天体物理学式 課題番号四番
解答例
[20070510 出題]

Yuji Chinone

1

1-1

次の式を示せ。但し $\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$

$$\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & \cos\delta_2 \\ -\sin\delta_1 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & -\sin\delta_1 \\ \cos\delta_2 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1-1 解答

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & \cos\delta_2 \\ -\sin\delta_1 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & -\sin\delta_2 \\ \cos\delta_2 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin^2\delta_2 + \cos^2\delta_2 & -(\sin\delta_1\sin\delta_2 + \cos\delta_1\cos\delta_2) \\ -(\sin\delta_1\sin\delta_2 + \cos\delta_1\cos\delta_2) & \sin^2\delta_1 + \cos^2\delta_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\delta_2 - \delta_1) \\ -\cos(\delta_2 - \delta_1) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2

2-1

次の行列の固有値を求め共に零以上の値をとることを示せ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

2-1 解答

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \cos^2\delta = [(1-\lambda) + \cos\delta]\,[(1-\lambda) - \cos\delta] = 0$$

$$\therefore\ \lambda = 1 \pm \cos\delta \geq 0, \quad \because)\ -1 \leq \cos\delta \leq +1$$

3

3-1

Eq.(2) の固有ベクトルを求めこの行列を対角化するユニタリー行列 U とその逆行列 U^{-1} を求めよ。

3-1 解答

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (1 \pm \cos\delta)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \therefore\ Y = \mp X$$

より、

$$\text{固有値}: (1+\cos\delta), \text{固有ベクトル}: \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \text{固有値}: (1-\cos\delta), \text{固有ベクトル}: \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left[UU^{-1} = E\right] \tag{3}$$

を得る。

4

4-1

X, Y は完全二次形式

$$X^2 + Y^2 - 2XY\cos\delta = \sin^2\delta \tag{4}$$

を満たす。今

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

なる変換によってこの二次形式は ξ, η ではどのように書けるか。

4-1 解答

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \xi + \eta \\ -\xi + \eta \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 - XY\cos\delta = \frac{1}{2}(\xi+\eta)^2 + \frac{1}{2}(-\xi+\eta)^2 - (\xi+\eta)(-\xi+\eta)\cos\delta &= \xi^2 + \eta^2 + \left(\xi^2 - \eta^2\right)\cos\delta \\ &= \sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta \end{aligned}$$

となるが、これを整理すると、

$$\begin{array}{ll} \text{when } \delta = n\pi, (n = 2m;\ m \in \mathbf{N}), & \xi = 0 \\ \text{when } \delta = n\pi, (n = 2m+1;\ m \in \mathbf{N}), & \eta = 0 \\ \text{otherwise} & \dfrac{\xi^2}{\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\delta}{2}\right)^2} + \dfrac{\eta^2}{\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{\delta}{2}\right)^2} = 1 \end{array} \tag{5}$$

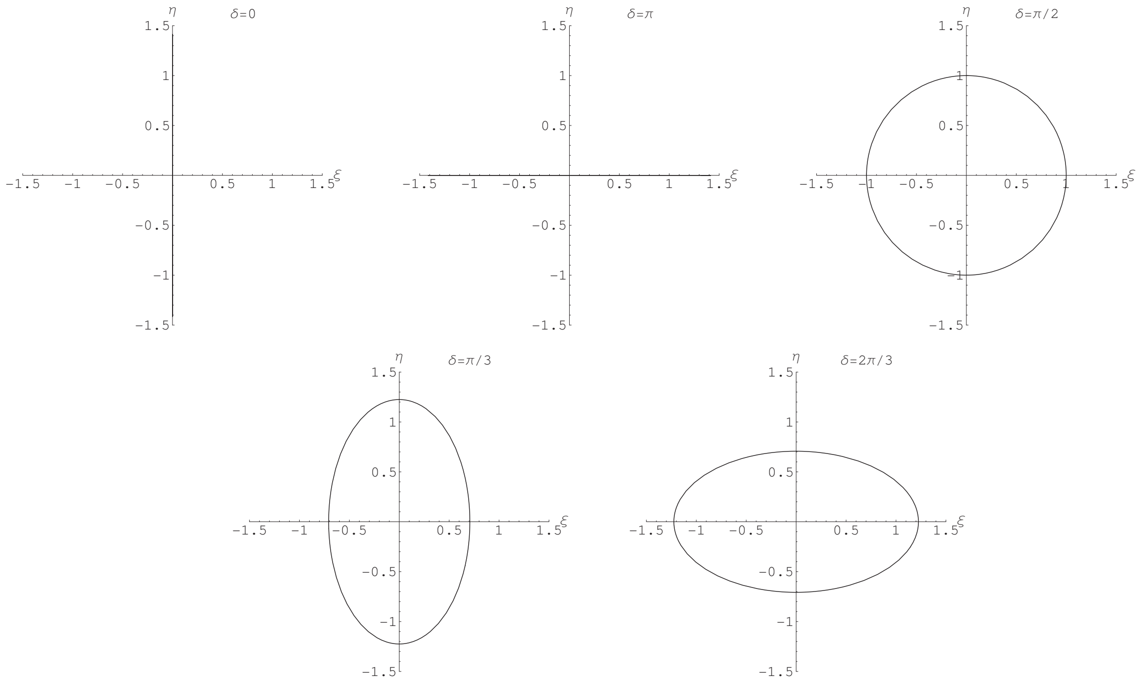

図 1　Eq.(5) の概形

を得る。

5　Liénard's formula and Larmor's formula

電荷 q の粒子の加速運動によって作られる輻射場は以下のように書けた。

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r}, t\right) = \frac{q}{c}\left[\frac{\mathbf{g}}{R}\right]_{\mathrm{ret}} \tag{6}$$

$$t' = t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} \tag{7}$$

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t') \tag{8}$$

$$R(t') = \left|\mathbf{R}(t')\right| \tag{9}$$

$$\mathbf{g}(t') \equiv \frac{\mathbf{n}(t') \times \left\{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\}}{\kappa^3(t')}; \quad \left[\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t'}, \dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t'}\right] \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \frac{\mathbf{v}(t')}{c}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t') = -\dot{\mathbf{R}}(t') \tag{11}$$

$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \tag{12}$$

$$\kappa(t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \tag{13}$$

ここで $\mathbf{r}$ は観測者の位置、$\mathbf{r}_0(t')$ は遅延時間 t' での加速荷電粒子の位置である。以下、観測者かは粒子から十分遠方にいて、その距離 R と単位ベクトル $\mathbf{n}$ の粒子の運動による変化を無視できるとする。

観測者が受信する粒子からの放射の単位立体角当たりの強度は、

$$\frac{dW}{dtd\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left[R^2E^2\right] \tag{14}$$

である。これを received power と呼び、$dP_r/d\Omega$ と書く。

5-1

観測者が dt 間に受信した放射は、粒子が dt' 間に放射した電磁波である。

$$dt = \kappa(t')dt' \tag{15}$$

であることを示せ。

5-1 解答

定義より、

$$R^2(t') = \mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{R}(t') \longrightarrow 2\dot{R}(t')R(t') = 2\dot{\mathbf{R}}(t')\cdot\mathbf{R}(t'); \quad \therefore \dot{R}(t') = \mathbf{n}(t')\cdot\dot{\mathbf{R}}(t') = -c\mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t')$$

であるから、Eq.(7) を t' で微分すると、

$$1 = \frac{dt}{dt'} - \frac{\dot{R}(t')}{c} = \frac{dt}{dt'} + \mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t'); \quad \therefore \frac{dt}{dt'} = 1 - \mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t') = \kappa(t')$$

であるから、Eq.(15) が示された。

5-2

粒子が単位時間当たりに放射した電磁波の強度を emitted power といい、$dP_e/d\Omega$ と書く。Emitted power が

$$\frac{dP_r}{d\Omega} \equiv \frac{dW}{dt'd\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left[\kappa R^2E^2\right] \tag{16}$$

で書けることを示せ。

5-2 解答

Emitted power の定義より Eq.(16) との比は $\kappa(t')$ であるから、

$$\frac{dW}{dt'd\Omega} = \kappa(t')\frac{dW}{dtd\Omega} = \kappa(t')\cdot\left(\frac{c}{4\pi}R^2(t')E^2(t')\right) = \frac{c}{4\pi}\left[\kappa R^2E^2\right]$$

となるので、確かに Eq.(14) が成り立つ。

---

1 から total emitted power は以下のように書ける。

$$P_e = \frac{q^2}{4\pi c}\int d\Omega\left[\kappa g^2\right] \tag{17}$$

以下の手順に従って立体角積分を実行する。$\mathbf{v}$ の方向に $\mathbf{z}$ 軸をとり、$\dot{\mathbf{v}}$ を $\mathbf{xz}$ 平面内にとって $\mathbf{v}$ と成す角を i とする。また $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ とする。座標系に関しては次の図を参照。

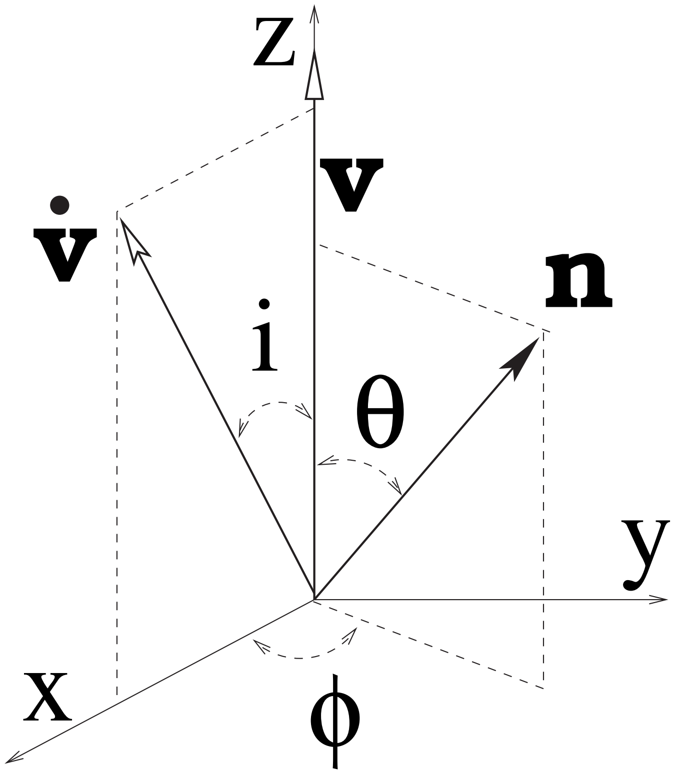

図 2　$\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{n}$

5-3-(a)

以下の関係式を示せ。

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta, \quad \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\,(\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\cos i)\,, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\beta} = \dot{\beta}\beta\cos i \tag{18}$$

$$\kappa g^2 = \dot{\beta}^2\left\{\frac{1}{\kappa^3} + \frac{2}{\kappa^4}\beta\left(\cos i\,\sin i\,\sin\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos\theta\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\kappa^5}\gamma^{-2}\left(\sin^2 i\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi + 2\sin i\,\cos i\,\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos^2\theta\right\}\right) \tag{19}$$

$$I_{n+1} \equiv \int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{(1+\beta)^n - (1-\beta)^n}{n\beta\,(1-\beta^2)^n} \tag{20}$$

$$J_{n+1} \equiv \int_{-1}^{+1}\frac{\mu d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n}\frac{dI_n}{d\beta} \tag{21}$$

$$K_{n+1} \equiv \int_{-1}^{+1}\frac{\mu^2 d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n}\frac{dJ_n}{d\beta} \tag{22}$$

5-3-(a) 解答

図より、

$$\boldsymbol{\beta} = \beta\,(\,0,\,0,\,1)\,, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\,(\,\sin i,\,0,\,\cos i)$$

であり、又 $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ であるから、

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta$$
$$\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\,(\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\,\cos i)$$
$$\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\beta} = \dot{\beta}\beta\cos i$$

を得る。この関係より

$$\begin{aligned}
\kappa g^2 &= \kappa\frac{1}{\kappa^6}\left[\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]^2 = \frac{1}{\kappa^5}\left\{\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) - (1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}^2 \\
&= \frac{1}{\kappa^5}\left[\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)^2\left(1+\beta^2-2\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) + (1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - 2\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\kappa^5}\Big[\dot{\beta}^2\left(\sin^2\theta\,\cos^2\phi\,\sin^2 i + \cos^2\theta\cos^2 i + 2\sin\theta\,\cos\theta\,\sin i\,\cos i\,\cos\phi\right)\left(\beta^2 - 1 + 2\kappa\right) \\
&\qquad + \kappa^2\dot{\beta}^2 - 2\dot{\beta}\,(\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\,\cos i)\,\kappa\dot{\beta}\,(\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\,\cos i - \beta\cos i)\Big] \\
&= \frac{\dot{\beta}^2}{\kappa^3} + \frac{2\dot{\beta}^2\beta}{\kappa^4}\left(\cos i\,\sin\theta\,\cos\phi\,\sin i + \cos\theta\,\cos^2 i\right) \\
&\qquad + \dot{\beta}^2\frac{\left(\beta^2-1\right)}{\kappa^5}\left(\sin^2\theta\,\sin^2 i\,\cos^2\phi + 2\sin i\,\cos i\,\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos^2\theta\right) \\
&= \dot{\beta}^2\Big\{\frac{1}{\kappa^3} + \frac{2}{\kappa^4}\beta\left(\cos i\,\sin i\,\sin\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos\theta\right) \\
&\qquad - \frac{1}{\kappa^5}\gamma^{-2}\left(\sin^2 i\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi + 2\sin i\,\cos i\,\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\phi + \cos^2 i\,\cos^2\theta\right)\Big\}
\end{aligned}$$

を得る。次に Eq.(20),(21),(22) は

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}};\qquad 1-\beta\mu = x,\ -\beta d\mu = dx,\ \begin{array}{c|ccc} \mu & -1 & \to & +1 \\ \hline x & 1+\beta\mu & \to & 1-\beta\mu \end{array} \\
&= -\int_{1+\beta}^{1-\beta}\frac{x^{-(n+1)}}{\beta}dx = \frac{1}{\beta}\left[\frac{x^{-n}}{n}\right]_{1+\beta}^{1-\beta} = \frac{1}{\beta n}\left[\frac{1}{(1-\beta)^n} - \frac{1}{(1+\beta)^n}\right] = \frac{(1+\beta)^n - (1-\beta)^n}{n\beta\,(1-\beta^2)^n} \\
\frac{dI_n}{d\beta} &= \frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^n} = \int_{-1}^{+1}\frac{(-n)(-\mu)\,d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \int_{-1}^{+1}\frac{n\mu\,d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}},\quad \therefore\ J_{n+1} = \frac{1}{n}\frac{dI_n}{d\beta} \\
\frac{dJ_n}{d\beta} &= \frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1}\frac{\mu\,d\mu}{(1-\beta\mu)^n} = \int_{-1}^{+1}\frac{(-n)(-\mu)\mu\,d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}}, = \int_{-1}^{+1}\frac{n\mu^2\,d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}},\quad \therefore\ K_{n+1} = \frac{1}{n}\frac{dJ_n}{d\beta}
\end{aligned}$$

となるので、諸関係式が導けた。

5-3-(b)

以上の結果を使って以下の式を示せ。

$$\begin{aligned}
\int\left[\kappa g^2\right]d\Omega &= 2\pi\left[\dot{\beta}^2\left\{I_3 + 2\beta J_4 - \gamma^{-2}K_5 - \left(2\beta J_4 + \frac{1}{2\gamma^2}\{I_5 - 3K_5\}\right)\sin^2 i\right\}\right] \\
&= \frac{8\pi}{3c^2}\left[\dot{v}^2\gamma^6\left(1-\beta^2\sin^2 i\right)\right] \qquad (23)
\end{aligned}$$

5-3-(b) 解答

立体角積分の中で

$$\int\cos\phi\,d\Omega = \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi = \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\Big[\sin\phi\Big]_0^{2\pi} = 0$$

であるから、$\cos\phi$ を含む項は零である[*1]。また γ^{-2}/κ^5 で括ってある項の中身で $\sin^2 i\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi+\cos^2 i\,\cos^2\theta$ の箇所は

$$\sin^2 i\,\sin^2\theta\,\cos^2\phi+\cos^2 i\,\cos^2\theta=\sin^2 i\left[\cos^2\phi-\left(1+\cos^2\phi\right)\cos^2\theta\right]+\cos^2\theta$$

と書くことが出来る。これらを用いると上記立体角積分は

$$\begin{aligned}\int\left[\kappa g^2\right]d\Omega=\dot\beta^2\Bigg[&\int d\Omega\frac{1}{\kappa^3}+2\beta(1-\sin^2 i)\int\frac{\cos\theta}{\kappa^4}d\Omega-\sin^2 i\,\gamma^{-2}\int\frac{\cos^2\phi-\left(1+\cos^2\phi\right)\cos^2\theta}{\kappa^5}d\Omega\\&-\gamma^{-2}\int\frac{\cos^2\theta}{\kappa^5}d\Omega+2\underbrace{\int\cos i\sin i\sin\theta\cos\phi\left(\frac{\beta}{\kappa^4}-\frac{\cos\theta}{\gamma^2\kappa^5}\right)d\Omega}_{=0}\Bigg]\\=\;&\dot\beta^2\left[2\pi I_3+4\pi\beta(1-\sin^2 i)J_4-\sin^2 i\,\gamma^{-2}\left(\pi I_5-3\pi K_5\right)\right]\\=\;&2\pi\left[\dot\beta^2\left(I_3+2\beta J_4-\gamma^{-2}K_5-\left(2\beta J_4+\frac{1}{2\gamma^2}\left(I_5-3K_5\right)\right)\sin^2 i\right)\right]\end{aligned}$$

となる。これを具値的な形を書き下すと、

$$\begin{aligned}I_3&=\frac{(1+\beta)^2-(1-\beta)^2}{2\beta\left(1-\beta^2\right)^2}=\frac{2}{\left(1-\beta^2\right)^2}=2\gamma^4\\I_5&=\frac{(1+\beta)^4-(1-\beta)^4}{4\beta\left(1-\beta^2\right)^4}=2\frac{1+\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^4}=2(1+\beta^2)\gamma^8\\J_4&=\frac{1}{3}\frac{dI_3}{d\beta}=\frac{1}{3}\left[2(-2)(-2\beta)\left(1-\beta^2\right)^{-3}\right]=\frac{8}{3}\frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)^3}=\frac{8}{3}\beta\gamma^6\\K_5&=\frac{1}{4}\frac{dJ_4}{d\beta}=\frac{2}{3}\frac{\left(1-\beta^2\right)^3-\beta(3)(-2\beta)\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(1-\beta^2\right)^6}=\frac{2}{3}\frac{5\beta^2+1}{\left(1-\beta^2\right)^4}=\frac{2}{3}(5\beta^2+1)\gamma^8\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}I_3+2\beta J_4-\gamma^{-2}K_5&=2\gamma^4+2\beta\frac{8}{3}\beta\gamma^6-\gamma^{-2}\frac{2}{3}\left(5\beta^2+1\right)\gamma^8=\gamma^6\left(\frac{2}{\gamma^2}+\frac{16}{3}\beta^2-\frac{10}{3}\beta^2-\frac{2}{3}\right)\\&=\gamma^6\,\frac{4}{3}\\2\beta J_4+\frac{\gamma^{-2}}{2}I_5-\frac{3}{2}\gamma^{-2}K_5&=2\beta\frac{8}{3}\beta\gamma^6+\frac{\gamma^{-2}}{2}2\left(1+\beta^2\right)\gamma^8-\frac{3}{2}\gamma^{-2}\frac{2}{3}\left(5\beta^2+1\right)\gamma^8=\gamma^6\left[\frac{16}{3}\beta^2+\left(1+\beta^2\right)-5\beta^2-1\right]\\&=\gamma^6\,\frac{4}{3}\beta^2\end{aligned}$$

となるので、これを代入し整理すると Eq.(23) を得る。

5-3-(c)

(b) の結果から以下の式を示せ。

$$P_e=\frac{2q^2}{3c^3}\left[\gamma^6\left(\dot v^2-|\dot{\mathbf v}\times\boldsymbol\beta|^2\right)\right]\tag{24}$$

5-3-(c) 解答

Eq.(17),(23) 及び

$$\dot v^2\left(1-\beta^2\sin^2 i\right)=\dot v^2-(\dot v\beta\sin i)^2=\dot v^2-|\dot{\mathbf v}\times\boldsymbol\beta|^2$$

から Eq.(24) を得る。

[*1] もちろん $\cos^2\phi$ の項は違う。