

# 降着円盤 (Accretion Disk)

## 1 降着円盤

連星系中の中性子星や白色矮星などコンパクト星の廻りには、降着円盤と呼ばれる回転ガス円盤が形成されることがある。

一方の星表面からガス物質がはがれてコンパクト星に落下するとき、ガスが持っている角運動量のため自由落下ができずに、ガス物質の回転運動の遠心力とコンパクト星による重力とが釣り合うようにして回転ガス円盤が形成されるのである。このとき遠心力と重力の釣り合いから

$$r\Omega_k^2 = \frac{GM}{r^2}, \quad \Omega_k = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (1)$$

を得る。ここで  $\Omega_k$  は円盤中のガスの kepler 運動に対する回転角振動数である。

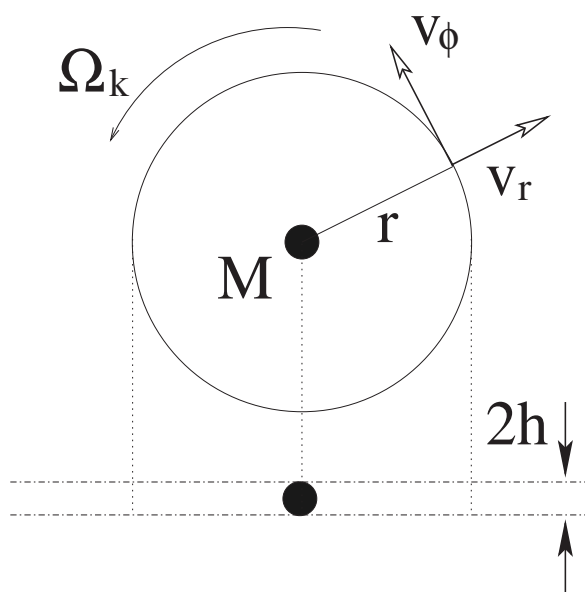


図1 降着円盤の概略

円盤中のガスの回転速度はコンパクト星からの距離  $r$  に依存する差分回転となっているので、円盤中半径方向に隣り合ったガスはお互いにこすりあい、そのときの粘性による摩擦応力で円盤の内側から外側に向けて角運動量が輸送されることになる。つまり、円盤中のガスは自分のもっている角運動量を外側のガスに渡しながら中心のコンパクト星に向かって落下していくのである。また、差分回転による摩擦熱により円盤のガスの回転エネルギーが—元は重力エネルギー—熱エネルギーに変換され、ガスの内部エネルギーに転化されガスの温度が上昇し、それが輻射として円盤表面から放出される。

宇宙で光っているものといえば、核融合によって光っている恒星であると考えるのが一般的だが、より効率よくエネルギー開放しているのは降着円盤である。

## 2 軸対称な場合

軸対称な降着円盤幾何学的に十分薄いとして、ガス円盤の流体力学的な振る舞いを示す式を導くことにする。半径  $r$  に於ける円盤ガスの面密度  $\Sigma$  を

$$\Sigma = \int_{-h}^h \rho dz \quad (2)$$

で定義する。ここで  $h$  は円盤の厚さの半分である。円盤ガスの半径方向の運動速度を  $v_r$  と書く。

### 2.1 質量の時間変化

円盤中に半径が  $r$  で幅が  $\Delta r$  のガスリングを考える。ガスリングの質量は  $2\pi r \Delta r \Sigma$ 、角運動量は  $2\pi r \Delta r \Sigma \cdot r v_\phi$  で与えられる。ガスリング内に於ける単位時間当たりの質量変化は、ガスリング両側面からの質量の流入流出の差であるので、 $v_r$  の向きに注意すると、ガウスの定理より

$$\frac{\partial(\text{リング内の質量})}{\partial t} = \frac{\partial(2\pi r \Delta r \Sigma)}{\partial t} = 2\pi r \Sigma(r, t) v_r(r, t) - 2\pi(r + \Delta r) \Sigma(r + \Delta r, t) v_r(r + \Delta r, t) \quad (3)$$

となる。よって

$$\therefore \frac{\partial(2\pi r \Delta r \Sigma)}{\partial t} = \frac{2\pi r \Sigma(r, t) v_r(r, t) - 2\pi(r + \Delta r) \Sigma(r + \Delta r, t) v_r(r + \Delta r, t)}{\Delta r}$$

と書け、この式を整理し  $\Delta r \rightarrow 0$  の極限をとると

$$r \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial r} (r v_r \Sigma) \quad (4)$$

を得る。

### 2.2 応力テンソル

デカルト座標で

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定義される応力テンソルは、円筒座標系で例えば  $r\phi$  成分  $\tilde{\sigma}_{r\phi}$  ( $r$  方向に垂直な面を考えてその単位面積に  $\phi$  方向に働く力) は

$$\tilde{\sigma}_{r\phi} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) = \rho \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) = \rho \nu r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \quad (5)$$

で与えられる。ここで  $\eta$  は粘性係数、 $\nu \equiv \eta/\rho$  は動粘性係数と呼ばれ、式 (5) では軸対称を仮定し  $\partial/\partial \phi = 0$  としている。

### 2.3 全トルク

応力テンソルを用いると、隣り合ったガスリングから粘性による全トルク  $G(r, t)$  は、腕の長さが  $r$  のところにある  $r$  方向に垂直な単位面積に  $\phi$  方向に働く力  $\tilde{\sigma}_{r\phi}$  によるトルク  $r \mathbf{e}_r \times \tilde{\sigma}_{r\phi} \mathbf{e}_\phi = r \tilde{\sigma}_{r\phi} \mathbf{e}_k$  を円周と円盤の厚さで積分して

$$G(r, t) = 2\pi r \int_{-h}^h r \tilde{\sigma}_{r\phi} dz \quad (6)$$

与えられる。ここでは応力テンソルの  $r\phi$  成分だけが零でないとしている。今

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0, \quad \int_{-h}^h \rho v dz = \Sigma v, \quad v_\phi = r\Omega \quad (7)$$

とすると、式 (5) を式 (6) に代入することで

$$G(r, t) = 2\pi r \int_{-h}^h r \tilde{\sigma}_{r\phi} dz = 2\pi r^2 \int_{-h}^h \rho v r \frac{\partial \Omega}{\partial r} dz = 2\pi r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \int_{-h}^h \rho v dz = 2\pi v \Sigma r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \quad (8)$$

を得る。

## 2.4 角運動量保存の式

応力テンソルを使い角運動量保存の式を導く。今考えているガスリングに於ける角運動量を  $L$  とすると

$$L = 2\pi r^3 \Delta r \Sigma \Omega$$

であることは、問巻本文中と式 (7) から明らかである。角運動量に対する運動方程式より

$$\frac{dL}{dt} = \tau$$

であるが、いま考えているのはガスリング上であるから  $\tau = G(r + \Delta r, t) - G(r, t)$  である。上式左辺の微分はラグランジュ的な微分であるから、偏微分で書き換えると

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + v_r \cdot \nabla$$

となるので、運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial t} + v_r \cdot \nabla L = G(r + \Delta r, t) - G(r, t)$$

と書けることが分かる。 $v_r \cdot \nabla L$  の項は問巻同様に考えると、閉曲線を貫いて  $\Delta r$  に流入流出するトルクであると考えられるので

$$v_r \cdot \nabla L = 2\pi(r + \Delta r)^3 v_r(r + \Delta r, t) \Sigma(r + \Delta r, t) \Omega(r + \Delta r, t) - 2\pi r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \Omega(r, t)$$

となる。以上より式を書き下すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (2\pi r^3 \Delta r \Sigma \Omega) + 2\pi(r + \Delta r)^3 v_r(r + \Delta r, t) \Sigma(r + \Delta r, t) \Omega(r + \Delta r, t) - 2\pi r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \Omega(r, t) \\ = 2\pi v \Sigma(r + \Delta r, t) (r + \Delta r)^3 \frac{\partial}{\partial r} \Omega(r + \Delta r, t) - 2\pi v \Sigma(r, t) r^3 \frac{\partial}{\partial r} \Omega(r, t) \end{aligned}$$

となり、両辺を  $\Delta r$  で割って  $\Delta r \rightarrow 0$  の極限をとり整理すると次のような角運動量保存の式を得る。

$$r \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma r^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r^3 \Omega v_r) = \frac{\partial}{\partial r} \left( v \Sigma r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (9)$$

## 2.5 面密度の時間変化

質量保存の式 (4) と角運動量保存の式 (9) から  $\partial \Omega / \partial t = 0$  として  $\Sigma$  の時間変化を考える。式 (9) の左辺第3項は

$$\frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r^3 \Omega v_r) = r \Sigma v_r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) + r^2 \Omega \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) = r \Sigma v_r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) - r^3 \Omega \frac{\partial \Sigma}{\partial t}$$

となり、同様に第2項は

$$r \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma r^2 \Omega) = r^3 \Omega \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + r \Sigma \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \Omega) = r^3 \Omega \frac{\partial \Sigma}{\partial t}$$

であるから、式 (9) は次のようになる。

$$r\Sigma v_r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \implies r\Sigma v_r = \left\{ \frac{1}{\frac{\partial(r^2 \Omega)}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma r^3 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \right\}$$

両辺を  $r$  で偏微分をし、式 (4) を代入後、両辺を  $r$  で割ると

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\frac{\partial(r^2 \Omega)}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \nu \Sigma r^3 \left( -\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \right\} \right] \quad (10)$$

を得る。また、粘性係数  $\nu$  を一定とし、 $\Omega = \Omega_k$  を仮定すれば、式 (10) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\frac{\partial(r^2 \Omega)}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \nu \Sigma r^3 \left( -\frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \right\} \right] &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\nu}{\frac{\partial(r^{1/2})}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \Sigma r^3 \left( \frac{3}{2} r^{-5/2} \right) \right\} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 3\nu r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r^{1/2}) \right\} \\ &= 3\nu \left\{ \frac{1}{2} r^{-1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} \Sigma) + r^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sqrt{r} \Sigma) \right\} \end{aligned}$$

となり、また

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} = 2x^{-1} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = -4x^{-3} \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

であるから、この関係を使うと

$$(\text{上の続き}) = 2x^{-2} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{r} \Sigma) - 2x^{-2} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{r} \Sigma) + 2x^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{r} \Sigma)$$

であるから結局式 (10) は

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{r} \Sigma) = r^{-1/2} 3\nu 2x^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{r} \Sigma) \implies \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{r} \Sigma) = \frac{12\nu}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{r} \Sigma) \quad (11)$$

と書き換えることができる (ここで  $x = 2\sqrt{r}$  である)。この式は  $y = \sqrt{r} \Sigma$  について

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

という形をした拡散方程式の形となっている。従って  $f(x, t) > 0$  であれば、ガスが星の周りでリングを形成していても時間とともに内側外側にガスが広がっていくことになる。

### 3 定常状態にある降着円盤

定常状態にある降着円盤の性質を考える。降着円盤が定常状態にあるとして、 $\partial/\partial t = 0$  とする。このとき、質量保存の式 (4) から円盤物質の降着率  $\dot{M}$  を

$$\dot{M} \equiv 2\pi r \Sigma (-v_r) \quad (12)$$

で定義できれば、質量降着率は一定であると考えることができる。このとき角運動量保存の式 (9) は

$$(\text{左辺}) = \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r^3 \Omega v_r) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{M}}{2\pi} \Omega(r) r^2 \right)$$

であるから、これを元に式 (9) の両辺を円盤の内側の境界  $r_{\text{in}}$  から外側に積分すると

$$\int_{r_{\text{in}}}^r dr' (\text{左辺}) = - \int_{r_{\text{in}}}^r \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{\dot{M}}{2\pi} \Omega(r') r'^2 \right) dr' = - \frac{\dot{M}}{2\pi} \left( \Omega_k(r) r^2 - \Omega_k(r_{\text{in}}) r_{\text{in}}^2 \right) = - \frac{\dot{M}}{2\pi} \sqrt{GM} (r^{1/2} - r_{\text{in}}^{1/2})$$

$$\int_{r_{\text{in}}}^r dr' (\text{右辺}) = \int_{r_{\text{in}}}^r \frac{\partial}{\partial r'} \left( \nu \Sigma r'^3 \frac{\partial \Omega(r)}{\partial r} \right) dr' = \nu \Sigma \left( r^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial r} \Big|_r - r_{\text{in}}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial r} \Big|_{r_{\text{in}}} \right) = \nu \Sigma \sqrt{GM} \left( -\frac{3}{2} \right) r^{1/2}$$

であるからこれを  $\nu \Sigma$  について整理すると

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left( 1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}} \right) \quad (13)$$

となる。ここでは内側で

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} \Big|_{r_{\text{in}}} = 0 \quad (14)$$

とし、また  $\Omega = \Omega_k$  としている。

### 3.1 粘性による散逸エネルギー

粘性による単位時間体積当たりの散逸エネルギー発生率  $\varepsilon$  は

$$\varepsilon = \sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2\eta} \sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} \quad (15)$$

で与えられる。ここでは  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  を仮定している。従って、もし応力テンソルの  $r\phi$  成分だけが零でないとすれば、散逸エネルギー発生率を円盤の厚さについて積分して

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \int_{-h}^h \varepsilon dz = \frac{1}{2\eta} \int_{-h}^h dz \left( \sum_{i,j=1}^3 \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} \right) = \frac{1}{2\eta} \int_{-h}^h dz 2\tilde{\sigma}_{r\phi}^2 = \frac{1}{\eta} \int_{-h}^h dz \left( \rho \nu r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 = \frac{1}{\eta} \int_{-h}^h dz \eta \rho \nu \left( r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \\ &= \int_{-h}^h dz \rho \nu \left( r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 = \nu \int_{-h}^h \rho dz \left( r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 = \nu \Sigma \left( r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

となるのが分かる。またこのとき  $\Omega = \Omega_k$  とすると

$$\nu \Sigma \left\{ r \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \right\} = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left( 1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}} \right) r^2 \cdot GM \frac{9}{4} r^{-5} = \frac{3GM\dot{M}}{4\pi} \left\{ 1 - \left( \frac{r_{\text{in}}}{r} \right)^{1/2} \right\} r^{-3} = \frac{3GM\dot{M}}{4\pi} \left( r^{-3} - r^{-7/2} r_{\text{in}}^{1/2} \right)$$

であるから、散逸エネルギーは次のように計算することができる。(微小面積  $2\pi r dr$  と散逸発生率との積を  $r_{\text{in}}$  から無限大まで積分する)

$$\int_{r_{\text{in}}}^{\infty} 2\pi r \bar{\varepsilon} dr = \frac{3GM\dot{M}}{2} \int_{r_{\text{in}}}^{\infty} \left( r^{-2} - r^{-5/2} r_{\text{in}}^{1/2} \right) dr = \frac{3GM\dot{M}}{2} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{2}{3} r^{-3/2} r_{\text{in}}^{1/2} \right]_{r_{\text{in}}}^{\infty} = \frac{1}{2} \frac{GM\dot{M}}{r_{\text{in}}} \quad (17)$$

従ってこのとき、重力エネルギーの半分は輻射として円盤から放出されるが、残りの半分は中心の星(と円盤との境界)にまで持ち越されることになる。

### 3.2 散逸エネルギーと黒体輻射

粘性による散逸エネルギーの半分がガス円盤の片面から温度  $T$  の黒体輻射として放出されるとすれば

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{2} = \sigma_{\text{SB}} T^4 \quad (18)$$

としてよいだろう。ここで  $\sigma_{\text{SB}}$  は Stefan-Boltzmann 定数である。さて、黒体放射のプランクの法則によれば放射の単位立体角当たりのエネルギー密度

$$u(\nu) = \frac{2h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (19)$$

は、

$$\frac{h\nu_{\text{peak}}}{kT} \approx 2.82 \quad (20)$$

のときに最大値をとるのは（解析的に）容易に分かる。ここで  $k$  は Boltzmann 定数である。

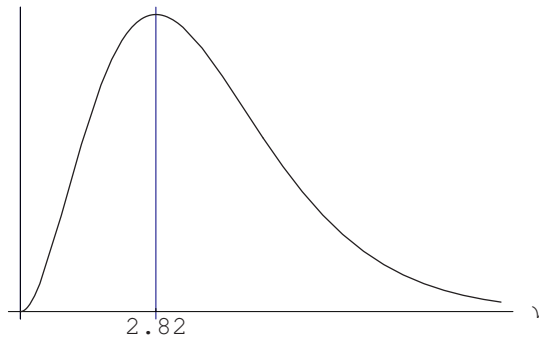


図 2  $\frac{\nu^3}{\exp(\nu)-1}$

今、 $\Omega = \Omega_k$ 、 $r \gg r_{\text{in}}$  であると仮定する。すると式 (13),(18) より

$$T = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{2\sigma_{\text{SB}}}\right)^{1/4} = \left(\frac{\Sigma}{2\sigma_{\text{SB}}} r^2 \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right\}^2\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu \Sigma}{2\sigma_{\text{SB}}} \frac{9}{4} G M r^{-3}\right)^{1/4} = \left[\frac{1}{2\sigma_{\text{SB}}} \frac{\dot{M}}{3\pi} \left\{1 - \left(\frac{r_{\text{in}}}{r}\right)^{1/2}\right\} \frac{9}{4} G M r^{-3}\right]^{1/4} \approx \left[\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma_{\text{SB}}r^3}\right]^{1/4}$$

となるが、

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (21)$$

を導入し、また太陽質量  $M_{\odot}$  を導入すると

$$\begin{aligned} \text{(上の続き)} &= \left[\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma_{\text{SB}}R_g^3 \left(\frac{R_g}{r}\right)^3}\right]^{1/4} = \left[\frac{3c^6}{64\pi\sigma_{\text{SB}}G^2}\right]^{1/4} \dot{M}^{1/4} M^{-1/2} \left(\frac{R_g}{r}\right)^{3/4} = \left[\frac{3c^6}{64\pi\sigma_{\text{SB}}G^2M_{\odot}} \frac{\dot{M}}{M_{\odot}}\right]^{1/4} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1/2} \left(\frac{R_g}{r}\right)^{3/4} \\ &= \left[\frac{3c^6}{64\pi\sigma_{\text{SB}}G^2M_{\odot} \cdot (364 \cdot 24 \cdot 3600) M_{\odot}/\text{year}}\right]^{1/4} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1/2} \left(\frac{R_g}{r}\right)^{3/4} \end{aligned}$$

となるから、このときの  $h\nu_{\text{peak}}$  の値は

$$h\nu_{\text{peak}} \sim 2.82kT = 2.82k \left[\frac{3c^6}{64\pi\sigma_{\text{SB}}G^2M_{\odot} \cdot (364 \cdot 24 \cdot 3600) M_{\odot}/\text{year}}\right]^{1/4} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1/2} \left(\frac{R_g}{r}\right)^{3/4}$$

と書け、それぞれ定数、単位は

$$\begin{aligned} c &= 2.99792458 \times 10^8 = 3.00 \times 10^8 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}\text{]} \\ \sigma_{\text{SB}} &= 5.670400 \times 10^{-8} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ [J} \cdot \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{K}^{-4}\text{]} \\ G &= 6.672 \times 10^{-11} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [J} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-2}\text{]} \\ M_{\odot} &= 1.9891 \times 10^{30} = 2.00 \times 10^{30} \text{ [kg]} \\ k &= 1.3806503 \times 10^{-23} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ [J} \cdot \text{K}^{-1}\text{]} \\ 1 \text{ [keV]} &= 1.60217646 \times 10^{-19} \times 10^3 = 1.60 \times 10^{-16} \text{ [J]} \end{aligned}$$

であるから、これらに気を付けると結局

$$\begin{aligned}
h\nu_{\text{peak}} &\sim \frac{2.82 \cdot 1.38 \times 10^{-23}}{1.60 \times 10^{-16}} \left[ \frac{3(3.00 \times 10^8)^6}{64\pi(5.67 \times 10^{-8})(6.67 \times 10^{-11})^2 2.00 \times 10^{30} \cdot (364 \cdot 24 \cdot 3600) M_{\odot}/\text{year}} \dot{M} \right]^{1/4} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{R_g}{r} \right)^{3/4} \\
&= \frac{2.82 \cdot 1.38 \times 10^{-7}}{1.60} (6.84)^{1/4} 10^{29/4} \left( \frac{\dot{M}}{10^{-9} M_{\odot}/\text{year}} \right)^{1/4} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{R_g}{r} \right)^{3/4} = 6.99 \left( \frac{\dot{M}}{10^{-9} M_{\odot}/\text{year}} \right)^{1/4} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{R_g}{r} \right)^{3/4} \\
&\sim 7 \left( \frac{\dot{M}}{10^{-9} M_{\odot}/\text{year}} \right)^{1/4} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left( \frac{R_g}{r} \right)^{3/4} \text{ [keV]} \tag{22}
\end{aligned}$$

を得る。

星の半径を  $R$  とするとき、このコンパクト星が中性子星であるとすれば  $R_g/R \sim 0.1 = 10^{-1}$ 、また白色矮星であるとすれば  $R_g/R \sim 0.0001 = 10^{-4}$  としてよいであろう。このときもし  $\dot{M} = 10^{-9} M_{\odot}/\text{year}$ ,  $M = M_{\odot}$  とすれば、それぞれの星の周りの降着円盤が星の表面近傍で放出する輻射のピークエネルギーは

$$\begin{aligned}
\text{中性子星} &\sim 7 \times (10^{-1})^{3/4} = 1.24479 \dots \sim 1 \text{ [keV]} \\
\text{白色矮星} &\sim 7 \times 10^{-3} \text{ [keV]}
\end{aligned}$$

となる。

## 4 連星中の降着円盤形成

連星中の降着円盤形成について、時間発展を解析的に追えるような簡単な場合を考えてみる。そのために、半径方向に無限に広がっている降着円盤を考え、式 (11) を解析的に解くことを考える。

### 4.1 解析解の導出

まず変数分離をするために  $r^{1/2}\Sigma = T(t)S(x)$  として代入すれば

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{12\nu}{x^2} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = -\lambda^2 \tag{23}$$

となる。ここでは  $\lambda$  は分離定数である。時間の関数  $T(t)$  に関しては

$$T(t) = T(t=0, \lambda) e^{-\lambda^2 t} \equiv T_0(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \tag{24}$$

と積分ができ、空間の関数  $S(x)$  については

$$\frac{d^2S(x)}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{12\nu} x^2 S(x) = 0 \tag{25}$$

という微分方程式を満たすことが分かる。微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha x^\beta u = 0 \tag{26}$$

を満たす解は **Bessel** 関数で与えられ、特に原点で正則な解は

$$u = \sqrt{x} J_{\frac{1}{\beta+1}} \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2} x^{\frac{\beta+2}{2}} \right) \tag{27}$$

となることが分かる。今の場合、原点で正則な解は  $\beta = 2$ ,  $\alpha = \frac{\lambda^2}{12\nu}$  であるから

$$S(x) = A(\lambda) \sqrt{x} J_{1/4} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{12\nu}} x^2 \right) = \sqrt{2} A(\lambda) r^{1/4} J_{1/4}(f\lambda r) \tag{28}$$

で与えられる。ここで  $f = 1/\sqrt{3v}$  であり、 $A(\lambda)$  は  $\lambda$  に依存するが、 $(x, t)$  には依らない任意定数である。無限に広がった円盤について、一般解は、 $\lambda$  についての重ね合わせとして表せ

$$\Sigma(x, t) = \int_0^\infty d\lambda T_0(\lambda) e^{-\lambda^2 t} A(\lambda) \sqrt{2} r^{-1/4} J_{1/4}(fr\lambda) = \int_0^\infty d\lambda A(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \sqrt{2} r^{-1/4} J_{1/4}(fr\lambda) \quad (29)$$

で与えられる。ここでは  $T_0(\lambda)A(\lambda) \rightarrow A(\lambda)$  としている。

$t = 0$  のとき、半径  $r = r_0$  の円周上だけに物質がたまっているとす。このとき面密度  $\Sigma(r, t = 0)$  を  $\delta$  関数を用いて

$$\Sigma(r, t = 0) = \frac{m}{2\pi r_0} \delta(r - r_0) \quad (30)$$

と表す。ここで、 $m$  は溜まっている物質の質量である。 $\delta(r)$  は  $1/r$  の次元をもつ。式 (30) は初期条件を与えている。以下では、Bessel 関数による展開定理

$$g(r) = \int_0^\infty \bar{g}(\alpha) J_\nu(\alpha r) d\alpha \quad \text{or} \quad \bar{g}(\alpha) = \alpha \int_0^\infty g(r) J_\nu(\alpha r) r dr \quad (31)$$

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha r) J_\nu(\bar{\alpha} r) r dr = \frac{1}{\alpha} \delta(\alpha - \bar{\alpha}) \quad \text{or} \quad \int_0^\infty J_\nu(\alpha \bar{r}) J_\nu(\alpha r) \alpha d\alpha = \frac{1}{r} \delta(r - \bar{r}) \quad (32)$$

などを用いる。さて例えば

$$\delta(r - r_0) = \int_0^\infty D(\lambda) J_\nu(\lambda r) d\lambda = \int_0^\infty D(\bar{\lambda}) J_\nu(\bar{\lambda} r) d\bar{\lambda} \quad (33)$$

とすとき、両辺に  $r dr$  をかけて、 $r$  について零から無限大まで積分すると、途中式 (32) を用い

$$\int_0^\infty \delta(r - r_0) J_\nu(\lambda r) r dr = \int_0^\infty J_\nu(\lambda r) \int_0^\infty D(\bar{\lambda}) J_\nu(\bar{\lambda} r) d\bar{\lambda} r dr$$

$$(\text{左辺}) = J_\nu(\lambda r_0) r_0$$

$$(\text{右辺}) = \int_0^\infty D(\bar{\lambda}) d\bar{\lambda} \int_0^\infty J_\nu(\bar{\lambda} r) J_\nu(\lambda r) r dr = \int_0^\infty d\bar{\lambda} D(\bar{\lambda}) \frac{1}{\lambda} \delta(\lambda - \bar{\lambda}) = \frac{1}{\lambda} D(\lambda)$$

$$\therefore D(\lambda) = \lambda r_0 J_\nu(\lambda r_0) \quad (34)$$

となることが分かる。また

$$\Sigma(r, t = 0) = \frac{m}{2\pi r_0} \delta(r - r_0) = \int_0^\infty A(\lambda) \sqrt{2} r^{-1/4} J_{1/4}(fr\lambda) d\lambda \quad (35)$$

$$\therefore \frac{m}{2\pi r_0} r^{1/4} \delta(r - r_0) = \int_0^\infty A(\lambda) \sqrt{2} J_{1/4}(fr\lambda) d\lambda$$

であることから、両辺に  $J_{1/4}(fr\lambda)(fr)d(fr)$  をかけて、 $fr$  について零から無限大まで積分すると、途中式 (32) を用い

$$\int_0^\infty \frac{m}{2\pi r_0} \delta(r - r_0) J_{1/4}(fr\lambda) \cdot (fr) d(fr) = \int_0^\infty J_{1/4}(fr\lambda) \int_0^\infty A(\bar{\lambda}) \sqrt{2} J_{1/4}(fr\bar{\lambda}) \cdot (fr) d(fr) d\bar{\lambda}$$

$$(\text{左辺}) = \frac{m}{2\pi r_0} r_0^{1/4} J_{1/4}(fr_0\lambda) f^2 r_0 = \frac{m}{2\pi} r_0^{1/4} f^2 J_{1/4}(fr_0\lambda)$$

$$(\text{右辺}) = \int_0^\infty d\bar{\lambda} \sqrt{2} A(\bar{\lambda}) \int_0^\infty J_{1/4}(fr\bar{\lambda}) J_{1/4}(fr\lambda) \cdot (fr) d(fr) = \int_0^\infty d\bar{\lambda} \sqrt{2} A(\bar{\lambda}) \frac{1}{\lambda} \delta(\lambda - \bar{\lambda}) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} A(\lambda)$$

$$\therefore A(\lambda) = \frac{m}{2\sqrt{2}\pi} r_0^{1/4} f^2 \lambda J_{1/4}(fr_0\lambda) \quad (36)$$



となることも分かる。これを式 (29) に代入すると

$$\Sigma(r, t) = \int_0^\infty d\lambda A(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \sqrt{2} r^{-1/4} J_{1/4}(fr\lambda) = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/4} f^2 \int_0^\infty d\lambda \exp(-\lambda t) \lambda J_{1/4}(fr_0\lambda) J_{1/4}(fr\lambda)$$

であり、また Bessel 関数の積分についての

$$\int_0^\infty dx \exp(-a^2 x^2) x J_\nu(px) J_\nu(qx) = \frac{1}{2a^2} \exp\left(-\frac{p^2 + q^2}{4a^2}\right) I_\nu\left(\frac{pq}{2a^2}\right) \quad (37)$$

なる公式を使うと、 $a^2 \rightarrow t, fr_0 \rightarrow p, fr \rightarrow q$  に対応しているから

$$\begin{aligned} \text{(続き)} &= \frac{m}{2\pi} x^{-1/4} f^2 \cdot \frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{f^2 r_0^2 + f^2 r^2}{4t}\right) I_{1/4}\left(\frac{f^2 r r_0}{2t}\right) = \frac{m}{4\pi} x^{-1/4} \frac{f^2}{\frac{t}{(r_0^2/12\nu)}} \exp\left[-\frac{f^2 r_0^2 \left\{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right\}}{\frac{4t}{\frac{t}{r_0^2/12\nu}}}\right] I_{1/4}\left(\frac{f^2 r_0^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)}{\frac{2t}{\frac{t}{r_0^2/12\nu}}}\right) \\ &= \frac{m}{4\pi} x^{-1/4} \frac{12\nu}{r_0^2 \tau \cdot 3\nu} \exp\left[-\frac{f^2 \cdot 12\nu(1+x^2)}{4\tau}\right] I_{1/4}\left(\frac{f^2 x \cdot 12\nu}{2\tau}\right) = \frac{m}{\pi r_0^2} \frac{x^{-1/4}}{\tau} \exp\left[-\frac{1+x^2}{\tau}\right] I_{1/4}\left[\frac{2x}{\tau}\right] \\ \therefore \Sigma(r, t) &= \frac{m}{\pi r_0^2} \frac{x^{-1/4}}{\tau} \exp\left[-\frac{1+x^2}{\tau}\right] I_{1/4}\left[\frac{2x}{\tau}\right] \quad (38) \end{aligned}$$

となることが分かる。ここで  $\tau = t/(r_0^2/12\nu)$ ,  $x = r/r_0$  であり、 $I_\nu(x)$  は変形された **(Modified) Bessel** 関数である。また、 $t_{\text{diff}} = r_0^2/(12\nu)$  は拡散の時間スケールを与える量である。

## 4.2 可視化

以上を元に

$$Z(x, \tau) = \frac{\pi r_0^2 \Sigma(r, t)}{m} = \frac{x^{-1/4}}{\tau} \exp\left[-\frac{1+x^2}{\tau}\right] I_{1/4}\left(\frac{2x}{\tau}\right)$$

のグラフを描くと次のようになる。

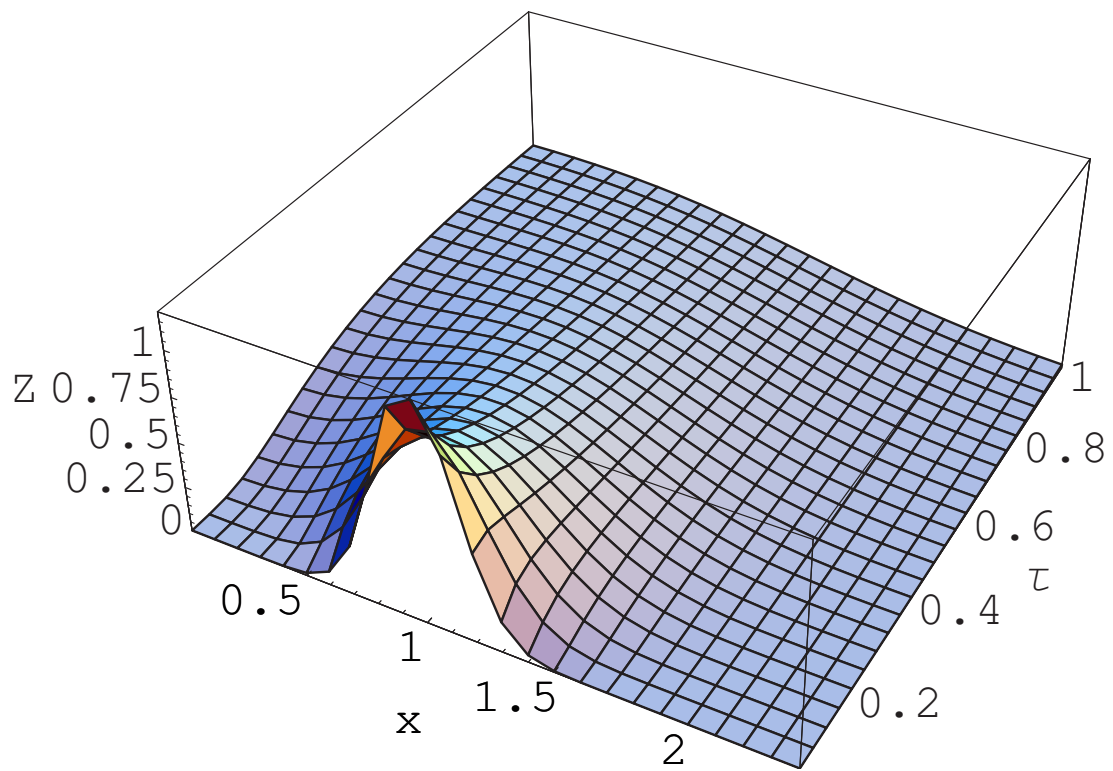


図3  $Z(x, \tau)$  の概形

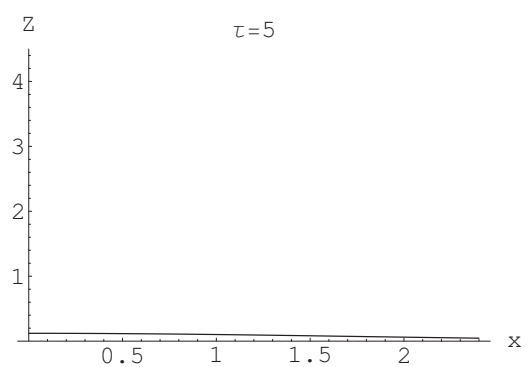
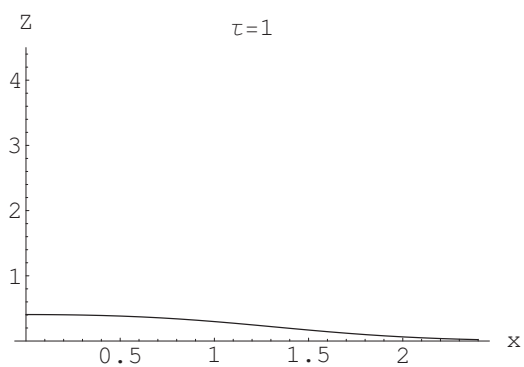
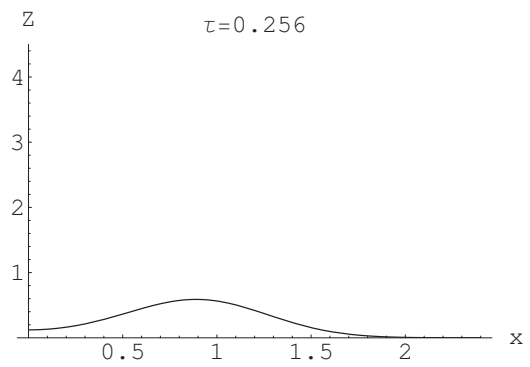
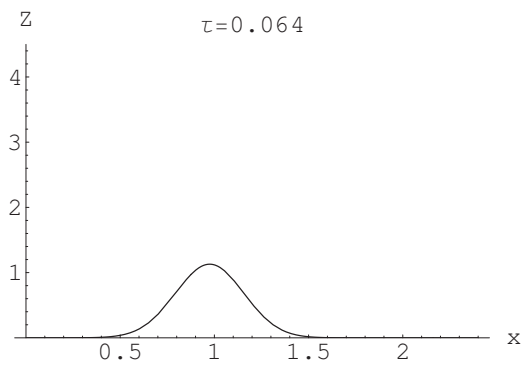
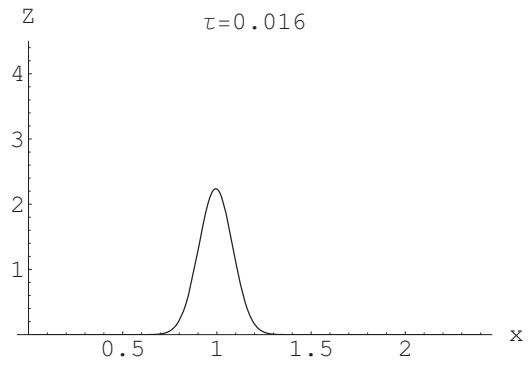
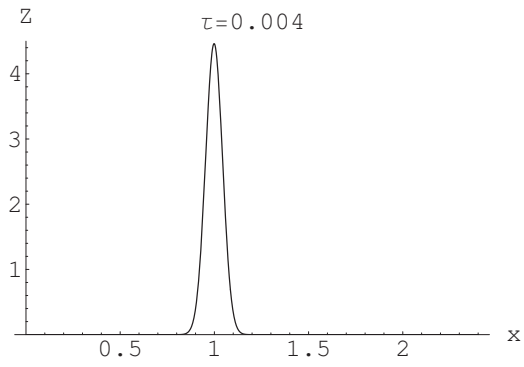


図4 各時間に於ける  $Z(x)$  の形