天体物理学弐 課題番号壱番
解答例
[20070412 出題]

Yuji Chinone

1

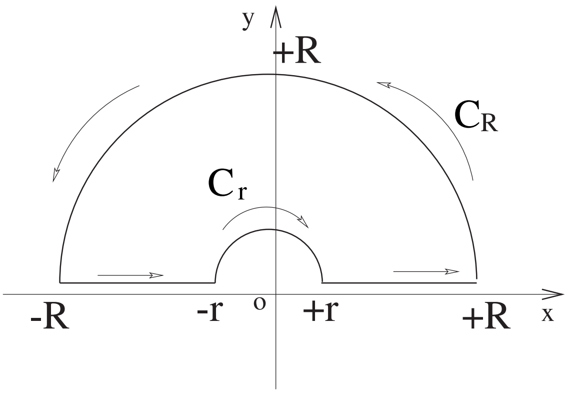
1-1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dX \frac{\sin X}{X} = \pi \tag{1}$$

を複素積分を使って証明せよ。

1-1 解答

下図の様な積分経路を考える。



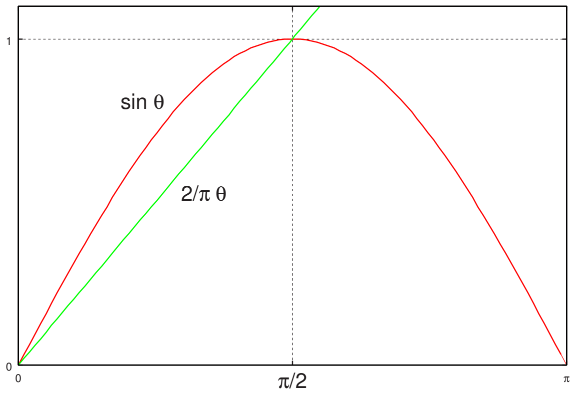


図 1　左：積分経路、右：$\sin\theta > \dfrac{2}{\pi}\theta \quad \text{for} \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ のグラフ。

図左の様な二つの半円と線分からなる **Jordan 曲線**を考える。今 $f(z) = e^{iz}/z$ とおくと、

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + o(z^2)}{z}$$

であるから、$z = 0$ 以外で、つまりこの曲線の内部で $f(z)$ は正則である。よって **Caucy-Goursat の定理**より

$$\left(\int_{+r}^{+R} + \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{C_r} \right) f(z)\, dz = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\int_{+r}^{+R} + \int_{-R}^{-r} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = -\left(\int_{C_R} + \int_{C_r} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz \tag{2}$$

が成り立つ。ここで

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{+R}^{+r}\frac{e^{i(-w)}}{-w}d(-w)=-\int_{+r}^{+R}\frac{e^{-iw}}{w}dw=-\int_{+r}^{+R}\frac{e^{-iz}}{z}dz$$

であるから、Eq.(2) の左辺は

$$(\text{左辺})=\int_{+r}^{+R}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{z}dz=2i\int_{+r}^{+R}\frac{\sin z}{z}dz \tag{3}$$

となる。また経路 C_R について

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|&=\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta\right|\le\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\pi/2}e^{-R\sin\theta}d\theta\le2\int_0^{\pi/2}e^{-R(2/\pi)\theta}d\theta\\&=\frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right)<\frac{\pi}{R}\quad\xrightarrow{R\to+\infty}\quad0\end{aligned} \tag{4}$$

となる[*1]。ここでは **Jordan の不等式**

$$r>0;\qquad\int_0^{\pi/2}e^{-r\sin\theta}d\theta<\frac{\pi}{2r},\quad\int_0^{\pi}e^{-r\sin\theta}d\theta<\frac{\pi}{r} \tag{5}$$

を用いている。この前者は図右より明らかであり、後者はこの前者より導かれる。

次に経路 C_r に於いては

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{e^{ir(\cos\theta+i\sin\theta)}}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{0}e^{ir(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta\quad\xrightarrow{r\to0}-i\int_0^{\pi}e^{0}d\theta=-\pi i \tag{6}$$

でとなる。

以上式 Eq.(3),(4),(6) より

$$\int_0^{+\infty}dX\frac{\sin X}{X}=\frac{\pi}{2}$$

であり、$\sin X/X$ は偶関数であるから、求めるべき積分は

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dX\frac{\sin X}{X}=\pi$$

となる。

1-2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,W(t)E(t)e^{i\omega t}=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\,\hat{E}(\omega')\hat{W}(\omega-\omega') \tag{7}$$

を証明せよ。

1-2 解答

$$\begin{aligned}(\text{LHS})&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\hat{W}(\omega')e^{-i\omega' t}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega''\hat{E}(\omega'')e^{-i\omega'' t}\right)e^{i\omega t}\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,e^{-i[\omega''-(\omega-\omega')]t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\hat{W}(\omega')\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega''\hat{E}(\omega'')\right)\\&=\iint_{-\infty}^{+\infty}\hat{W}(\omega')\hat{E}(\omega'')\delta\left[\omega''-(\omega-\omega')\right]d\omega'd\omega''=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{W}(\omega')\hat{E}(\omega-\omega')\,d\omega'\\&=(\text{RHS})\end{aligned}$$

[*1] $\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}d\theta\to0$ は自明ではない（$\theta=\pi/2$ で $e^{-\infty\times0}$ の形になる）。

2

$$E(t) = \begin{cases} \cos\omega_0 t, & \text{for} \quad -\frac{\Delta t}{2} \le t \le \frac{\Delta t}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{8}$$

以下では $\omega_0 \gg 2\pi/\Delta t$ として、**正の角周波数**のスペクトルのみ考えよ。

2-1

Eq.(8) を Fourier 変換し、周波数分布を求めよ。

2-1 解答

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \left\{ e^{(\omega+\omega_0)t} + e^{i(\omega-\omega_0)} \right\} dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\Delta t/2} \{\cos[(\omega+\omega_0)t] + \cos[(\omega-\omega_0)t]\} dt = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\sin\left[\frac{(\omega+\omega_0)\Delta t}{2}\right]}{\frac{(\omega+\omega_0)\Delta t}{2}} + \frac{\sin\left[\frac{(\omega-\omega_0)\Delta t}{2}\right]}{\frac{(\omega-\omega_0)\Delta t}{2}} \right)$$
$$= \frac{\Delta t}{4\pi}\left(\mathrm{Sinc}\left[\frac{(\omega+\omega_0)\Delta t}{2}\right] + \mathrm{Sinc}\left[\frac{(\omega-\omega_0)\Delta t}{2}\right] \right) \tag{9}$$

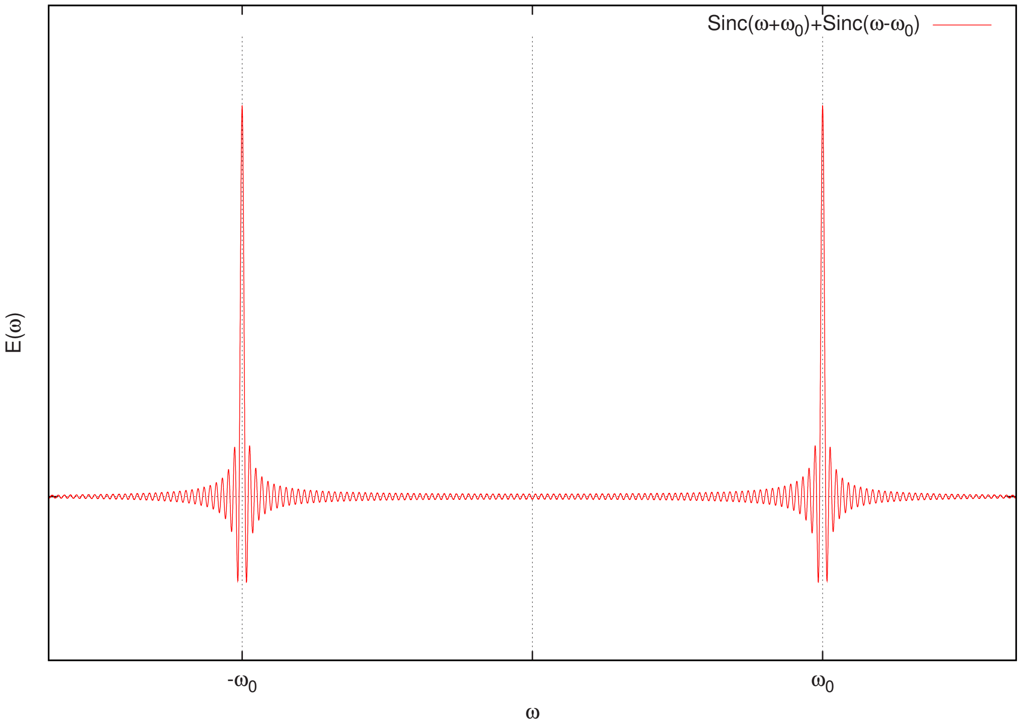


図 2　$\mathrm{Sinc}(\omega+\omega_0) + \mathrm{Sinc}(\omega-\omega_0)$

2-2

周波数分布は、中心周波数 ω の廻りで $\Delta\omega \sim 2\pi/\Delta t$ 程度の広がりを持つ。この物理的理由を波の干渉を用いて定性的に説明せよ。ここで $\Delta t \sim 2\pi/\Delta\omega$ を **coherent time（可干渉時間）**という。

2-2 解答

無限の過去から無限の未来にわたって Eq.(8) が観測できれば、観測される周波数に広がりはなく、周波数 ω_0 の完全な単色光として観測される。しかし有限の時間 Δt の間のみの観測ではそのようにはならない[*2]。この時の周波数の広がりを $\Delta\omega$ としてこれを評価する。このとき最大の周波数は $\omega_0 + \Delta\omega/2$ と書き、最小の周波数は $\omega_0 - \Delta\omega/2$ と書く。ある位相の波をうち消す波の位相は、もとの波の位相に比べ π だけずれている必要があるが、全ての位相の波についてこれが成り立つのは波の位相が 2π で一回りするので、全ての周波数の波の位相が 0 から 2π の範囲に分布したときである。よって、

$$\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\Delta t - \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)\Delta t = 2\pi, \quad \therefore\ \Delta\omega \sim \frac{2\pi}{\Delta t}$$

となる。これは可干渉時間と相補的な関係になっている。

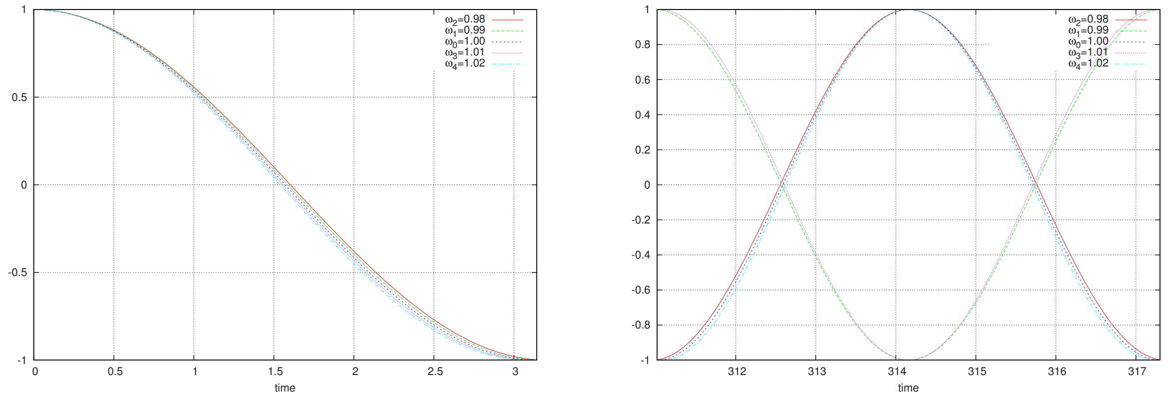


図 3　coherent time: $t \sim 0$ の時と $t = 2\pi/\Delta\omega = \pi$ の時での比較。

3

$$W(x_1) = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} \qquad W(x_2) = \begin{cases} 1, & \text{for} \quad 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

とする。

3-1

変数変換

$$\begin{cases} y_1 &= \sqrt{-2\ln x_1}\ \cos 2\pi x_2 \\ y_2 &= \sqrt{-2\ln x_1}\ \sin 2\pi x_2 \end{cases} \tag{11}$$

[*2] Fourier 変換の原理的な制限。不確定性原理。

を用いて

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2$$

を計算して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = 1 \tag{12}$$

を証明せよ。この変数変換をも用いて、[0, 1] の一様乱数からガウス分布に確率分布が従う確率変数を発生させる方法を **Box-Muller 法**という。

3-1 解答

積分の変数変換に於いて、変換後と変換前の微小積分要素の間には以下の関係が成り立つ。

$$dx_1 dx_2 \ldots dx_n = |J| dy_1 dy_2 \ldots dy_n \tag{13}$$

ここで $|J|$ は **Jacobian** で

$$|J| = \left|\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{14}$$

と書ける。変数変換 Eq.(11) より

$$y_1^2 + y_2^2 = -2\ln x_1, \quad \begin{cases} 2y_1 = -2\frac{1}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} \\ 2y_2 = -2\frac{1}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} = -x_1 y_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -x_1 y_2 \end{cases}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \tan 2\pi x_2, \quad \begin{cases} -\frac{y_2}{y_1^2} = \frac{2\pi}{\cos^2 2\pi x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{1}{y_1} = \frac{2\pi}{\cos^2 2\pi x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = -\frac{\cos^2 2\pi x_2}{2\pi}\frac{y_2}{y_1^2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{\cos^2 2\pi x_2}{2\pi}\frac{1}{y_1} \end{cases}$$

であるから、Jacobian は

$$\begin{aligned} |J| &= (-x_1 y_1)\left(\frac{\cos^2 2\pi x_2}{2\pi}\frac{1}{y_1}\right) - (-x_1 y_2)\left(-\frac{\cos^2 2\pi x_2}{2\pi}\frac{y_2}{y_1^2}\right) = -\frac{x_1 \cos^2 2\pi x_2}{2\pi}\left[1 + \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2\right] = -\frac{x_1}{2\pi} \\ &= -\frac{e^{-(y_1^2+y_2^2)/2}}{2\pi} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y_1^2/2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y_2^2/2}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$1 = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y_1^2/2}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y_2^2/2}\right); \quad \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} = 1$$

となり、証明された。

実際に Box-Muller 法を用いて確率変数を生成し、分布のヒストグラムを書いてみると以下のようになる。例えばC言語でプログラムすると、以下のように書ける（試行数100000回)。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <stdlib.h>

#define PI          (M_PI)
#define MAX         (5.0)
#define MIN         (-MAX)
#define DELTA       (0.05)
#define HEIKIN(i)   ( MIN+DELTA*(i)+DELTA/2.0 )
#define NUMBER      ((int)( (MAX-MIN)/DELTA ))
```

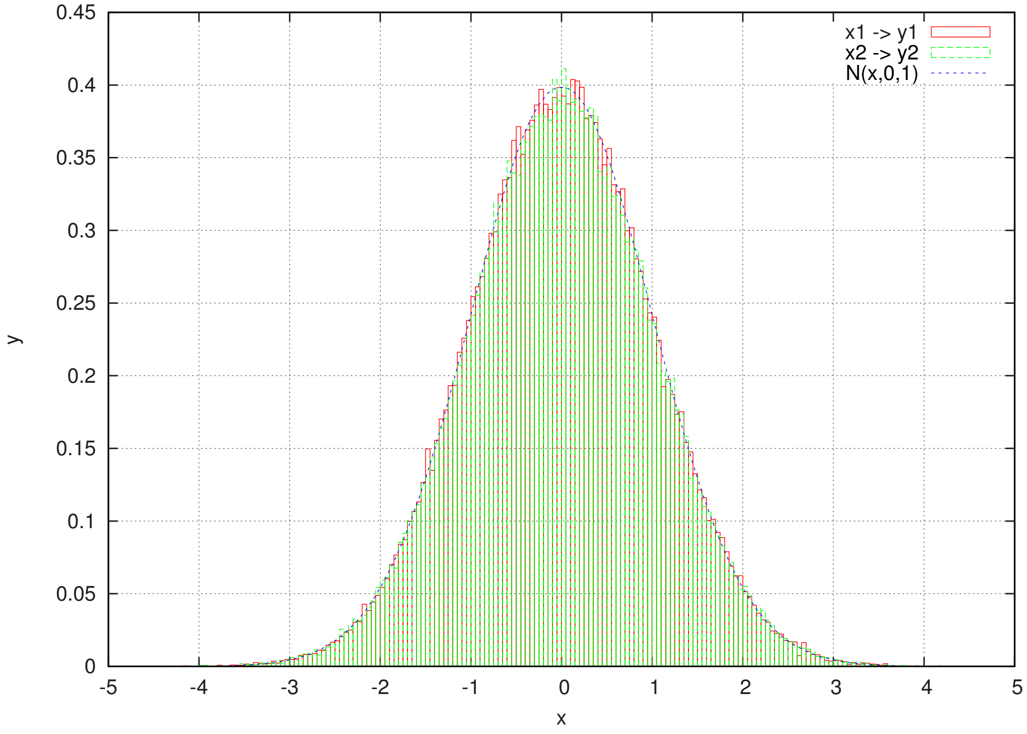


図 4　Box-Muller 法による正規分布の生成。

```
#define SHIKOU       (100000)

double get_random(void) ;
void calc_y(double*,double*) ;

int main(void)
{
  FILE *fptr1, *fptr2 ;

  double y1, y2 ;
  int i, shikou ;
  int Y1[NUMBER] = {0}, Y2[NUMBER] = {0} ;

  for( shikou=0; shikou<SHIKOU; shikou++){
    calc_y( &y1, &y2) ;

    i = 0 ;
    do{
      if( y1 >= MIN+DELTA*i  && y1 < MIN+DELTA*(i+1) ) Y1[i]++ ;
      else if( y2 >= MIN+DELTA*i  && y2 < MIN+DELTA*(i+1) ) Y2[i]++ ;
      i++ ;
    }while( i<NUMBER ) ;
  }

  fptr1 = fopen("Y1_n.dat", "w") ;
  fptr2 = fopen("Y2_n.dat", "w") ;

  for( i=0; i<NUMBER; i++){
    fprintf( fptr1, "%lf   %lf\n", HEIKIN(i), ((double)Y1[i])/(SHIKOU*DELTA)) ;
    fprintf( fptr2, "%lf   %lf\n", HEIKIN(i), ((double)Y2[i])/(SHIKOU*DELTA)) ;
  }
  fclose( fptr1) ;
  fclose( fptr2) ;

  return 0 ;
}

double get_random()
{
  static int flag=0;

  if(flag==0){
    srand(time(NULL)) ;
    flag=1 ;
  }
  return 1.0*rand()/(RAND_MAX+1.) -0.0 ;
}

void calc_y(double *y1, double *y2)
{
  double x1, x2 ;

  x1 = get_random() ;
  x2 = get_random() ;

  *y1 = sqrt( -2*log(x1) ) * cos(2*PI*x2) ;
  *y2 = sqrt( -2*log(x1) ) * sin(2*PI*x2) ;
}
```

3-2

Gaussian Window

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \tag{15}$$

を Fourier 変換し、結果を図示せよ。この結果から $\Delta\omega\Delta t$ を評価せよ。

3-2 解答

$$\begin{aligned}
\hat{W}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] e^{i\omega t} dt = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(t^2 - 2\sigma^2 i\omega t\right)\right] dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(t - i\omega\sigma^2 t\right)^2 + \sigma^4\omega^2\right]\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma}\left\{\sigma\,(2\pi)^{1/2}\right\} \exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

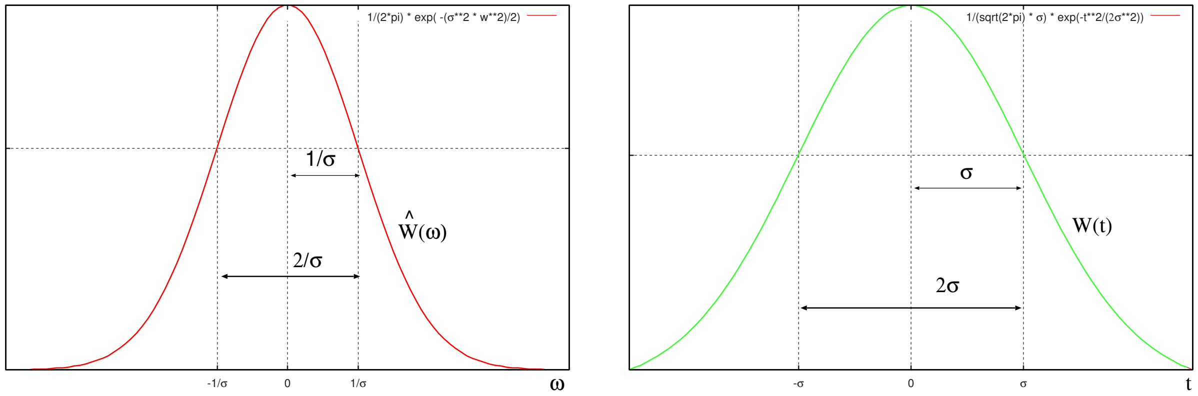


図 5　左：周波数空間、右：時間空間

ガウス型関数のの典型的な広がりは、周波数空間に於いて $\Delta\omega \sim 2/\sigma$、時間空間に於いて $\Delta t \sim 2\sigma$ と評価できる[*3*4]。よって、

$$\Delta\omega\Delta t \sim 4 \tag{17}$$

である。

[*3] 規格化されたガウス型関数の分散計算（この時、規格化されてるか否かに注意が必要）。またはこのグラフの特徴（変曲点）などから。

[*4] ガウス積分の公式： $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^{2n+1}}}\,;\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

4

4-1

畳込みの定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')K(t-t')dt' = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{K}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{18}$$

を証明せよ。

4-1 解答

$$\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t'}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \hat{K}(\omega')e^{-i\omega(t-t')}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i(\omega'-\omega)t'} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \hat{f}(\omega)\hat{K}(\omega')e^{-\omega' t} \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega'\, \delta(\omega'-\omega)\hat{f}(\omega)\hat{K}(\omega')e^{-i\omega t} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \hat{f}(\omega)\hat{K}(\omega)e^{-i\omega t} \\
&= (\mathrm{RHS})
\end{aligned}$$

4-2

Wiener-Khintchine formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 e^{-i\omega t}d\omega \tag{19}$$

を証明せよ。

4-2 解答

$$\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\, \hat{f}(\omega')e^{-i\omega'\tau}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \hat{f}(\omega)e^{-i\omega(t+\tau)}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i(\omega'+\omega)\tau} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega'\, \hat{f}(\omega')\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} \\
&= 2\pi \iint_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega'\, \delta(\omega'+\omega)\hat{f}(\omega')\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-\omega)\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^{*}(\omega)\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 e^{-i\omega t}d\omega = (\mathrm{RHS})
\end{aligned}$$

4-3

Parseval formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)^2 d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega \tag{20}$$

を証明せよ。

4-3 解答

4-1 で証明した Wiener-Khintchine formula を $t=0$ とすれば明らかである。

5

図のような RC 回路を考える。

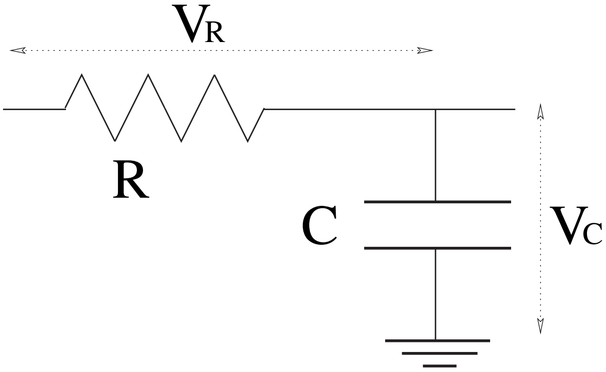


図 6　RC 回路

5-1

RC 回路のコンデンサーの両端に $v(t) = v_0\delta(t)$ というパルス電圧をかけた。コンデンサーの両端の電圧の時間発展を表す微分方程式をたて、それを変数変化法を用いて解き、時間変化を求めよ。

5-1 解答

回路に $V_{\text{in}} = v(t) = v_0\delta(t)$ の入力があり、電圧降下はコンデンサーと抵抗に於いて V_C, V_R であるから、

$$+V_C + V_R = v(t)$$

と書ける。以後 $V_C = V(t)$ と書き、上の方程式を $V(t)$ について解く。$q(t) = CV(t)$, $V_R = I(t)R$ より、微分方程式は

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V(t) = \frac{v_0}{RC}\delta(t) \tag{21}$$

となる。この同次方程式の解はすぐ求まり

$$V(t) = Ae^{-t/(RC)}; \quad A = \text{Const}$$

である。以後 $RC = \tau$ とし、これを**時定数**と呼ぶ。

非同次方程式の解は定数変化法 $A \to A(t)$ を用いて求める。代入すると

$$\dot{A}(t) = \frac{v_0}{\tau}\delta(t)e^{t/\tau} \quad \Longrightarrow \quad A(t) = \frac{v_0}{\tau}\int_{-\infty}^{t} e^{t'/\tau}\delta(t')dt' = \frac{v_0}{\tau}\theta(t) + C; \qquad \theta(t)：\text{階段関数}, C = \text{Const}$$

となる。コンデンサーは最初帯電していなかったと考えると $C = 0$ であるから、結局求める電圧の時間変化は

$$V(t) = \frac{v_0}{\tau}\theta(t)\,e^{-t/\tau} \tag{22}$$

となる。

5-2

この結果を Fourier 変換し、電圧の大きさと位相の周波数分布を求めよ。

5-2 解答

上で得た $V(t)$ に Fourier 変換を行うと、

$$\begin{aligned}\hat{V}(\omega) = V_{\mathrm{out}}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V(t)e^{i\omega t}dt = \frac{v_0}{2\pi\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\exp\left[-\frac{t}{\tau}+i\omega t\right]dt \\ &= \frac{v_0}{2\pi\tau}\int_{0}^{+\infty}\exp\left[-\frac{t}{\tau}+i\omega t\right]dt = \frac{v_0}{2\pi\tau}\frac{-1}{i\omega-1/\tau} \\ &= \frac{v_0}{2\pi\tau}\frac{1}{1/\tau-i\omega}\end{aligned}$$

となるので、

$$|V_{\mathrm{out}}(\omega)| = \frac{v_0}{2\pi\tau}\frac{1}{\sqrt{1/\tau^2+\omega^2}} = \frac{v_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \tag{23}$$

$$\phi = \arg V_{\mathrm{out}}(\omega) = \tan^{-1}\omega\tau \tag{24}$$

を得る。一方入力電圧 $v(t)$ の Fourier スペクトルは

$$\hat{v}(\omega) = V_{\mathrm{in}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_0}{2\pi}\delta(t)e^{i\omega t}dt = \frac{v_0}{2\pi}$$

より、

$$|V_{\mathrm{in}}(\omega)| = \frac{v_0}{2\pi} \tag{25}$$

$$\phi = \arg V_{\mathrm{in}}(\omega) = 0 \tag{26}$$

となる。以上より入力と出力電圧の大きさと位相の周波数分布をグラフにすると次のようになる。

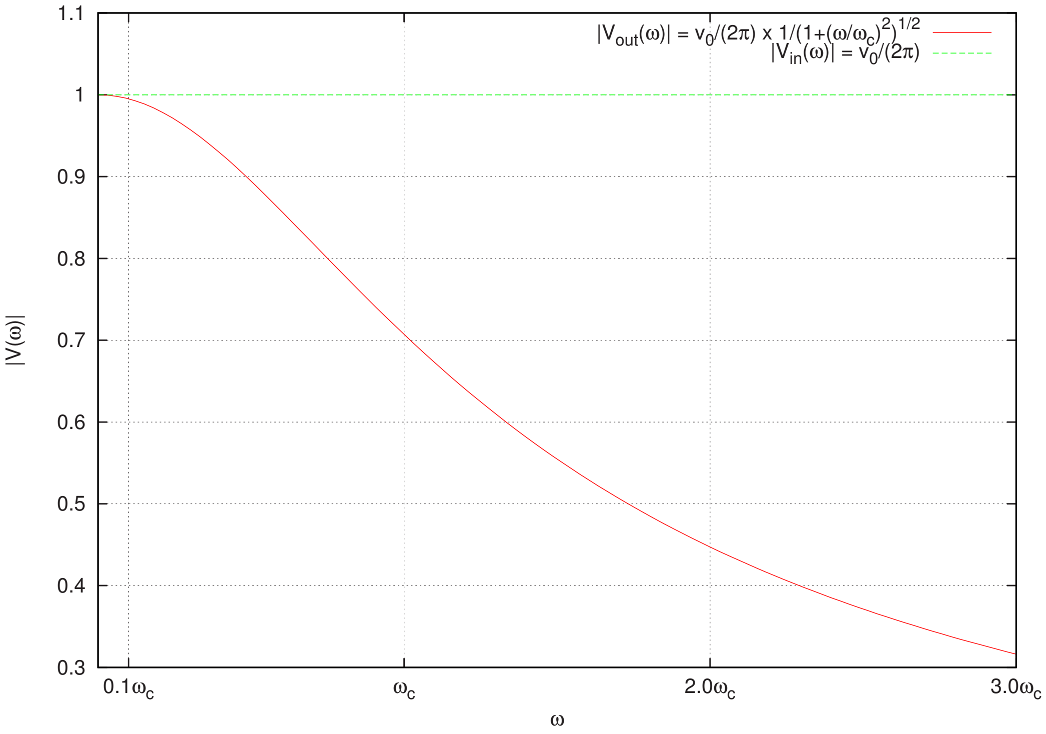


図 7　入出力電圧の周波数分布

5-3

この結果から RC 回路が low pass filter としての働きを持つことが分かる。何故か説明せよ。又、カットされる周波数の下限値の典型的な値を求めよ。

5-3 解答

物理的な解釈はテキストに譲る。

伝達関数 $F(i\omega)$ を考える。伝達関数は

$$F(i\omega) = \frac{V_{\mathrm{out}}(\omega)}{V_{\mathrm{in}}(\omega)}$$

で表される関数であり、その定義から出力が入力に対してどのような特性を持つかを知ることができる。今、伝達関数を元に周波数特性を考えると、伝達関数の絶対値をとって

$$|F(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \tag{27}$$

となる。以上を元に周波数特性を **logscale** グラフは下図のようになる。

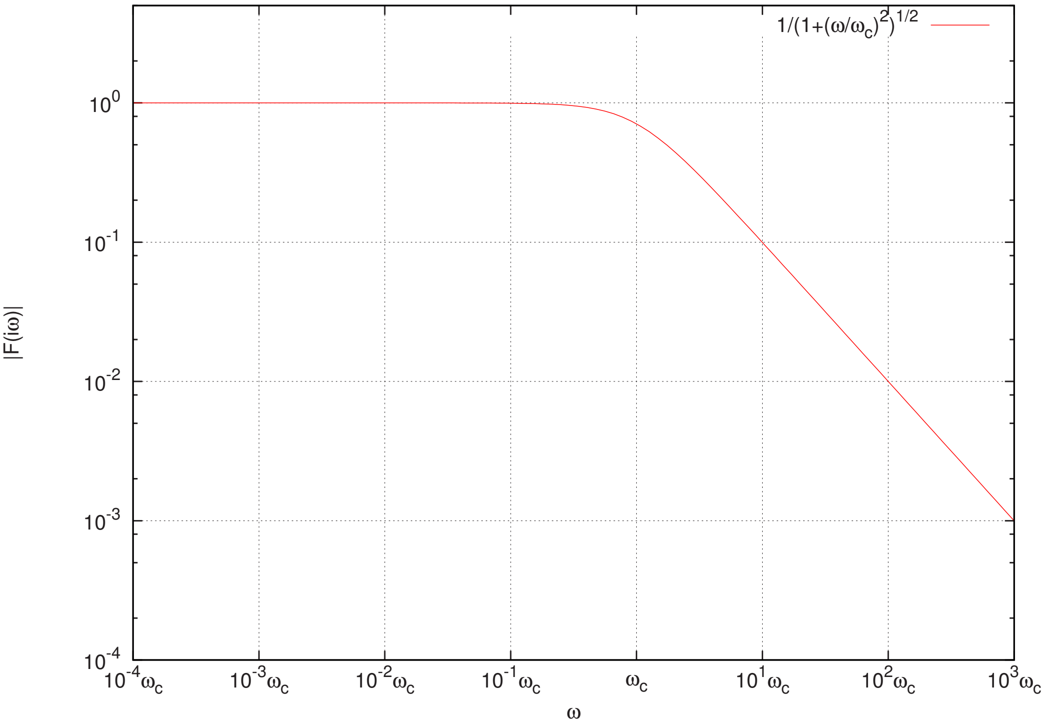


図 8　RC 回路の周波数特性

グラフから分かるように、低周波数域では値はほぼ 1 であるが、ω_c を境に値が急激に小さくなっているのが分かる。これはつまり RC 回路が低周波数域をよく通し、高周波数域を通しにくい **low pass filter** として働いているということを示している。このときカットされる周波数の下限値の典型的な値は

$$\omega_c = \frac{1}{RC}\,; \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \tag{28}$$

である。

5-4

CR 回路は high pass filter としての働きを持つ。何故か物理的説明をせよ。

5-4 解答

コンデンサーに直流電圧をかけると、コンデンサーに電荷が溜まりきるまでは電流が流れるが、コンデンサーに電荷が溜まりきると電流は流れなくなる。つまりこの時コンデンサーは抵抗値無限大の抵抗と同じである。逆に十分周波数の速い—コンデンサーに電荷が溜まりきるよりも速い、つまり時定数よりも速い—交流電圧をかけると、コンデンサーに電荷が溜まらず、連続的に電流が流れることになる。つまりこれは抵抗値零の抵抗と同じである。

以上からコンデンサーとは掛けられる電圧の周波数によって変化する抵抗であると考えることが出来、その特性は、低周波よりも高周波の方が抵抗値が小さい。

以上より、これらの特性を用いた CR 回路は high pass filter として振る舞うことが分かる。

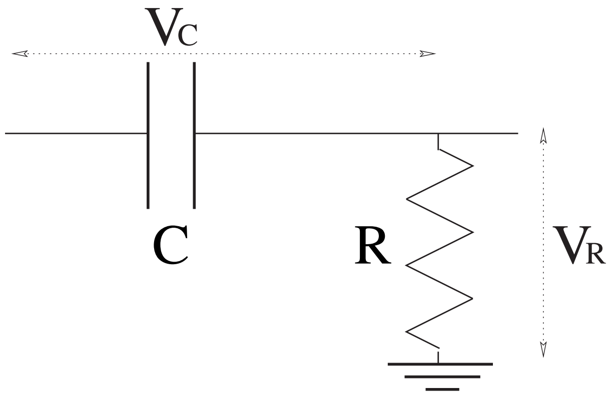


図 9　CR 回路

6

6-1

電荷密度の保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{29}$$

が**電荷**の保存を表すことを、積分形の電荷保存則を用いて示せ。

6-1 解答

ある任意の体積を V、その表面積を S としその表面上外側に向いた法線ベクトルに平行で、大きさが dS の微小面積要素ベクトルを $d\mathbf{S}$ とする。Eq.(29) を体積積分すると

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} \right) dV = 0$$

となるが、このとき電荷密度の時間変化の体積積分は

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

となる。ここで Q は V 中に含まれる全電荷である。また、ガウスの発散定理より、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

となり、これは $d\mathbf{S}$ の定義から V の内側から外側に出ていく電流密度フラックスの総和、つまり電流 I を表している。よって、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0\,; \quad \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + I = 0 \right] \tag{30}$$

は積分形の電荷の保存則を表す。よってこの式の元となる **Eq.(29)** も又電荷の保存を表していることになる。

7

以下では次のような記号を使う。

Kronecher のデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{31}$$

Levi-Civita の記号

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if } (ijk) \text{ is an even permutation of 1,2,3.} \\ -1 & \text{if } (ijk) \text{ is an odd permutation of 1,2,3.} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{32}$$

以後**アインシュタインの縮約規則**の元で計算を実行する[*5]。以下に諸処の関係式を挙げておく（証明略）。

$${\varepsilon_{ijk}}^2 = 6\,; \quad \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jkm} = 2\delta_{ij}\,; \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmk} = \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}\,; \quad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k\,; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{33}$$

7-1

div rot = 0 が恒等的に成り立つことを示せ。

7-1 解答

$\mathbf{f}$ を任意の三次元ベクトルとする。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) &= \nabla \cdot \left\{ (\mathbf{e}_i \partial_i) \times \left(f_j \mathbf{e}_j \right) \right\} = \nabla \cdot \left\{ \left(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \right) \partial_i f_j \right\} = \nabla \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \partial_i f_j \right) \\ &= (\mathbf{e}_k \partial_k) \cdot \left(\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \partial_i f_j \right) = \varepsilon_{ijk} \partial_{ik} f_j \\ &= 0, \qquad \because\ \partial_{ik} = \partial_{ki},\ \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji} \end{aligned}$$

7-2

rot grad = 0 が恒等的に成り立つことを示せ。

[*5] 今はベクトルだけしか考えていないので、反変、共変は考えず全て下付で統一する。

7-2 **解答**

f を任意のスカラーとする。

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla f &= \nabla\times\left(\mathbf{e}_j\partial_j f\right) = (\mathbf{e}_i\partial_i)\times\left(\mathbf{e}_j\partial_j f\right) = \left(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\right)\partial_{ij} f = \mathbf{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_{ij} f\\ &= 0, \qquad \because\ \partial_{ij} = \partial_{ji},\ \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}\end{aligned}$$

8

8-1

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{34}$$

を示せ。

8-1 **解答**

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= (\mathbf{e}_i\partial_i)\times\left\{\left(\mathbf{e}_j\partial_j\right)\times(\mathbf{e}_k A_k)\right\} = \mathbf{e}_i\times\left(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k\right)\partial_{ij}A_k = \mathbf{e}_i\times\left(\varepsilon_{jkl}\mathbf{e}_l\right)\partial_{ij}A_k = \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{ilm}\mathbf{e}_m\partial_{ij}A_k\\ &= -\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{iml}\mathbf{e}_m\partial_{ij}A_k = -\left(\delta_{ji}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{ki}\right)\mathbf{e}_m\partial_{ij}A_k = \delta_{jm}\delta_{ki}\mathbf{e}_m\partial_{ij}A_k - \delta_{ji}\delta_{km}\mathbf{e}_m\partial_{ij}A_k\\ &= \mathbf{e}_m\partial_{mk}A_k - \partial_{ii}(A_k\mathbf{e}_k) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}\end{aligned}$$

8-2

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{35}$$

を示せ。

8-2 **解答**

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= (A_i\mathbf{e}_i)\cdot\left\{\left(B_j\mathbf{e}_j\right)\times(C_k\mathbf{e}_k)\right\} = (A_i\mathbf{e}_i)\cdot\left(B_jC_k\varepsilon_{jkl}\mathbf{e}_l\right) = A_iB_jC_k\varepsilon_{jkl}\delta_{il}\\ &= A_iB_jC_k\varepsilon_{ijk}\\ &= A_iB_jC_k\varepsilon_{kij} = A_iB_jC_k\varepsilon_{kil}\delta_{jl} = \left(B_j\mathbf{e}_j\right)\cdot(C_kA_i\varepsilon_{kil}\mathbf{e}_l) = \left(B_j\mathbf{e}_j\right)\cdot\{(C_k\mathbf{e}_k)\times(A_i\mathbf{e}_i)\} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\\ &= A_iB_jC_k\varepsilon_{jki} = A_iB_jC_k\varepsilon_{jkl}\delta_{il} = (C_k\mathbf{e}_k)\cdot\left(A_iB_j\varepsilon_{ijl}\mathbf{e}_l\right) = (C_k\mathbf{e}_k)\cdot\left\{(A_i\mathbf{e}_i)\times\left(B_j\mathbf{e}_j\right)\right\} = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\end{aligned}$$

8-3

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{36}$$

8-3 解答

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= (\mathbf{e}_i\partial_i)\cdot\left[\left(A_j\mathbf{e}_j\right)\times(B_k\mathbf{e}_k)\right] = \mathbf{e}_i\partial_i\cdot\left(A_jB_k\varepsilon_{jkl}\mathbf{e}_l\right) = \varepsilon_{jkl}\delta_{il}\partial_i\left(A_jB_k\right) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\left(A_jB_k\right)\\
&= \varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j + \varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k = (B_k\mathbf{e}_k)\cdot\left(\mathbf{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j\right) - \left(A_j\mathbf{e}_j\right)\cdot\left(\mathbf{e}_j\varepsilon_{ikj}\partial_iB_k\right)\\
&= \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})
\end{aligned}
$$

9

9-1

次の式を示せ。但し、左辺から右辺を導く方法で。

$$
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C} \tag{37}
$$

9-1 解答

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) &= A_iB_jC_k\left\{\mathbf{e}_i\times\left(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k\right)\right\} = A_iB_jC_k\left\{\mathbf{e}_i\times\left(\varepsilon_{jkl}\mathbf{e}_l\right)\right\} = A_iB_jC_k\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{ilm}\mathbf{e}_m = -A_iB_jC_k\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{iml}\mathbf{e}_m\\
&= -A_iB_jC_k\left(\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ki}\right)\mathbf{e}_m = A_iB_jC_k\delta_{jm}\delta_{ki}\mathbf{e}_m - A_iB_jC_k\delta_{ji}\delta_{km}\mathbf{e}_m = (A_iC_i)\,B_m\mathbf{e}_m - (A_iB_i)\,C_m\mathbf{e}_m\\
&= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C} = (\mathrm{RHS})
\end{aligned}
$$

10

10-1

$$
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{A}) = 0 \tag{38}
$$

を証明せよ。

10-1 解答

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{A}) &= (A_i\mathbf{e}_i)\cdot\left\{\left(B_j\mathbf{e}_j\right)\times(A_k\mathbf{e}_k)\right\} = (A_i\mathbf{e}_i)\cdot\left(B_jA_k\varepsilon_{jkl}\mathbf{e}_l\right) = A_iB_jA_k\varepsilon_{jkl}\delta_{il} = A_iA_kB_j\varepsilon_{ijk}\\
&= 0, \qquad \because\ A_iA_k = A_kA_i,\ \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}
\end{aligned}
$$