

天体物理学式 課題番号式番

解答例

[20070419 出題]

Yuji Chinone

1

z 軸正の方向を向いた一様磁場 B が存在する ($\mathbf{E} = 0$)。この中を質量 m 、電荷 q の粒子が運動している。

1-1

粒子の運動方程式をたてよ。

1-1 解答

粒子の運動座標を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とすると、運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \quad (1)$$

より、各成分について書き下すと

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{q}{c} \left(\frac{dy}{dt} B_z - \frac{dz}{dt} B_y \right) = \frac{qB}{c} \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{q}{c} \left(\frac{dz}{dt} B_x - \frac{dx}{dt} B_z \right) = -\frac{qB}{c} \frac{dx}{dt} \quad (3)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{q}{c} \left(\frac{dx}{dt} B_y - \frac{dy}{dt} B_x \right) = 0 \quad (4)$$

となる。

1-2

運動方程式を解き、粒子の位置と速度を時間の関数として求めよ。簡単のため $v_z(t=0) = 0$ とせよ。

1-2 解答

Eq.(2),(3) より、

$$\ddot{v}_x + \left(\frac{qB}{mc} \right)^2 v_x = 0, \quad \therefore v_x(t) = C_1 \cos\left(\frac{qB}{mc} t \right)$$

であるので、更に時間積分して、

$$x(t) = C'_1 \sin\left(\frac{qB}{mc} t \right) + C_2$$

を得る。更に Eq.(2) と $v_x(t)$ の関係から

$$y(t) = C'_1 \cos\left(\frac{qB}{mc}t\right) + C_3$$

を得る。 $z(t)$ は Eq.(4) と初期条件より

$$z(t) = C_4$$

となる。ここで $C_1, C'_1, C_2, C_3, C_4 = \text{Const}$ である。

以上より

$$\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t)) = \left(C'_1 \sin\left(\frac{qB}{mc}t\right) + C_2, C'_1 \cos\left(\frac{qB}{mc}t\right) + C_3, C_4 \right) \quad (5)$$

$$\mathbf{v} = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = \left(C_1 \cos\left(\frac{qB}{mc}t\right), -C_1 \sin\left(\frac{qB}{mc}t\right), 0 \right) \quad (6)$$

1-3

粒子の運動による電流が作る磁場は、電荷 q の正負に依らず外部磁場 B を弱める方向であることを示せ。

1-3 解答

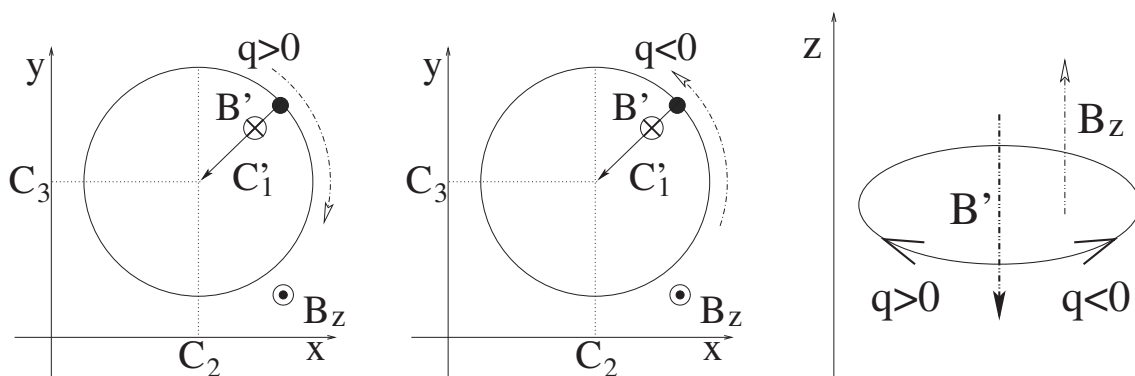


図1 粒子の運動による電流が作る電場の方向。

図には Eq.(5),(6) を元に粒子の軌道を $q \geq 0$ の場合に分けて記した。右ねじの法則から得られる電流が作る磁場 B' は q の正負に依らず外部磁場 B を弱める方向であることが分かる。

2

次の計算をせよ。但し、 $g(x)$ は単調関数で、ある一点で零になる関数とする。

2-1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x-1) \quad (7)$$

2-1 解答

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dX f(X+1)\delta(X); \quad x-1 = X, dx = dX, \quad \frac{x}{X} \left| \begin{array}{l} -\infty \rightarrow +\infty \\ -\infty \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$
$$= f(1)$$

2-2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(3x) \quad (8)$$

2-2 解答

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(3x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dX}{3} f(X/3)\delta(X); \quad 3x = X, 3dx = dX, \quad \frac{x}{X} \left| \begin{array}{l} -\infty \rightarrow +\infty \\ -\infty \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$
$$= \frac{f(0)}{3}$$

2-3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(-3x) \quad (9)$$

2-3 解答

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(-3x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dX}{3} f(-X/3)\delta(X); \quad -3x = X, -3dx = dX, \quad \frac{x}{X} \left| \begin{array}{l} -\infty \rightarrow +\infty \\ +\infty \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$
$$= \frac{f(0)}{3}$$

2-4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x^2-1) \quad (10)$$

2-4 解答

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x^2 - 1) &= \left(\int_{-\infty}^{-1-\epsilon} + \int_{-1-\epsilon}^{-1+\epsilon} + \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} + \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^{+\infty} \right) dx f(x) \delta(x^2 - 1); \quad \epsilon > 0 \\
 &= \int_{-1-\epsilon}^{-1+\epsilon} dx f(x) \delta(x^2 - 1) + \int_{+1-\epsilon}^{+1+\epsilon} dx f(x) \delta(x^2 - 1) \\
 &= \int_{\epsilon^2-2\epsilon}^{\epsilon^2+2\epsilon} dX \frac{f(-\sqrt{X+1}) \delta(X)}{2\sqrt{X+1}}; \quad x^2 - 1 = X, 2xdx = dX, x < 0, \quad \frac{x}{X} \Big|_{\epsilon^2+2\epsilon}^{-1-\epsilon} \rightarrow \frac{-1+\epsilon}{\epsilon^2-2\epsilon} \\
 &\quad + \int_{\epsilon^2-2\epsilon}^{\epsilon^2+2\epsilon} dX \frac{f(\sqrt{X+1}) \delta(X)}{2\sqrt{X+1}}; \quad x^2 - 1 = X, 2xdx = dX, x > 0, \quad \frac{x}{X} \Big|_{\epsilon^2-2\epsilon}^{1-\epsilon} \rightarrow \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2+2\epsilon} \\
 &= \frac{1}{2} \{f(-1) + f(+1)\}
 \end{aligned}$$

2-5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(g(x)) \tag{11}$$

2-5 解答

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(g(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|g'(x)|} \delta(y) f(g(x)); \quad g(x) = y, \frac{dy}{dx} = g'(x), \quad y = 0 \rightarrow x = x_i \\
 &= \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}
 \end{aligned}$$

問題 7 を総合するとデルタ関数には以下のような性質があることが推察される。

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \tag{12}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \{\delta(x+a) + \delta(x-a)\} \tag{13}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}; \quad g(x_i) = 0 \tag{14}$$

3

関数 $g(x)$ が $g(x) = 0$ となる点を $x = x_n$ とする。 x_n が N 個あるとし、それらを $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) と表す。但し、 $g(x) = 0$ に重解は無いとする。

3-1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(g(x)) \tag{15}$$

はどのようになるか。

3-1 解答

Eq.(14) より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(g(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \sum_{n=1}^N \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_{n=1}^N \frac{f(x) \delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{|g'(x_n)|} \end{aligned}$$

を得る。

4

関数 ϕ が次の方程式を満たすとする。

$$\square \phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho_e(\mathbf{r}, t) \quad (16)$$

ここで \square は **D'Alembertian** で

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (17)$$

を意味する。

4-1

次の方程式

$$\square G(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) \quad (18)$$

を満たす関数 G を **Green** 関数と呼ぶ。この Green 関数を用いて $\phi(\mathbf{r}, t)$ が次のように表せることを示せ。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho_e(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}' dt' \quad (19)$$

4-1 解答

演算子 \square を

$$\square = D\left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

と書くと、Eq.(18) は

$$D\left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right) G(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t)$$

と書ける。この両辺を時間、空間成分で Fourier 変換すると、

$$\hat{D}(-i\mathbf{k}, i\omega) \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \quad \therefore \frac{1}{\hat{D}(-i\mathbf{k}, i\omega)} = -(2\pi)^4 \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) \quad (20)$$

を得る。同様に Eq.(16) の両辺も時間、空間成分で Fourier 変換すると、

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, \omega) = -4\pi \frac{\hat{\rho}_e(\mathbf{k}, \omega)}{\hat{D}(-i\mathbf{k}, i\omega)}$$

となるが、Eq.(20)を代入すると、

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, \omega) = (4\pi)(2\pi)^4 \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) \hat{\rho}_e(\mathbf{k}, \omega) \quad (21)$$

となる。ところで、ある時間の関数 $x(t), y(t)$ の畳込みは

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-t')dt' = (2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\omega)\hat{y}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

であることを思い出すと、Eq.(21)を逆 Fourier 変換してやると、右辺は畳込みの型で書け、

$$\begin{aligned} \text{(LHS)} &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(\mathbf{k}, \omega)] = \phi(\mathbf{r}, t) \\ \text{(RHS)} &= \mathcal{F}^{-1}[(4\pi)(2\pi)^4 \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) \hat{\rho}_e(\mathbf{k}, \omega)] = 4\pi \mathcal{F}^{-1}[(2\pi)^4 \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) \hat{\rho}_e(\mathbf{k}, \omega)] = 4\pi [\rho_e * G(\mathbf{r}, t)] \\ &= 4\pi \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho_e(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}' dt' \end{aligned}$$

となり、確かに $\phi(\mathbf{r}, t)$ が Eq.(19) を満たしている。

5

次の方程式

$$\square G(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) \quad (22)$$

を満たす Green 関数の内、

$$G(\mathbf{r}, t) \begin{cases} \neq 0, & \text{for } t \geq 0 \\ = 0, & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (23)$$

を満たすものを遅延 **Green** 関数と呼ぶ。遅延 Green 関数を次の手順に従って求めよ。

5-a)

Green 関数、デルタ関数の Fourier 積分表示はそれぞれ、

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (24)$$

$$\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (25)$$

である。これらを方程式に代入して

$$\hat{G}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega^2 - c^2k^2} \quad (26)$$

であることを示せ。但し、 $k \equiv |\mathbf{k}|$ で波数ベクトルの大きさである。

5-a) 解答

実際に代入する。

$$\begin{aligned} \text{(LHS)} &= \square G(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\hat{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \left((+i\mathbf{k})^2 - \frac{(-i\omega)^2}{c^2} \right) (\hat{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \\ &= \frac{\omega^2 - c^2k^2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \text{(RHS)} &= -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned}$$

両辺を比較すると

$$\therefore \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega^2 - c^2 k^2}$$

を得る。

5-b)

a) の結果から

$$G(\mathbf{r}, t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \frac{1}{\omega^2 - c^2 k^2} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (27)$$

である。始めに ω について積分を行うことで遅延 Green 関数を求めよ。この時、 $\omega = -ck$ と $\omega = +ck$ が極になるが、これらの極の上側を通る様に積分経路を選ぶことが、遅延 Green 関数を選択する条件である。

5-b) 解答

Eq.(27) は

$$G(\mathbf{r}, t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \frac{1}{\omega^2 - c^2 k^2} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 k^2}$$

であるから、 ω についての複素積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2} \quad (28)$$

を先に計算する。

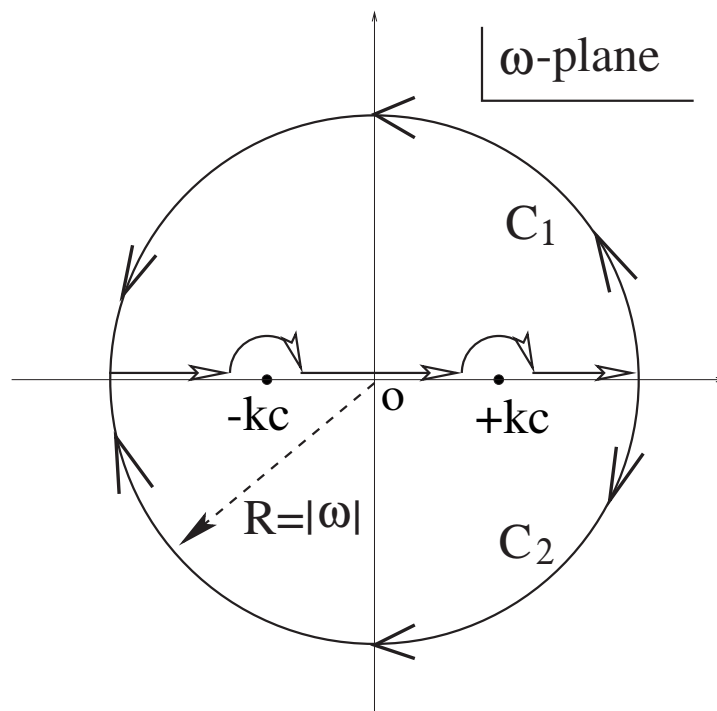


図2 ω - plane 上での積分経路

極を避けて極の上側を通るように積分経路を選ぶことが、遅延 Green 関数を選択する条件であるので（後でその物理的理由について考える）積分経路は図のようになる。始めに $t < 0$ のときを考える。

$$\exp[-i\omega t] = \exp[+i\omega|t|] = \exp(+i|t|\Re[\omega]) \exp(-|t|\Im[\omega])$$

であるから、 $\Im[\omega] > 0$ のとき、 $R = |\omega| \rightarrow +\infty$ に対して、零になる。従って Eq.(28) の積分に上半円積分経路 C_1 を付け加えても問題ない。即ち

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2} = \int_{C_1} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2}$$

である。このとき、積分経路に囲まれる領域に於いて被積分関数は極を持たないことから、この積分は零となる。よって

$$\int_{C_1} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2} = 0$$

である。よって

$$G(\mathbf{r}, t < 0) = 0 \tag{29}$$

を得る。

次に $t \geq 0$ のときを考える。

$$\exp(-i\omega t) = \exp(-i\omega|t|) = \exp(-i|t|\Re[\omega]) \exp(+|t|\Im[\omega])$$

であるから、今度は Eq.(28) の積分に下半円積分経路 C_2 を付け加えても問題ない。即ち

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2} = \int_{C_2} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2}$$

となる。積分経路の中に貳個の極 $\omega = \pm kc$ があるので、積分値はそこでの留数の和となるので、これを求めると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2} = \int_{C_2} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2} = -2\pi i [R(-kc) + R(+kc)] = -2\pi i \left(\frac{e^{ikct}}{-2kc} + \frac{e^{-ikct}}{2kc} \right) = -\frac{2\pi}{kc} \sin(kct)$$

となる。

ω についての積分が求まったので、次に \mathbf{k} についての積分を実行する。この時図のような座標系を採用する。

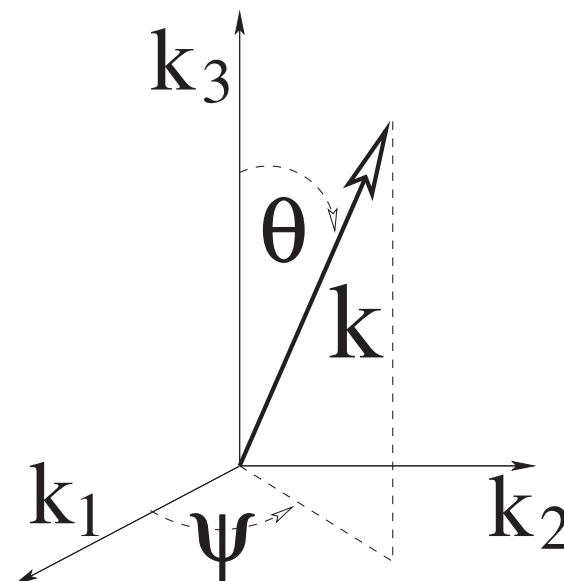


図3 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) = (k, \theta, \psi)$

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}, t \geq 0) &= -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \left\{ -\frac{2\pi}{kc} \sin(kct) \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k^2 \sin\theta dk d\theta d\psi \left[\sin(kct) \frac{1}{k} e^{ikr\cos\theta} \right] \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2} \frac{1}{-ir} \int_0^\infty \sin(kct) dk \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\theta} (e^{ikr\cos\theta}) d\theta = \frac{c}{(2\pi)^2} \frac{1}{-ir} \int_0^\infty dk (e^{-ikr} - e^{+ikr}) \sin(kct) \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \int_0^\infty dk [e^{+ikc(t-r/c)} - e^{+ikc(t+r/c)} + e^{-ikc(t-r/c)} - e^{-ikc(t+r/c)}] \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \left[\left\{ \int_0^\infty dk e^{+ikc(t-r/c)} + \int_{-\infty}^0 dk' e^{+ik'c(t-r/c)} \right\} - \left\{ \int_0^\infty dk e^{+ikc(t+r/c)} + \int_{-\infty}^0 dk' e^{+ik'c(t+r/c)} \right\} \right]; \quad k = -k' \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{+ikc(t-r/c)} - \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{+ikc(t+r/c)} \right] = \frac{1}{4\pi r} \left[\delta\left(t - \frac{r}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{r}{c}\right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}; \quad \because t \geq 0
\end{aligned}$$

以上より求めるべき遅延 Green 関数は

$$\begin{aligned}
G_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t \geq 0) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \\
G_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t < 0) &= 0
\end{aligned}$$

となる。

今回遅延 Green 関数を得るために、極 $\omega = \pm kc$ の上側を通る積分経路を考え計算を行った。これを下側に変えた場合を考える。下側を通る積分経路の場合、先の計算同様の手順を辿れば $t < 0, t \geq 0$ の時の積分結果が上側の時と逆になる（積分経路の向きから符号も逆になる）。この結果得られる Green 関数は $t > 0$ で零、 $t \leq 0$ で値を持つため先進 Green 関数であり、

$$\begin{aligned}
G_{\text{adv}}(\mathbf{r}, t \leq 0) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \\
G_{\text{adv}}(\mathbf{r}, t > 0) &= 0
\end{aligned}$$

となる。

Eq.(22) は物理的には「座標 $\mathbf{r} = 0$ の点に時刻 $t = 0$ の瞬間、単位電荷が存在した場合、座標 (\mathbf{r}, t) の観測者が観測するポテンシャル」の微分方程式である。この場合観測者は必ず $t \geq 0$ にポテンシャルを観測し、 $t < 0$ に観測することは絶対にあり得ない。よって $G(\mathbf{r}, t)$ は遅延型でなければならず、決して先進型ではあり得ない。これは因果律によるものである。

以上が積分経路を極の上側にした、物理的な理由である。

6

十分遠方にある物体が時刻 t' に観測者に向かって光りを出し、それから dt' 後に又光りを出した。この物体は \mathbf{u} で動いているとする。物体から観測者の方向を向く単位ベクトルを \mathbf{n} とする。

6-1

観測者が光りを受け取る時時間間隔 dt が

$$dt = \left[1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \right] dt' \tag{30}$$

であることを示せ。ここで物体は十分遠方にあり、微小時間 dt' 間の物体の運動による \mathbf{n} の変化は無視できるとせよ。

6-1 解答

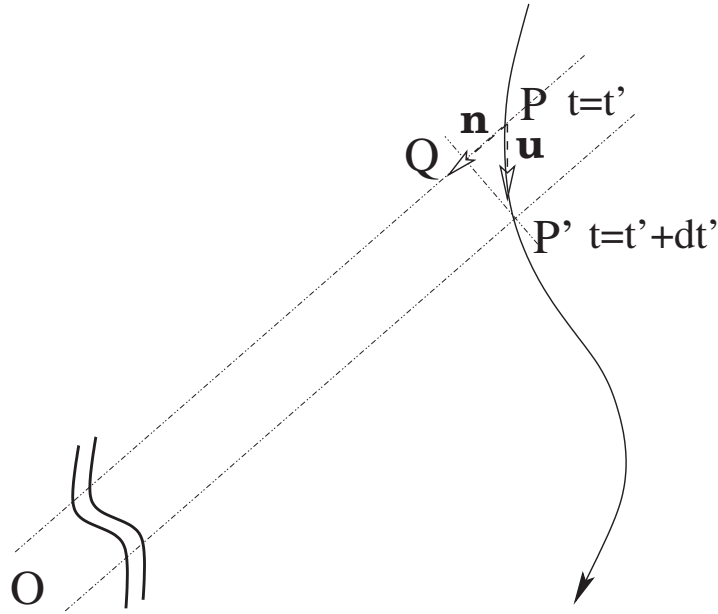


図4 物体と観測者との位置関係

図を参考に考える。点 P で発せられた光りを観測者 O が観測する時刻を t_1 とすると、

$$t_1 = t' + \frac{|OP|}{c}$$

と書け、点 P' で発せられた光りを観測者 O が観測する時刻を t_2 とすると、

$$t_2 = t' + dt' + \frac{|OP'|}{c} = t' + dt' + \frac{|OP| - |QP|}{c} = t' + dt' + \frac{|OP| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dt'}{c}$$

と書ける。よって観測者がこれらの光りを受け取る時間間隔 dt は

$$dt = t_2 - t_1 = \left[1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \right] dt'$$

と求まり、確かに Eq.(30) と一致する。