

天体物理学式 課題番号壱拾番

解答例

[20070621 出題]

Yuji Chinone

1

相対論的ビーミング効果で磁場の周りを回転する電子からの放射は、進行方向を中心とした図のようなコーンの中に集中する。観測者は視線方向がこのコーン内に入っている時のみ電子からの強い放射を観測すると考えて良い。これを放射コーンと呼ぶ。従って、観測者は灯台からの光の様に、定期的に強いパルス電磁波を観測することになる。

1-1

観測者の視線方向電子の放射コーンに入った時間 t_1 と、出る時間 t_2 の間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ が

$$\Delta t = \frac{2}{\gamma\omega_B} = \frac{2}{\omega_{ce}} \quad (1)$$

で与えられることを示せ。

1-1 解答

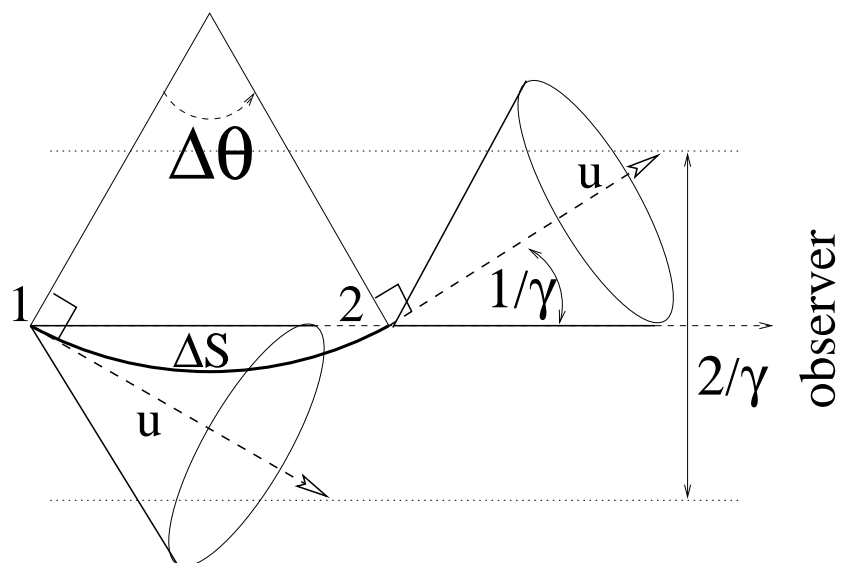


図1 放射コーンと時間間隔

幾何学的な性質より、

$$\Delta\theta = \frac{2}{\gamma}$$

である。よって観測者の視線が電子の放射コーンに入った時間 t_1 とでる時間 t_2 の間隔 Δt は、

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{2/\gamma}{\omega_B} = \frac{2}{\omega_{ce}}$$

となる。

1-2

時間間隔 Eq.(1) は観測者にとっては

$$\Delta t^0 \sim \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right) \sim (\gamma^2 \omega_{ce})^{-1} \quad (2)$$

となることを示せ。但し v は電子の速度、 $\gamma \gg 1$ の為放射コーンが観測者の視線方向に入っている間は、電子の速度はほぼ視線方向と平行であるとせよ。

1-2 解答

電磁波は有限の時間をかけて空間を伝播するので、電磁波の放射間隔とそれを観測する観測者の時間間隔との間には、差がでてくる。図より点 1 を通過した電子は、点 2 に到達するまでに

$$\Delta S = r\Delta\theta = \frac{2r}{\gamma} = \frac{2v}{\omega_{ce}}$$

だけ移動するので、点 1 で放射された電磁波は、点 2 で放射される電磁波に比べ、観測者に届くまでに $\Delta S/c$ だけよけいに時間がかかることになる。この分だけ Δt に比べて時間間隔が短くなるので、観測者にとっての時間間隔を Δt^0 とすると

$$\Delta t^0 \sim \Delta t - \frac{\Delta S}{c} = \frac{2}{\omega_{ce}} - \frac{2}{\omega_{ce}} \frac{v}{c} = \frac{2}{\omega_{ce}} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right) \sim \frac{2}{\omega_{ce}} \frac{1}{2\gamma^2} = (\gamma^2 \omega_{ce})^{-1}$$

となる。

1-3

観測の不確定性原理から、観測されるスペクトルが

$$0 < \nu < \gamma^2 \omega_{ce} \quad (3)$$

の範囲に広がることを示せ。

1-3 解答

不確定性原理より

$$\Delta t \Delta \nu > 1$$

なる関係が成り立っている。依って前問の結果より観測されるスペクトルは

$$0 < \Delta \nu < \gamma^2 \omega_{ce}$$

の範囲に広がることになる。

1-4

磁場が $1 [\mu\text{G}]$ の時、 $100 [\text{TeV}]$ 及び $10 [\text{GeV}]$ の運動エネルギーを持つ電子からの放射の最大周波数は幾らか。Hz 及び eV 単位で答えよ。

1-4 解答

運動エネルギー K は全エネルギー E から静止質量エネルギーを差し引いたものとし

$$K = E - m = (m^2 + p^2)^{1/2} - m \quad (4)$$

と書ける。これより運動量は K を用いて

$$E^2 = m^2 + p^2 = (m + K)^2 = m^2 + 2mK + K^2; \quad \therefore p^2 = K^2 + 2mK \quad (5)$$

と書ける。また速度 u は正準方程式より

$$u = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{E}; \quad u^2 = \frac{p^2}{E^2} = \frac{K^2 + 2mK}{(K + m)^2} \quad (6)$$

と書ける。よってこの時の Lorentz factor は

$$\gamma^2 = (1 - u^2)^{-1} = \left[1 - \frac{K^2 + 2mK}{(K + m)^2} \right]^{-1} = \left(\frac{m + K}{m} \right)^2 = \left(1 + \frac{K}{m} \right)^2 \quad (7)$$

となる。

3 の詳細な解析より ν は

$$\nu = \frac{3}{4} \gamma^2 \omega_{ce} \quad (8)$$

と書ける。サイクロトロン角周波数は、

$$\omega_{ce} = 17.5882012 \left(\frac{B}{[\mu\text{G}]} \right) [\text{Hz}]$$

であるので、具体的に値を代入すると

$$\nu = 1.31912 \left(\frac{\gamma}{10^4} \right)^2 \left(\frac{B}{[\mu\text{G}]} \right) [\text{GHz}] \approx 1.4 \left(\frac{\gamma}{10^4} \right)^2 \left(\frac{B}{[\mu\text{G}]} \right) [\text{GHz}] \quad (9)$$

と書ける。 $1.4 [\text{GHz}]$ は波長にすると $\lambda = 21 [\text{cm}]$ である。これは中性水素のスピン遷移による放射で、電波領域で重要な波長である。

以上を踏まえ、問題の場合を考えると、Eq.(7) より、

- $K = 100 [\text{TeV}]$ の場合

$$\nu = 5 \times 10^{17} [\text{Hz}], \quad h\nu = 2 \times 10^3 [\text{eV}]$$

- $K = 10 [\text{GeV}]$ の場合

$$\nu = 5 \times 10^9 [\text{Hz}], \quad h\nu = 2 \times 10^{-5} [\text{eV}]$$

となる。

2 制動放射

熱制動放射について考える。電子の速度分布は熱平衡を仮定する。

2-1

単位周波数、単位体積、単位時間当たりの熱制動放射の強度 (=emissivity: ϵ_v^{ff}) を求めよ。但し、温度は 10 keV、電子の密度は 10^{-3} cm^{-3} で規格化せよ。

2-1 解答

放射率は、

$$\epsilon_v^{ff} = \frac{dW(T, \nu)}{d\nu dV dt} = \bar{g}_{ff} \frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left(\frac{2\pi}{3k_B m} \right)^{1/2} T^{-1/2} n_e^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T}\right] \quad (10)$$

と書ける。具体的に値を評価すると、

$$\begin{aligned} \epsilon_v^{ff} &= \left[\frac{2^{11} \pi^3}{3^3} \right]^{1/2} \alpha^3 \times (10 [\text{keV}])^{-1/2} (10^{-6} [\text{cm}^{-6}]) (0.510998918 \times 10^6 [\text{eV}])^{-3/2} \\ &\quad \times \bar{g}_{ff} \left[\frac{k_B T}{10 [\text{keV}]} \right]^{-1/2} \left[\frac{n_e}{10^{-3} [\text{cm}^{-3}]} \right]^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T}\right] \\ &= \left[\frac{2^{11} \pi^3}{3^3} \right]^{1/2} \alpha^3 10^{-8} (0.510998918 \times 10^6)^{-3/2} \left[(2\pi)^{-1} \cdot 1.98644544 \times 10^{-23} \right]^3 (1.60217646 \times 10^{-19})^{-2} 10^7 \\ &\quad \times \bar{g}_{ff} \left[\frac{k_B T}{10 [\text{keV}]} \right]^{-1/2} \left[\frac{n_e}{10^{-3} [\text{cm}^{-3}]} \right]^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T}\right] [\text{erg sec}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ cm}^{-3}] \\ &= 6.35102 \times 10^{-48} \bar{g}_{ff} \left[\frac{k_B T}{10 [\text{keV}]} \right]^{-1/2} \left[\frac{n_e}{10^{-3} [\text{cm}^{-3}]} \right]^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T}\right] [\text{erg sec}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ cm}^{-3}] \\ &= 6.35 \times 10^{-48} \bar{g}_{ff} \left[\frac{k_B T}{10 [\text{keV}]} \right]^{-1/2} \left[\frac{n_e}{10^{-3} [\text{cm}^{-3}]} \right]^2 \exp\left[-\frac{h\nu}{k_B T}\right] [\text{erg sec}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ cm}^{-3}] \quad (11) \end{aligned}$$

となる。

2-2

全放射強度を求めよ。但し、温度は 10 keV、電子の密度は 10^{-3} cm^{-3} 、体積は半径 1 Mpc の球で規格化せよ。

2-2 解答

全放射強度 (=bolometric luminosity: L) は、emissivity を全周波数、全領域で積分して、

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{dW}{dt} = \int dv dV \frac{dW}{dv dV dt} = \int dv dV \epsilon_v^{ff} \\
 &= 6.35102 \times 10^{-48} \cdot \left\{ \frac{4}{3} \pi (3.0856775807 \times 10^{24})^3 \right\} \\
 &\quad \times \bar{g}_{ff} \left[\frac{k_B T}{10 [\text{keV}]} \right]^{-1/2} \left[\frac{n_e}{10^{-3} [\text{cm}^{-3}]} \right]^2 \frac{V}{\frac{4}{3} \pi (1 [\text{Mpc}])^3} \times \int_0^\infty dv \exp \left[-\frac{hv}{k_B T} \right] [\text{erg sec}^{-1}] \\
 &= 6.35102 \times 10^{-48} \cdot \left\{ \frac{4}{3} \pi (3.0856775807 \times 10^{24})^3 \right\} \cdot \frac{10 [\text{keV}]}{4.13566727 \times 10^{-18} [\text{keV}]} \\
 &\quad \times \bar{g}_{ff} \left[\frac{k_B T}{10 [\text{keV}]} \right]^{1/2} \left[\frac{n_e}{10^{-3} [\text{cm}^{-3}]} \right]^2 \frac{V}{\frac{4}{3} \pi (1 [\text{Mpc}])^3} [\text{erg sec}^{-1}] \\
 &= 1.8899 \times 10^{45} \bar{g}_{ff} \left[\frac{k_B T}{10 [\text{keV}]} \right]^{1/2} \left[\frac{n_e}{10^{-3} [\text{cm}^{-3}]} \right]^2 \frac{V}{\frac{4}{3} \pi (1 [\text{Mpc}])^3} [\text{erg sec}^{-1}] \\
 &= 1.89 \times 10^{45} \bar{g}_{ff} \left[\frac{k_B T}{10 [\text{keV}]} \right]^{1/2} \left[\frac{n_e}{10^{-3} [\text{cm}^{-3}]} \right]^2 \frac{V}{\frac{4}{3} \pi (1 [\text{Mpc}])^3} [\text{erg sec}^{-1}] \tag{12}
 \end{aligned}$$

となる。

2-3

温度 $k_B T = 10 [\text{keV}]$ 、電子個数密度 $n_e = 10^{-3} [\text{cm}^{-3}]$ の電子プラズマが、半径 $1 [\text{Mpc}] = 3 \times 10^{24} [\text{cm}]$ の球内に様に分布している天体を考える。この天体が観測者から距離 $100 [\text{Mpc}]$ 離れた所に存在するとする。この時この天体から熱制動放射により放射される $1 [\text{keV}]$ 以上のエネルギーを持った光子を観測する。 $1 [\text{cm}^2]$ 当たり、単位時間当たりに観測者に到達する $1 [\text{keV}]$ 以上の光子の数を求めよ。但し電子の速度分布で平均化したガウンとファクターを 1 とし、 $\int_{0.1}^\infty x^{-1} e^{-x} dx = 1.82$ を用いよ。

2-3 解答

ϵ_v^{ff} は (光子一個のエネルギー) \times (分布関数) の様なものなので、光子の数を求めるには、 hv で割ればよいことになる。問題では $hv \geq 1 [\text{keV}]$ の光子の数を聞いているので、この領域で積分を実行すると、 $n_e = 10^{-3} [\text{cm}^{-3}]$, $k_B T = 10 [\text{keV}]$, $V = 4\pi (1 [\text{Mpc}])^3 / 3$ を代入して

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{dN}{dt} = \int \frac{dW}{dv dV dt} \frac{dv}{hv} dV = \frac{6.35102 \times 10^{-48}}{6.62606876 \times 10^{-34} \cdot 10^7} \times \frac{4}{3} \pi (3.0856775807 \times 10^{24})^3 \times \int_{0.1}^\infty x^{-1} e^{-x} dx \\
 &= 2.14684 \times 10^{53} [\text{sec}^{-1}] \tag{13}
 \end{aligned}$$

を得る。ここでは

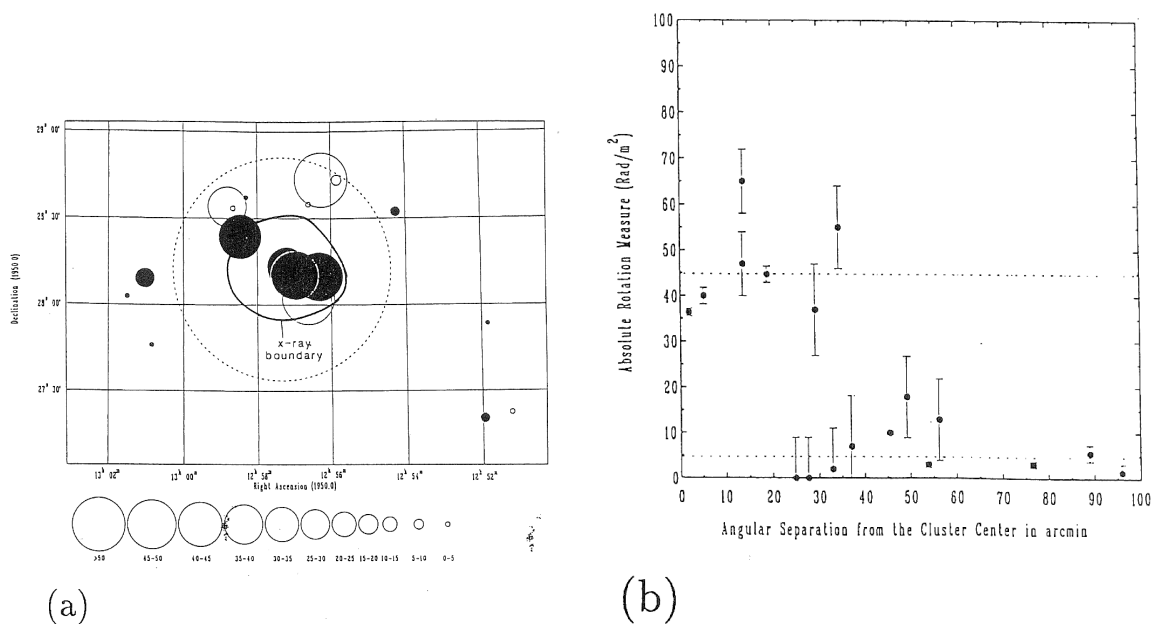
$$\int_{0.1}^\infty x^{-1} e^{-x} dx = 1.82$$

を、また $\bar{g}_{ff} \approx 1$ とした。この天体を $d = 100$ [Mpc] の距離から観測するので、観測者が観測する単位面積、単位時間当たりの $h\nu \geq 1$ [keV] 以上のエネルギーを持つ光子の数は、 $L = 4\pi d^2 I$ より、

$$I = \frac{dN}{dt dS} = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{2.14684 \times 10^{53}}{4\pi (100 \times 10^6 \cdot 3.0856775807 \times 10^{18})^2} = 0.179427 [\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}] = 0.18 [\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}] \quad (14)$$

となる。

3 RM を用いた髪座銀河団の磁場推定



The RM distribution of the Coma obtained by Kim et al. (1990). (a) the spatial distribution of the RMs in the vicinity the cluster. Filled and unfilled circles represent positive and negative RMs, respectively. The sizes of circles are proportional to the absolute values of RMs. (b) the RM distribution against the angular separation from the cluster center. These figures show the excess RMs of $\sim 40 \text{ rad m}^{-2}$ for the sources seen through the cluster.

図は髪座銀河団という近傍の巨大銀河団の背景にある天体の RM の測定結果である。以下では、髪座銀河団は、我々から距離 100 Mpc に存在し、半径 $L = 1$ Mpc の球内が一様に密度 $n_e = 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ 、温度 $k_B T = 10 \text{ keV}$ の電子・陽子プラズマで満たされた天体とせよ。

3-1

この図から髪座銀河団に磁場が存在していることを論証せよ。

3-1 解答

髪座銀河団は半径が 1 Mpc、距離 $L = 100$ Mpc にあるので見込む角は

$$\theta = \frac{1}{100} [\text{rad}] = 10^{-2} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 60 [\text{arcmin}] \sim 34 [\text{arcmin}]$$

である。図 (b) を見ると中心から ~ 35 arcmin までの RM の値が、 $35 \sim 100$ arcmin での RM の値に比べて有意に大きいことが分かる。つまりこれは髪座銀河団があることにより RM が増加していることを意味し、髪座銀河団に磁場が存在していることを示している。

3-2

磁場が一様に分布しているとして、銀河団中心付近の磁場の強度を求めよ。

3-2 解答

Rotation Measure は

$$\text{RM} = 0.812 \int_0^{l/[\text{pc}]} \left(\frac{B_{\parallel}}{[\mu\text{G}]} \right) \left(\frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]} \right) dl \quad [\text{rad m}^{-2}] \quad (15)$$

で与えられた。積分区間に於いて磁場が一定だと仮定すると次を得る：

$$\frac{\text{RM}}{[\text{rad m}^{-2}]} = 0.812 \left(\frac{B_{\parallel}}{[\mu\text{G}]} \right) \left(\frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]} \right) \left(\frac{L}{[\text{pc}]} \right) \quad (16)$$

ここで L は plasma の厚さである。

図 (a) から $\text{RM} \sim 40 \text{ rad m}^{-2}$ であり、plasma の厚さを半径とすると、

$$B = 40 \cdot (0.812)^{-1} (10^{-3})^{-1} (10^6)^{-1} = 4.9 \times 10^{-2} [\mu\text{G}]$$

を得る。

3-3

磁場の coherent length を $l = 10$ kpc とする。即ち、 l 毎に磁場の向きが視線方向に対して平行・反平行とランダムに変わるとする。図に示した RM は、この状況で複数の視線方向を観測したときの分散値であるとして、銀河団中心付近の磁場の強度を求めよ。

3-3 解答

random walk を考える。今の場合、磁場の random walk は平均が零だが、分散が l^2 である。一回の動きを A とすると、

$$\langle A \rangle = 0, \quad \langle A^2 \rangle = l^2$$

である。よって、

$$\langle A_1 + A_2 + \dots + A_n \rangle = 0, \quad \langle (A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2 \rangle = \langle A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 + 2A_1A_2 + 2A_1A_3 + \dots \rangle = n \langle A^2 \rangle = nl^2 = \sigma^2$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{n} l = \sqrt{\frac{L}{l}} l = (Ll)^{1/2}$$

となる。これより、Rotation Measure の変化は

$$\frac{\delta \text{RM}}{[\text{rad m}^{-2}]} = 0.812 \left(\frac{\delta B}{[\mu\text{G}]} \right) \left(\frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]} \right) \left(\frac{l}{[\text{pc}]} \right) \sqrt{\frac{L}{l}} = 0.812 \left(\frac{\delta B}{[\mu\text{G}]} \right) \left(\frac{n_e}{[\text{cm}^{-3}]} \right) \left(\frac{l}{[\text{pc}]} \frac{L}{[\text{pc}]} \right)^{1/2} \quad (17)$$

と書ける。以上より (random) 磁場の強度は

$$\delta \text{RM} = 40 \cdot (0.812)^{-1} (10^{-3})^{-1} (10^3 \cdot 10^6)^{-1/2} = 1.6 [\mu\text{G}]$$

と評価される。

4 Compton Scattering

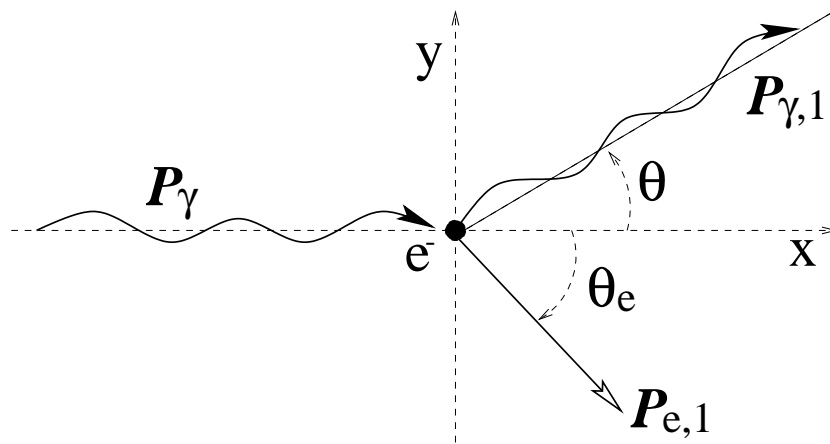


図 2 静止電子と光子の散乱

図のような光子と電子の衝突が起きた。

4-1

衝突前 (ϵ) と衝突後 (ϵ_1) の光子のエネルギー間の関係を求めよ。またこれを波長で書いた場合どうなるか。

4-1 解答

四元運動量で考える。散乱後の値には添え字 1 を付けると

$$P_\gamma^\mu = \left(\frac{\epsilon}{c}, \frac{\epsilon}{c}, 0, 0 \right) \quad (18)$$

$$P_{\gamma,1}^\mu = \left(\frac{\epsilon_1}{c}, \frac{\epsilon_1}{c} \cos \theta, \frac{\epsilon_1}{c} \sin \theta, 0 \right) \quad (19)$$

$$P_e^\mu = (m_e c, 0, 0, 0) \quad (20)$$

$$P_{e,1}^\mu = (\gamma m_e c, \gamma m_e v \cos \theta_e, -\gamma m_e v \sin \theta_e, 0) \quad (21)$$

と書ける。四元運動量保存より、

$$P_\gamma^\mu + P_e^\mu = P_{\gamma,1}^\mu + P_{e,1}^\mu \implies P_{e,1}^\mu = P_\gamma^\mu + P_e^\mu - P_{\gamma,1}^\mu \quad (22)$$

と書けるの、この両辺の二乗を計算すると

$$\begin{aligned}
 P_{e,1}^\mu P_{e,1\mu} &= -m_e^2 c^2 = P_\gamma^\mu P_{\gamma\mu} + P_e^\mu P_{e\mu} + P_{\gamma,1}^\mu P_{\gamma,1\mu} + 2P_\gamma^\mu P_{e\mu} - 2P_e^\mu P_{\gamma,1\mu} - 2P_\gamma^\mu P_{\gamma,1\mu} \\
 &= -m_e^2 c^2 + 2(-m_e \epsilon) - 2(-m_e \epsilon_1) - 2 \frac{\epsilon \epsilon_1}{c^2} (-1 + \cos \theta) \\
 \therefore \epsilon_1 &= \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \tag{23}
 \end{aligned}$$

を得る。 $\epsilon = hv = hc/\lambda$ を用いて、波長に直すと、

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta); \quad \lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.4263 \times 10^{-10} [\text{cm}] = 0.024263 [\text{\AA}] \tag{24}$$

となる。

5

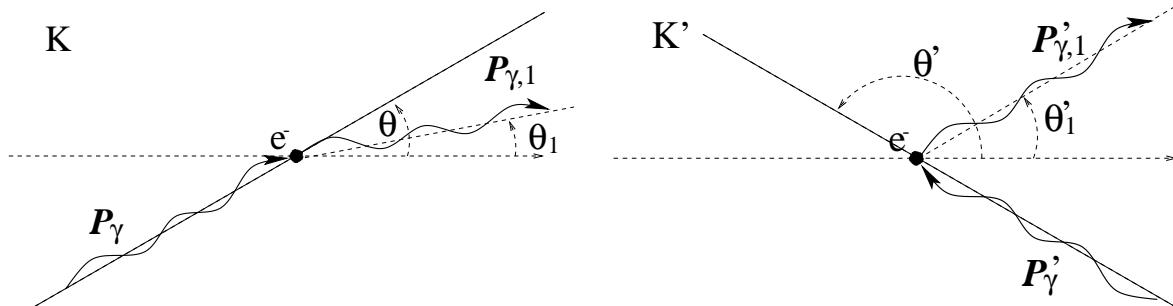


図3 動いている電子との Compton Scattering

図に示したような動いている電子と光子の散乱を考える。以下では実験室系を K、衝突前の電子静止系を K' とし、他の物理量にも同様に'(prime) を付けることにする。K' 系では $\epsilon' \ll m_e c^2$ とする。衝突前の電子の速度を $v = \beta c$ とし、Lorentz factor を $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ と書くことにする。電子の運動方向は x 軸方向とする。

5-1

K 系で速度 v で動いている電子を考える。電子が時刻 $t \sim t + dt$ 間に放出した電磁波は、K 系に静止した観測者が観測すると時間間隔は dt_{obs} である。 dt と dt_{obs} 間に成り立つ関係式を求めよ。

5-1 解答

時空図より、

$$\begin{aligned}
 t_{\text{obs},1} &= t_1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{c}; \quad t_{\text{obs},2} = t_2 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{c} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} (t_2 - t_1); \\
 \therefore dt_{\text{obs}} &= t_{\text{obs},2} - t_{\text{obs},1} = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt \tag{25}
 \end{aligned}$$

を得る。

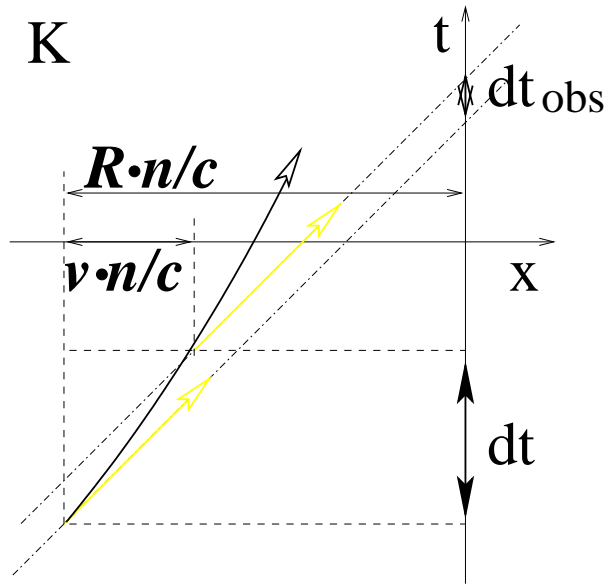


図4 時空図

5-2

K系での時間間隔 dt を、K'系で測定した時間間隔を dt' としたとき、これらの関係を求めよ。

5-2 解答

Lorentz 変換より、K系から見て運動している K'系の時計の進みが $\gamma \geq 1$ 倍遅くなった様に見える。よって、

$$dt' = \gamma^{-1} dt; \quad \gamma \geq 1 \quad (26)$$

となる。

5-3

dt を電磁波の一周期と考えることで次の関係式を示せ。

$$\epsilon' = \epsilon \gamma (1 - \beta \cos \theta); \quad \epsilon_1 = \epsilon'_1 \gamma (1 + \beta \cos \theta'_1) \quad (27)$$

5-3 解答

Eq.(25),(26) より

$$dt_{\text{obs}} = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt = \frac{h}{\epsilon}, \quad dt'_{\text{obs}} = dt' = \gamma^{-1} dt = \frac{h}{\epsilon'}; \quad \therefore \epsilon' = \frac{\gamma h}{dt} = \gamma (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \epsilon \quad (28)$$

となるので、Eq.(27) の左側を得る。右側の式はこれの逆変換を行うことで得られる。

5-4

1の結果を Taylor 展開しろ。

5-4 解答

$$\epsilon'_1 = \epsilon' \left[1 + \frac{\epsilon'}{m_e c^2} (1 - \cos \Theta) \right]^{-1} = \epsilon' \left[1 - \frac{\epsilon'}{m_e c^2} (1 - \cos \Theta) \right] \sim \epsilon'; \quad \because \epsilon' \ll m_e c^2 \quad (29)$$

ここで Θ は K' 系で見た入射光子と散乱光子とが成す角である。 K' 系での入射光子と散乱光子それぞれの単

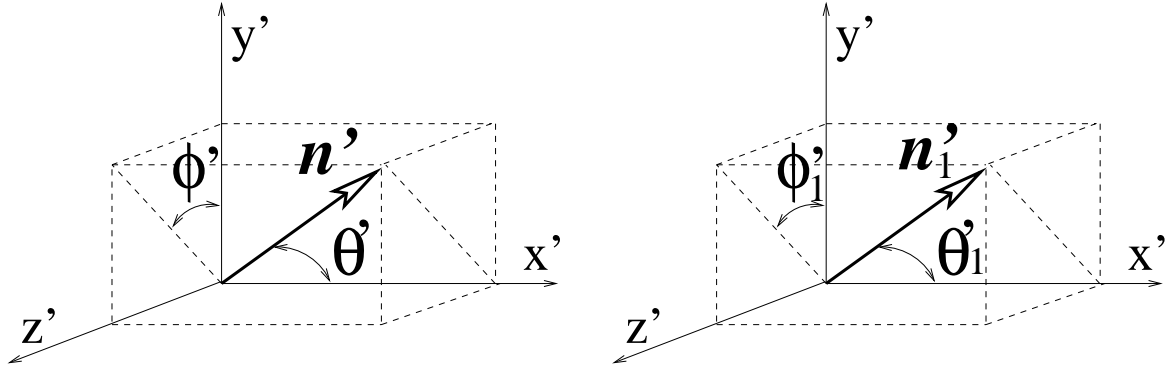


図5 K' 系に於ける光子の入射方向、散乱方向単位ベクトル

位ベクトルを \mathbf{n}' , \mathbf{n}'_1 とすれば、図より

$$\mathbf{n}' = (\cos \theta', \sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi') \quad (30)$$

$$\mathbf{n}'_1 = (\cos \theta'_1, \sin \theta'_1 \cos \phi'_1, \sin \theta'_1 \sin \phi'_1) \quad (31)$$

と書けるので、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}'_1 &= \cos \Theta \\ &= \cos \theta' \cos \theta'_1 + \sin \theta' \sin \theta'_1 \cos \phi' \cos \phi'_1 + \sin \theta' \sin \theta'_1 \sin \phi' \sin \phi'_1 \\ &= \cos \theta' \cos \theta'_1 + \sin \theta' \sin \theta'_1 \cos(\phi' - \phi'_1) \\ \therefore \cos \Theta &= \cos \theta' \cos \theta'_1 + \sin \theta' \sin \theta'_1 \cos(\phi' - \phi'_1) \end{aligned} \quad (32)$$

を得る。

5-5

以上から散乱後の光子のエネルギーが

$$\epsilon_1 \sim \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta) (1 + \beta \cos \theta'_1) \epsilon \quad (33)$$

となることを示せ。 $\theta = \pi, \theta'_1 = 0$ の時、光子のエネルギー変化量 $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon$ が最大となる。そのときの ϵ_1 を求めよ。

5-5 解答

Eq.(27) より、Eq.(33) である。これに $\theta = \pi, \theta'_1 = 0$ を代入すると

$$\epsilon_1 \sim \gamma^2 (1 + \beta)^2 \epsilon \quad (34)$$

となる。

5-6

電子の Lorentz factor が $\gamma \gg 1$ であるとき、衝突前後で光子のエネルギーが $4\gamma^2$ 倍になることを示せ。

5-6 解答

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon} \sim \gamma^2 (1 + 1)^2 = 4\gamma^2 \quad (35)$$

5-7

非相対論的な速度 $\beta \ll 1$ で運動する電子との散乱を考える。衝突前後の光子のエネルギー変化が $\Delta\epsilon = 2\beta\epsilon$ であることを示せ。

5-7 解答

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon &= \gamma^2 (1 + \beta)^2 \epsilon - \epsilon = (1 + \beta^2)(1 + \beta)^2 \epsilon - \epsilon \\ &= 2\beta\epsilon + O(\beta^4) \end{aligned} \quad (36)$$

5-8

$\epsilon = 3 \times 10^{-4}$ [eV] の光子が電子と衝突してエネルギーが $\epsilon_1 \sim 10$ [keV] になった。電子の Lorentz factor は幾らか。

5-8 解答

散乱前後で $O(10^8)$ 倍エネルギーが変化しているので、散乱前の電子について $\gamma \gg 1$ であり、Eq.(35) が成り立つ。よって

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10 \times 10^3}{3 \times 10^{-4}}} = 2886.75 \sim 3 \times 10^3 \quad (37)$$

を得る。

5-9

$\epsilon = 3 \times 10^{-4}$ [eV] の光子が $k_B T = 5$ [keV] で熱運動する電子と衝突した。この時光子のエネルギー変化量を求めよ。

5-9 解答

5 [keV] $\ll m_e = 0.51 \times 10^3$ [keV] より、電子は非相対論的な運動をしている。よって Eq.(36) より

$$\Delta\epsilon \sim 2\epsilon \left(\frac{3k_B T}{m_e c^2} \right)^{1/2} = 2 \cdot 3 \times 10^{-4} \left(\frac{3 \cdot 5 \times 10^3}{0.51 \times 10^6} \right)^{1/2} = 0.000102899 \sim 1 \times 10^{-4} \text{ [eV]} \quad (38)$$

を得る。

6 Bessel Function

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi \quad (39)$$

で定義される Bessel Function について考える。

6-1

以下の関係式を示せ。

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \quad (40)$$

$$2 \frac{d}{dz} J_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \quad (41)$$

6-1 解答

$$\begin{aligned} \text{RHS of Eq.(40)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\cos([n-1]\varphi - z \sin \varphi) + \cos([n+1]\varphi - z \sin \varphi)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \\ n\varphi - z \sin \varphi &= \xi \rightarrow d\xi = nd\varphi - z \cos \varphi d\varphi; \quad \therefore \cos \varphi d\varphi = \frac{-d\xi + nd\varphi}{z}; \quad \begin{array}{l} \varphi \big|_0 \rightarrow \pi \\ \xi \big|_0 \rightarrow n\pi \end{array} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{2n}{z} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi - \frac{2}{z\pi} \int_0^{n\pi} \cos \xi d\xi \\ &= \frac{2n}{z} J_n(z) + 0 = \text{LHS of Eq.(40)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LHS of Eq.(41)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{-\sin(n\varphi - z \sin \varphi)\} (-\sin \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\cos([n-1]\varphi - z \sin \varphi) - \cos([n+1]\varphi - z \sin \varphi)\} d\varphi = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \\ &= \text{RHS of Eq.(41)} \end{aligned}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}; \quad \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

6-2

Bessel Function: $J_n(z)$ が次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{d^2}{dz^2} y_n(z) + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} y_n(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y_n(z) = 0 \quad (42)$$

6-2 解答

$$\frac{d^2}{dz^2} J_n(z) = \frac{d}{dz} (J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) = \frac{1}{4} (J_{n-2}(z) - J_n(z)) - \frac{1}{4} (J_n(z) - J_{n+2}(z)) = \frac{1}{4} (J_{n-2}(z) - 2J_n(z) + J_{n+2}(z)) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_n(z) &= \frac{1}{2z} (J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) = \frac{1}{2z} \frac{z}{2(n-1)} (J_{n-2}(z) + J_n(z)) - \frac{1}{2z} \frac{z}{2(n+1)} (J_n(z) + J_{n+2}(z)) \\ &= \frac{1}{4(n^2-1)} [(n+1)J_{n-2}(z) + 2J_n(z) - (n-1)J_{n+2}(z)] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{z}{2n} (J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) = \frac{z}{2n} \frac{z}{2(n-1)} (J_{n-2}(z) + J_n(z)) + \frac{z}{2n} \frac{z}{2(n+1)} (J_n(z) + J_{n+2}(z)) \\ &= \frac{z^2}{4n(n^2-1)} [(n+1)J_{n-2}(z) + (n-1)J_{n+2}(z)] + \frac{z^2}{2(n^2-1)} J_n(z) \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{z^2}{2(n^2-1)}\right) J_n(z) &= \frac{2(n^2-1) - z^2}{2(n^2-1)} J_n(z) = \frac{z^2}{4n(n^2-1)} [(n+1)J_{n-2}(z) + (n-1)J_{n+2}(z)] \\ \Rightarrow J_n(z) &= \frac{z^2}{2n\{2(n^2-1) - z^2\}} \{(n+1)J_{n-2}(z) + (n-1)J_{n+2}(z)\} \end{aligned} \quad (45)$$

Eq.(43),(44),(45) を Eq.(42) に代入すると、

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4(n-1)}\right] J_{n-2}(z) + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+1)}\right] J_{n+2}(z) + \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2(n^2-1)} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)\right] J_n(z) \\ &= \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4(n-1)} - \frac{n}{4(n-1)}\right] J_{n-2}(z) + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{n}{4(n+1)}\right] J_{n+2}(z) = 0 \end{aligned}$$

となり、確かに満たしていることが分かる。

別解

$$2 \frac{d}{dz} J_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) - J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - 2J_{n+1}(z)$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{d}{dz} + \frac{n}{z}\right) J_n(z) = J_{n+1}(z) \quad : \text{上昇演算子}$$

$$2 \frac{d}{dz} J_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = J_{n-1}(z) - \frac{2n}{z} J_n(z) + J_{n-1}(z) = -\frac{2n}{z} J_n(z) + 2J_{n+1}(z)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dz} + \frac{n}{z}\right) J_n(z) = J_{n-1}(z) \quad : \text{下降演算子}$$

$$\therefore \left(\frac{d}{dz} + \frac{n+1}{z}\right) \left(-\frac{d}{dz} + \frac{n}{z}\right) J_n(z) = J_n(z) \rightarrow \text{Eq.(42)}$$

6-3

以下の式を示せ。

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi \quad (46)$$

$$= \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi \quad (47)$$

6-3 解答

$$\begin{aligned}
 J_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (e^{iz \sin \varphi - in\varphi} + e^{-iz \sin \varphi + in\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{+iz \sin \xi - in\xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{+iz \sin \xi - in\xi} d\xi; \quad \zeta = \xi + 2\pi, \quad \begin{array}{l} \xi \mid -\pi \rightarrow 0 \\ \zeta \mid \pi \rightarrow 2\pi \end{array} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} e^{+iz \sin \zeta - in\zeta} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{-3/2\pi} e^{iz \cos \xi + in\xi} \cdot i^{-n} (-d\xi); \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \xi, \quad \begin{array}{l} \varphi \mid 0 \rightarrow 2\pi \\ \xi \mid \pi/2 \rightarrow -3/2\pi \end{array} \\
 &= \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-3/2\pi}^{\pi/2} e^{iz \cos \xi + in\xi} d\xi = \frac{i^{-n}}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{\pi/2} + \int_{-3/2\pi}^0 \right) e^{iz \cos \xi + in\xi} d\xi \\
 &\quad \int_{-3/2\pi}^0 e^{iz \cos \xi + in\xi} d\xi = \int_{\pi/2}^{2\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi = - \int_{2\pi}^{\pi/2} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi; \quad \zeta + 2\pi = \varphi, \quad \begin{array}{l} \xi \mid -3/2\pi \rightarrow 0 \\ \varphi \mid \pi/2 \rightarrow 2\pi \end{array} \\
 &= \frac{i^{-n}}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{\pi/2} - \int_{2\pi}^{\pi/2} \right) e^{iz \cos \xi + in\xi} d\xi \\
 &= \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi + in\varphi} d\varphi
 \end{aligned}$$

6-4

次の式を示せ。

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{+in\varphi} \quad (48)$$

6-4 解答

複素 Fourier 級数：

$$f(x) = f(x + n\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+in(2\pi/\lambda)x}; \quad c_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) e^{-in(2\pi/\lambda)x} dx.$$

$$\Rightarrow f(\varphi) = e^{iz \sin \varphi} = e^{iz \sin(\varphi+2\pi)} = f(\varphi + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+in\varphi}; \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi = J_n(z), \quad \therefore \text{Eq.(46)}$$

$$\therefore e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{+in\varphi}$$