天体物理学弐 課題番号壱拾番
解答例
[20060629 出題]

Yuji Chinone

1 Compton Scattering

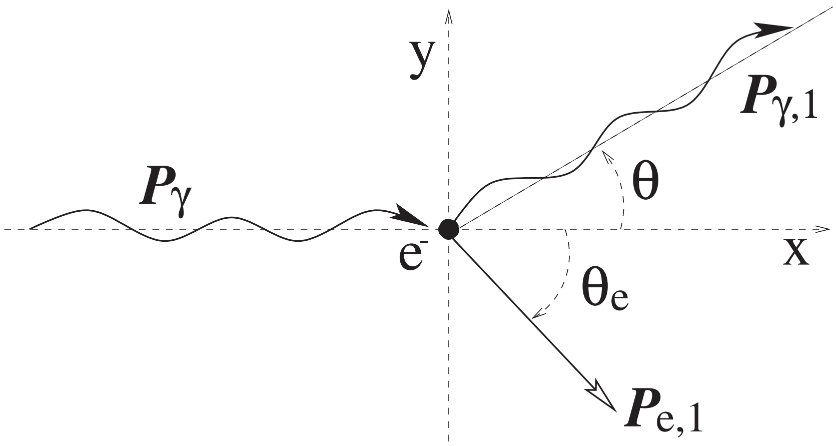

図 1 静止電子と光子の散乱

図のような光子と電子の衝突が起きた。

1-1

衝突前 (ϵ) と衝突後 (ϵ_1) の光子のエネルギー間の関係を求めよ。またこれを波長で書いた場合どうなるか。

1-1 解答

四元運動量で考える。散乱後の値には添え字 1 を付けると

$$P^{\mu}_{\gamma} = \left(\frac{\epsilon}{c},\ \frac{\epsilon}{c},\ 0,\ 0 \right) \tag{1}$$

$$P^{\mu}_{\gamma,1} = \left(\frac{\epsilon_1}{c},\ \frac{\epsilon_1}{c}\cos\theta,\ \frac{\epsilon_1}{c}\sin\theta,\ 0 \right) \tag{2}$$

$$P^{\mu}_{e} = \left(m_e c^2\ 0,\ 0,\ 0 \right) \tag{3}$$

$$P^{\mu}_{e,1} = \left(\gamma m_e c^2,\ \gamma m_e v\cos\theta_e,\ -\gamma m_e v\sin\theta_e,\ 0 \right) \tag{4}$$

と書ける。四元運動量保存より、

$$P^{\mu}_{\gamma} + P^{\mu}_{e} = P^{\mu}_{\gamma,1} + P^{\mu}_{e,1} \quad \Longrightarrow \quad P^{\mu}_{e,1} = P^{\mu}_{\gamma} + P^{\mu}_{e} - P^{\mu}_{\gamma,1} \tag{5}$$

と書けるの、この両辺の二乗を計算すると

$$\begin{aligned}P^{\mu}_{e,1}P_{e,1\mu} = -m_e^2c^2 &= P^{\mu}_{\gamma}P_{\gamma\mu} + P^{\mu}_{e}P_{e\mu} + P^{\mu}_{\gamma,1}P_{\gamma,1\mu} + 2P^{\mu}_{\gamma}P_{e\mu} - 2P^{\mu}_{e}P_{\gamma,1\mu} - 2P^{\mu}_{\gamma}P_{\gamma,1\mu} \\ &= -m_e^2c^2 + 2\left(-m_e\epsilon\right) - 2\left(-m_e\epsilon_1\right) - 2\frac{\epsilon\epsilon_1}{c^2}\left(-1+\cos\theta\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1+\dfrac{\epsilon}{m_ec^2}\left(1-\cos\theta\right)} \tag{6}$$

を得る。$\epsilon = h\nu = hc/\lambda$ を用いて、波長に直すと、

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda_c\left(1-\cos\theta\right)\ ;\quad \lambda_c = \frac{h}{m_ec} = 2.4263\times10^{-10}\,[\mathrm{cm}] = 0.024263\,[\text{Å}] \tag{7}$$

となる。

2

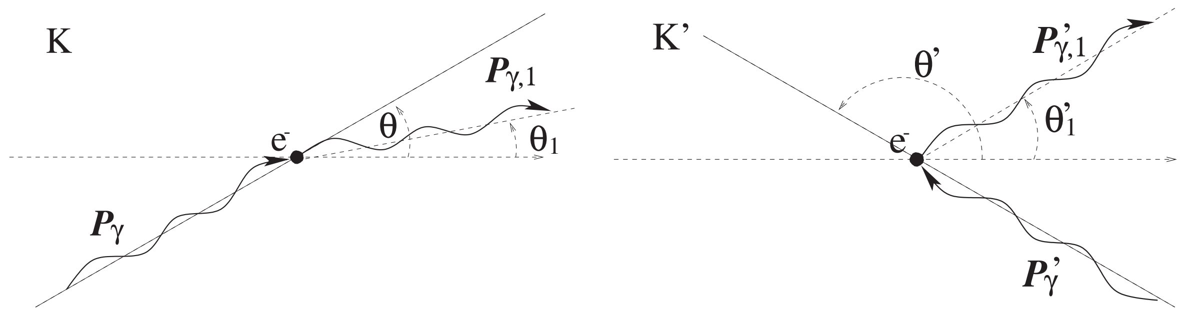

図 2　動いている電子との Compton Scattering

図に示したような動いている電子と光子の散乱を考える。以下では実験室系を K、衝突前の電子静止系を K' とし、他の物理量にも同様に'(prime) を付けることにする。K' 系では $\epsilon' \ll m_ec^2$ とする。衝突前の電子の速度を $v = \beta c$ とし、Lorentz factor を $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$ と書くことにする。電子の運動方向は x 軸方向とする。

2-1

K 系で速度 v で動いている電子を考える。電子が時刻 $t \sim t + dt$ 間に放出した電磁波は、K 系に静止した観測者が観測すると時間間隔は dt_{obs} である。dt と dt_{obs} 間に成り立つ関係式を求めよ。

2-1 解答

時空図より、

$$t_{\mathrm{obs},1} = t_1 + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}}{c}\ ;\quad t_{\mathrm{obs},2} = t_2 + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}}{c} - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\left(t_2 - t_1\right)\ ;$$

$$\therefore\ dt_{\mathrm{obs}} = t_{\mathrm{obs},2} - t_{\mathrm{obs},1} = \left(1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)dt \tag{8}$$

を得る。

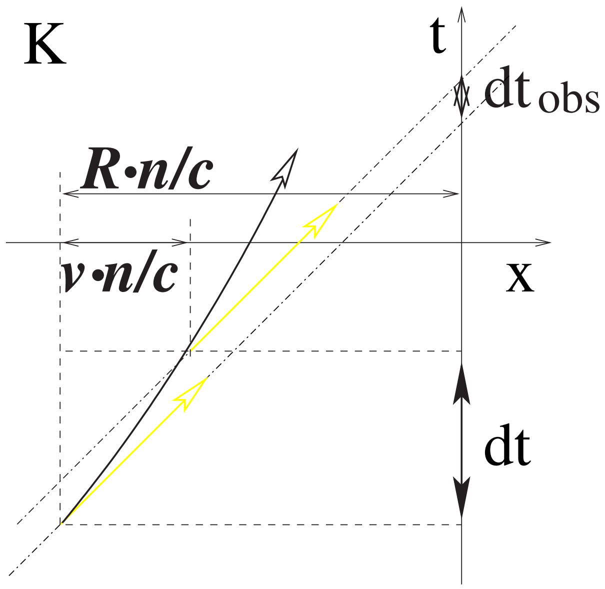

図 3　時空図

2-2

K 系での時間間隔 dt を、K' 系で測定した時間間隔を dt' としたとき、これらの関係を求めよ。

2-2 解答

Lorentz 変換より、K 系から見て運動している K' 系の時計の進みが $\gamma \geq 1$ 倍遅くなった様に見える。よって、

$$dt' = \gamma^{-1} dt\,; \quad \gamma \geq 1 \tag{9}$$

となる。

2-3

dt を電磁波の一周期と考えることで次の関係式を示せ。

$$\epsilon' = \epsilon\gamma(1-\beta\cos\theta)\,; \quad \epsilon_1 = \epsilon_1'\gamma(1+\beta\cos\theta_1') \tag{10}$$

2-3 解答

Eq.(8),(9) より

$$dt_{\rm obs} = (1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\,dt = \frac{h}{\epsilon},\ dt'_{\rm obs} = dt' = \gamma^{-1}dt = \frac{h}{\epsilon'}\,; \quad \therefore\ \epsilon' = \frac{\gamma h}{dt} = \gamma(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\,\epsilon \tag{11}$$

となるので、Eq.(10) の左側を得る。右側の式はこれの逆変換を行うことで得られる。

2-4

1 の結果を Taylor 展開しろ。

2-4 解答

$$\epsilon_1' = \epsilon' \left[1 + \frac{\epsilon'}{m_e c^2} (1 - \cos\Theta) \right]^{-1} = \epsilon' \left[1 - \frac{\epsilon'}{m_e c^2} (1 - \cos\Theta) \right] \sim \epsilon' ; \quad \because \ \epsilon' \ll m_e c^2 \tag{12}$$

ここで Θ は K' 系で見た入射光子と散乱光子とが成す角である。K' 系での入射光子と散乱光子それぞれの単

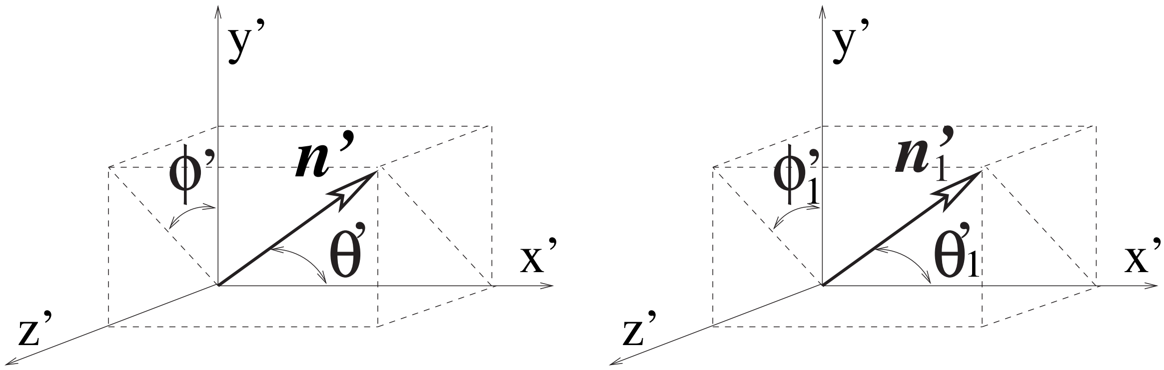

図 4　K' 系に於ける光子の入射方向、散乱方向単位ベクトル

位ベクトルを $\mathbf{n}', \mathbf{n}_1'$ とすれば、図より

$$\mathbf{n}' = (\cos\theta', \sin\theta' \cos\phi', \sin\theta' \sin\phi') \tag{13}$$
$$\mathbf{n}_1' = (\cos\theta_1', \sin\theta_1' \cos\phi_1', \sin\theta_1' \sin\phi_1') \tag{14}$$

と書けるので、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}_1' &= \cos\Theta \\ &= \cos\theta' \cos\theta_1' + \sin\theta' \sin\theta_1' \cos\phi' \cos\phi_1' + \sin\theta' \sin\theta_1' \sin\phi' \sin\phi_1' \\ &= \cos\theta' \cos\theta_1' + \sin\theta' \sin\theta_1' \cos(\phi' - \phi_1') \end{aligned}$$

$$\therefore \ \cos\Theta = \cos\theta' \cos\theta_1' + \sin\theta' \sin\theta_1' \cos(\phi' - \phi_1') \tag{15}$$

を得る。

2-5

以上から散乱後の光子のエネルギーが

$$\epsilon_1 \sim \gamma^2 (1 - \beta\cos\theta)(1 + \beta\cos\theta_1') \tag{16}$$

となることを示せ。$\theta = \pi, \theta_1' = 0$ の時、光子のエネルギー変化量 $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon$ が最大となる。そのときの ϵ_1 を求めよ。

2-5 解答

Eq.(10) より、Eq.(16) である。これに $\theta = \pi, \theta_1' = 0$ を代入すると

$$\epsilon_1 \sim \gamma^2 (1 + \beta)^2 \epsilon \tag{17}$$

となる。

2-6

電子の Lorentz factor が $\gamma \gg 1$ であるとき、衝突前後で光子のエネルギーが $4\gamma^2$ 倍になることを示せ。

2-6 解答

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon} \sim \gamma^2 (1+1)^2 = 4\gamma^2 \tag{18}$$

2-7

非相対論的な速度 $\beta \ll 1$ で運動する電子との散乱を考える。衝突前後の光子のエネルギー変化が $\Delta\epsilon = 2\beta\epsilon$ であることを示せ。

2-7 解答

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon &= \gamma^2 (1+\beta)^2 \epsilon = \left(1+\beta^2\right)(1+\beta)^2 \epsilon - \epsilon \\ &= 2\beta\epsilon + \mathcal{O}(\beta^4)\end{aligned} \tag{19}$$

2-8

$\epsilon = 3 \times 10^{-4}$ [eV] の光子が電子と衝突してエネルギーが $\epsilon_1 \sim 10$ [keV] になった。電子の Lorentz factor は幾らか。

2-8 解答

散乱前後で $\mathcal{O}(10^8)$ 倍エネルギーが変化しているので、散乱前の電子について $\gamma \gg 1$ であり、Eq.(18) が成り立つ。よって

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10 \times 10^3}{3 \times 10^{-4}}} = 2886.75 \sim 3 \times 10^3 \tag{20}$$

を得る。

2-9

$\epsilon = 3 \times 10^{-4}$ [eV] の光子が $k_B T = 5$ [keV] で熱運動する電子と衝突した。この時光子のエネルギー変化量を求めよ。

2-9 解答

5 [keV] $\ll m_e = 0.51 \times 10^3$ [keV] より、電子は非相対論的な運動をしている。よって Eq.(19) より

$$\Delta\epsilon \sim 2\epsilon \left(\frac{3k_B T}{m_e c^2}\right)^{1/2} = 2 \cdot 3 \times 10^{-4} \left(\frac{3 \cdot 5 \times 10^3}{0.51 \times 10^6}\right)^{1/2} = 0.000102899 \sim 1 \times 10^{-4} \text{ [eV]} \tag{21}$$

を得る。

3　制動放射

3-1

温度 $k_BT = 10$ [keV]、電子個数密度 $n_e = 10^{-3}$ [cm^{-3}] の電子プラズマが、半径 1 [Mpc] = 3×10^{24} [cm] の球内に一様に分布している天体を考える。この天体が観測者から距離 100 [Mpc] 離れた所に存在するとする。この時この天体から熱制動放射により放射される 1 [keV] 以上のエネルギーを持った光子を観測する。1 [cm^2] 当たり、単位時間当たりに観測者に到達する 1 [keV] 以上の光子の数を求めよ。但し電子の速度分布で平均化したガウンとファクターを 1 とし、$\int_{0.1}^{\infty} x^{-1}e^{-x}dx = 1.82$ を用いよ。

3-1 解答

単位周波数、単位体積、単位時間当たりの熱制動放射の強度である放射率 (emissivity) ϵ_ν^{ff} は

$$\epsilon_\nu^{ff} = \frac{dW(T,\nu)}{d\nu dV dt} = \bar{g}_{ff}\frac{2^5\pi e^6}{3mc^3}\left(\frac{2\pi}{3k_Bm}\right)^{1/2} T^{-1/2}n_e^2\exp\left[-\frac{h\nu}{k_BT}\right] \tag{22}$$

と書ける。具体的に値を評価すると、

$$\begin{aligned}
\epsilon_\nu^{ff} &= \left[\frac{2^{11}\pi^3}{3^3}\right]^{1/2}\alpha^3\times(10\,[\mathrm{keV}])^{-1/2}\left(10^{-6}\,[\mathrm{cm}^{-6}]\right)\left(0.510998918\times10^6\,[\mathrm{eV}]\right)^{-3/2}\times\left[\frac{k_BT}{10\,[\mathrm{keV}]}\right]^{-1/2}\left[\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right]^2\\
&= \left[\frac{2^{11}\pi^3}{3^3}\right]^{1/2}\alpha^3\cdot10^{-8}\cdot\left(0.510998918\times10^6]\right)^{-3/2}\cdot\left[(2\pi)^{-1}\cdot1.98644544\times10^{-23}\right]^3\cdot\left(1.60217646\times10^{-19}\right)^{-2}\cdot10^7\\
&\qquad\times\left[\frac{k_BT}{10\,[\mathrm{keV}]}\right]^{-1/2}\left[\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right]^2\ [\mathrm{erg\,sec^{-1}\,Hz^{-1}\,cm^{-3}}]\\
&= 6.35102\times10^{-48}\left[\frac{k_BT}{10\,[\mathrm{keV}]}\right]^{-1/2}\left[\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right]^2\ [\mathrm{erg\,sec^{-1}\,Hz^{-1}\,cm^{-3}}]\\
&= 6.35\times10^{-48}\left[\frac{k_BT}{10\,[\mathrm{keV}]}\right]^{-1/2}\left[\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right]^2\ [\mathrm{erg\,sec^{-1}\,Hz^{-1}\,cm^{-3}}]
\end{aligned}\tag{23}$$

となる。ϵ_ν^{ff} は (光子一個のエネルギー) × (分布関数) の様なものなので、光子の数を求めるには、$h\nu$ で割ればいいことになる。問題では $h\nu \geq 1$ [keV] の光子の数を聞いているので、この領域で積分を実行すると、$n_e = 10^{-3}$ [cm^{-3}], $k_BT = 10$ [keV], $V = 4\pi\,(1\,[\mathrm{Mpc}])^3/3$ を代入して

$$\begin{aligned}
L = \frac{dN}{dt} &= \int\frac{dW}{d\nu dV dt}\frac{d\nu}{h\nu}dV = \frac{6.35102\times10^{-48}}{6.62606876\times10^{-34}\cdot10^7}\times\frac{4}{3}\pi\left(3.0856775807\times10^{24}\right)^3\times\int_{0.1}^{\infty}x^{-1}e^{-x}dx\\
&= 2.14684\times10^{53}\,[\mathrm{sec}^{-1}]
\end{aligned}\tag{24}$$

を得る。ここでは

$$\int_{0.1}^{\infty}x^{-1}e^{-x}dx = 1.82$$

を、また $\bar{g}_{ff}\approx1$ とした。この天体を $d = 100$ [Mpc] の距離から観測するので、観測者が観測する単位面積、単位時間当たりの $h\nu \geq 1$ [keV] 以上のエネルギーを持つ光子の数は、$L = 4\pi d^2 I$ より、

$$\begin{aligned}
I &= \frac{dN}{dtdS} = \frac{L}{4\pi d^2}\\
&= \frac{2.14684\times10^{53}}{4\pi\left(100\times10^6\cdot3.0856775807\times10^{18}\right)^2} = 0.179427\,[\mathrm{cm^{-2}\,sec^{-1}}] = 0.18\,[\mathrm{cm^{-2}\,sec^{-1}}]
\end{aligned}\tag{25}$$

となる。