が成り立っている。依って前問の結果より観測されるスペクトルは

$$0 < \Delta \nu < \gamma^2 \omega_{ce}$$

の範囲に広がることになる。

### 9-4

磁場が  $1 [\mu\text{G}]$  の時、 $100 [\text{TeV}]$  及び  $10 [\text{GeV}]$  の運動エネルギーを持つ電子からの放射の最大周波数は幾らか。Hz 及び eV 単位で答えよ。

### 9-4 解答

運動エネルギー  $K$  は全エネルギー  $E$  から静止質量エネルギーを差し引いたものとし

$$K = E - m = (m^2 + p^2)^{1/2} - m \quad (51)$$

と書ける。これより運動量は  $K$  を用いて

$$E^2 = m^2 + p^2 = (m + K)^2 = m^2 + 2mK + K^2; \quad \therefore p^2 = K^2 + 2mK \quad (52)$$

と書ける。また速度  $u$  は正準方程式より

$$u = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{E}; \quad u^2 = \frac{p^2}{E^2} = \frac{K^2 + 2mK}{(K + m)^2} \quad (53)$$

と書ける。よってこの時の Lorentz factor は

$$\gamma^2 = (1 - u^2)^{-1} = \left[ 1 - \frac{K^2 + 2mK}{(K + m)^2} \right]^{-1} = \left( \frac{m + K}{m} \right)^2 = \left( 1 + \frac{K}{m} \right)^2 \quad (54)$$

となる。

3の詳細な解析より  $\nu$  は

$$\nu = \frac{3}{4} \gamma^2 \omega_{ce} \quad (55)$$

と書ける。サイクロトロン角周波数は、

$$\omega_{ce} = 17.5882012 \left( \frac{B}{[\mu\text{G}]} \right) [\text{Hz}]$$

であるので、具体的に値を代入すると

$$\nu = 1.31912 \left( \frac{\gamma}{10^4} \right)^2 \left( \frac{B}{[\mu\text{G}]} \right) [\text{GHz}] \approx 1.4 \left( \frac{\gamma}{10^4} \right)^2 \left( \frac{B}{[\mu\text{G}]} \right) [\text{GHz}] \quad (56)$$

と書ける。1.4 [GHz] は波長にすると  $\lambda = 21$  [cm] である。これは中性水素のスピン遷移による放射で、電波領域で重要な波長である。

以上を踏まえ、問題の場合を考えると、Eq.(54) より、

- $K = 100$  [TeV] の場合

$$\nu = 5 \times 10^{17} [\text{Hz}], \quad h\nu = 2 \times 10^3 [\text{eV}]$$

- $K = 10$  [GeV] の場合

$$\nu = 5 \times 10^9 [\text{Hz}], \quad h\nu = 2 \times 10^{-5} [\text{eV}]$$

となる。