

天体物理学式 課題番号七番

解答例

[20070531 出題]

Yuji Chinone

1

中心に明るい点状天体を含む球状の一様星間雲があるとす。星間雲は完全電離しており自由電子が飛び交っており、この電子により中心天体から放出された電磁波が Thomson scattering を受けるとする。この星間雲はこの散乱光にのみ観測されるとする。

1-1

この星間雲の見かけのサイズより観測装置の空間分解能が十分高いとき、雲の各場所での偏光の方向と偏光度の相対的な大きさを図示せよ。

1-1 解答

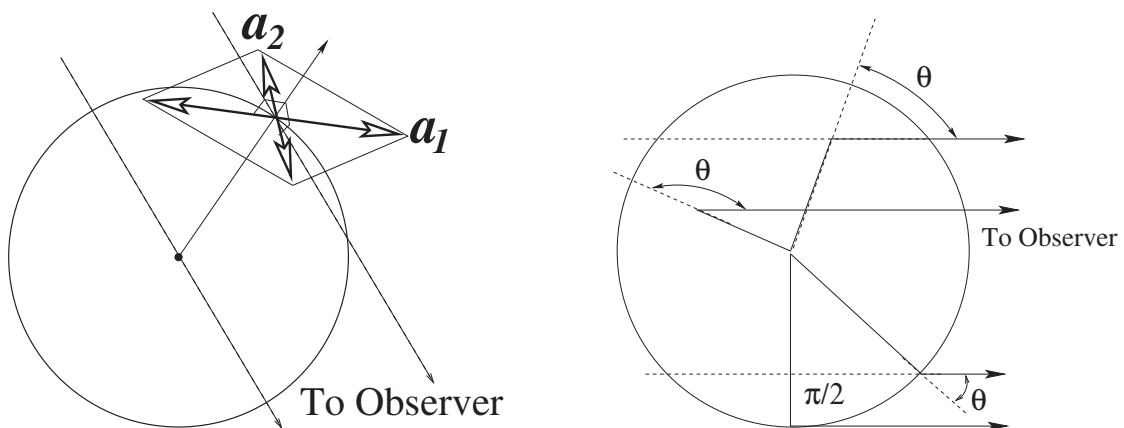


図 1 左：偏光の様子、右：星間雲を輪切りにした様子。視線方向についての積分を考慮する必要がある。

今までの結果を総合して考えると、星間雲での偏光は図左のように書ける。実際に観測者が観測するのは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の成分内の卓越した成分であり、このとき \mathbf{a}_2 成分は観測者に対する射影成分を考えなければならない。その結果 $\theta = 0$ 以外の場合は、 \mathbf{a}_1 の直線偏光として観測されることになるのは、前回までのレポートで見たとおりである。また今の場合、当然視線方向について積分を行わなければならない。

$\theta = 0$ の時、つまり星間雲の中心を見た場合 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は同量なので結果観測される偏光は零となる。 $\theta = \pi/2$ のとき、つまり星間雲の端を見ている場合 \mathbf{a}_1 の成分は変化しないが、 \mathbf{a}_2 の観測者に対する射影成分は零と

なり a_1 成分つまり右図の紙面に垂直な成分の偏光が観測される。 $\theta = 0$ で零、 $\theta = \pi/2$ で最大の偏光度をち、 $0 < \theta < \pi/2$ では必ず a_2 が射影成分を持つので、 $\theta = \pi/2$ に比べて偏光度は小さくなり、 $\theta = 0$ に向けて連続的に変化することになる。これを図示したのが次の図である。

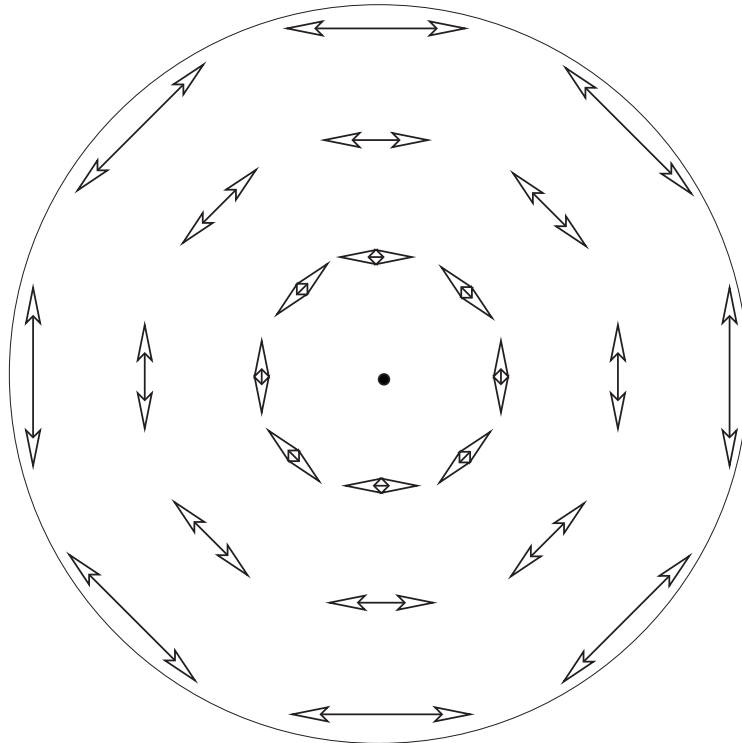


図2 星間雲の天球上での偏光方向と偏光度

1-2

この星間雲の見かけのサイズより観測装置の空間分解能が悪く、この雲が分解して見えないとき、偏光観測の結果はどのようなものになるか。

1-2 解答

雲の部分部分を分解することが出来ないで、全体をならして見ることになる。星間雲は球なので対称性より偏光は観測されない。これは物理的には、分解できない部分部分の偏光がお互いにうち消し合ってしまうことによるものである。

1-3

この雲の大きさを 1 [Mpc] とする。 $1 \text{ [Mpc]} = 3 \times 10^{24} \text{ [cm]}$ である。中心天体が直接観測できる為の電子の個数密度の上限を求めよ。

1-3 解答

光の強度 I_0 が厚さ l の層を通った結果、強度が I になったとする。このとき I_0 と I の間には次の関係が成り立つ。

$$I = I_0 \exp(-\tau) \quad (1)$$

ここで τ は光学的深さ (厚さ) (optical depth) であり、今考えているのは、電磁波の電子による散乱であることから、

$$\tau = (\text{密度}) \times (\text{距離}) \times (\text{散乱断面積}) = n_e l \sigma_T, \quad n_e : \text{電子の密度}, \sigma_T : \text{Thomson Cross Section} \quad (2)$$

と書ける。Eq.(1) より τ が増えるにつれ光の強度は弱くなり、 τ が 1 以上になると急激に弱くなるので、中心天体の光を直接観測することのできる厚さの限界は $\tau \sim 1$ となる l である。以上を元に中心天体が直接観測できる為の電子の個数密度の上限を計算すると

$$n_e \sim \frac{1}{l \sigma_T} = \frac{1}{3/2 \times 10^{24} \cdot 0.665 \times 10^{-24}} = 2 \cdot 0.501253 \dots \sim 1 [\text{cm}^{-3}]$$

となる。

1-4

現在の宇宙は電子密度 $n_e \sim 2 \times 10^{-7} [\text{cm}^{-3}]$ でほぼ完全に電離した状態にある。宇宙が現在の姿のまま永遠に存在していたとして、直接観測することのできる一番遠くの天体までの距離を cm 及び光年単位でそれぞれ求めよ。

1-4 解答

1 光年は光りが一年かかって進む距離であり、

$$1 [\text{ly}] = 9.46 \times 10^{17} [\text{cm}]; \quad 1 [\text{pc}] = 3.26 [\text{ly}] \quad (3)$$

である。

3 同様に考えると

$$\begin{aligned} l &\sim \frac{1}{n_e \sigma_T} = \frac{1}{2 \times 10^{-7} \cdot 0.665 \times 10^{-24}} = 7.518 \dots \times 10^{30} [\text{cm}] \\ &\sim 10^{31} [\text{cm}] \sim 10^{12} [\text{pc}] \\ &\sim 10^{13} [\text{ly}] \end{aligned}$$

を得る。

2

2-1

$E = 1 [\text{eV}]$ を $E = k_B T$ の関係を使って温度に換算せよ。更に $E = h\nu, \lambda\nu = c$ の関係を使って周波数、波長を求めよ。

2-1 解答

$$1 [\text{eV}] = \begin{cases} 1.1604506 \times 10^4 & [\text{K}] \\ 2.41798949 \times 10^{14} & [\text{Hz}] \end{cases}; \quad \lambda = \begin{cases} 1.239841857 \times 10^{-4} & [\text{cm}] \\ 1.239841857 & [\mu\text{m}] \\ 1.239841857 \times 10^4 & [\text{\AA}] \end{cases}$$

3 電子プラズマの振動

$+e$ に帯電したイオンの海を考える。イオンは密度 n_i で一様に分布している。そこで自由に動き回れる電荷 $-e$ の電子が一様に分布しており、全体で電気的中性を保っているとする。従って電子の密度は $n_e = n_i$ である。イオンは電子に比べて圧倒的に質量が大きいので慣性が大きく殆ど動かない。そこでイオンは常に静止しているとする。何らかの外的要因により電子の分布が図のように変化したとする。

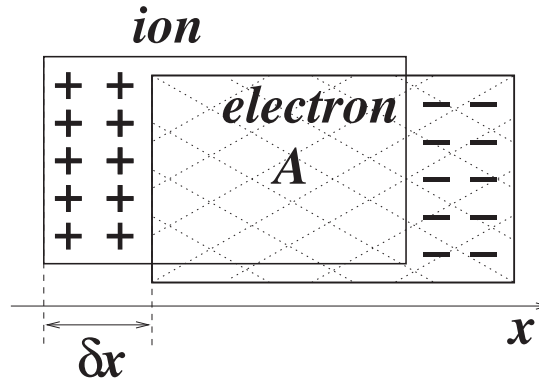


図3 イオン成分（背景）に対する電子成分のずれ

3-1

領域 A 内での任意の電子について運動方程式をたて、電子が各周振動数

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} \quad (4)$$

の単振動を示すことを示せ。

3-1 解答

電子分布のずれにより図のような電荷分布が実現されているので、変位 δx について

$$E_x = 4\pi n_i \delta x \quad (5)$$

となる。よって電子の運動方程式は

$$m_e \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = -e E_x = -4\pi n_e \delta x \quad (6)$$

となる。これは単振動の式であるのでこの時の角振動数は Eq.(4) となる。

$$\begin{aligned} \omega_{pe} &= \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} = \left(\frac{4\pi e^2 n_e \hbar c}{m_e \hbar c} \right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi e^2 n_e \alpha}{m_e} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{4\pi}{0.510998918 \times 10^6 \cdot 137.03599911 \cdot 2\pi \cdot 8.06554476 \times 10^3} \right)^{1/2} \sqrt{n_e [\text{cm}^{-3}]} \text{ [Hz]} \\ &= 5.641460119565182 \times 10^4 \sqrt{n_e [\text{cm}^{-3}]} \text{ [Hz]} = 5.6 \times 10^4 \sqrt{n_e [\text{cm}^{-3}]} \text{ [Hz]} \end{aligned} \quad (7)$$

4

図のように $N + 1$ 個、質量 m の質点が長さ l の振り子に吊され、撥条定数 κ の撥条で結ばれている。重力加速度は g とする。全ての振り子が垂直に垂れ下がった状態の時、撥条が自然長になったとする。

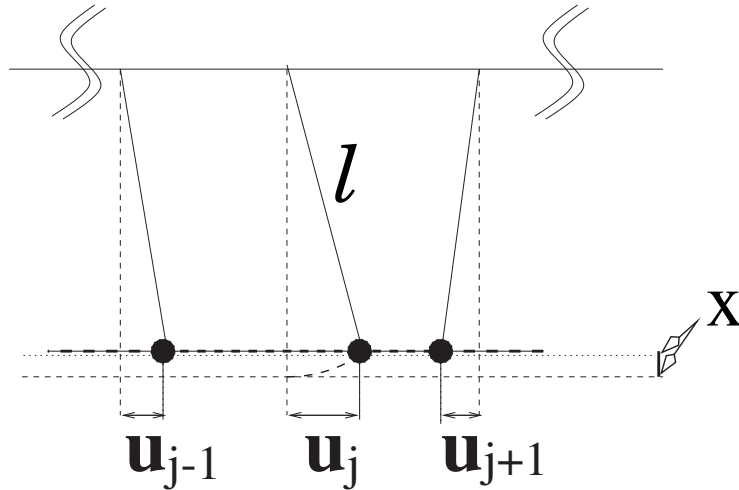


図 4 連成振動とその変成分

4-1

j 番目 ($j \neq 1, N + 1$) の質点の平衡点からの位置のずれを u_j とし、この質点の運動方程式を立てよ。但し振り子の振れ角は非常に小さいとする。

4-1 解答

系全体の運動エネルギーは

$$K = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{u}_j^2 \quad (8)$$

である。ポテンシャルエネルギーは撥条以外にも重力ポテンシャルを考慮する。図より鉛直成分の変位 x は

$$u_j^2 = l^2 - (l - x)^2 = 2lx - x^2 \sim 2lx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u_j^2}{2l}$$

であるから

$$U = \sum_j \left[\frac{1}{2} \kappa (u_{j+1} - u_j)^2 + \frac{mg}{2l} u_j^2 \right] \quad (9)$$

である。以上より系全体のラグランジアンは

$$L = K - U = \sum_j \left[\frac{1}{2} m \dot{u}_j^2 - \frac{1}{2} \kappa (u_{j+1} - u_j)^2 - \frac{mg}{2l} u_j^2 \right] \quad (10)$$

である。以上をラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0 \quad (11)$$

に代入すると、運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_j &= \kappa \left\{ (u_{j+1} - u_j) - (u_j - u_{j-1}) \right\} - \frac{mg}{l} u_j \\ &= \kappa (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - \frac{mg}{l} u_j \quad j = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

4-2

撥糸の自然長を h として、解を

$$u_j = A \exp \{i(kjh - \omega t)\} \quad (13)$$

としてこの系を伝わる波が次のような分散関係式を満たすことを示せ。

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \left(\frac{kh}{2} \right) + \frac{g}{l} \quad (14)$$

4-2 解答

Eq.(13) を運動方程式に代入すると

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A \exp \{i(kjh - \omega t)\} &= \kappa \left[A \exp \{i[k(j+1)h - \omega t]\} \right. \\ &\quad \left. - 2A \exp \{i(kjh - \omega t)\} + A \exp \{i[k(j-1)h - \omega t]\} \right] - \frac{mg}{l} A \exp \{i(kjh - \omega t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore -m\omega^2 &= \kappa \{ \exp(ikh) + \exp(-ikh) - 2 \} - m\frac{g}{l} = 2\kappa \left(\frac{e^{ikh} + e^{-ikh}}{2} - 1 \right) - \frac{mg}{l} = 2\kappa (\cos(hk) - 1) - \frac{mg}{l} \\ &= -4\kappa \sin^2 \frac{kh}{2} - \frac{mg}{l} \end{aligned}$$

であるから、これを ω^2 について解くと Eq.(14) を得る。

4-3

長波長極限 $\lambda \gg l$ での分散関係式が、以下のようになることを示せ。

4-3 解答

$$\omega^2 = \frac{\kappa h^2}{m} k^2 + \frac{g}{l} \quad (15)$$

4-3 解答

長波長極限 $\lambda \gg h$ では $kh/2 \ll 1$ となるので

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m} \left(\sin \frac{kh}{2} \right)^2 + \frac{g}{l} \cong \frac{4\kappa}{m} \left(\frac{kh}{2} \right)^2 + \frac{g}{l} = \frac{\kappa h^2}{m} k^2 + \frac{g}{l}$$

となり Eq.(15) を得る。

4-4

3の結果から系を伝わる波の位相速度を求め、それが $k \rightarrow 0$ の極限で発散することを示せ。又この結果は光速度を越えるという意味で相対性理論の光速度不変の原理を破っているように見えるが、相対論と矛盾しないことを説明せよ。

4-4 解答

定義より

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\kappa \hbar^2}{m} + \frac{g}{l} \frac{1}{k^2}} \quad (16)$$

を得る。 $k \rightarrow 0$ の極限では

$$\lim_{k \rightarrow 0} v_{\text{phase}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\kappa \hbar^2}{m} + \frac{g}{l} \frac{1}{k^2}} \propto \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \rightarrow \infty \quad (17)$$

となり、無限大に発散する。

光速不変の原理は、物理的な情報を伝達する最高速度が光速 c であるということである。よって物理的な情報を伝えない位相速度が光速を越えても相対論と矛盾しない。

5

Fourier 変換の方法を使って次の方程式の解を求めよ。

5-1

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) \quad (18)$$

5-1 解答

Eq.(18) の各項を Fourier 変換すると

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) \\ \Delta \phi(\mathbf{r}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -(\mathbf{k})^2 \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) \\ \delta^3(\mathbf{r}) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \end{aligned}$$

であるから、両辺を Fourier 変換すると

$$-(\mathbf{k}) \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = -4\pi q_0 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$$

であるから結局

$$\tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q_0}{\mathbf{k}^2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$$

を得る。これを逆 Fourier 変換すると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2} d^3k \quad (19)$$

となる。

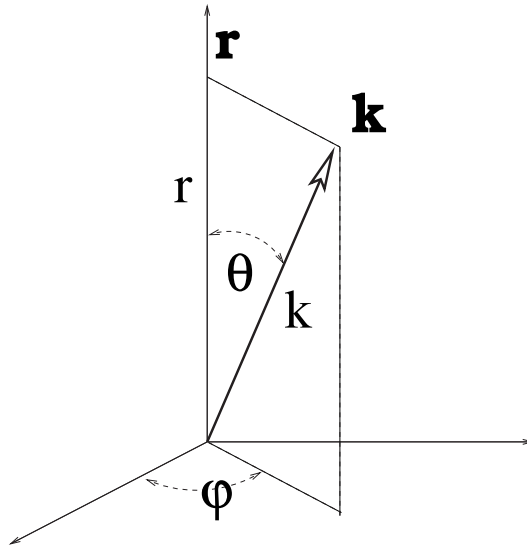


図5 d^3k を積分するための座標系

この積分を実行する。図のような座標系を考えると上記の積分は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2} = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr \cos\theta}; \quad \cos\theta = \mu, \quad \frac{d\mu}{d\theta} = -\sin\theta \\ &= \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^{+1} e^{ikr\mu} d\mu = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{e^{ikr} + e^{-ikr}}{ikr} dk = \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} dk; \quad kr = \xi, \quad \frac{d\xi}{dk} = r \\ &= \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi \end{aligned}$$

となるが、この積分は先の課題番号で導出しており

$$\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}$$

であるから、結局

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = 4\pi q_0 \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}|} = \frac{q_0}{|\mathbf{r}|} \quad (20)$$

を得る。これはクーロンポテンシャルの式である。

5-2

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi(\mathbf{r}) = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) \quad (21)$$

5-2 解答

両辺を Fourier 変換し整理すると、

$$-\mathbf{k}^2 \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) - \mu^2 \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = -4\pi q_0 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \rightarrow (\mathbf{k}^2 + \mu^2) \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = 4\pi q_0 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3; \quad \therefore \tilde{\phi}_r(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$$

となる。これを Fourier 逆変換すると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \mu^2} d^3k$$

となるが、先ほどと同じように座標系を変えると

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2 + \mu^2} = \frac{4\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} dk \int_{-1}^1 e^{ikr\mu} d\mu \\ &= \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \frac{\sin(kr)}{kr} dk = \frac{8\pi q_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi; \quad \xi = kr\end{aligned}$$

となる。今非積分関数は明らかに偶関数であるから

$$\int_0^\infty \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi$$

であるので、

$$\Im \left[\int_C \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz \right] = \Im \left[\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz + \int_{-R}^R \frac{xe^{ix}}{x^2 + r^2 \mu^2} dx \right\} \right] = \Im \left[\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi$$

を計算することを考える。

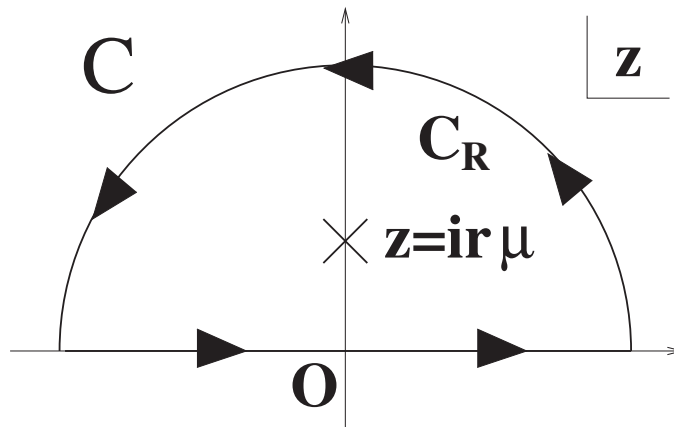


図6 積分経路

複素平面で上半円を考えて

$$\begin{aligned}\int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz &\leq \left| \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + r^2 \mu^2} dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{|z||e^{iz}|}{|z^2 + r^2 \mu^2|} |dz| \leq \int_{C_R} \frac{Re^{-R \sin \theta}}{R^2 - r^2 \mu^2} |dz| \\ &\quad \text{ここで、} z = Re^{i\theta} \ [0 \leq \theta \leq \pi], \ |dz| = |z'(\theta)|d\theta = |iRe^{i\theta}|d\theta = R d\theta \text{とした} \\ &= \int_0^\pi \frac{Re^{-R \sin \theta}}{R^2 - r^2 \mu^2} \cdot R d\theta = \frac{R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = \frac{R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \right) \\ &= \frac{R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \psi} d\psi \right) = \frac{2R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &< \frac{2R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \cdot \frac{\pi}{2R} < \frac{R^2}{R^2 - r^2 \mu^2} \cdot \frac{\pi}{R} = \frac{\pi R}{R^2 - r^2 \mu^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

となる。ここではジョルダンの不等式を用いた。よって留数定理より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi = \Im \left[2\pi i \left\{ (z - ir\mu) \frac{ze^{iz}}{(z + ir\mu)(z - ir\mu)} \right\}_{z=ir\mu} \right] = \Im \left[2\pi i \frac{ir\mu e^{-r\mu}}{2ir\mu} \right] = \Im \left[2\pi i \frac{e^{-r\mu}}{2} \right] = \pi e^{-r\mu}$$

となり、結局次のような解を得る。

$$\phi_+(\mathbf{r}) = \frac{8\pi q_0}{4\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \frac{\pi}{2} e^{-r\mu} = \frac{q_0}{|\mathbf{r}|} e^{-\mu|\mathbf{r}|} \quad (22)$$

今は上半円を考えたが、下半円を考えることも出来るので

$$\phi_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{|\mathbf{r}|} e^{\mp\mu|\mathbf{r}|} \quad (23)$$

となる。 $|\mathbf{r}| = 1/\mu$ でシールドされ、無限遠方で零になるようなポテンシャルを考える場合、 $\phi_+(\mathbf{r})$ である。

6

原子核同士を結びつけている強い力は、核間距離 $1 \text{ [fm]} = 10^{-15} \text{ [m]} = 10^{-13} \text{ [cm]}$ 以内では非常に強く働くが、これ以上離れると殆ど力は働かない。これは核力を媒介する粒子である π 中間子が有限の質量を持っていることに起因するとして、 π 中間子の質量 $m_{\pi}c^2$ を MeV 単位で求めよ。

ここでは π 中間子のエネルギー不確定性が高々 $m_{\pi}c^2$ であるとして、エネルギーの不確定性原理から質量を求めよ。ここでの計算には、 $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$, $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ を用いよ。

6-0 解答

エネルギーの不確定性は

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \quad (24)$$

と書けるので、これより π 中間子の質量の大おおまかな値は

$$\Delta E \sim m_{\pi}c^2 \sim \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{c\hbar}{c\Delta t} = \frac{197 \text{ [MeV fm]}}{1 \text{ [fm]}} = 197 \text{ [MeV]} \sim O(100) \text{ [MeV]} \quad (25)$$

となる。これは正確な値 に対して、第零近似としてそう悪くないと言える結果である。

π 中間子	$m_{\pi^{\pm}}$	$139.57018 \pm 0.00035 \text{ [MeV]}$
	m_{π^0}	$134.9766 \pm 0.0006 \text{ [MeV]}$

7

温度零のプラズマ中を伝播する電磁波を考える。簡単な為に直線偏光した電磁波を考える。以下、電子とイオンの電荷密度が等しく至る所で n で全電荷密度は常に零であるとし、イオンは静止しているとする。電磁波の電場、磁場、及び電磁波によって引き起こされる電子の運動速度は

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathbf{j}, \rho \propto e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (26)$$

と書けるとする。又電磁波によって引き起こされる電子の運動は非相対論的であるとする。

7-1

Maxwell 方程式から以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (27)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (28)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \quad (29)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (-en\mathbf{v}) - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E} \quad (30)$$

7-1 解答

真空中の Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (-en\mathbf{v}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (34)$$

に Eq.(26) を代入すると

$$\nabla \cdot \rightarrow i\mathbf{k} \cdot; \quad \nabla \times \rightarrow i\mathbf{k} \times; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad (35)$$

であるから、上記の関係式を得る。

7-2

電子の運動方程式から以下の関係式を導け。ここで m_e は電子の質量である。

$$\mathbf{v} = \frac{e}{i\omega m_e} \mathbf{E} \quad (36)$$

7-2 解答

電子について運動方程式を立てると

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

であるので、Eq.(35) より

$$m_e(-i\omega)\mathbf{v} = -e\mathbf{E} + 0 \quad \because \text{非相対論的な場合を考えて } \frac{v}{c} \ll 1$$

となる。よって

$$\mathbf{v} = \frac{e}{i\omega m_e} \mathbf{E}$$

を得る。

7-3

1,2 から以下の関係式を導け。ここで ω_{pe} は Eq.(4) と同じである。

$$\left(\frac{ck^2}{\omega} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (37)$$

7-3 解答

Eq.(29) より

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

であるから、これを Eq.(30) に代入すると

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \times \mathbf{B} &= i\mathbf{k} \times \frac{c}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = i\frac{c}{\omega} (\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]) = i\frac{c}{\omega} \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}\} = -i\frac{c}{\omega} k^2 \mathbf{E} \\ &= -\frac{4\pi en}{c} \cdot \frac{e}{i\omega m_e} \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E} \quad \because \text{Eq.(36)} \\ &= -\frac{4\pi ne^2}{im_e} \frac{1}{\omega c} \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E} \end{aligned}$$

となるので、これを整理すると

$$-\frac{c}{\omega} k^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi ne^2}{m_e} \frac{1}{\omega c} \mathbf{E} - \frac{\omega}{c} \mathbf{E} \implies \left[\frac{c}{\omega} k^2 + \frac{4\pi ne^2}{m_e} \frac{1}{\omega c} - \frac{\omega}{c} \right] \mathbf{E} = 0$$

と書けるが Eq.(4) を代入すると Eq.(37) を得る。

7-4

3 の結果からプラズマ中を伝搬する電磁波の分散関係式を導け。

7-4 解答

プラズマ中を伝播する電磁波の分散関係式は、Eq.(37) の括弧内いが恒等的に零であるから

$$\frac{ck^2}{\omega} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c} = 0$$

より、

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (38)$$

となる。これより

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{c^2}$$

であるから、

$$k = \begin{cases} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}}{c} & \text{when } \omega \geq \omega_{pe} \\ i \frac{\sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}}{c} & \text{when } \omega < \omega_{pe} \end{cases} \quad (39)$$

となる。

8

双極モーメントは

$$\mathbf{d} \equiv \sum_j \begin{pmatrix} q_j x_j \\ q_j y_j \end{pmatrix} \quad (40)$$

で表せ、四重極モーメントは

$$Q \equiv \begin{pmatrix} \sum_j q_j x_j x_j & \sum_j q_j x_j y_j \\ \sum_j q_j y_j x_j & \sum_j q_j y_j y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j q_j x_j^2 & \sum_j q_j x_j y_j \\ \sum_j q_j x_j y_j & \sum_j q_j y_j^2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

で定義される。ここで q_j は j 番目の粒子の電荷、 $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$ は j 番目の粒子の位置ベクトルで、粒子は二次元平面内にいるものとする。以下の場合について \mathbf{d}, Q を求めよ。

8-(a)

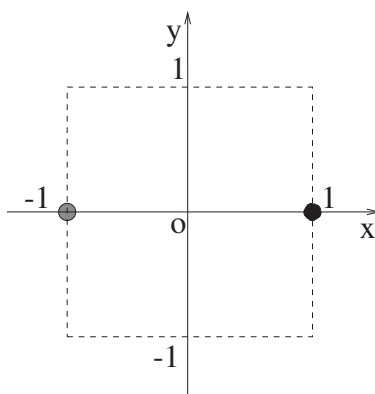


図 7 (a)

8-(a) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 0), (-q, -1, 0)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q + q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q - q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8-(b)

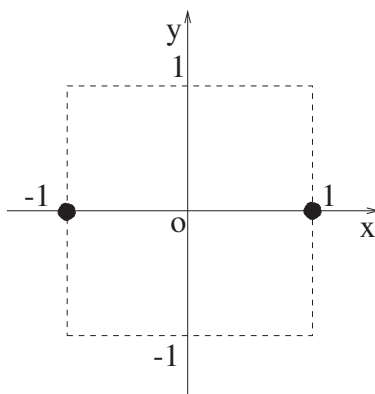


図 8 (b)

8-(b) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 0), (q, -1, 0)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q - q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q + q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8-(c)

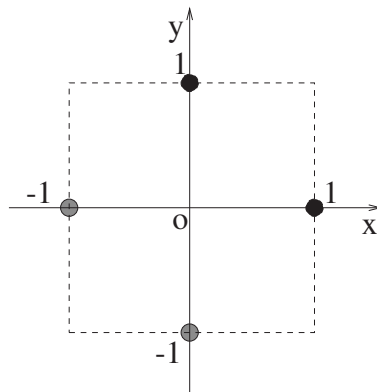


图 9 (c)

8-(c) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 0), (q, 0, 1), (-q, -1, 0), (-q, 0, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q + q \\ q + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 2q \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q - q & 0 \\ 0 & q - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8-(d)

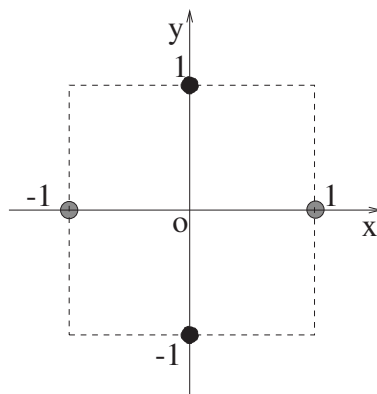


图 10 (d)

8-(d) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (-q, 1, 0), (q, 0, 1), (-q, -1, 0), (q, 0, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -q+q \\ q-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -q-q & 0 \\ 0 & q+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q & 0 \\ 0 & 2q \end{pmatrix}$$

8-(e)

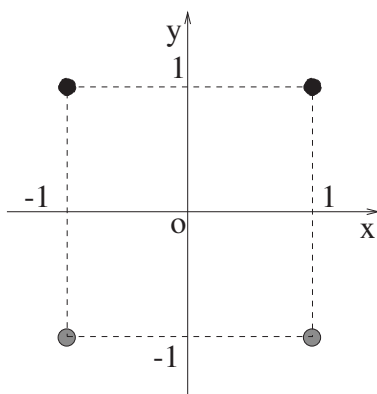


图 11 (e)

8-(e) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 1), (q, -1, 1), (-q, -1, -1), (-q, 1, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q-q+q-q \\ q+q+q+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4q \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q+q-q-q & q-q-q+q \\ q-q-q+q & q+q-q-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8-(f)

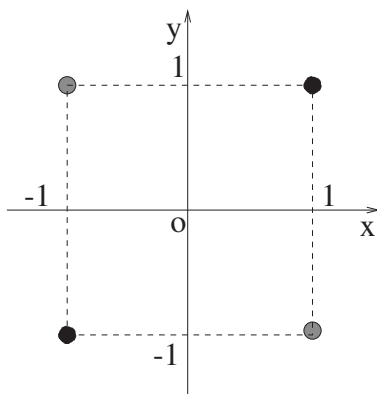


图 12 (f)

8-(f) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 1), (-q, -1, 1), (q, -1, -1), (-q, 1, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q+q-q-q \\ q-q-q+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q-q+q-q & q+q+q+q \\ q+q+q+q & q-q+q-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4q \\ 4q & 0 \end{pmatrix}$$

8-(g)

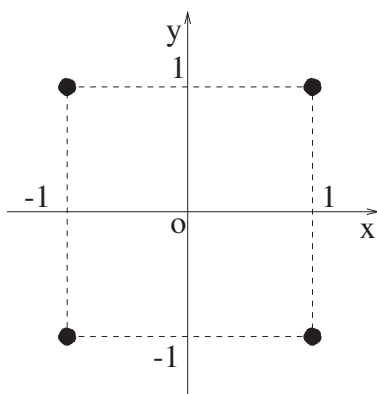


图 13 (g)

8-(g) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 1), (q, -1, 1), (q, -1, -1), (q, 1, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q-q-q+q \\ q+q-q-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q+q+q+q & q-q+q-q \\ q-q+q-q & q+q+q+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4q & 0 \\ 0 & 4q \end{pmatrix}$$

8-(h)

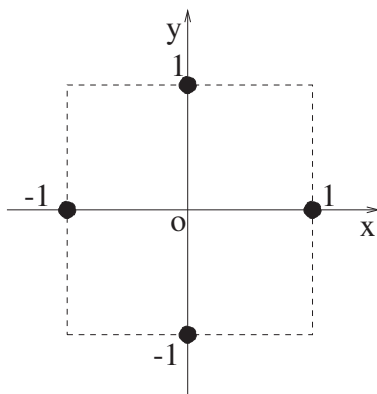


图 14 (h)

8-(h) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = (q, 1, 0), (q, 0, 1), (q, -1, 0), (q, 0, -1)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q-q \\ q-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q+q & 0 \\ 0 & q+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q & 0 \\ 0 & 2q \end{pmatrix}$$

8-(i)

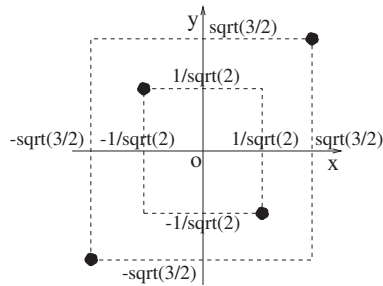


图 15 (i)

8-(i) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = \left(q, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right), \left(q, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(q, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right), \left(q, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q\sqrt{\frac{3}{2}} - q\frac{1}{\sqrt{2}} - q\sqrt{\frac{3}{2}} + q\frac{1}{\sqrt{2}} \\ q\sqrt{\frac{3}{2}} + q\frac{1}{\sqrt{2}} - q\sqrt{\frac{3}{2}} - q\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q\frac{3}{2} + q\frac{1}{2} + q\frac{3}{2} + q\frac{1}{2} & q\frac{3}{2} - q\frac{1}{2} + q\frac{3}{2} - q\frac{1}{2} \\ q\frac{3}{2} - q\frac{1}{2} + q\frac{3}{2} - q\frac{1}{2} & q\frac{3}{2} + q\frac{1}{2} + q\frac{3}{2} + q\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4q & 2q \\ 2q & 4q \end{pmatrix}$$

8-(j)

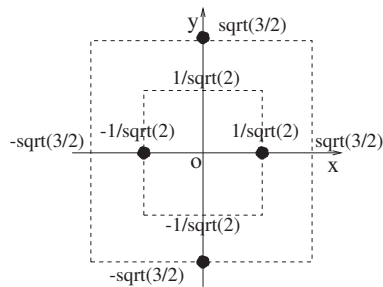


图 16 (j)

8-(j) 解答

$$(q_j, \mathbf{r}_j) = \left(q, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(q, 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right), \left(q, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(q, 0, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} q\sqrt{\frac{1}{2}} - q\sqrt{\frac{1}{2}} \\ q\sqrt{\frac{3}{2}} - q\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q\sqrt{\frac{1}{2}} + q\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & q\sqrt{\frac{3}{2}} + q\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 3q \end{pmatrix}$$