天体物理学弐 課題番号壱番
解答例
[20070426 出題]

Yuji Chinone

1

1-1

Lorentz gauge には、

$$\nabla^2\chi(\mathbf{r}) = 0 \tag{1}$$

を満たす、時間に依らない関数 $\chi(\mathbf{r})$ を用いて、

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \nabla\chi(\mathbf{r}) \tag{2}$$

なる gauge 変換の自由度が残されていることを証明せよ。

1-1 解答

Lorentz gauge は、

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

を満たす。これに Eq.(2) を代入すると、

$$\nabla\cdot[\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \nabla\chi(\mathbf{r})] + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

$$\because)\quad \text{Eq.(1) and } \frac{\partial\chi(\mathbf{r})}{\partial t} = 0\,;\left[\phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi(\mathbf{r})}{\partial t} = \phi(\mathbf{r},t)\right]$$

であるから、Eq.(2) なる gauge 変換の自由度が残されていることが分かる。

Lorentz gauge に於けるベクトルポテンシャルは、

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{4}$$

を満たす。Eq.(2) を Eq.(4) に代入すると、

$$\nabla^2(\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \nabla\chi(\mathbf{r})) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \nabla\chi(\mathbf{r})) = \nabla^2\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla^2\chi(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi(\mathbf{r})}{\partial t^2}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

$$\Longrightarrow\quad \therefore\ \nabla^2\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}'(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\quad \because)\quad \text{Eq.(1) and } \frac{\partial\chi(\mathbf{r})}{\partial t} = 0$$

となり、$\mathbf{A}'$ も Eq.(4) を満足する。よって Lorentz gauge に於ける電磁ポテンシャルには Eq.(2) なる自由度が許されていることが分かる。

2

http://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/Radiation_from_moving_charges/index.html 参照。

3

http://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/Radiation_from_moving_charges/index.html 参照。

4

4-1

$\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ の電荷も電流も存在しない真空中での Maxwell 方程式から、次の二つの式を導け。

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

4-1 解答

$\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ のとき、Maxwell 方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

と書ける。Rotation を含む項に左から $\nabla\times$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\
&= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}; \qquad \therefore \text{ Eq.(5)} \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\
&= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}; \qquad \therefore \text{ Eq.(6)}
\end{aligned}$$

となり確かに導けた。

5

5-1

Maxwell 方程式から、Maxwell の変位電流 $(1/4\pi)\partial\mathbf{E}/\partial t$ の項を落とし、問題 4 と同様の変形をして Maxwell 方程式から得られる、電場、磁場が満たす方程式を導け。問題 4 同様に $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ の電荷も電流も存在しない真空中とする。

5-1 解答

$(1/4\pi)\partial\mathbf{E}/\partial t = 0, \rho = 0, \mathbf{j} = 0$ のとき、Maxwell 方程式は、

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \quad \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$$

と書ける。Rotation を含む項に左から $\nabla\times$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
&\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)) - \nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) = 0 \\
&\qquad\Longrightarrow\quad \nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \qquad (7) \\
&\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) - \nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \\
&\qquad\Longrightarrow\quad \nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \qquad (8)
\end{aligned}$$

を得る。

6

ダランベール方程式

$$\nabla^2 f(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

の球面波解について考察する。球面極座標の動径座標を R とする。関数 f は動径方向と時刻のみの関数 $f(R,t)$ であるとする。

6-1

ダランベール方程式が

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R}f(R,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(R,t) = 0 \tag{10}$$

と書けることを示せ。

6-1 解答

計量 $g^{\mu\nu}$ でのラプラス演算子は

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi^\mu}\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\xi^\nu}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{\det(g^{\mu\nu})} \tag{11}$$

と書ける。球面極座標 (R,θ,ϕ) では

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = R^2\sin\theta$$

であるので、

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] = \frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \tag{12}$$

となる。$f(\mathbf{r},t)$ は (R,t) のみの関数であるので、Eq.(9) と Eq.(12) より Eq.(10) を得る。

6-2

Eq.(10) に

$$f(R,T) = \frac{U(R,t)}{R}$$

を代入し、$U(R,t)$ が満たす方程式が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2}\right) U(R,t) = 0 \tag{13}$$

となることを示せ。

6-2 解答

$f = U/R$ を Eq.(10) の左辺に代入すると、それぞれの項は

$$(\text{第壱項}) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial}{\partial R}\right) f(R,t) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial U(R,t)}{\partial R} - U(R,t)\right) = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial U(R,t)}{\partial R} + R\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2} - \frac{\partial U(R,t)}{\partial R}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2}$$

$$(\text{第弐項}) = \frac{\partial^2 f(R,t)}{\partial (ct)^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial (ct)^2}$$

より、Eq.(13) を得る。

6-3

Eq.(13) を以下で定義される ξ, η を用いて変形せよ。

$$\xi = R - ct, \quad \eta = R + ct \tag{14}$$

6-3 解答

Eq.(14) を用いると、

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial \xi}{\partial R}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial R}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} = \frac{\partial}{\partial (ct)}\left(\frac{\partial \xi}{\partial (ct)}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial (ct)}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial (ct)}\left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

と書けるので、

$$\frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{15}$$

を得る。

6-4

6-3 の結果より以下の二つがダランベール方程式の解であることを示せ。

$$f(R,t) = \frac{g(R-ct)}{R}, \quad f(R,t) = \frac{h(R+ct)}{R} \tag{16}$$

ここで $g(\xi), h(\eta)$ はそれぞれ ξ, η にのみ依存する任意の関数である。

6-4 解答

Eq.(15) を ξ で積分すると、

$$\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta} = H(\eta)$$

となり、更に η で積分すると、

$$U(\xi,\eta) = \int H(\eta)d\eta + g(\xi) = g(\xi) + h(\eta)$$

を得る。よって、

$$f(R,t) = \frac{g(R-ct)}{R} + \frac{h(R+ct)}{R} \tag{17}$$

が Eq.(9) の球面波解である。

6-5

6-4 で得られた解の物理的性質を考察せよ。

6-5 解答

関数 $g(R-ct)$ は時刻 $t=0$ での形 $g(R_0)$ が、時刻 t では $g(R_t - ct = R_0), R_t = R_0 + ct$ で実現されることから、$g(R-ct)$ は動経方向正の方向に速度 c で伝搬する波を表している。関数 $h(R+ct)$ は同様にして、動経方向負の方向に速度 c で伝搬する波を表している。又振幅が $1/R$ に比例して落ちるのは、波のエネルギーが $1/R^2$ に比例し、球の表面積が R^2 に比例することを考えると、エネルギー保存則を表していることがわかる。

二つの解について考える。以下、中心に delta 関数的な電荷があり、中心以外で空間は真空である場合で考える。電荷の作る波は外向きに進む波だけであると仮定すると、電磁波は電荷の運動で起きるので、波は中心から外向きに進行すると考えるのが普通である。電荷が動き出す前に無限遠から球面波がやって来て、電荷が動き始める時に丁度中心に到着すると考えるのは寧ろ奇妙である。このような解も可能ではあるが、経験によると電荷が加速されると電磁波が電荷から外へ出ていく。

Maxwell 方程式はその形から明らかに時間反転に対して不変であるから、どちらの可能性も許すが、経験的事実に基づいて、外向きの波の解だけが「物理的に意味がある」ということになる。

6-6

問題 5 で得られた方程式に以上と同様の手続きを行って得られる解を求めよ。この解とダランベールの球面波解の違いについて考察せよ。

6-6 解答

ダランベール方程式の場合と同様に $f = U/R$ とおくと、

$$\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2} = 0$$

を得る。これを積分すると、

$$U(R) = AR + B;\ A, B = \mathrm{Const},\ \therefore\ f(R) = A + \frac{B}{R} \tag{18}$$

を得る。これは時間発展しない定常ポテンシャル型の解である（ラプラス方程式の解）。一見すると無限遠でも場 (B) が存在しているかに見えるが、これは境界条件から決まるので、一様場が存在すれば有限であるし、中心に点源のみがあるような場合は零である。

ダランベール方程式の場合でもそうであるが、中心に電荷も電流もなければ場も外向きの球面波も存在しないはずではあるが、不思議に Eq.(17),(18) の解の形は、中心に電荷が存在する場合の解を与える結果となっている。

7

7-1

輻射場のエネルギー密度 U と運動量密度 g のとの間に、

$$g = \frac{U}{c} \tag{19}$$

の関係があることを示せ。

7-1 解答

輻射場の Poynting vector は

$$\mathbf{S}_{\rm rad} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}_{\rm rad} \times \mathbf{B}_{\rm rad}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B})\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}^2\mathbf{n}\right], \quad [\because\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{E} = 0] \tag{20}$$

と書ける。一方輻射場のエネルギー密度は

$$U_{\rm rad} = \frac{1}{8\pi}\left[\mathbf{E}^2_{\rm rad} + \mathbf{B}^2_{\rm rad}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{E}^2\right] \tag{21}$$

と書けるので、これを用いると Poynting vector は

$$\mathbf{S} = cU\mathbf{n} \tag{22}$$

と書け、確かにエネルギー流束の形になっていることが分かる。以上より運動量密度 g は

$$g \equiv \frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}\left|\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right| = \frac{1}{c^2}\left|\mathbf{S}\right| = \frac{U}{c}$$

となる。

8

座標原点に静止した電荷 q 、質量 m の粒子がある。空間は真空とする。ここに z 軸に沿って z 軸負の方向から正の方向に伝わる平面電磁波が入射してきた。この電磁波の電場は x 成分のみもち、その時間変化が

$$E_x(t,z) = \begin{cases} E_0\cos(\omega t - kz) & \text{for} \quad z \le \dfrac{\omega}{k}t \\ 0 & \text{for} \quad z > \dfrac{\omega}{k}t \end{cases} \tag{23}$$

であるとする。これを直線偏光した電磁波と呼ぶ。こうすると $t = 0$ のとき $z = 0$ の面に電磁波が到達することになる。真空なので $\omega/k = c$ で位相速度は c である。

電磁波の性質から磁場は、 y 成分のみもち、その時間変化は電場と同じで

$$B_y(t,z) = \begin{cases} B_0\cos(\omega t - kz) & \text{for} \quad z \le \dfrac{\omega}{k}t \\ 0 & \text{for} \quad z > \dfrac{\omega}{k}t \end{cases} \tag{24}$$

であり、電磁波の性質から

$$E_0 = B_0$$

である。

8-1

上記の電場が真空中の Maxwell 方程式を満たすことを示せ。

8-1 解答

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_x \left(E_0 \cos(\omega t - kz) \right) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z \left(E_0 \cos(\omega t - kz) \right) \\ -\partial_y \left(E_0 \cos(\omega t - kz) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 k \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{B_0 \omega}{c} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 k \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \because\ \omega = ck,\ E_0 = B_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z \left(B_0 \cos(\omega t - kz) \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_0 k \sin(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\partial_t \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\omega E_0}{c} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_0 k \sin(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \because\ \omega = ck,\ E_0 = B_0$$

確かに満たしている。

8-2

電磁波の運動量密度ベクトル $\mathbf{g}$ を求めよ。

8-2 解答

運動量密度ベクトルは

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

であるからこれを計算すると、

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}\left(E_y B_z - E_z B_y, E_z B_x - E_x B_z, E_x B_y - E_y B_x \right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}\left(0, 0, E_x B_y \right)$$

$$\therefore\ \mathbf{g} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{c}\left(0,\ 0,\ E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \right) & \text{for} \quad z \le \dfrac{\omega}{k} t \\ \mathbf{0} & \text{for} \quad z > \dfrac{\omega}{k} t \end{cases} \tag{25}$$

となる。

8-3

電磁波の運動量の x,y,z 成分それぞれの運動量フラックスベクトル $\mathbf{M}_i$ を求めよ。求めた運動量フラックスベクトルの z 成分の大きさと運動量密度ベクトルの z 成分の比を求めよ。

8-3 解答

運動量フラックスベクトル $\mathbf{M}_i$ は

$$\mathbf{M}_x = -\frac{1}{4\pi}\left(E_xE_x - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + B_xB_x - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2,\ E_xE_y + B_xB_y,\ E_xE_z + B_xB_z\right)$$
$$\mathbf{M}_y = -\frac{1}{4\pi}\left(E_yE_x + B_yB_x,\ E_yE_y - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + B_yB_y - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2,\ E_yE_z + B_yB_z\right)$$
$$\mathbf{M}_z = -\frac{1}{4\pi}\left(E_zE_x + B_zB_x,\ E_zE_y + B_zB_y,\ E_zE_z - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + B_zB_z - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right)$$

であるから、各成分について計算すると、$z \le \omega/kt$ のとき（$z > \omega/kt$ のときは常に零ベクトル）

$$\mathbf{M}_x = -\frac{1}{4\pi}\left(E_0^2\cos^2(\omega t - kz) - \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(\omega t - kz) - \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(\omega t - kz), 0, 0\right) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_y = -\frac{1}{4\pi}\left(0, -\frac{1}{2}E_0^2\cos^2(\omega t - kz) + E_0^2\cos^2(\omega t - kz) - \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(\omega t - kz), 0\right) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M}_z = -\frac{1}{4\pi}\left(0, 0, -\frac{1}{2}E_0^2\cos^2(\omega t - kz) - \frac{1}{2}E_0^2\cos^2(\omega t - kz)\right) = \frac{1}{4\pi}\left(0, 0, E_0^2\cos^2(\omega t - kz)\right)$$

となる。よって運動量フラックスベクトルの z 成分の大きさと運動量密度ベクトルの z 成分の比は c である。これは比較する対象が、**運動量**と**運動量フラックス**であることから考えても明らかである。

9

以下、8 で扱った電磁波の影響による粒子の運動を考察する。粒子の運動方程式は、

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B} \tag{26}$$

以下では、加速後の粒子の速度は光速より十分遅いとする。$v/c \ll 1$, $E_0 = B_0$ より、運動方程式中の磁場による Lorentz 力の項は、第零近似で無視できる。電磁波が到着する前は粒子は原点に静止しているとする。

9-1

粒子は x 方向のみに運動するが、何故か説明せよ。

9-1 解答

今、$\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = (E(t,z), 0, 0), \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, B(t,z), 0)$ であるから、運動方程式を考えると

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = q\left\{E(t,z) + \frac{1}{c}\left(v_y B_z - v_z B_y\right)\right\} = q\left\{E_0\cos(\omega t - kz) - \frac{v_z}{c}E_0\cos(\omega t - kz)\right\} \tag{27}$$

$$= q\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)E_0\cos(\omega t - kz) \tag{28}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = q\left\{0 + \frac{1}{c}\left(v_z B_x - v_x B_z\right)\right\} = 0 \tag{29}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = q\left\{0 + \frac{1}{c}\left(v_x B_y - v_y B_x\right)\right\} = qE_0\frac{v_x}{c}\cos(\omega t - kz) \tag{30}$$

となる。$v/c \ll 1$ の条件より、z 成分については Lorentz 力の項が無くなり、x 成分に関しては

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qE_0}{m}\cos(\omega t - kz) \tag{31}$$

となるので、粒子は x 方向のみにしか運動しない。

9-2

運動方程式を解き、粒子の運動速度を時間の関数として求めよ。

9-2 解答

始め原点に静止していた粒子が Eq.(31) により、$v/c \ll 1$ の状況で、x 軸方向にのみ運動をし始める。このとき後で示すように

$$z = \mathrm{Const} = 0$$

として扱って問題ないことが分かる。y,z 成分は静止し続け、x 成分は Eq.(31) を時間 t で積分して

$$v_x(t) = \int dt\,\frac{qE_0}{m\omega}\cos\omega t = \frac{qE_0}{m\omega}\sin\omega t + A, \quad A\text{: 積分定数}$$

であるが、粒子は始め $t = 0$ で静止していたので、結局 $A = 0$ を得、

$$v_x(t) = \frac{qE_0}{m\omega}\sin\omega t \tag{32}$$

となる。

9-3

粒子の運動量の一周期に渡る時間平均が零であることを示せ。

9-3 解答

x 成分にしか運動していないので、x 成分の運動量がこの粒子の全運動量である。一周期に渡る時間平均を計算すると、$T = 2\pi/\omega$ であるから

$$\langle p\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\,p_x = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\,\frac{qE_0}{\omega}\sin\omega t = -\frac{qE_0}{2\pi\omega}\Big[\cos\omega t\Big]_0^{2\pi/\omega}$$
$$= -\frac{qE_0}{2\pi\omega}\left[\cos 2\pi - \cos 0\right] = 0$$

となり、零である。

9-4

粒子の運動エネルギーの時間変化を求めよ。

9-4 解答

運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}mv_x^2$$

であるから、

$$K = \frac{q^2E_0^2}{2m\omega^2}\sin^2\omega t = \frac{q^2E_0^2}{4m\omega^2}\left[1-\cos(2\omega t)\right] \tag{33}$$

である。

9-5

粒子の運動エネルギーの一周期に渡る時間平均を求めよ。

9-5 解答

前問より

$$\begin{aligned}\langle K\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T dt\,K = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\,\frac{q^2E_0^2}{4m\omega^2}\left[1-\cos(2\omega t)\right] \\ &= \frac{q^2E_0^2}{8\pi m\omega}\left[t-\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega)\right]_0^{2\pi/\omega} = \frac{q^2E_0^2}{8\pi m\omega}\left[\frac{2\pi}{\omega}-\frac{1}{2\omega}\left\{\sin(4\pi)-\sin(0)\right\}\right] \\ &= \frac{q^2E_0^2}{4m\omega^2}\end{aligned} \tag{34}$$

となる。

10

9 の結果、電磁波の電場により粒子が x 方向の速度成分を持つことが分かった。以下では、この運動の為に粒子が受ける電磁波の磁場による Lorentz 力の影響を調べる。

10-1

Lorentz 力が z 成分のみ持つことを説明せよ。Lorentz 力の z 成分を時間の関数として求めよ。

10-1 解答

$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c$ より、v/c の一次まで考えると、

$$\mathbf{F} = q\frac{1}{c}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}-\dfrac{v_zB_y}{c}\\0\\\dfrac{v_xB_y}{c}\end{pmatrix} = qB_y\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{c}O\left(\dfrac{v_x}{c}\right)\\0\\\dfrac{v_x}{c}\end{pmatrix} = qB_y\begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{v_x}{c}\end{pmatrix}$$

となり、z 成分のみである。この時

$$F_z(t,z) = \frac{B_y v_x}{c} = \left\{\frac{qE_0 \cos\omega t}{c}\right\}\left\{\frac{qE_0}{m\omega}\sin\omega t\right\} = \frac{q^2E_0^2}{2m\omega c}\sin(2\omega t) \tag{35}$$

となる。このとき運動方程式より

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{q^2E_0^2}{2m^2\omega c}\sin(2\omega t) \tag{36}$$

である。

10-2

10-1 の結果から Lorentz 力により粒子は z 方向にも僅かに運動し出すことが分かる。以下ではこの運動が非常にゆっくりであり、粒子は原点近辺に居ると近似しても良いとし、常に粒子の位置は $z = 0$ として扱う。

運動方程式の z 成分を解き、粒子の速度の z 成分を時間の関数として求めよ。

10-2 解答

Eq.(36) を時間 t で積分すると

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \int dt\, \frac{q^2E_0^2}{2m^2\omega c}\sin 2\omega t = -\frac{q^2E_0^2}{4m^2\omega^2 c}\cos 2\omega t + B, \quad B\text{: 積分定数}$$

であるが、初期条件 $v_z(0) = 0$ より

$$B = \frac{q^2E_0^2}{4m^2\omega^2 c}$$

と求まるので

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{q^2E_0^2}{4m^2\omega^2 c}[1 - \cos 2\omega t] \tag{37}$$

となる。

10-3

10-2 で求めた速度 z 成分の振幅と 9-2 で求めた速度 x 成分の振幅の比をとり、その比が v_x/c のオーダーで z 成分の速度が x 成分の速度に対して十分小さいことを示せ。

10-3 解答

実際に比を計算すると

$$\frac{\text{速度の z 成分}}{\text{速度の x 成分}} \approx \frac{\frac{q^2E_0^2}{m^2\omega^2 c}}{\frac{qE_0}{m\omega}} = \frac{qE_0}{m\omega}\frac{1}{c} = \left(\frac{v_x}{c}\right) = O\left(\frac{v_x}{c}\right)$$

であり、v_x/c のオーダーで z 成分の速度が x 成分の速度に対して十分小さい。

10-4

粒子の運動量 z 成分の一周期に渡る時間平均を求めよ。

10-4 解答

x 成分のとき同様に計算すると

$$
\begin{aligned}
\langle p_z\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T dt\, p_z = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\, \frac{q^2E_0^2}{4m\omega^2 c}(1-\cos\,2\omega t) = \frac{q^2E_0^2}{8\pi m\omega c}\int_0^{2\pi/\omega}(1-\cos\,2\omega t)dt \\
&= \frac{q^2E_0^2}{8\pi m\omega c}\left[t-\frac{1}{2\omega}\sin\,2\omega t\right]_0^{2\pi/\omega} = \frac{q^2E_0^2}{8\pi m\omega c}\frac{2\pi}{\omega} \\
&= \frac{q^2E_0^2}{4m\omega^2}\frac{1}{c}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

となる。

10-5

9-5 と 10-4 の結果の比をとり、電磁波の影響により粒子が得る運動エネルギーと運動量の比が c であることを示せ。

10-5 解答

Eq.(34),(38) より

$$
\frac{\text{粒子が得る運動エネルギー}}{\text{粒子が得る運動量}} = \frac{\langle K\rangle}{\langle p_z\rangle} = \frac{\dfrac{q^2E_0^2}{4m\omega^2}}{\dfrac{q^2E_0^2}{4m\omega^2}\dfrac{1}{c}} = c
$$

であるので、確かに電磁波の影響により粒子が得る運動エネルギーと運動量の比は c である。これより、光子について

$$
E = pc \tag{39}
$$

が成り立つことが予想される。

11

$z=0$ の面内に電荷 q、質量 m の粒子が存在し、以下に示す電磁波のもとで定常的な運動をしている場合を考える。空間は真空とする。平面電磁波が、z 軸負の方向から正の方向に伝わっているとする。平面電磁波は

$$
\mathbf{E} = \begin{cases} E_x(t,z) &= E_0\cos(\omega t - kz) \\ E_y(t,z) &= -E_0\sin(\omega t - kz) \\ E_z(t,z) &= 0 \end{cases} \tag{40}
$$

と書け、これは右回りに円偏光した電磁波である。粒子に速度 $\mathbf{v}$ に比例した抵抗力 $-\gamma\mathbf{v}$ が働いているとする。粒子の運動方程式は

$$
m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma\mathbf{v} + q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B} \tag{41}
$$

で与えられる。

11-1

電磁波の磁場の x,y,z 成分を求めよ。

11-1 **解答**

真空中の Maxwell 方程式より、

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}E_0\cos(\omega t-kz)\\ -E_0\sin(\omega t-kz)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-kE_0\cos(\omega t-kz)\\ kE_0\sin(\omega t-kz)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \mathbf{B} = \begin{cases}B_x(t,z) &=& E_0\sin(\omega t-kz)\\ B_y(t,z) &=& E_0\cos(\omega t-kz) \quad [\omega = ck,\ B_0 = E_0]\\ B_z(t,z) &=& 0\end{cases}$$

となる。このとき確かに

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = E_0^2\left[\cos(\omega t-kz)\,\sin(\omega t-kz) - \cos(\omega t-kz)\,\sin(\omega t-kz)\right] = 0$$

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B_0^2} = \frac{\omega}{c}\frac{1}{B_0^2}\left(0,0,E_0^2\left[\cos^2(\omega t-kz)+\sin^2(\omega t-kz)\right]\right) = \frac{\omega}{c}(0,0,1)$$

であるから、上記の関係が成り立っていることが分かる。

抵抗力が慣性力 $m d\mathbf{v}/dt$ よりも圧倒的に強く、抵抗力と Lorentz 力の釣り合いで定常運動が実現されているとする。$v/c \ll 1, B_0 = E_0$ より運動方程式中の磁場による Lorentz 力の項は第零近似で無視できる。この近似で粒子は。$z = 0$ の平面内を動くことになる。

11-2-(a)

粒子の速度を時間の関数として書け。

11-2-(a) **解答**

運動方程式を各成分について書き下すと

$$\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= -\gamma v_x + q\left[E_x + \frac{1}{c}\left(v_yB_z - v_zB_y\right)\right] = -\gamma v_x + q\left[E_0\cos\omega t - \frac{v_z}{c}E_0\cos\omega t\right]\\ &= -\gamma v_x + qE_0\cos\omega t\left(1-\frac{v_z}{c}\right) \qquad (42)\\ m\frac{dv_y}{dt} &= -\gamma v_y + q\left[E_y + \frac{1}{c}\left(v_zB_x - v_xB_z\right)\right] = -\gamma v_y + q\left[-E_0\sin\omega t + \frac{v_z}{c}E_0\sin\omega t\right]\\ &= -\gamma v_y + qE_0\sin\omega t\left(-1+\frac{v_z}{c}\right) \qquad (43)\\ m\frac{dv_z}{dt} &= -\gamma v_z + q\left[E_z + \frac{1}{c}\left(v_xB_y - v_yB_x\right)\right] = -\gamma v_z + qE_0\left[\frac{v_x}{c}\cos\omega t - \frac{v_y}{c}\sin\omega t\right] \qquad (44)\end{aligned}$$

となる。抵抗力が Lorentz 力に比べて十分大きいため、抵抗力と Lorentz 力の釣り合いで定常運動が実現されており $v/c \ll 1$ であるから運動方程式 (42),(43),(44) は次のように書き換えられるので、速度を得る。

$$\begin{cases}\gamma v_x &=& qE_0\cos\omega t\\ \gamma v_y &=& -qE_0\sin\omega t\\ \gamma v_z &=& 0\end{cases} \implies \begin{cases}v_x(t) &=& \dfrac{qE_0}{\gamma}\cos\omega t\\ v_y(t) &=& -\dfrac{qE_0}{\gamma}\sin\omega t\\ v_z(t) &=& 0\end{cases} \qquad (45)$$

11-2-(b)

粒子の軌道を求めよ。但し、円運動の中心が原点になるように座標を選べ。

11-2-(b) **解答**

速度をそれぞれの成分について時間 t で積分する。z 成分は先に考えて様に、

$$z(t) = \mathrm{Const} = 0 \tag{46}$$

である。x,y 成分についての積分を実行すると、

$$x(t) = \int v_x(t)\,dt = \frac{qE_0}{\gamma\omega}\sin\omega t + C_1$$
$$y(t) = \int v_y(t)\,dt = \frac{qE_0}{\gamma\omega}\cos\omega t + C_2$$

となる。これは xy 平面上で円を描く軌道であるが、中心が原点になるようにすると $C_1 = C_2 = 0$ となり結局

$$x(t) = \frac{qE_0}{\gamma\omega}\sin\omega t \tag{47}$$
$$y(t) = \frac{qE_0}{\gamma\omega}\cos\omega t \tag{48}$$

を得る。整理すると

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{qE_0}{\gamma\omega}\right)^2$$

となるので、粒子が xy 平面上で半径 $qE_0/(\gamma\omega)$ の時計回りの円運動をすることが分かる。

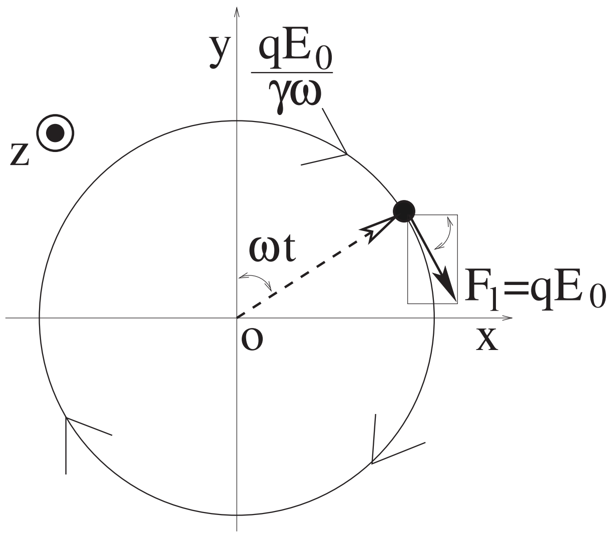

図 1

11-2-(c)

電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー（＝電磁波の仕事率）を求めよ。

11-2-(c) **解答**

電磁波が単位時間に与えるエネルギーは、電磁波の仕事率、仕事の時間についての一階微分である。粒子は電磁波によって与えられたエネルギーによって運動をしている（エネルギーが与えられなかったら、抵抗力により運動は止まってしまう。全ての運動は電磁波の影響によるもの）。電磁波は Lorentz 力という形で粒子に

影響を及ぼしているので、電磁波が Lorentz 力を用いて粒子に行っている仕事に対する仕事率が、電磁波の仕事率である。Lorentz 力を $\mathbf{F}_l$ とすると[*1]、求めるべき仕事率 W は $W = \mathbf{F}_l \cdot \mathbf{v}$ と書けるので、電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギーは、磁場は仕事をしないので

$$W = \mathbf{F}_l \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} qE_0 \cos \omega t \\ -qE_0 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{qE_0}{\gamma} \cos \omega t \\ -\dfrac{qE_0}{\gamma} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{q^2 E_0^2}{\gamma} \tag{49}$$

となる。

11-2-(d)

電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量の x,y 成分の一周期に渡る時間平均が零であることを示せ。

11-2-(d) 解答

前問同様に考えると、単位時間当たりに電磁波が粒子に与えてる運動量は、粒子に働く Lorentz 力である。依って、

$$\langle p_x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt\, F_{lx} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \gamma v_x\, dt = \frac{qE_0 \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt\, \cos \omega t = \frac{qE_0}{2\pi} \left[\sin \omega t\right]_0^{2\pi/\omega} = 0$$
$$\left\langle p_y \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt\, F_{ly} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \gamma v_y\, ft = -\frac{qE_0 \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt\, \sin \omega t = \frac{qE_0}{2\pi} \left[\cos \omega t\right]_0^{2\pi/\omega} = 0$$

であるから、ともに零である。

11-2-(e)

電磁波が粒子に与える単位時間当たりの角運動量（=電磁波のトルク）を求めよ。

11-2-(e) 解答

電磁波が粒子に与える単位時間当たりの角運動量は電磁波のトルクであり、これは電磁波が Lorentz 力を通じて粒子に与えるトルクである。今の円運動の場合、磁場による力は常に位置ベクトルと平行だから、トルクに関与しない。よってトルク $\boldsymbol{\tau}$ は

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_l = \begin{pmatrix} \dfrac{qE_0}{\gamma\omega} \sin \omega t \\ \dfrac{qE_0}{\gamma\omega} \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} qE_0 \cos \omega t \\ -qE_0 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{q^2 E_0^2}{\gamma\omega} \end{pmatrix}$$

となる[*2]。

11-2-(f)

(c) と (e) の結果の比を求めよ。

[*1] ここでは Lorentz 力とは $q\left[\mathbf{E} + (\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}\right]$ を指す。
[*2] 電磁波の進行方向時計回りを右回りとしている為、xy 平面での右回りとは逆になっている。

11-2-(f) **解答**

$$\frac{W}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{\dfrac{q^2E_0^2}{\gamma}}{\dfrac{q^2E_0^2}{\gamma\omega}} = \omega \tag{50}$$

電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー（=電磁波の仕事率）と、電磁波が粒子に与える単位時間当たりの角運動量（=電磁波のトルク）の比は、電磁波が粒子に与えるエネルギーと、電磁波が粒子に与える角運動量の比と同等である。電磁波の電場により粒子が x,y 成分を持つため、電磁波の磁場による Lorentz

力を受ける。

11-3-(a)

Lorentz 力が z 成分のみ持つことを示せ。又、Lorentz 力の z 成分を求めよ。

11-3-(a) **解答**

Eq.(42),(43),(44) を見ると、$v/c \ll 1$ であるために Lorentz 力の項の括弧の中身は x, y 成分について

$$\text{x 成分：}\quad 1 - \frac{v_z}{c} = 1 - O\left(\frac{v}{c}\right) \sim 1$$
$$\text{y 成分：}\quad -1 + \frac{v_z}{c} = -1 + O\left(\frac{v}{c}\right) \sim -1$$

電場の成分が卓越し磁場の寄与はなくなってしまう。z 成分を見てみると $O(v/c)$ の項のみが存在するため、磁場による Lorentz 力の影響が現れる。このことから、磁場による Lorentz 力が z 成分のみ持つことが分かる。

z 成分を書き下すと

$$F_z = \frac{qE_0}{c}\left(v_x \cos\omega t - v_y \sin\omega t\right) = \frac{qE_0}{c}\frac{qE_0}{\gamma} = \frac{q^2E_0^2}{\gamma c} \tag{51}$$

となる。

11-3-(b)

(a) の結果から電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量の z 成分を求めよ。又、11-2-(c) の結果との比を求めよ。

11-3-(b) **解答**

電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量は、粒子が受ける Lorentz 力である。電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量の z 成分を p_z とすると

$$p_z = F_z = \frac{q^2E_0^2}{\gamma c} \tag{52}$$

である。また電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー（=電磁波の仕事率）との比をとると

$$\frac{W}{p_z} = \frac{\dfrac{q^2E_0^2}{\gamma}}{\dfrac{q^2E_0^2}{\gamma c}} = c \tag{53}$$

となる。この比は結局、電磁波が粒子に与えるエネルギーと、電磁波が粒子に与える z 成分の運動量の比である。この時も Eq.(39) が成り立っている。

11-3-(c)

定常状態では、粒子の速度の z 成分が x,y 成分よりも十分小さいことを示せ。但し、粒子の速度は光速よりも十分小さいとする。

11-3-(c) 解答

定常状態は抵抗力と Lorentz 力との釣り合いであるから運動方程式 (44) より

$$\gamma v_z = F_z \quad \Longrightarrow \quad v_z = \frac{q^2 E_0^2}{\gamma^2 c} \tag{54}$$

となる。v_z と v_x,v_y の振幅 $v = qE_0/\gamma$ との比をとると

$$\frac{v_z}{v} = \frac{\dfrac{q^2 E_0^2}{\gamma^2 c}}{\dfrac{qE_0}{\gamma}} = \frac{v}{c} = O\left(\frac{v}{c}\right)$$

であるから、粒子の速度 v が光速よりも十分小さいとすると、z 成分の速度は x,y 成分の速度に比べて十分小さいことが分かる。

量子力学によれば、角周波数 ω の単色の電磁波は、エネルギー $\hbar\omega$ の光子の集まりであると考えられている。

11-4-(a)

11-2-(c) の結果から単位時間当たりに粒子に吸収される光子の数を求めよ。

11-4-(a) 解答

光子壱個当たりのエネルギーは $\hbar\omega$ であるから、単位時間当たりに粒子が吸収する光子の数は、電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー W を $\hbar\omega$ で割ることで得られる。よって

$$\text{単位時間当たりに粒子が吸収する光子の数} = N = \frac{W}{\hbar\omega} = \frac{q^2 E_0^2}{\gamma\hbar\omega} \quad [\text{個/単位時間}] \tag{55}$$

となる。

11-4-(b)

11-2-(f),11-3-(b) の結果から右回りに円偏光した z 方向正に進む電磁波を形成する光子壱個当たりの角運動量、運動量を求めよ。

11-4-(b) 解答

11-2-(f) の結果は電磁波が粒子に与えるエネルギーと、電磁波が粒子に与える角運動量の比である。これより電磁波が粒子に与える角運動量は

$$\frac{W}{|\boldsymbol{\tau}|} = \omega = \frac{N\hbar\omega}{|\boldsymbol{\tau}|}, \quad \therefore\ |\boldsymbol{\tau}| = N\hbar$$

となる。光子が粒子に吸収されことから、粒子が得る角運動量は吸収された全光子の角運動量と一致するはずである。角運動量の向きを踏まえると、11-2-(e) の結果から進行方向と逆向きであるので、進行方向を正（z軸正を正）とすると、

$$(\text{右回りに円偏光した z 軸正の方向に進む電磁波を形成する光子壱個当たりの角運動量}) = -\hbar \tag{56}$$

である。

同様に考えると 11-3-(b) の結果は電磁波が粒子に与えるエネルギーと、電磁波が粒子に与える z 成分の運動量の比であるので、これより電磁波が粒子に与える z 成分の運動量は

$$\frac{W}{p_z} = c = \frac{N\hbar\omega}{p_z} \quad \therefore\ p_z = N\frac{\hbar\omega}{c} \tag{57}$$

となる。光子が粒子に吸収されことから、粒子が得る運動量は全光子の z 成分の運動量と一致するはずであり、また光子は z 方向のみの運動であるから、進行方向を正（z 軸正を正）とすると、

$$(\text{z 軸正の方向に進む電磁波を形成する光子壱個当たりの運動量}) = \frac{\hbar\omega}{c} \tag{58}$$

となり、確かに Eq.(39) が成り立っている。