天体物理学弐 課題番号八番
解答例
[20070607 出題]

Yuji Chinone

1

1-1

プラズマの温度が $T = 10^4$ [K]、電子の密度が $n_e = 1$ [cm^{-3}] とし、デバイ波長を求めよ。半径がデバイ波長に等しい球内に含まれる全電子数を求めよ。

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_p}} \tag{1}$$

1-1 解答

$$\begin{aligned}\lambda_D &= \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_p}} = \left[\frac{T\hbar c}{4\pi n_e \hbar e^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{T}{4\pi n_e \alpha}\right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{10^4 \cdot 137.03599911 \cdot 2\pi \cdot 6.950356 \times 10^{-1}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}{4\pi[\mathrm{cm}^{-3}]}\right]^{1/2} \\ &= 690.0902037524454\,[\mathrm{cm}] \sim 7\,[\mathrm{m}]\end{aligned} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \lambda_D = 6.900902 \times 10^2 \left(\frac{T\,[\mathrm{K}]}{10^4}\right)^{1/2} \left(\frac{n_e\,[\mathrm{cm}^{-3}]}{1}\right)^{-1/2}\ [\mathrm{cm}] \tag{3}$$

$$N_e = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n_e = \frac{4}{3}\pi\,(690.0902037524454)^3 = 1.3765950273736365 \times 10^9 \sim 1.4 \times 10^9\ \text{個} \tag{4}$$

2

2-1

中心に点電荷 q_0 が存在する時のプラズマ中の静電場ポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{q_0}{r} e^{-r/\lambda_D} \tag{5}$$

と書ける。空間全体で積分した時、全電荷が零であることを示せ。

2-1 解答

前回の課題で導出したように電荷密度は

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \sim n_0 \left[1 + \frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}\right] \tag{6}$$

と書ける。ここで n_0 は無限遠での電荷の密度である。これを空間全体で積分すると[*1]

$$\begin{aligned}
\int_{V_\varepsilon} d^3r\, n_e(r) &= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^\infty 4\pi r^2\, e\left(n_p - n_e(r)\right) dr = \int_{+0}^\infty dr \left(-4\pi r^2 e^2 n_0 \frac{\phi(r)}{k_B T}\right) = \int_{+0}^\infty dr \left(-4\pi r^2 e^2 n_0 \frac{q_0 e^{-r/\lambda_D}}{r k_B T}\right) \\
&= -q_0 \int_{+0}^\infty dr\, r e^{-r/\lambda_D} \frac{4\pi e^2 n_0}{k_B T} = -q_0 \int_{+0}^\infty d\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) \frac{r}{\lambda_D} e^{-r/\lambda_D} = -q_0 \int_{+0}^\infty dr'\, r' e^{-r'} \\
&= q_0 \int_{+0}^\infty -e^{-r'} dr' = q_0 \left[e^{-r'}\right]_{+0}^\infty \\
&= -q_0
\end{aligned}$$

となる。これは中心を除く全空間での電荷である。よってから中心の電荷が q_0 より、全電荷は零であることが分かる。

3　弱結合プラズマ

3-1

プラズマの粒子間のクーロン力と熱運動のエネルギーの比

$$\Gamma = \frac{e^2/a}{k_B T} = \frac{e^2 n^{-1/3}}{k_B T} \tag{7}$$

とデバイ長内の電子の数

$$\Lambda_c \equiv n_e \lambda_D^3 \tag{8}$$

の間に次の関係があることを示せ。

$$\Gamma \sim \frac{1}{\Lambda_c^{2/3}} \tag{9}$$

3-1 解答

Eq.(7),(8) より

$$\Gamma = \frac{e^2 n^{1/3}}{k_B T} = \frac{n^{1/3}}{4\pi\lambda_D^2 n_e} \sim \frac{1}{(\lambda_D^3 n_e)^{2/3}} = \frac{1}{\Lambda_c^{2/3}}$$

となる。

3-2

電子のイオンによる散乱の平均自由行程 λ_e とデバイ波長の比が

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_e} \sim \Gamma^{3/2} \tag{10}$$

になることを示せ。

[*1] 中心の点電荷が存在する点は除く。なぜなら $\lim_{r\to+0}\phi(r) \to +\infty$、及び中心にはソースとなる点電荷 $+q_0$ がある。計算上このように極限操作する必要はないが、物理的な考察の元でこのようにする。

3-2 解答

電子の平均自由行程は

$$\lambda_e = \frac{1}{\sigma_R n_p} = \frac{1}{\pi\left(\frac{e^2}{m_e v_e^2}\right)^2 n_p} \sim \frac{1}{\pi\left(\frac{e^2}{k_B T}\right)^2 n_p} = \frac{k_B^2 T^2}{\pi e^4 n_p} \tag{11}$$

で与えられるので、λ_D との比を考えると

$$\frac{\lambda_D^2}{\lambda_e^2} \sim \frac{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_p}}{\frac{k_B^4 T^4}{\pi^2 e^8 n_p^2}} = \frac{\pi}{4}\frac{e^6 n_p}{k_B^3 T^3} \sim \frac{e^6 n_p}{k_B^3 T^3} = \Gamma^3\,; \quad \therefore\ \frac{\lambda_D}{\lambda_e} \sim \Gamma^{3/2}$$

となる。

3-3

これらの結果を用いて弱結合プラズマでは、デバイ遮蔽は無衝突プラズマの現象であり、非常に多数の電子が協調的に関与していることを示せ。

3-3 解答

一個一個の電子の、中心電荷に対する関与[*2]を考えた場合それは小さいが、その領域には中心電荷を中和するのに十分な数の電子が存在している[*3]。これがデバイ遮蔽である。

無衝突プラズマは衝突することがないので、相互作用し合うことはない為、互いに協調し合うことは不可能である。にもかかわらずデバイ遮蔽が起こるのは、多数の電子の非協調的な作用の結果であり、それはあたかも全体が協調しているように見える。

4 Dispersion Measure

プラズマ中の電磁波による情報伝達速度は群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}} \sim c\left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{2\omega^2}\right) \tag{12}$$

と書ける。ここでは $\omega \gg \omega_{\mathrm{pe}}$ として展開した。この結果から、天体から発せられたパルスが時間 t_p 後に観測者に届いたとすると、これは

$$t_p = \int_0^d \frac{ds}{v_g} \sim \frac{d}{c} + \frac{1}{2c\omega^2}\int_0^d \omega_{\mathrm{pe}}^2\, ds = \frac{d}{c} + \frac{2\pi e^2}{m_e c\omega^2}\int_0^d n_e\, dl \tag{13}$$

と書ける。上式で d は天体までの距離で、最後の項は天体と観測者間にあるプラズマによる到着の遅れを表しており、この部分を

$$\Delta t_p = \frac{2\pi e^2}{m_e c\omega^2}\mathrm{DM} = \frac{e^2}{2\pi m_e c\nu^2}\mathrm{DM} = \frac{r_e}{2\pi}\nu^{-2}\mathrm{DM}\,; \quad \mathrm{DM} = \int_0^d n_e\, dl \tag{14}$$

[*2] 中心電荷に僅かに引き寄せられる、つまりラザフォード散乱により散乱される。
[*3] 1 の結果

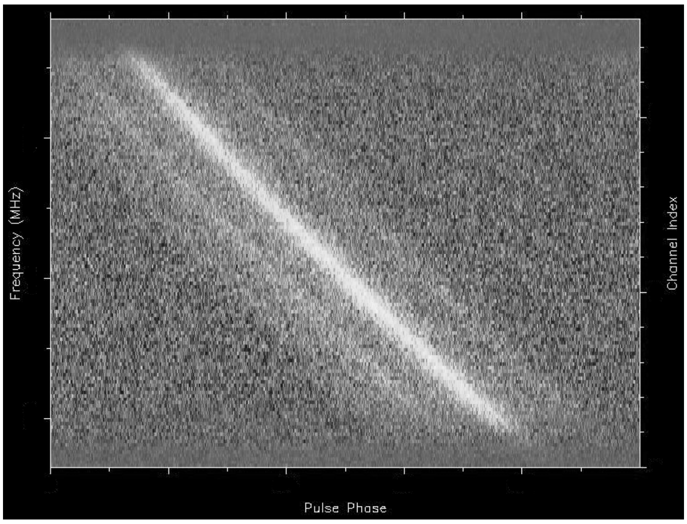

図 1　パルサーの電波観測結果

と書く。DM は disperdion measure といい、一般に $[\mathrm{pc\,cm^{-3}}]$ で書かれる。具体的に数値を入れると

$$\Delta t_p = \frac{(2.817940325\times10^{-13})(3.0856775807\times10^{18})(2.99792458\times10^{10})}{2\pi\cdot10^{12}}\left(\frac{\nu}{[\mathrm{MHz}]}\right)^{-2}\left(\mathrm{DM}\,[\mathrm{pc\,cm^{-3}}]\right)$$

$$= 4.15\times10^{3}\left(\frac{\nu}{[\mathrm{MHz}]}\right)^{-2}\left(\frac{\mathrm{DM}}{[\mathrm{pc\,cm^{-3}}]}\right)\quad[\mathrm{sec}] \tag{15}$$

$$= \left(2.41\times10^{-4}\right)^{-1}\left(\frac{\nu}{[\mathrm{MHz}]}\right)^{-2}\left(\frac{\mathrm{DM}}{[\mathrm{pc\,cm^{-3}}]}\right)\quad[\mathrm{sec}] \tag{16}$$

$$= 4.62\times10^{-2}\left(\frac{\lambda}{[\mathrm{m}]}\right)^{2}\left(\frac{\mathrm{DM}}{[\mathrm{pc\,cm^{-3}}]}\right)\quad[\mathrm{sec}] \tag{17}$$

となる。

図 1 はパルサーの電波観測の結果である。縦軸は周波数、横軸は時間。斜めに連続なラインが見られるがこれはパルサーからのシグナルである。

4-1

図は周波数の高い順に上から並んでいるのか、下から並んでいるのか、根拠と共に答えろ。

4-1 解答

Eq.(14) より $\Delta t_p \propto \nu^{-2}$ であるから、$\nu \nearrow$ の時 $\Delta t_p \searrow$、$\nu \searrow$ の時 $\Delta t_p \nearrow$ であるから、図 1 は下に行くほど低周波数、上に行くほど高周波数であることが分かる

4-2

400 [MHz] と 300 [MHz] でパルスの到着時間に $\Delta t = 1.13\,[\mathrm{sec}]$ の差があった。この結果から Dispersion Measure 求めよ。星間物質の電子密度を $n_e = 0.03\,[\mathrm{cm^{-3}}]$ としてパルサーまでの距離を求めよ。

4-2 **解答**

周波数の違いによるパルスの到着時刻の違いを Δ とすると、Eq.(14),(16) より

$$\mathrm{DM} = \frac{2\pi\Delta}{r_e}\left(\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2}\right)^{-1} = 2.41\times10^{-4}\Delta\left[\left(\frac{\nu_1}{[\mathrm{MHz}]}\right)^{-2} - \left(\frac{\nu_2}{[\mathrm{MHz}]}\right)^{-2}\right]^{-1} \quad [\mathrm{pc\,cm^{-3}}]\,;\quad \nu_1 < \nu_2 \tag{18}$$

を得る。よって $\nu_1 = 300\,[\mathrm{MHz}], \nu_2 = 400\,[\mathrm{MHz}]$ で $\Delta = 1.13\,[\mathrm{sec}]$ の場合、

$$\mathrm{DM} = 56.0299 = 56.0\,[\mathrm{pc\,cm^{-3}}]$$

となり、$n_e = 0.03\,[\mathrm{cm^{-3}}]$ とすると、

$$d = \frac{\mathrm{DM}\,[\mathrm{pc\,cm^{-3}}]}{n_e\,[\mathrm{cm^{-3}}]} = 1867.66\,[\mathrm{pc}] = 1.87\,[\mathrm{kpc}]$$

となる。

5　電磁波の複素表示

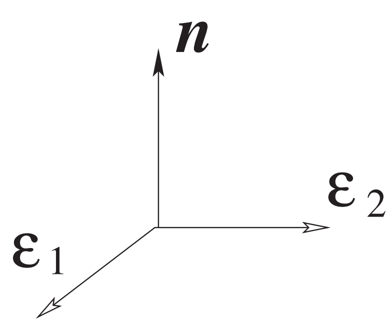

図 2　$\mathbf{n}$: 進行方向、$\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$: 偏光ベクトル

図の様に偏光ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ を定義する。これらはお互いに直交する単位ベクトルであるり、$\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \mathbf{n}$ の順番で右手系を成している。$\mathbf{n}$ は電磁波の進行方向である。

$$\boldsymbol{\epsilon}_1\cdot\boldsymbol{\epsilon}_1 = 1,\quad \boldsymbol{\epsilon}_2\cdot\boldsymbol{\epsilon}_2 = 1,\quad \boldsymbol{\epsilon}_1\cdot\boldsymbol{\epsilon}_2 = 0,\quad \boldsymbol{\epsilon}_1\times\boldsymbol{\epsilon}_2 = \mathbf{n},\quad \boldsymbol{\epsilon}_2\times\mathbf{n} = \boldsymbol{\epsilon}_1,\quad \mathbf{n}\times\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}_2 \tag{19}$$

実数部が実際の成分を表すと約束して電場成分を次のように書く。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \left[a_1 e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)}\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_1 e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_2)}\boldsymbol{\epsilon}_2\right] &(20)\\ &= \left[a_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta}\boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)} &(21)\\ \delta &\equiv \delta_2-\delta_1,\quad a_1, a_2\in\mathbf{R} &(22)\end{aligned}$$

5-1

電場の振幅の二乗が $\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{E}$ で計算できることを示せ。

5-1 **解答**

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} &= \left\{\left[a_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta}\boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)}\right\}^* \left\{\left[a_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta}\boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)}\right\} \\ &= \left[a_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{+i\delta}\boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{+i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)} \left[a_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta}\boldsymbol{\epsilon}_2\right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)} \\ &= a_1^2 + a_2^2\end{aligned}$$

5-2

円偏光の場合は $a_1 = a_2 = E_0$ である。この時右回りの円偏光が

$$\mathbf{E}_\mathrm{r}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2}\, E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)}\boldsymbol{\epsilon}_- \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) \tag{24}$$

となり、左回り円偏光が

$$\mathbf{E}_\mathrm{l}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2}\, E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)}\boldsymbol{\epsilon}_+ \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) \tag{26}$$

と書けることを示せ。ここで $\boldsymbol{\epsilon}_+, \boldsymbol{\epsilon}_-$ はそれぞれ電磁波の helicity が正、負の時の偏光ベクトルである。

5-2 **解答**

右回り円偏光の時 $\delta = \pi/2$ であるから

$$\mathbf{E} = E_0\left(a_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\epsilon}_2 e^{-i\pi/2}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{E_0}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)$$

より Eq.(23) を得る。左回り円偏光の時 $\delta = -\pi/2$ であるから

$$\mathbf{E} = E_0\left(a_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\epsilon}_2 e^{+i\pi/2}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{E_0}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)$$

より Eq.(25) を得る。

5-3

Show

$$\boldsymbol{\epsilon}_+\cdot\boldsymbol{\epsilon}_+^* = 1, \quad \boldsymbol{\epsilon}_-\cdot\boldsymbol{\epsilon}_-^* = 1, \quad \mathbf{n}\times\boldsymbol{\epsilon}_+^* = i\boldsymbol{\epsilon}_+^*, \quad \boldsymbol{\epsilon}_+\cdot\boldsymbol{\epsilon}_-^* = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}_-\cdot\boldsymbol{\epsilon}_+^* = 0, \quad \mathbf{n}\times\boldsymbol{\epsilon}_-^* = -i\boldsymbol{\epsilon}_-^*. \tag{27}$$

5-3 解答

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_+ \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)\cdot(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \\
\boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)\cdot(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \\
\mathbf{n}\times\boldsymbol{\epsilon}_+^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_2 + i\boldsymbol{\epsilon}_1) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) = i\boldsymbol{\epsilon}_+^* \\
\boldsymbol{\epsilon}_+ \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)\cdot(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) = 0 \\
\boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)\cdot(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) = 0 \\
\mathbf{n}\times\boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_2 - i\boldsymbol{\epsilon}_1) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) = -i\boldsymbol{\epsilon}_-^*
\end{aligned}
$$

5-4

任意の電磁波の電場成分は二つの直行する直線偏光の重ね合わせとして Eq.(20) の様に書ける。これを書き換えて、右回りの円偏光と左回りの円偏光の重ね合わせで、次のように書けることを示せ。

$$
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (E_+\boldsymbol{\epsilon}_+ + E_-\boldsymbol{\epsilon}_-)\,e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{28}
$$

$\mathbf{E}_\pm$ は $a_1, a_2, \delta_1, \delta_2$ を用いて表せ。

5-4 解答

$$
\boldsymbol{\epsilon}_1 = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_+ + \boldsymbol{\epsilon}_-}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = -i\frac{\boldsymbol{\epsilon}_+ - \boldsymbol{\epsilon}_-}{\sqrt{2}}, \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \left[a_1 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)}\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_1 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_2)}\boldsymbol{\epsilon}_2\right] \\
&= \left[a_1\frac{\boldsymbol{\epsilon}_+ + \boldsymbol{\epsilon}_-}{\sqrt{2}}e^{-i\delta_1} - ia_2\frac{\boldsymbol{\epsilon}_+ - \boldsymbol{\epsilon}_-}{\sqrt{2}}e^{-i\delta_2}\right]e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \left[\boldsymbol{\epsilon}_+\frac{a_1e^{-i\delta_1} - ia_2e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{\epsilon}_-\frac{a_1e^{-i\delta_1} + ia_2e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}}\right]e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\
&= (E_+\boldsymbol{\epsilon}_+ + E_-\boldsymbol{\epsilon}_-)\,e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}
\end{aligned}
$$

$$
E_+ = \frac{a_1e^{-i\delta_1} - ia_2e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}}, \quad E_- = \frac{a_1e^{-i\delta_1} + ia_2e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}} \tag{30}
$$

5-5

$\boldsymbol{\epsilon}_1$ 方向に直線偏光した電磁波を、右回りにに円偏光した電磁波と左回りに円偏光した電磁波の重ね合わせで表せ。

5-5 解答

$\boldsymbol{\epsilon}_1$ 方向に直線偏光しているので、$a_1 \neq 0, a_2 = 0$ であるから

$$
\mathbf{E}_{\boldsymbol{\epsilon}_1}(\mathbf{r},t) = \frac{a_1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_+ + \boldsymbol{\epsilon}_-)\,e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} = \frac{\mathbf{E}_\mathrm{l} + \mathbf{E}_\mathrm{r}}{2}; \quad \because \text{Eq.(23),(25)} \tag{31}
$$

を得る。

6

6-1

$B_0 = 1\,[\mu\mathrm{G}]$ の時、Electron cyclotron frequency

$$\omega_{\mathrm{ce}} = \frac{eB_0}{m_e c} \tag{32}$$

を求めよ。

6-1 解答

$$\text{Bohr magnetron:} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788381804 \times 10^{-11}\,[\mathrm{MeV\,T^{-1}}] \tag{33}$$

$$1\,[\mathrm{eV}] = 2\pi \cdot 2.41798949 \times 10^{14}\,[\mathrm{Hz}] \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{ce}} &= \frac{eB_0}{m_e c} = \frac{\mu_B}{\frac{e\hbar}{2m_e}} \frac{eB_0}{m_e} = 2\mu_B B_0 \\
&= 2 \cdot \left(5.788381804 \times 10^{-11} \times 10^6\right) \cdot \left(2\pi \cdot 2.41798949 \times 10^{14}\right) \cdot 10^{-4}\ (B_0\,[\mu\mathrm{G}]) \quad [\mathrm{Hz}] \\
&= 17.5882\ (B_0\,[\mu\mathrm{G}]) \quad [\mathrm{Hz}]
\end{aligned} \tag{35}$$

7

二つの電子がお互いにクーロン力で相互作用している運動を考える。

7-1

この系の dipole moment の時間二階微分が零であることを示せ。

7-1 解答

この系の dipole moment は定義より

$$\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = -e \sum_i \mathbf{r}_i = -e\,(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$$

となる。また重心 $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} = \frac{m_e \mathbf{r}_1 + m_e \mathbf{r}_2}{m_e + m_e} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$

と書ける。よって

$$\mathbf{d} = -2e\mathbf{r}$$

であるから、両辺を時間で二回微分すると

$$\ddot{\mathbf{d}} = -2e\ddot{\mathbf{r}}$$

を得る。

二つの電子がお互いにクーロン力で影響を及ぼしあい運動している系では、重心系から見ればクーロン力は内力である為、重心系に外力が働かない限り、重心系は等速直線運動をするだけである。よって $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ であるから、$\ddot{\mathbf{d}} = 0$ となり、この系に於いて dipole moment の時間二階部分は零であることが分かる。