天体物理学弐 課題番号六番
解答例
[20070524 出題]

Yuji Chinone

1　円偏光の電子による散乱

左回りに円偏光した角周波数 ω_0 の電磁波が自由な電子（質量 m_e、電荷 e）にぶつかった。電磁波は **z** 軸正の方向に進むとし、電子は $z = 0$ の平面内にいるとする。又、電子の速度は光速に比べて十分小さいものとする、

1-1

電子の運動方程式を求めよ。電磁波の電場は $z = 0$ の平面内で

$$E_x(t) = E_0 \cos \omega_0 t \tag{1}$$
$$E_y(t) = E_0 \sin \omega_0 t \tag{2}$$

のように時間変化するとする。又、電子の運動が非相対論的なので電磁波の磁場による力は無視できるとする。

1-1 解答

運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right]$$

で与えられるが、今電磁波の磁場による力は無視できるとしているので、運動方程式は次の様に書き下せる。

$$m_e\frac{d^2x}{dt^2} = qE_x = qE_0 \cos \omega_0 t = -eE_0 \cos \omega_0 t \tag{3}$$
$$m_e\frac{d^2y}{dt^2} = qE_y = qE_0 \sin \omega_0 t = -eE_0 \sin \omega_0 t \tag{4}$$
$$m_e\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \tag{5}$$

1-2

z 軸成す角 θ の **n** 方向に散乱される電磁波の微分散乱断面積を以下のコメントに従って求めよ。簡単のため **n** が **yz** 平面にあるとせよ。(**z** 軸に対する対称性から、この様に仮定しても一般性は保たれる。)

1-2-(a)

電磁波の入射により電子が **1-1** で導いた運動方程式に従って加速度運動する為、電子が電磁波を放射しする。以下この電子による二次波の放射の性質を調べることで左回りに円偏光した電磁波の電子による散乱の詳細を調べる。**x,y,z** 方向の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ とする。偏光方向を表す単位ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ とする。$\mathbf{a}_1 = -\hat{\mathbf{x}}_1$ としたとき、$\mathbf{a}_2$ を $\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ を用いて表せ。

1-2-(a) 解答

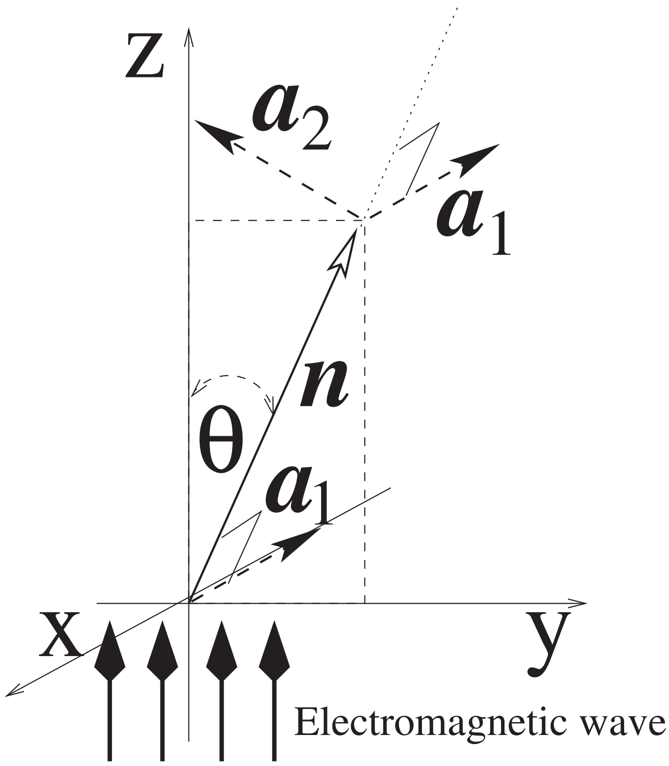

図 1　$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ と $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の関係

図より

$$\mathbf{a}_2 = \hat{\mathbf{z}} \sin\theta - \hat{\mathbf{y}} \cos\theta \tag{6}$$

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{y}} \sin\theta + \hat{\mathbf{z}} \cos\theta \tag{7}$$

となる。このようにとることで $\mathbf{E}_{\mathrm{rad}}$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ だけで表すことが出来る。

1-2-(b)

Radiation field の電場

$$\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} = \left[\frac{q}{Rc^2}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}})\right]_{\mathrm{ret}} \tag{8}$$

を求めよ。基底ベクトルは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を用いよ。ここで観測者から電子までの距離 R は、電子の運動による距離の変化に比べて十分大きく、電子の運動による距離の変化は無視できるものとする。

1-2-(b) 解答

$\mathbf{E}_{\rm rad}$ を求めるのにまず、$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{u}})$ を計算する。運動方程式より、

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{u}}) = (\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{u}})\,\mathbf{n} - \dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{r}})\,\mathbf{n} - \ddot{\mathbf{r}} = \frac{qE_0}{m_e}\begin{pmatrix}0\\ \sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix}\mathbf{n} - \frac{qE_0}{m_e}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{eE_0}{m_e}\,\sin\theta\sin\omega_0 t\begin{pmatrix}0\\ \sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} + \frac{eE_0}{m_e}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix} = \frac{eE_0}{m_e}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\cos^2\theta\\ -\sin\omega_0 t\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

と計算できる。よって

$$\mathbf{E}_{\rm rad} = \left[\frac{q}{Rc^2}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{u}})\right] = -\frac{e^2E_0}{m_eRc^2}\left(\cos\omega_0 t\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\omega_0 t\cos^2\theta\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\omega_0 t\sin\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\right)$$

であるが、これを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を用いて表すと

$$\mathbf{E}_{\rm rad} = \frac{e^2E_0}{m_eRc^2}\left(\mathbf{a}_1\ \cos\omega_0 t + \mathbf{a}_2\ \sin\omega_0 t\cos\theta\right) = \frac{e^2E_0}{m_eRc^2}\left[\mathbf{a}_1\ \cos\omega_0 t + \mathbf{a}_2\ \cos\theta\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{9}$$

となる。

1-2-(c)

$\mathbf{n}$ の方向に放射される電磁波の単位時間、単位立体角当たりのエネルギー (The power per solid angle)

$$\frac{dP}{d\Omega} \tag{10}$$

を求めよ。次にこれの時間平均

$$\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{dP}{d\Omega} \tag{11}$$

を求めよ。又、放射される電磁波の角振動数分布はどのようなものになるか。

1-2-(c) 解答

ここで

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cR^2}{4\pi}\,|\mathbf{E}_{\rm rad}|^2$$

であるから、前問の結果より

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4E_0^2}{4\pi m_e^2c^3}\left(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t\cos^2\theta\right)$$

となる。次にこれを時間平均すると

$$\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \frac{e^4E_0^2}{4\pi m_e^2c^3}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\left(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t\cos^2\theta\right) = \frac{e^4E_0^2}{8\pi m_e^2c^3}\frac{\omega_0}{\pi}\int_0^T dt\left(\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2} + \frac{1-\cos 2\omega_0 t}{2}\ \cos^2\theta\right)$$

$$= \frac{e^4E_0^2}{8\pi m_e^2c^3}\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega_0} + \frac{\pi}{\omega_0}\ \cos^2\theta\right) = \frac{e^4E_0^2}{8\pi m_e^2c^3}\left(1+\cos^2\theta\right) \tag{12}$$

となる。Eq.(9) より、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の成分として

$$E_1 = \frac{e^2E_0}{m_eRc^2}\cos\omega_0 t \tag{13}$$

$$E_2 = \frac{e^2E_0}{m_eRc^2}\sin\omega_0 t\cos\theta \tag{14}$$

と書くことができる。これを Fourier 変換すると

$$\hat{E}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_1(t)e^{i\omega t}dt = \frac{e^2E_0}{2\pi m_eRc^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}e^{i\omega t}\,dt = \frac{e^2E_0}{2\ m_eRc^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}}{2\pi}+\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2\pi}\,dt$$
$$= \frac{e^2E_0}{2m_eRc^2}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$
$$\hat{E}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_2(t)e^{i\omega t}dt = \frac{e^2E_0}{2\pi i m_eRc^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2}e^{i\omega t}\,dt = \frac{e^2E_0}{2i m_eRc^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}}{2\pi}-\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2\pi}\,dt$$
$$= \frac{e^2E_0}{2i m_eRc^2}\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

となる。このことより $\hat{E}_i(\omega)$ は、$\omega=\omega_0$ のときのみ値を持つことから、放射される電磁波の各周波数は ω_0 だけであり、これは入射時の角振動数に等しい。これは散乱により角振動数が変化しないという古典的な結果と一致していると言える。

1-2-(d)　散乱波の偏光

n 方向に散乱された電磁波の $\mathbf{a}_1$ 方向、$\mathbf{a}_2$ 方向の電場の位相差 $\delta_2-\delta_1$ 、及び電場の振幅を求めよ。四つの Stokes parameters を求めよ。偏光度を求めよ。最後に θ を $0\sim\pi$ まで変化させるにつれて、偏光の様子がどう変化するか説明せよ。

1-2-(d) 解答

電場の位相差 $\delta_2-\delta_1$ は Eq.(9) より

$$\delta_2-\delta_1 = -\frac{\pi}{2} \tag{15}$$

となる。E_1, E_2 は Eq.(13),(14) の様に書けるので、振幅 a_1, a_2 は

$$a_1 = \frac{e^2E_0}{m_eRc^2} \tag{16}$$
$$a_2 = \frac{e^2E_0}{m_eRc^2}\cos\theta \tag{17}$$

と書くことができる。よって Stokes parameters は

$$I_\mathrm{l} = a_1^2+a_2^2 = \left(\frac{e^2E_0}{Rm_ec^2}\right)^2(1+\cos^2\theta) \tag{18}$$
$$Q_\mathrm{l} = a_1^2-a_2^2 = \left(\frac{e^2E_0}{Rm_ec^2}\right)^2(1-\cos^2\theta) \tag{19}$$
$$U_\mathrm{l} = 2a_1a_2\cos\delta = 0 \tag{20}$$
$$V_\mathrm{l} = 2a_1a_2\sin\delta = -2\left(\frac{e^2E_0}{Rm_ec^2}\right)^2\cos\theta \tag{21}$$

となり、偏光度 Π は

$$\Pi_\mathrm{l} = \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I} = \frac{\sqrt{a_1^4+a_2^4-2a_1^2a_2^2+4a_1^2a_2^2}}{a_1^2+a_2^2} = 1 \tag{22}$$

と計算される。

偏光の様子を図示しておく。

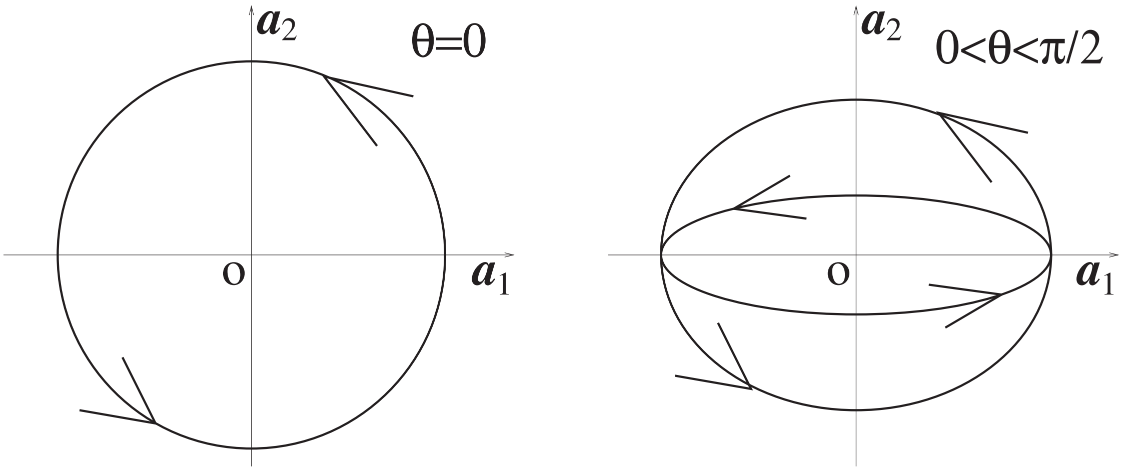

図 2　左：$\theta = 0$ [左回り円偏光]、右：$0 < \theta < \pi/2$ [左回り楕円偏光]

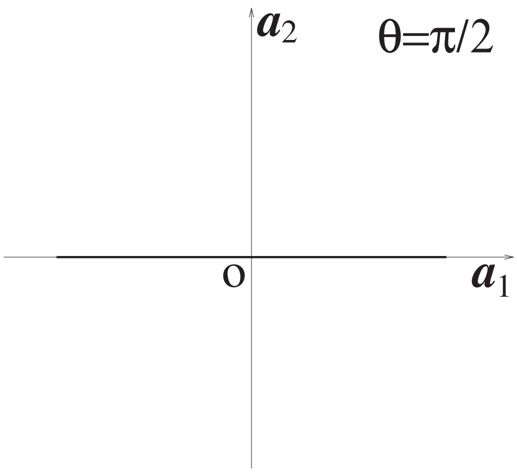

図 3　$\theta = \pi/2$ [$\mathbf{a}_1$ 方向直線偏光]

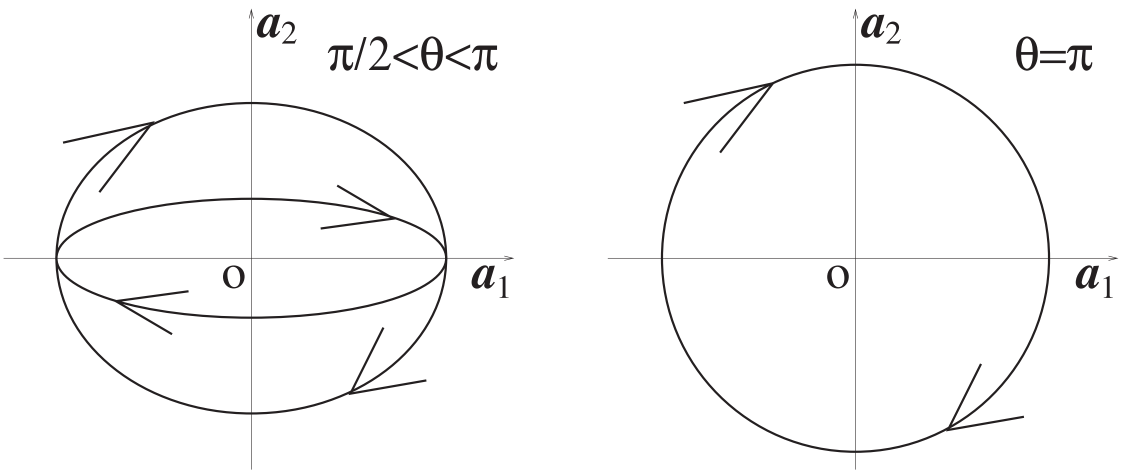

図 4　左：$\pi/2 < \theta < \pi$ [右回り楕円偏光]、右：$\theta = \pi$ [右回り円偏光]

Eq.(13),(14) より、$\theta = 0$ のとき $a_1 = a_2$ であるから左回りの円偏光である。$0 < \theta < \pi/2$ のとき $a_1 > a_2$ で

あるから左回りの楕円偏光である。$\theta = \pi/2$ のとき $a_2 = 0$ であるから、$\mathbf{a}$ 方向の直線偏光である。$\pi/2 < \theta < \pi$ のとき $a_1 > -a_2$ であるから、右回りの楕円偏光である。$\theta = \pi$ のとき $a_1 = -a_2$ であるから、右回りの円偏光である。

1-2-(e)

左回りの円偏光の電磁波に対する微分散乱断面積を求めよ。

1-2-(e) 解答

前回の Ruthford scattering の場合に楢って、微分散乱断面積を

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \langle S \rangle \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \tag{23}$$

とする。これは単位時間に $[\Omega : \Omega + d\Omega]$ の間に散乱される光子のエネルギーは、入射光子のエネルギー $\langle S \rangle$ と $[\Omega : \Omega + d\Omega]$ の間に散乱される確率 $d\sigma d\Omega$ の積に等しいことから理解できる。今、入射光子の Poynting vector は $\mathbf{S} = c/(4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}\, cE_0^2/(4\pi)$ より、その時間平均をとって

$$\langle S \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\frac{cE_0^2}{4\pi} \right) = \frac{cE_0^2}{4\pi} \tag{24}$$

であるから、Eq.(12),(23) より

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{e^4}{2c^4 m_e^2} \left(1 + \cos^2\theta\right) = \frac{r_0^2}{2} \left(1 + \cos^2\theta\right), \quad r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \tag{25}$$

を得る。

1-2-(f)

円偏光に対するここまでの結果を用いて、無偏光の電磁波に対する微分散乱断面積、及び全散乱断面積を求めよ。又、散乱波が $\mathbf{a}_1$ 方向に直線偏光しており、偏光度が $(1 - \cos^2\theta)/(1 + \cos^2\theta)$ であることを示せ。

1-2-(f) 解答

左回り円偏光、右回り円偏光の電磁波間で δ は π だけ違うので、右回りの電磁波の場合 Eq.(9) より

$$\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \left[\mathbf{a}_1 \cos\omega_0 t + \mathbf{a}_2 \cos\theta \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \tag{26}$$

となることが容易に分かる。この結果から微分散乱断面積が Eq.(23) となることが分かる。この時 Stokes parameters は

$$I_{\mathrm{r}} = I_{\mathrm{l}}; \quad Q_{\mathrm{r}} = Q_{\mathrm{l}}; \quad U_{\mathrm{r}} = U_{\mathrm{l}} = 0; \quad V_{\mathrm{r}} = -V_{\mathrm{l}} \tag{27}$$

となり、偏光度 Π は

$$\Pi_{\mathrm{r}} = 1 \tag{28}$$

無偏光の散乱は、分解した左回りの円偏光と右回りの円偏光それぞれの散乱波の非可干渉な重ね合わせである。よって無偏光の電磁波の散乱断面積は、それぞれの結果を足し合わせて弐で割ったものであり、Eq.(23) に一致する。全散乱断面積は積分を実行して

$$\sigma_T = \frac{r_0^2}{2} \int \left(1 + \cos^2\theta\right) d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 0.665245873 \times 10^{-24}\ [\mathrm{cm}^2] \tag{29}$$

となる。以上は完全偏光のときと同じ結果であるが、これはもともと静止した電子には特別な方向は存在しないことから、どんな方向に偏光した電磁波に対しても同じ様に散乱することを反映した結果である。無偏光の電磁波の電子による散乱波の Stokes parameters は、

$$I_{\mathrm{u}} = \frac{1}{2}\left(I_{\mathrm{r}} + I_{\mathrm{l}}\right) = I_{\mathrm{l}} = I_{\mathrm{r}} \tag{30}$$

$$Q_{\mathrm{u}} = \frac{1}{2}\left(Q_{\mathrm{r}} + Q_{\mathrm{l}}\right) = Q_{\mathrm{l}} = Q_{\mathrm{r}} \tag{31}$$

$$U_{\mathrm{u}} = \frac{1}{2}\left(U_{\mathrm{r}} + U_{\mathrm{l}}\right) = 0 \tag{32}$$

$$V_{\mathrm{u}} = \frac{1}{2}\left(V_{\mathrm{r}} + V_{\mathrm{l}}\right) = 0 \tag{33}$$

となる。従って無偏光の電磁波の散乱波は直線偏光している。非可干渉な波の重ね合わせであるので、振幅が卓越している成分方向に直線偏光する。今 $\mathbf{a}_1$ 成分が常に大きいので、$\mathbf{a}_1$ 方向に直線偏光している。この時、偏光度は

$$\Pi_{\mathrm{u}} = \frac{\sqrt{Q_{\mathrm{u}}^2 + U_{\mathrm{u}}^2 + V_{\mathrm{u}}^2}}{I_{\mathrm{u}}} = \frac{1 - \cos^2\theta}{1 + \cos^2\theta} \tag{34}$$

となる。

2 Cyclotron (or Gyro) radiation

z 軸方向に一様な磁場 B の元で運動する電子からの放射を考える。電子の運動速度は光速に比べて十分小さいとする。

2-(a)

電子の運動方程式をたてよ。これを解き、電子の位置の時間変化を求めよ。但し、z 軸方向の速度を零とし、初期条件 $t = 0, v_x = v_0, v_y = 0, x(t = 0) = y(t = 0) = 0$ とせよ。電子の運動はどのようなものか説明せよ。

2-(a) 解答

運動方程式が

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right]$$

であり、$\mathbf{E} = (0, 0, 0)\,, \mathbf{B} = (0, 0, B)$ であることから運動方程式は各成分について、

$$m_e\frac{dv_x}{dt} = q\left[E_x + \frac{1}{c}\left(v_yB_z - v_zB_y\right)\right] = -\frac{ev_yB}{c};\quad \therefore\ \frac{dv_x}{dt} = -\frac{eB}{m_ec}v_y \tag{35}$$

$$m_e\frac{dv_y}{dt} = q\left[E_y + \frac{1}{c}\left(v_zB_x - v_xB_z\right)\right] = +\frac{ev_xB}{c};\quad \therefore\ \frac{dv_y}{dt} = +\frac{eB}{m_ec}v_x \tag{36}$$

$$m_e\frac{dv_z}{dt} = q\left[E_z + \frac{1}{c}\left(v_xB_y - v_yB_x\right)\right] = 0;\quad \therefore\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \tag{37}$$

を得る。以後

$$\omega_0 = \frac{eB}{m_ec} \tag{38}$$

を用いることにする。Eq.(35),(36) より、

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega_0^2v_x$$

であるから、

$$v_x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

を得る。ここで A, B は積分定数。初期条件 $v_x(t=0) = v_0$ より、$A = v_0, B = 0$ となり、結局

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega_0 t) \tag{39}$$

を得る。これを時間 t で積分すると、

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + C$$

を得るが (C は積分定数)、初期条件 $x(t=0) = 0$ より $C = 0$ となる。よって、

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) = \frac{m_e c v_0}{eB}\sin\left(\frac{eB}{m_e c}t\right) \tag{40}$$

となる。同様にして y 成分についても解くと、

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right] = \frac{m_e c v_0}{eB}\left[1 - \cos\left(\frac{eB}{m_e c}t\right)\right] \tag{41}$$

を得る。図のように xy 平面内を反時計回りに円運動する。

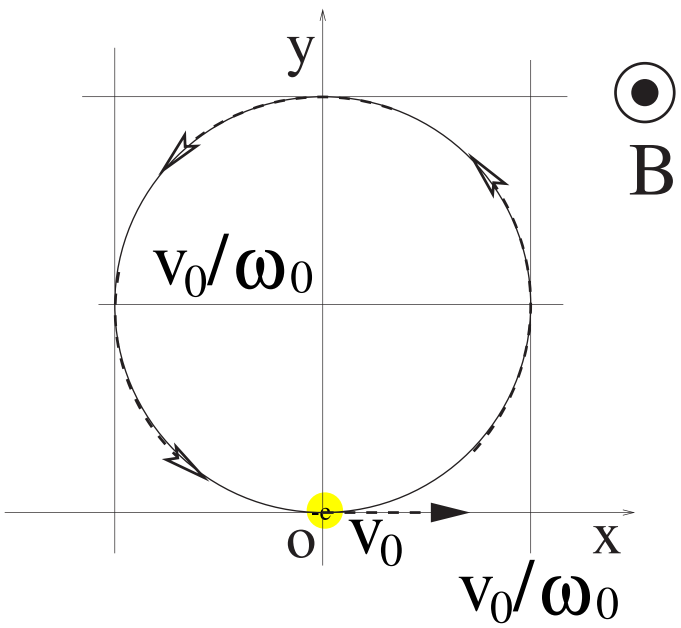

図 5　一様磁場中での電子の運動

2-(b)

z 軸から角度 θ の方向に放射される電磁波の電場を求めよ (ベクトルで)。問題 2 を参考にせよ。

2-(b) 解答

偏光方向のベクトルは問題 1 同様に扱う。放射される電磁波は

$$\mathbf{E}_{\rm rad} = \left[\frac{q}{Rc^2}\left\{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{r}})\right\}\right] \tag{42}$$

であるから、まず $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{r}})$ を計算する。

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{r}} = v_0\omega_0 \begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{r}})\,\mathbf{n} - \ddot{\mathbf{r}} &= v_0\omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix} - v_0\omega_0 \begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= v_0\omega_0 \left[\sin\theta\cos(\omega_0 t) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix} \right] = v_0\omega_0 \left[\sin(\omega_0 t)\,\hat{\mathbf{x}} - \cos^2\theta\cos(\omega_0 t)\,\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta\cos\theta\cos(\omega_0 t)\,\hat{\mathbf{z}} \right]
\end{aligned} \tag{44}$$

を得る。

$$\mathbf{a}_1 = -\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}_2 = -\cos\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}$$

であるから、

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{r}}) = v_0\omega_0 \left[-\sin(\omega_0 t)\,\mathbf{a}_1 + \cos\theta\cos(\omega_0 t)\,\mathbf{a}_2 \right]$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} = \frac{q}{Rc^2}\left[\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{r}})\right] &= \frac{e^2 B v_0}{m_e c^3 R}\left[\sin(\omega_0 t)\,\mathbf{a}_1 - \cos\theta\cos(\omega_0 t)\,\mathbf{a}_2\right] \\
&= \frac{e^2 B v_0}{m_e c^3 R}\left[\sin(\omega_0 t)\,\mathbf{a}_1 + \cos\theta\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{a}_2\right]
\end{aligned} \tag{45}$$

となる。

2-(c)

放射される電磁波の偏光の様子を角度

- $\theta = 0$
- $0 < \theta < \pi/2$
- $\theta = \pi/2$
- $\pi/2 < \theta < \pi$
- $\theta = \pi$

の場合について答えよ。

2-(c) 解答

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e^2 B v_0}{m_e c^3 R}\sin(\omega_0 t), \quad \mathbf{E}_2 = \frac{e^2 B v_0}{m_e c^3 R}\cos\theta\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right); \qquad \delta_2 - \delta_1 = -\frac{\pi}{2} \tag{46}$$

これは問題 1 の場合と同じである (sin と cos の違いはあるが、偏光自体は同じである)。

2-(d)

n の方向に放射される電磁波の単位時間、単位立体角当たりのエネルギー (=The power per solid angle): $dP/(d\Omega)$ を求めよ。次にこの時間平均 $\langle dP/(d\Omega)\rangle$ を求めよ。又、放射される電磁波の周波数分布はどのようなものになるか。更に全放射パワーを求めよ。

2-(d) **解答**

放射される電磁波の周波数分布は、問題 1 の時と同じように $\omega = \omega_0$。

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cR^2}{4\pi}|\mathbf{E}_{\rm rad}|^2 = \frac{cR^2}{4\pi}\left[\frac{e^4B^2v_0^2}{m_e^2c^6R^2}\left(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2\theta\cos^2(\omega_0 t)\right)\right] = \frac{e^4B^2v_0^2}{4\pi m_e^2c^5}\left[\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2\theta\cos^2(\omega_0 t)\right] \quad (47)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\left[\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2\theta\cos^2(\omega_0 t)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\left[\frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2} + \cos^2\theta\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\theta$$

$$\therefore \left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \frac{e^4B^2v_0^2}{8\pi m_e^2c^5}\left(1+\cos^2\theta\right) \quad (48)$$

$$\int d\Omega\left(1+\cos^2\theta\right) = 2\pi\int_0^\pi \sin\theta\left(1+\cos^2\theta\right) = 2\pi\int_0^\pi\left(2\sin\theta - \sin^2\theta\right) = \frac{16\pi}{3}, \quad \therefore \sin^3\theta = \frac{-\sin(3\theta)+3\sin\theta}{4}$$

$$\therefore \langle P\rangle = \int\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle d\Omega = \frac{2e^4B^2v_0^2}{3m_e^2c^5} \quad (49)$$

3

温度 T のプラズマ中での電子の熱運動の典型的速度は、

$$v_{{\rm th},e} = \sqrt{\frac{k_BT}{m_e}} \quad (50)$$

である。ここでは全ての電子はこの速度で運動しているとする。$k_B = 1.38\times10^{-16}$ [erg/K] は Boltzmann 定数。一方陽子の典型的速度は

$$v_{{\rm th},p} = \sqrt{\frac{k_BT}{m_p}} \quad (51)$$

で、電子より $\sqrt{m_e/m_p} \sim 1/40$ 倍遅いので、無視することが出来る為、以後陽子は静止しているものとして扱う。

3-(1)

プラズマの温度が $T = 10^4$ [K] の時、電子の陽子による Rutherford 散乱の全散乱断面積 σ を求めよ。

3-(1) **解答**

Rutherford 散乱の全散乱断面積は

$$\sigma = \pi\left(\frac{Ze^2}{m_ev_0^2}\right)^2 \quad (52)$$

と書ける。今 $Z = 1$ であるから、

$$\sigma = \pi\left(\frac{e^2}{m_ev_0^2}\right)^2 = \pi\left(\frac{e^2c^2}{m_ec^2v_0^2}\right)^2 = \pi r_e^2\left(\frac{v_0}{c}\right)^{-4} = \pi r_e^2\left(\frac{k_BT}{m_e}\right)^{-2}c^4 = \pi r_e^2\left(\frac{k_BT}{m_ec^2}\right)^{-2}$$

$$= \pi\left(2.817940325\times10^{-13}\right)^2\left(\frac{10^4\cdot 8.617342\times10^{-5}\,[\text{eV}]}{0.510998918\times10^6\,[\text{eV}]}\right)^{-2} = 8.783709202460903\times10^{-14} = 8.78371\times10^{-14}\,[\text{cm}^2] \quad (53)$$

3-(2)

電子の密度を $n_e = 1\,[\mathrm{cm}^{-3}]$ とする。この時、プラズマの電気的中性を保つために陽子も密度 $n_p = 1\,[\mathrm{cm}^{-3}]$ で分布していることになる。電子の平均自由行程 λ_e、平均拾時間 τ_e を求めよ。

3-(2) 解答

電子の平均自由行程の定義は、

$$n_p \sigma \lambda_e = 1$$

であるから、

$$\lambda_e = \left(n_p \sigma\right)^{-1} = \left[\left(1\,[\mathrm{cm}^{-3}]\right) \cdot \left(8.78371 \times 10^{-14}\,[\mathrm{cm}^2]\right)\right]^{-1} = 1.1384712049891557 \times 10^{13} = 1.13847 \times 10^{13}\,[\mathrm{cm}] \tag{54}$$

を得る。平均自由時間は $\tau_e = \lambda_e / v_{\mathrm{th},e}$ より、

$$\begin{aligned}\tau_e &= \lambda_e \left(\frac{k_B T}{m_e}\right)^{-1/2} = \frac{\lambda_e}{c}\left(\frac{k_B T}{m_e c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1.13847 \times 10^{13}\,[\mathrm{cm}]}{2.99792458 \times 10^{10}\,[\mathrm{cm/s}]}\left(\frac{10^4 \cdot 8.617342 \times 10^{-5}\,[\mathrm{eV}]}{0.510998918 \times 10^6\,[\mathrm{eV}]}\right)^{-1/2} \\ &= 292432 = 3 \times 10^5\,[\mathrm{sec}]\end{aligned} \tag{55}$$

3-(3)

半径が電子の平均自由行程に等しい球に含まれる全陽子数を求めよ。

3-(3) 解答

$$N_e(<\lambda_e) = \frac{4}{3}\pi \lambda_e^3 n_e = \frac{4}{3}\pi \left(1.13847 \times 10^{13}\,[\mathrm{cm}]\right)^3 \left(1\,[\mathrm{cm}^{-3}]\right) = 6.18094332078693 \times 10^{39} = 6.18094 \times 10^{39}\,[\text{個}] \tag{56}$$

4　熱統計力学事始め

温度 T で熱平衡状態にある粒子系（質量 m）では、ある粒子のエネルギーが $E \sim E + dE$ の範囲にある確率は、

$$P(E)\,dE \propto e^{-\frac{E}{k_B T}}\,dE \tag{57}$$

で与えられる。特に自由な非相対論的運動をしている粒子系では、速度が $\mathbf{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$ と $\mathbf{v} + \mathbf{dv} = \left(v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z\right)$ の間の範囲にある確率が

$$P(v)\,dv_x dv_y dv_z \propto e^{-\frac{m}{2k_B T}v^2} dv_x dv_y dv_z; \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad P(v) = C e^{-\frac{m}{2k_B T}v^2} \tag{58}$$

で与えられる。

4-(1)

全確率が壱になるように比例定数 C を求めよ。

4-(1) 解答

規格化定数 C を求める。Eq.(58) より

$$P(v)\,dv_x dv_y dv_z = C\exp\left[-\frac{m}{2k_BT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\right]dv_x dv_y dv_z$$

であるから、全速度空間に渡り積分すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(v)\,dv_x dv_y dv_z = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_BT}v_x^2}dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_BT}v_y^2}dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2k_BT}v_z^2}dv_z = C\left(\frac{\pi}{\dfrac{m}{2k_BT}}\right)^{3/2}$$

$$= C\left(\frac{2\pi k_BT}{m}\right)^{3/2} = 1$$

となり、全確率は 1 でなければならないので、規格化定数 C は

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \tag{59}$$

と求まる。

4-(2)

粒子一個の平均運動エネルギーを求めよ。

4-(2) 解答

位相空間中 d^3rd^3v 中に粒子を見出す確率は $e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2}d^3rd^3v$ に比例する。従って粒子一個の平均運動エネルギーは

$$\left\langle\frac{1}{2}mv^2\right\rangle = \frac{\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}mv^2\right)e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2}\,d^3rd^3v}{\displaystyle\int e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2}\,d^3rd^3v} = \frac{\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}mv^2\right)e^{-\left(\frac{1}{k_BT}\right)\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}d^3v}{\displaystyle\int e^{-\left(\frac{1}{k_BT}\right)\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}d^3v}$$

と書くことができる。これより

$$\left\langle\frac{1}{2}mv^2\right\rangle = -\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{1}{k_BT}\right)}\left[\ln\int e^{-\left(\frac{1}{k_BT}\right)\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}d^3v\right]$$

となるので、これを計算すると

$$\left\langle\frac{1}{2}mv^2\right\rangle = -\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{1}{k_BT}\right)}\left[\ln\left(\frac{\dfrac{2\pi}{m}}{\dfrac{1}{k_BT}}\right)^{3/2}\right] = \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{1}{k_BT}\right)}\ \ln\left(\frac{1}{k_BT}\right)$$

$$= \frac{3}{2}k_BT \tag{60}$$

を得る。これが粒子一個の平均運動エネルギーである。$v^2 = v_x^2+v_y^2+v_z^2$ であり、どの方向も特別なものではないと考えられるので壱自由度に対する粒子一個の平均エネルギーは $k_BT/2$ であることが分かる。

4-(3)

クーロンポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ が存在する時は、電子の全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - e\phi(\mathbf{r}) \tag{61}$$

である。電子は体積 V の領域に存在するとし、$\mathbf{r} \sim \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ で電子が見つかる確率が

$$P(\mathbf{r})\, d^3r = \frac{e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}}\, d^3r}{A}, \quad A \equiv \int_V d^3r\, e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}} \tag{62}$$

で表されることを示せ。

4-(3) **解答**

位相空間 $dxdydz\, dv_xdv_ydv_z = d^3rd^3v$ で見出される確率は

$$P(\mathbf{r})P(v)\, d^3rd^3v \propto e^{-\frac{E}{k_BT}} = e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2} \cdot e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}}\, d^3rd^3v$$

で書けるはずである。$P(v)d^3v$ に関しての関係は、先に見てきた通りであるので、$P(\mathbf{r})\, d^3r$ について考えると、規格化定数を B として

$$P(\mathbf{r})\, d^3r = Be^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}}\, d^3r$$

の関係が成り立つはずである。規格化定数 B は

$$B^{-1} = \int_V d^3r\, e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}} \equiv A$$

と書けることから結局

$$P(\mathbf{r})\, d^3r = \frac{e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}}\, d^3r}{A} \tag{63}$$

となり、これが体積 V 中の $\mathbf{r} \sim \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ で電子が見つかる確率である。

4-(4)

$V \to \infty$ の極限を考え、無限遠方で $\phi(\mathbf{r} \to \infty) = 0$ とし、このときの電子の数密度を n_0 とする。このとき任意の位置 $\mathbf{r}$ で電子の数密度が

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}} \tag{64}$$

で与えられることを示せ。

4-(4) **解答**

一般的に密度を求めには

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \tag{65}$$

の平均値 $\overline{n}(\mathbf{r})$ を計算すればよい。$\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r})$ は Delta function である。全体で電子が N 個あるとすると、この平均値は

$$n_e(\mathbf{r}) = \overline{n}(\mathbf{r}) = N\frac{\int e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}}\, \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\, d\mathbf{r}'}{\int e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}}\, d\mathbf{r}} = De^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_BT}}$$

となる。極限での条件より

$$n_e(\mathbf{r} \to \infty) = n_0 = D = \frac{N}{\displaystyle\int_{V\to\infty} e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}}\, d^3r}$$

であるから、

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \tag{66}$$

となる。