天体物理学弐 課題番号壱拾壱番
解答例
[20070628 出題]

Yuji Chinone

1 Inverse Compton Scattering

1-1

等方的な速度分布を持った Lorentz factor $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$ の電子による inverse conmton scattering で増加した電磁波の放射強度の平均値を、逆コンプトン放射強度と定義する。逆コンプトン放射強度が

$$P_{\mathrm{Comp}} = \frac{4}{3} c\sigma_T \left[U_{\mathrm{ph}}\gamma^2\beta^2\right] \tag{1}$$

で与えられることを示せ。但し光は波として扱い、放射強度は Liénard の公式

$$P_e = \frac{2e^2}{3c^3}\left[\gamma^6\left(\dot{\mathbf{v}}^2 - |\dot{\mathbf{v}}\times\boldsymbol{\beta}|^2\right)\right] \tag{2}$$

を用いて計算せよ。

1-1 解答

トムソン散乱を扱ったときと同じように、系には特別な方向が存在しないので、結果は電磁波の偏光状態には依存しない。ここでは簡単化の為直線偏光しているものとして扱う。電磁波の進行方向を $\mathbf{n} = (0,0,1)$ とし、電磁場の電場を $\mathbf{E} = (E(t),0,0)$、磁場を $\mathbf{B} = (0,B(t),0)$ とする。但し $E = B$ である。散乱前の電子の速度を $\mathbf{v} = v(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$ とする。ここで θ は速度と電磁波の進行方向とが成す角度、ϕ は x-y 平面への速度ベクトルの射影方位角である。相対論的な電子の運動方程式は過去のレポートで導出したように

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m_r c^2\right) = -e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m_e \mathbf{v}\right) = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{4}$$

と書ける。Eq.(3) より

$$\dot{\gamma} = -\frac{e\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\right)}{m_e c^2}$$

であるから、これを Eq.(4) に代入して、

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e\mathbf{E}}{\gamma m_e} - \frac{e\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)}{\gamma m_e c} + \frac{e\left\{\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\right)\mathbf{v}\right\}}{\gamma m_e c^2}$$

を得る。これより

$$\dot{\mathbf{v}}\times\boldsymbol{\beta} = -\frac{e\left(\mathbf{E}\times\mathbf{v}\right)}{\gamma m_e c} - \frac{e\left\{\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{v}\right\}}{\gamma m_e c^2}$$

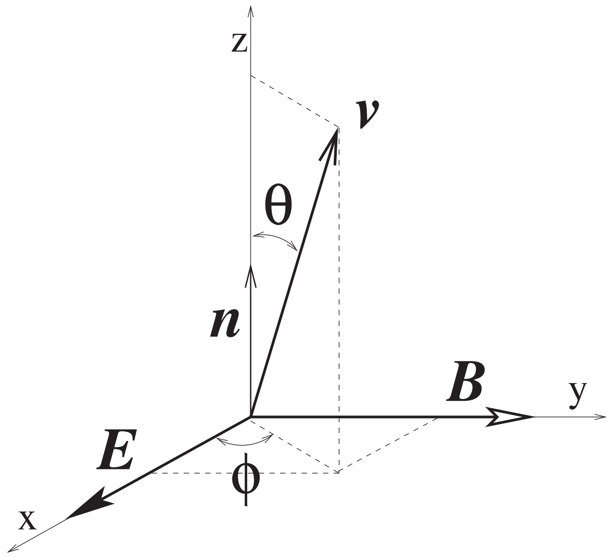

図１　速度 **v** で運動する電子よる電磁波の散乱

である。以上より

$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{e^2E^2}{\gamma^2 m_e^2}\left[1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\phi\right) + \beta^4\sin^2\theta\cos^2\phi\right]$$

$$|\dot{\mathbf{v}}\times\boldsymbol{\beta}|^2 = \frac{e^2E^2}{\gamma^2 m_e^2}\left[\beta^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\phi\right) - 2\beta^3\cos\theta + \beta^4\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\phi\right)\right]$$

となる。これを Eq.(2) に代入し、整理すると、

$$P_e = c\sigma_T U_{\mathrm{ph}}\gamma^2\left(1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2\cos^2\theta\right);\quad \text{ここで、}\sigma_T = \frac{8}{3}\pi\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2,\ U_{\mathrm{ph}} = \frac{E^2}{4\pi}$$

と書ける。ここで立体角積分を行って方向について平均化するのだが、Eq.(2) は既に立体角積分が済んでいる形になっているので、ここでは $d\Omega/(4\pi)$ で積分し規格化しなければならない。計算すると

$$\int\frac{d\Omega}{4\pi} = 1;\quad \int\frac{\cos\theta\, d\Omega}{4\pi} = 0;\quad \int\frac{\cos^2\theta\, d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{3}$$

であるから、結局

$$\langle P_e\rangle = c\sigma_T U_{\mathrm{ph}}\gamma^2\left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) \tag{5}$$

を得る。電子により単位時間当たりに散乱された電磁波の散乱前のエネルギー P_{ini} は

$$P_{\mathrm{ini}} = c\sigma_T\left[U_{\mathrm{ph}}\right] \tag{6}$$

であるから、電子による inverse conmton scattering で増加した電磁波の放射強度の平均値である逆コンプトン放射強度 P_{Comp} は $\langle P_e\rangle$ から P_{ini} を引くことで、

$$P_{\mathrm{Comp}} = \langle P_e\rangle - P_{\mathrm{ini}} = \frac{4}{3}c\sigma_T\left[U_{\mathrm{ph}}\gamma^2\beta^2\right] \tag{7}$$

となるので、確かに Eq.(1) で与えられることが分かる。

1-2

強度 B で一様な磁場中を、上記と同じ電子が運動することで放射されるシンクロトロン放射の放射強度の平均値が

$$P_{\rm Sync} = \frac{4}{3}c\sigma_T\left[U_{\rm B}\gamma^2\beta^2\right] \tag{8}$$

で与えられることを示せ。

1-2 解答

1 同様にして考える。電場が存在しない場合、相対論的な運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m_e c^2\right) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m_e \mathbf{v}\right) = -\frac{e}{c}\mathbf{v}\times\boldsymbol{\beta} \tag{10}$$

となるので、

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e\left(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\beta}\right)}{\gamma m_e c}$$

を得る。これより、

$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{e^2B^2}{\gamma^2 m_e^2}\beta^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\phi\right)$$

$$|\dot{\mathbf{v}}\times\boldsymbol{\beta}|^2 = \frac{e^2B^2}{\gamma^2 m_e^2}\beta^4\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\phi\right)$$

であるから、Eq.(2) に代入すると、

$$P_e = 2c\sigma_T U_B\gamma^2\beta^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\phi\right)\ ; \quad ここで、U_{\rm B} = \frac{B^2}{8\pi} \tag{11}$$

となる。同様に立体角積分を実行すると

$$\int\frac{\cos^2\theta\, d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{3}\ ; \quad \int\frac{\sin^2\theta\cos^2\phi\, d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{3}$$

より、

$$P_{\rm Sync} = \frac{4}{3}c\sigma_T\left[U_{\rm B}\gamma^2\beta^2\right] \tag{12}$$

となり、確かに Eq.(8) を得る。

1-3

以上の結果より、同じ電子によるシンクロトロン放射強度どコンプトン放射強度の比を求めよ。

1-3 解答

1,2 の結果より、

$$\frac{P_{\rm Sync}}{P_{\rm Comp}} = \left[\frac{U_{\rm B}}{U_{\rm ph}}\right] \tag{13}$$

となる。

1-4

温度 $T(k_BT \ll m_ec^2$ の非相対論的極限で) で熱運動している電子の β^2 の平均が $3k_BT/(m_ec^2)$ で与えられることを示せ。この時電子の速度分布関数は、Maxwell-Boltzmann 分布で与えられる。

1-4 解答

$$
\begin{aligned}
\left\langle \beta^2 \right\rangle &= \left(\frac{m_e}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x dv_y dv_y \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \exp\left[-\frac{m_e}{2k_BT}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right] \\
&= \left(\frac{m_e}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \frac{1}{c^2} \times 3 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x\, v_x^2 \exp\left[-\frac{m_e}{2k_BT} v_x^2\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y dv_z\ \exp\left[-\frac{m_e}{2k_BT}\left(v_x^2 + v_y^2\right)\right] \\
&= \left(\frac{m_e}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \frac{1}{c^2} \times 3 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\{m_e/(2k_BT)\}^3}} \times \frac{\pi}{m_e/(2k_BT)}; \quad \because \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^{2n+1}}} \\
&= 3\frac{k_BT}{m_ec^2}
\end{aligned} \tag{14}
$$

1-5

温度 T で熱運動している電子による逆コンプトン放射強度が、$k_BT \ll m_ec^2$ の非相対論的極限で

$$
P_{\mathrm{Comp}} = \frac{4k_BT}{m_ec^2} c\sigma_T U_{\mathrm{ph}} \tag{15}
$$

で与えられることを示せ。又、この時電子のエネルギー（散乱前で ϵ）が、散乱で $\Delta\epsilon$ だけ増加したとすると、それらの比の平均値が

$$
\left\langle \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right\rangle = \frac{4k_BT}{m_ec^2} \tag{16}
$$

で与えられることを示せ。

1-5 解答

$$
\begin{aligned}
\left\langle P_{\mathrm{Comp}} \right\rangle &= \frac{4}{3} c\sigma_T U_{\mathrm{ph}} \left\langle \gamma^2\beta^2 \right\rangle = \frac{4}{3} c\sigma_T U_{\mathrm{ph}} \left\langle \beta^2 + O\left(\beta^4\right) \right\rangle = \frac{4}{3} c\sigma_T U_{\mathrm{ph}} 3\frac{k_BT}{m_ec^2} \\
&= \frac{4k_BT}{m_ec^2} c\sigma_T U_{\mathrm{ph}}
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right\rangle &= \left\langle \frac{P_{\mathrm{Comp}}}{P_{\mathrm{ini}}} \right\rangle = \frac{\left\langle P_{\mathrm{Comp}} \right\rangle}{P_{\mathrm{ini}}} = \frac{\frac{4k_BT}{m_ec^2} c\sigma_T U_{\mathrm{ph}}}{c\sigma_T U_{\mathrm{ph}}} \\
&= \frac{4k_BT}{m_ec^2}
\end{aligned} \tag{18}
$$

1-5 解答 （別）

問題にあるように $k_BT \ll m_ec^2$ の非相対論的極限で考える。散乱前電子静止系 (K' 系) では

$$
\epsilon_1' \approx \epsilon' \left[1 - \frac{\epsilon'}{m_ec^2}(1 - \cos\Theta)\right] \tag{19}
$$

であるから、これの角度平均を取り、整理すると

$$\frac{\Delta\epsilon'}{\epsilon'} \equiv \frac{\epsilon'_1 - \epsilon'}{\epsilon'} = -\frac{\epsilon'}{m_e c^2} \tag{20}$$

を得る。これを K 系に変換する。この際に Eq.(20) と同じようになると考えられるが、余分な項が含まれることが推測される。これを $\alpha k_B T/(m_e c^2)$ とすると、

$$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} = -\frac{\epsilon}{m_e c^2} + \frac{\alpha k_B T}{m_e c^2} \tag{21}$$

となる。ここで α は適当な係数である。

今、K 系で Inverse Compton Scattering が平衡状態、つまり光子と電子との間でエネルギーのやり取りが行われない下限を考える。単純に考えるとこれは Eq.(21) が零となる条件の様に聞こえるが、実際には様々なエネルギーを持つ光子が存在するので、Eq.(21) をエネルギー平均した上で零、とする必要がある。下限を考えているので、電子は非相対論的であると仮定し、光子の分布関数は Bose-Einstein 分布から、近似で

$$f_{\mathrm{BE}} = \frac{1}{e^{\epsilon/(k_B T)} - 1} \approx e^{-\epsilon/(k_B T)} \tag{22}$$

の様に書ける。これより $[\epsilon \sim \epsilon + d\epsilon]$ 間に存在する光子の数は

$$n = g\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(p) = A\int_0^\infty d\epsilon\, \epsilon^2 e^{-\epsilon/(k_B T)} = A\int_0^\infty d\epsilon\, \frac{dn}{d\epsilon}\,; \quad \therefore\ \frac{dn}{d\epsilon} = A\epsilon^2 e^{-\epsilon/(k_B T)} \tag{23}$$

と書けるので、

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{\displaystyle\int \epsilon \frac{dn}{d\epsilon}\, d\epsilon}{\displaystyle\int \frac{dn}{d\epsilon}\, d\epsilon} = k_B T \cdot \frac{\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx}{\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx} = 3k_B T\,; \quad \left\langle\epsilon^2\right\rangle = \frac{\displaystyle\int \epsilon^2 \frac{dn}{d\epsilon}\, d\epsilon}{\displaystyle\int \frac{dn}{d\epsilon}\, d\epsilon} = (k_B T)^2 \cdot \frac{\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-x}\, dx}{\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx} = 12\,(k_B T)^2$$

より、

$$\langle\Delta\epsilon\rangle = \frac{\alpha k_B T}{m_e c^2}\langle\epsilon\rangle - \frac{\left\langle\epsilon^2\right\rangle}{m_e c^2} = \frac{3k_B T}{m_e c^2}(\alpha - 4)\, k_B T \tag{24}$$

を得る。平衡状態であるためには $\langle\Delta\epsilon\rangle = 0$ で無ければならないので、結局 $\alpha = 4$ となる。

以上の結果を踏まえると、非相対論的な場合 Eq.(15),(16) となる。

1-6

宇宙マイクロは背景放射 (CMB) は、絶対温度 $T_{\mathrm{cmb}} = 2.725\,\mathrm{K}$ の黒体放射であり、その放射強度のスペクトル (単位面積、単位時間、単位立体角、単位周波数当たりの放射エネルギー) は、次式で与えられる：

$$I_\nu(\nu)d\nu = B_\nu(T)d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}d\nu. \tag{25}$$

宇宙には一様等方に CMB photon が満ちている。

1-6-a)

最大強度になる周波数と温度の間に

$$h\nu \sim 2.82 k_B T \tag{26}$$

の関係があることを示せ。これを Wien の変位則という。これを使って CMB の強度が最大となる周波数を求めよ。

1-6-a) **解答**

Eq.(25) で強度が最大になるときの周波数 $\nu_{\rm peak}$ を考えると、

$$\left.\frac{\partial I_\nu}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_{\rm peak}} = 0$$

が成り立つ。今、

$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/kT)-1} \propto \frac{x^3}{e^x-1} = f(x)$$

として、$f(x)$ が最大となる x の値を求めることを考える。

$$f'(x) = \frac{3x^2}{e^x-1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x-1)^2}、従って \quad g(x) = 3(e^x-1) - xe^x$$

などとして、関数 $g(x)$ の零点 $g(x)=0$ を数値的に求めると、

$$x = 2.82143\cdots$$

となるので、 $\nu_{\rm peak}$ は

$$h\nu_{\rm peak} = 2.82 k_B T \quad \text{or} \quad \nu_{\rm peak} = 5.88\times 10^{10}\left(\frac{T}{[\mathrm{K}]}\right) \quad \mathrm{Hz} \tag{27}$$

となる。$T = T_{\rm CMB} = 2.73$ を代入すると

$$\nu_{\rm peak} = 2.82\frac{2.73}{4.799238\times 10^{-11}} = 1.60413\times 10^{11} \sim 160\,[\mathrm{GHz}]. \tag{28}$$

1-6-b)

Rayleigh-Jeans limit($h\nu \ll k_B T$) で、

$$I_\nu^{\rm RJ}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2}kT \tag{29}$$

となることを示せ。

1-6-b) **解答**

$h\nu \ll kT$ のとき、

$$\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1 = \frac{h\nu}{kt} + o\left(\frac{h\nu}{kt}\right)$$

であるから、Eq.(25) は、

$$I_\nu^{\rm RJ}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2}kT$$

と書けるこれを **Rayleigh-Jeans law** という。

1-6-c)

以下、Rayleigh-Jeans limit で考える。CMB photon が電子により逆コンプトン散乱を受けることで強度が

$$\Delta I_\nu = -\frac{2k_B T\nu^2}{c^2}2y; \qquad \text{here} \quad y = \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\tau_{\rm es} = \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\sigma_T n_e L \tag{30}$$

だけ変化することを示せ。y は compton y parameter と呼ばれる。この結果、銀河団領域を CMB の Rayleigh-Jeans 領域で観測すると、CMB の温度が、

$$\Delta T = -2yT \tag{31}$$

だけ変化することを示せ。典型的な銀河団の値 $n_e = 10^{-3}\,\mathrm{cm^{-3}}$、$k_B T = 10\,\mathrm{keV}$、$L = 1\,\mathrm{Mpc}$ で規格化せよ。

1-6-c) 解答

inverse compton により、photon のエネルギー分布が変化する。photon エネルギー分布の変化は、周波数分布の変化である。よって、強度の変化を計算するには、単位周波数当たりではなく、周波数空間での広がりの変化を考慮する必要がある。

今、周波数 ν に注目し、$[\nu, \nu + \Delta\nu]$ に入ってくる photon のエネルギーを考える。invers compton により変化する photon のエネルギーは、

$$h\nu = h\nu_- + \langle\Delta\epsilon\rangle \quad \Longrightarrow \quad \nu = \nu_-\left(1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right),\ \ \Delta\nu = \Delta\nu_-\left(1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right) \tag{32}$$

である。変化量は周波数に依存しない。inverse compton は散乱であるので、入ってくるエネルギーは

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mathrm{in}} &= ([\nu, \nu + \Delta\nu_-] \text{ に存在する photon 数}) \times (\text{散乱される確率}) \times (\text{ 散乱された後の photon 壱個当たりのエネルギー}) \\ &= \frac{\frac{2h}{c^2}k_B T \nu_-^2 \Delta\nu_-}{h\nu_-} \times \tau_{\mathrm{es}} \times h\nu = \frac{2hk_B T\tau_{\mathrm{es}}}{c^2}\nu\nu_-\Delta\nu_-\end{aligned} \tag{33}$$

と書くことが出来る。同様に出ていく photon について考えると、

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mathrm{out}} &= ([\nu, \nu + \Delta\nu] \text{ に存在する photon 数}) \times (\text{散乱される確率}) \times (\text{ 散乱される前の photon 壱個当たりのエネルギー}) \\ &= \frac{\frac{2h}{c^2}k_B T \nu^2 \Delta\nu}{h\nu} \times \tau_{\mathrm{es}} \times h\nu = \frac{2hk_B T\tau_{\mathrm{es}}}{c^2}\nu^2\Delta\nu\end{aligned} \tag{34}$$

となる。よってその変化量から、

$$\begin{aligned}\Delta I_\nu \Delta\nu = \epsilon_{\mathrm{in}} - \epsilon_{\mathrm{out}} &= \frac{2hk_B T\tau_{\mathrm{es}}}{c^2}\nu\left(\nu_-\Delta\nu_- - \nu\Delta\nu_-\right) = \frac{2hk_B T\tau_{\mathrm{es}}}{c^2}\nu^2\left[\left(1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right)^{-2}\Delta\nu - \Delta\nu\right] \\ &= \frac{2hk_B T\tau_{\mathrm{es}}}{c^2}\nu^2\left(1 - 2\left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle + o\left(\left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right) - 1\right)\Delta\nu \sim \frac{2hk_B T}{c^2}\nu^2\left(-2\left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\tau_{\mathrm{es}}\right)\Delta\nu \\ &= -\frac{2k_B T\nu^2}{c^2}2y\,\Delta\nu\,; \qquad \Delta I_\nu^{\mathrm{RJ}} = -2yI_\nu^{\mathrm{RJ}} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta T = -2yT.\end{aligned} \tag{35}$$

具体的に値を代入する：

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle = \frac{4k_B T_e}{m_e c^2} &= \frac{4\cdot 10\cdot 10^3\left(\frac{T_e}{10\,[\mathrm{keV}]}\right)[\mathrm{keV}]}{0.510\times 10^6\,[\mathrm{eV}]} = 0.0782779\times\left(\frac{T_e}{10\,[\mathrm{keV}]}\right) \\ &= 7.8\times 10^{-2}\left(\frac{T_e}{10\,[\mathrm{keV}]}\right)\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{es}} = \sigma_T n_e L &= \left(0.665\times 10^{-24}\,[\mathrm{cm}^2]\right)\times\left[10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]\left(\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right)\right]\times\left[3.09\times 10^{18}\times 10^6\,[\mathrm{cm}]\left(\frac{L}{[\mathrm{Mpc}]}\right)\right] \\ &= 0.00205485\left(\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right)\left(\frac{L}{[\mathrm{Mpc}]}\right) = 2.1\times 10^{-3}\left(\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right)\left(\frac{L}{[\mathrm{Mpc}]}\right)\end{aligned} \tag{37}$$

$$\therefore\ y = \left\langle \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \right\rangle \tau_{\mathrm{es}} = 0.000160849 \times \left(\frac{T_e}{10\,[\mathrm{keV}]}\right)\left(\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right)\left(\frac{L}{[\mathrm{Mpc}]}\right)$$
$$= 1.6\times 10^{-4} \times \left(\frac{T_e}{10\,[\mathrm{keV}]}\right)\left(\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right)\left(\frac{L}{[\mathrm{Mpc}]}\right) \tag{38}$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta T_{\mathrm{CMB}} = -(2\cdot 2.725\,[\mathrm{K}])\,y\left(\frac{T_{\mathrm{CMB}}}{2.725\,[\mathrm{K}]}\right) = 0.000876627\left(\frac{T_e}{10\,[\mathrm{keV}]}\right)\left(\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right)\left(\frac{L}{[\mathrm{Mpc}]}\right)\left(\frac{T_{\mathrm{CMB}}}{2.725\,[\mathrm{K}]}\right)$$
$$= 0.88\left(\frac{T_e}{10\,[\mathrm{keV}]}\right)\left(\frac{n_e}{10^{-3}\,[\mathrm{cm}^{-3}]}\right)\left(\frac{L}{[\mathrm{Mpc}]}\right)\left(\frac{T_{\mathrm{CMB}}}{2.725\,[\mathrm{K}]}\right)[\mathrm{mK}] \tag{39}$$

1-7

ここまでの取り扱いでは暗黙の内にあることを仮定していることになっている。それは何か答えよ。そのことから来る上記式の適応限界等を答えよ。

1-7 解答

1. "Inverse" Compton Scattering.
   電子がエネルギーを光子へと渡さなければならない。つまり光子のエネルギー増加が前提である。4 の結果より、電子が非相対論的な場合[*1]、
   $$\Delta\epsilon\Big|_{\mathrm{NR}} = \frac{\epsilon}{m_e c^2}\,(4k_B T - \epsilon) \tag{40}$$
   であるから、$\Delta\epsilon \geq 0$ の為には、$\epsilon \leq 4k_B T$ で無ければならない。$\epsilon > 4k_B T$ の場合は、光子が電子にエネルギーを与えることになる。
2. Thomson limit: $\gamma\epsilon \ll m_e c^2$.
3. $\sigma = \sigma_T = \mathrm{Const.}$ But
   Klein-Nishina formula
   $$\sigma = \sigma_T\,\frac{3}{4}\left\{\frac{1+x}{x^3}\left[\frac{2x\,(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x)\right] + \frac{\ln(1+2x)}{2x} - \frac{1+3x}{(1+2x)^2}\right\};\quad \text{here}\quad x = \frac{h\nu}{m_e c^2} \tag{41}$$
   $$\sigma = \begin{cases} \sigma_T\left(1 - 2x + \dfrac{26}{5}x^2 - \dfrac{133}{10}x^3 + \dfrac{1144}{35}x^4 + o\left(x^4\right)\right) & \text{when}\quad x \ll 1 \\ \dfrac{3}{8}\sigma_T\left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2} + \ln 2x\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{9}{2} - 2\ln 2x\right) - \dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{5}{4} + 2\ln 2x\right) - \dfrac{7}{12}\dfrac{1}{x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\right] & \text{when}\quad x \gg 1. \end{cases} \tag{42}$$
4. Energy conservation: $\epsilon_1 \leq \epsilon + \gamma m_e c^2$.

2 Cherenkov Radiation

屈折率 $n_r > 1$ の一様媒質中を等速度運動する電荷 q の荷電粒子が作る速度場考える。

[*1] 相対論的な場合、Eq.(21) の
$$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} = -\frac{\epsilon}{m_e c^2} + \alpha\gamma$$
となるので、$\gamma \gg 1$ より静止質量を含む項は無視でき、必ず $\Delta\epsilon > 0$ である（実際は $\epsilon < \gamma m_e c^2 \gg m_e c^2$ の範囲で)。

2-1

真空中を伝播する電磁波の四元ポテンシャルが満たす方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_e \tag{43}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e \tag{44}$$

であった。但しここでは四元ポテンシャルが Lorentz condition

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{45}$$

を満たすように gauge を選択した。屈折率 n_r の一様媒質中を伝播する電磁波の満たすべき方程式と、Lorentz condition に対応する条件を、Eq.(43),(44),(45) から類推して答えよ。

2-1 解答

Eq.(43),(44) 左辺のダランベルシアンは

$$\Box = \boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \Longrightarrow \quad v^2 = c^2 \tag{46}$$

という構造をしている。屈折率 n_r の媒質中では光速は c/n_r になるので $v = c/n_r$ と書ける。よってこの時のダランベルシアンは

$$\Box = \boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{n_r^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{47}$$

と書ける。このことより真空中での関係式を $c \to c/n_r$ で変換すれば、屈折率 n_r の媒質中の関係式になることが類推される。よって、屈折率 n_r の媒質中での方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi - \frac{n_r^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_e \tag{48}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \frac{n_r^2}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi n_r}{c}\mathbf{j}_e \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \frac{n_r}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{50}$$

となる。

2-2

1 の答えから屈折率 n_r の一様媒質中を等速度運動する電荷 q の荷電粒子が作る速度場が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{(\mathbf{n} - n_r\boldsymbol{\beta})\left(1 - n_r^2\beta^2\right)}{\kappa^3R^2}\right]; \quad \kappa = 1 - n_r\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} \tag{51}$$

で与えられることを示せ。

2-2 解答

真空中での速度場の式は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\left(1 - \beta^2\right)}{\kappa^3R^2}\right]; \quad \kappa = 1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} \tag{52}$$

であった。これを 1 同様に考え、$c \to c/n_r$ で置き換えると、Eq.(51) を得る。

2-3

$n_r > 1$ の時、$\kappa = 0$ となる $\mathbf{n}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の成す角 θ を臨界角という。これを求めよ。

2-3 解答

$$\kappa = 0 = 1 - n_r\beta\cos\theta; \qquad \longrightarrow \quad \therefore\ \cos\theta = \frac{1}{n_r\beta} \tag{53}$$

2-4

臨界角上では $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} = 0$ であることを示せ。

2-4 解答

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} \propto \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n} - n_r\boldsymbol{\beta}) = 1 - n_r\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = 1 - n_r\beta\cos\theta = 0 \tag{54}$$

2-5

屈折率の壱からのずれを Δn_r と書くことにすると、屈折率は $n_r = 1 + \Delta n_r$ と書ける。$\Delta n_r \gg 1$ の時、$\kappa = 0$ を満たす θ が存在する為に粒子の Lorentz factor が満たすべき条件を求めよ。更に空気中では Lorentz factor は幾ら以上で無ければならないか求めよ。但し空気の屈折率は $n_r = 1.0003$ である。

2-5 解答

$\cos\theta = (n_r\beta)^{-1} \leq 1$ であるから、$n_r\beta \geq 1$ でなければならない。これを γ の式に置き換えるには $\beta^2 = (\gamma^2-1)/\gamma^2$ であるから、

$$n_r^2\left(\gamma^2 - 1\right) - \gamma^2 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \gamma \geq \left[\frac{n_r^2}{n_r^2 - 1}\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{1 - n_r^{-2}}\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{1 - 1 + 2\Delta n_r}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\Delta n_r}}$$

$$\therefore\ \gamma \geq \frac{1}{\sqrt{2\Delta n_r}} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 0.0003}}\left(\frac{\Delta n_r}{0.0003}\right)^{-1/2} = 40.8248\left(\frac{\Delta n_r}{0.0003}\right)^{-1/2} = 41\left(\frac{\Delta n_r}{0.0003}\right)^{-1/2} \tag{55}$$

を得る。

2-6

5 の条件が満たされているとき、臨界角 θ を Δn_r と γ を用いて表せ。但し $\theta \gg 1, \gamma \gg 1, \Delta n_r \ll 1$ とせよ。

2-6 解答

$$\{\text{LHS of Eq.(53)}\} = \cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$$

$$\{\text{RHS of Eq.(53)}\} = (n_r\beta)^{-1} = \left[(1 + \Delta n_r)\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2}\right]^{-1} = (1 - \Delta n_r)\left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right) + O\left(\frac{\Delta n_r}{\gamma^2}\right) = 1 - \left(\Delta n_r - \frac{1}{2\gamma^2}\right)$$

$$\therefore\ \theta \sim \sqrt{2\Delta n_r - \frac{1}{\gamma^2}} \tag{56}$$

2-7

$\gamma^2 \gg \Delta n_r$ の極限で、空気中での臨界角が幾らになるか求めよ。

2-7 **解答**

$$\begin{aligned}\theta &\sim \sqrt{2\Delta n_r} = (2\cdot 0.0003)^{1/2}\left(\frac{\Delta n_r}{0.0003}\right)^{1/2} = 0.025\left(\frac{\Delta n_r}{0.0003}\right)^{1/2}\ [\mathrm{rad}] \\ &= 1.4\left(\frac{\Delta n_r}{0.0003}\right)^{1/2}\ [\mathrm{deg}]\end{aligned} \tag{57}$$