

コンプトン散乱 (Compton Scattering)

—相対論的 Beaming 効果、逆コンプトン散乱—

1 ローレンツ変換

平面電磁波は一般にその時間的依存性が $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ で与えられる。ここで \mathbf{k} は波数ベクトルであり、波長を λ とすれば $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ である。また $\omega = 2\pi\nu$ は角振動数である。真空中を伝播する電磁波については $|\mathbf{k}| = \omega/c$ が成り立っている。例えば、ある慣性系で見た平面電磁波の節は別の慣性系で見たときもやはり節になっていなければならないので、平面電磁波の位相 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ の値は座標系に依らず同じ値を持ち、ローレンツ変換について不変であると考えることができる。これは従って、

$$k^\alpha \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) \quad (1)$$

で定義される量がローレンツ変換に対して四元ベクトルとして振る舞うことを意味している。実際、位相 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ を書き換えれば $\eta_{\alpha\beta} k^\alpha x^\beta$ となる（計量は $\text{diag}(-+++)$ はとする）。ここで $x^\beta = (ct, \mathbf{x})$ である。

二つの慣性系 O と O' とを考えて、座標軸は平行に保ちながら x 軸に平行に O' が O に対して速度 v で等速直線運動しているとする。このとき、二つの慣性系で測った k^α と k'^α とがローレンツ変換によって

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1), \quad k^0 = \gamma(k'^0 + \beta k'^1) \quad (2)$$

$$k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0), \quad k^1 = \gamma(k'^1 + \beta k'^0) \quad (3)$$

$$k'^2 = k^2 \quad (4)$$

$$k'^3 = k^3 \quad (5)$$

で結びつけられることが分かる。ここで β, γ は以下の通り。

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

2 相対論的ドップラー効果

$\eta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta$ を計算すると、

$$\eta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = \eta_{00} k^0 k^0 + \eta_{11} k^1 k^1 + \eta_{33} k^2 k^2 + \eta_{33} k^3 k^3 = -\frac{\omega^2}{c^2} + |\mathbf{k}|^2 = 0 = \text{Const.} \quad \therefore \omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2 \quad (6)$$

を満たしていることが分かる。 θ を波数ベクトルと x 軸とが成す角であるとする、 $\omega/c = |\mathbf{k}|$ なので、

$$k^1 = \frac{\omega}{c} \cos \theta, \quad k'^1 = \frac{\omega'}{c} \cos \theta'$$

と書ける。位相はローレンツ変換の前後で変化しないので、Eq.(2)、Eq.(3) より、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t &= k^1 x^1 + k^2 x^2 + k^3 x^3 - \omega t = \gamma(k'^1 + \beta k'^0) x^1 + k^2 x^2 + k^3 x^3 - \gamma c(k'^0 + \beta k'^1) t \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' &= k'^1 x'^1 + k'^2 x'^2 + k'^3 x'^3 - \omega' t' = \gamma(k^1 - \beta k^0) x^1 + k'^2 x'^2 + k'^3 x'^3 - \gamma c(k^0 - \beta k^1) t' \end{aligned}$$

と書ける。それぞれの式の最左辺と最右辺を比較すると、

$$\omega = \gamma c(k'^0 + \beta k'^1) = \gamma c \left(\frac{\omega'}{c} + \beta \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \right) = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta') \quad (7)$$

$$\omega' = \gamma c(k^0 - \beta k^1) = \gamma c \left(\frac{\omega}{c} - \beta \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta) \quad (8)$$

となり、これは相対論的ドップラー効果を表している。

2.1 縦ドップラー効果

O' 系に周波数 ν_0 の電波の発信源があり、その電波を O で観測するとすると Eq.(8) より、観測者が観測する電磁波の周波数 ν は、

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (9)$$

となる。特に $\theta = \pi$ のときは、発信源が観測者に対して速度 v で遠ざかる場合となり、このとき

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \leq \nu_0$$

となり、観測者が観測する周波数は発信源のそれより小さくなる。従って電波が可視光線の場合には、スペクトル線が赤色の方向へずれるので、赤方偏移 (**Red Shift**) と呼ばれる。また $\theta = 0$ のときは、発信源が観測者に対して速度 v で近づく場合となり、このとき

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \geq \nu_0$$

となり、観測者が観測する周波数は発信源のそれより大きくなる。従って電波が可視光線の場合には、スペクトル線が青色の方向へずれるので、青方偏移 (**Blue Shift**) と呼ばれる。これら二つの場合を併せて縦ドップラー効果と呼ぶ。

2.2 横ドップラー効果

$\theta = \pi/2$ のときは、発信源が観測者と結ぶ線と直角を成す方向に速度 v で移動している場合となり、

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma} \leq \nu_0$$

赤方偏移することが分かる。これは非相対論的ドップラー効果では現れない効果であり、横ドップラー効果と呼ばれる。

3 相対論的 Beaming 効果

光子のエネルギーや運動量は $E = \hbar\omega$ と $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ とで定義されるので、その四元運動量ベクトルを

$$p^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\mathbf{k} \right) = \hbar k^\alpha \quad (10)$$

で定義する。Eq.(1) からこれらはローレンツ変換に従うことが分かる。このとき $\eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0$ であるから、

$$\frac{E^2}{c^2} = |\mathbf{p}|^2 \quad \text{or} \quad E = c|\mathbf{p}|$$

は明らかである。

粒子の運動を二つの慣性系 O と O' で観測したときの運動の速度を \mathbf{u} と \mathbf{u}' と書けば、速度の変換則は

$$u^1 = \frac{u'^1 + v}{1 + vu'^1/c^2}, \quad u^2 = \frac{1}{\gamma} \frac{u'^2}{1 + vu'^1/c^2}, \quad u^3 = \frac{1}{\gamma} \frac{u'^3}{1 + vu'^1/c^2} \quad (11)$$

で与えられる。これを慣性系間の運動速度 \mathbf{v} に平行な成分 \mathbf{u}_\parallel 、 \mathbf{u}'_\parallel に垂直な成分 \mathbf{u}_\perp 、 \mathbf{u}'_\perp とに分けて書けば、

$$u_\parallel = \frac{u'_\parallel + v}{1 + vu'_\parallel/c^2}, \quad u_\perp = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_\perp}{1 + vu'_\parallel/c^2} \quad (12)$$

となる。従って慣性系の x 軸に対する粒子の方向角の関係は

$$\tan \theta \equiv \frac{u_\perp}{u_\parallel} = \frac{1}{\gamma} \frac{u' \sin \theta'}{u' \cos \theta' + v} \quad (13)$$

で与えられる。ここで

$$\sin \theta' = \frac{u'_\perp}{u'}, \quad \cos \theta' = \frac{u'_\parallel}{u'}, \quad u' = |\mathbf{u}'| = |\mathbf{u}'_\parallel + \mathbf{u}'_\perp| \quad (14)$$

である。

さて、ある高速 ($\gamma \gg 1, v/c \sim 1$) で運動している粒子が放射する光子の運動を考える。その粒子の静止系を O' とし、発射される光子の運動速度を $u' = c$ とすれば、

$$\tan \theta \equiv \frac{u_\perp}{u_\parallel} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + v/c} = \frac{1}{\gamma} \frac{c}{v} \sim \frac{1}{\gamma} \quad (15)$$

が得られる。最後の等号は $\theta' = \pi/2$ としたときのものである。これから $\gamma \gg 1$ のとき

$$\sin \theta \sim \gamma^{-1} \ll 1 \quad (16)$$

えあることが分かる。従って粒子の静止系で運動方向に垂直に放射された光子でも、(粒子が高速で運動している様に見える) 観測者の系 O から見ると、光子は粒子の運動方向の狭い角度 $\theta \sim \gamma^{-1}$ に放射されたように見えることが分かる。これを相対論的 **Beaming** 効果と呼ぶ。

4 コンプトン散乱

光子が電子に散乱される現象 (コンプトン効果) を電子と光子との衝突現象と考える。衝突前の電子は静止しているとし、その電子と光子の四元運動量ベクトルをそれぞれ

$$p_{ei}^\alpha = (mc, 0, 0, 0), \quad p_{\gamma i}^\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{n}_i \right)$$

と書き、また衝突した後の四元運動量ベクトルをそれぞれ

$$p_{ef}^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p_{\gamma f}^\alpha = \left(\frac{\varepsilon_f}{c}, \frac{\varepsilon_f}{c} \mathbf{n}_f \right)$$

と書くことにする。ここで \mathbf{n}_i と \mathbf{n}_f は衝突前後での光子の伝播方向を表す単位ベクトルである。衝突前後での四元運動量ベクトルの保存則は

$$p_{\gamma i}^\alpha + p_{ei}^\alpha = p_{\gamma f}^\alpha + p_{ef}^\alpha \quad (17)$$

と書ける。

$$p_{ef}^\alpha = p_{\gamma i}^\alpha + p_{ei}^\alpha - p_{\gamma f}^\alpha \text{ とすると、}$$

$$-m^2 c^2 = \eta_{\alpha\beta} p_{ef}^\alpha p_{ef}^\beta \iff |\mathbf{p}_{ef}|^2 = |\mathbf{p}_{ei} + \mathbf{p}_{\gamma i} - \mathbf{p}_{\gamma f}|^2 \quad (18)$$

であるから、 $\mathbf{n}_i = (1, 0, 0)$ 、 $\mathbf{n}_f = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ とおくと、

$$p_{ei}^\alpha = (mc, 0, 0, 0), \quad p_{\gamma i}^\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}, 0, 0 \right), \quad p_{ef}^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p_{\gamma f}^\alpha = \left(\frac{\varepsilon_f}{c}, \frac{\varepsilon_f}{c} \cos \theta, \frac{\varepsilon_f}{c} \sin \theta, 0 \right)$$

を代入すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{ef}^2 &= \mathbf{p}_{ei}^2 + \mathbf{p}_{\gamma i}^2 + \mathbf{p}_{\gamma f}^2 + 2\mathbf{p}_{\gamma i} \cdot \mathbf{p}_{ei} - 2\mathbf{p}_{ei} \cdot \mathbf{p}_{\gamma f} - 2\mathbf{p}_{\gamma i} \cdot \mathbf{p}_{\gamma f} \\ \implies 0 &= -\frac{\varepsilon}{c} mc + mc \frac{\varepsilon_f}{c} - \left(-\frac{\varepsilon}{c} \frac{\varepsilon_f}{c} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\varepsilon_f}{c} \cos \theta \right) = -m\varepsilon + m\varepsilon_f + \frac{\varepsilon\varepsilon_f}{c^2} (1 - \cos \theta) = -m\varepsilon + m\varepsilon_f \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{mc^2} (1 - \cos \theta) \right\} \end{aligned}$$

となり、次のコンプトン散乱の式を得る。

$$\varepsilon_f = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{mc^2} (1 - \cos \theta)} \quad (19)$$

光子について、 $\varepsilon = h\nu$ 、 $\varepsilon_f = h\nu_f$ 、 $mc^2 = h\nu_c$ 、 $\lambda = c/\nu$ であるから、Eq.(19) を波長で書き直すと

$$\frac{hc}{\lambda_f} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{1 + \frac{hc}{\lambda} \frac{\lambda_c}{hc} (1 - \cos \theta)} \implies \frac{1}{\lambda_f} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{1 + \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos \theta)}$$

であるから、

$$\lambda_f - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (20)$$

を得る。ここで λ_c はコンプトン波長で

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{mc} = 0.0243 \text{ \AA}$$

である。

Eq.(19) または Eq.(20) が示すように、静止している電子との散乱により光子はエネルギーを失って、その波長は長くなる（エネルギーが小さくなる）ことが分かる。ただ、電子のコンプトン波長に比べて光子の波長が十分長ければ（光子のエネルギーが電子の静止エネルギーに比べて十分小さければ）、散乱による光子の波長変化（エネルギー変化）は無視できるほど小さい。

5 逆コンプトン散乱 (inverse Compton scattering)

ある慣性系 O に於いて相対論的な運動をしている電子が光子と衝突することで、電子の運動エネルギーが光子のエネルギーに移されることがある。このようなコンプトン散乱の過程を特に逆コンプトン散乱 (**inverse Compton scattering**) という。ここでは電子の静止系 O' で光子のエネルギーが電子の静止エネルギーに比べて十分小さい場合を考える。

5.1 逆コンプトン散乱の式、書

観測者の系を O とし、それに対して x 軸方向に速度 v で運動している電子の静止系を O' とする。電子の静止系で見たときの光子の入射方向と散乱方向とをそれぞれ

$$\mathbf{n}'_i = (\cos \theta'_i, \sin \theta'_i \cos \phi'_i, \sin \theta'_i \sin \phi'_i) \quad (21)$$

$$\mathbf{n}'_f = (\cos \theta'_f, \sin \theta'_f \cos \phi'_f, \sin \theta'_f \sin \phi'_f) \quad (22)$$

とする。散乱前の電子と光子について四元運動量をそれぞれ、 p'^{α}_{ei} と $p'^{\alpha}_{\gamma i}$ と書き、散乱後のについては、 p'^{α}_{ef} と $p'^{\alpha}_{\gamma f}$ と書くことにする。コンプトン散乱のときと同様に考えると、

$$p'^{\alpha}_{ei} = (mc, 0, 0, 0), \quad p'^{\alpha}_{\gamma i} = \left(\frac{\varepsilon'}{c}, \frac{\varepsilon'}{c} \cos \theta'_i, \frac{\varepsilon'}{c} \sin \theta'_i \cos \phi'_i, \frac{\varepsilon'}{c} \sin \theta'_i \sin \phi'_i \right),$$

$$p'^{\alpha}_{ef} = \left(\frac{E'}{c}, \mathbf{p}' \right) p'^{\alpha}_{ef} = \left(\frac{\varepsilon'_f}{c}, \frac{\varepsilon'_f}{c} \cos \theta'_f, \frac{\varepsilon'_f}{c} \sin \theta'_f \cos \phi'_f, \frac{\varepsilon'_f}{c} \sin \theta'_f \sin \phi'_f \right)$$

であるから、Eq.(18) より

$$\mathbf{p}'_{ei}{}^2 = \mathbf{p}'_{\gamma i}{}^2 + \mathbf{p}'_{\gamma f}{}^2 + \mathbf{p}'_{ef}{}^2 + 2\mathbf{p}'_{\gamma i} \cdot \mathbf{p}'_{ei} - 2\mathbf{p}'_{ei} \cdot \mathbf{p}'_{\gamma f} - 2\mathbf{p}'_{\gamma i} \cdot \mathbf{p}'_{\gamma f}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= -\frac{\varepsilon'}{c} mc + mc \frac{\varepsilon'_f}{c} - \left\{ -\frac{\varepsilon'}{c} \frac{\varepsilon'_f}{c} + \frac{\varepsilon'}{c} \frac{\varepsilon'_f}{c} \cos \theta'_i \cos \theta'_i + \frac{\varepsilon'}{c} \frac{\varepsilon'_f}{c} \sin \theta'_i \sin \theta'_f \cos \phi'_i \cos \phi'_f + \frac{\varepsilon'}{c} \frac{\varepsilon'_f}{c} \sin \theta'_i \sin \theta'_f \sin \phi'_i \sin \phi'_f \right\} \\ &= -m\varepsilon' + m\varepsilon'_f - \frac{\varepsilon' \varepsilon'_f}{c^2} \left\{ -1 + \cos \theta'_i \cos \theta'_f + \sin \theta'_i \sin \theta'_f (\cos \phi'_i \cos \phi'_f + \sin \phi'_i \sin \phi'_f) \right\} \\ &= -m\varepsilon' + m\varepsilon'_f + \frac{\varepsilon' \varepsilon'_f}{c^2} (1 - \cos \Theta) \end{aligned}$$

となり、結局逆コンプトン散乱の式として次式を得る。

$$\varepsilon'_f = \frac{\varepsilon'}{1 + \frac{\varepsilon'}{mc^2} (1 - \cos \Theta)} \quad (23)$$

ここで $\cos \Theta$ は

$$\cos \Theta = \cos \theta'_i \cos \theta'_f + \sin \theta'_i \sin \theta'_f (\cos \phi'_i \cos \phi'_f + \sin \phi'_i \sin \phi'_f) = \cos \theta'_i \cos \theta'_f + \sin \theta'_i \sin \theta'_f \cos (\phi'_i - \phi'_f)$$

である。上式より $1 - \cos \Theta \geq 0$ であるから $\varepsilon'_f \leq \varepsilon'$ であることが分かる。 $\varepsilon'/mc^2 \ll 1$ とすれば Eq.(23) は

$$\varepsilon'_f \cong \varepsilon' \left[1 - \frac{\varepsilon'}{mc^2} (1 - \cos \Theta) \right] \quad (24)$$

と書ける。従って $\varepsilon' \ll mc^2$ であれば $\varepsilon'_f \cong \varepsilon'$ であるから、電子の静止系で見たとき散乱の前後で光子のエネルギーに大きな変化はないことが分かる。

5.2 観測者の系に於いて相対論的な速度で運動している電子と光子との衝突（散乱）

観測者の系 O に於いて相対論的な速度で運動 ($\gamma \gg 1$) している電子と光子との衝突（散乱）を考える。散乱前の光子のエネルギーを観測者の系で ε と表し、電子の静止系で ε' と表すと、ドップラー効果の Eq.(7),(8) を用いれば、

$$\varepsilon' = \varepsilon \gamma (1 - \beta \cos \theta_i) \cong \varepsilon \gamma \left(1 - \cos \theta_i + \frac{\cos \theta_i}{2\gamma^2} \right) \quad (25)$$

を得る。ここで、相対論的な電子 $\gamma \gg 1$ につて

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cong 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

としている。従って、 $|1 - \cos \theta_i| \sim 1$ であれば

$$\varepsilon' \approx \varepsilon \gamma$$

となる。同様にして散乱後の光子のエネルギーを観測者の系で ε_f と表し、散乱前の電子の静止系で ε'_f と表せば

$$\varepsilon_f = \varepsilon'_f \gamma (1 + \beta \cos \theta'_f) \cong \varepsilon'_f \gamma \left[1 + \cos \theta'_f - \frac{\cos \theta'_f}{2\gamma^2} \right] \quad (26)$$

であるから、 $|1 + \cos \theta'_f| \sim 1$ であれば、

$$\varepsilon_f \approx \varepsilon'_f \gamma$$

を得る。

観測者の系で見たとき散乱前と散乱後の光子のエネルギーの比は、 $\varepsilon'_f \cong \varepsilon'$ であるとすれば

$$\varepsilon_f \approx \varepsilon'_f \gamma \approx \varepsilon' \gamma \approx \varepsilon \gamma^2 \quad (27)$$

で与えられる。

ある観測者の系で見たときに、散乱の仕方によって相対論的な電子 ($\gamma \gg 1$) との散乱により、低いエネルギーの光子 ε が極めて高いエネルギーの光子 $\varepsilon_f \approx \varepsilon \gamma^2$ に成り得ることが分かる。例えば、電子の静止エネルギーは約 500 eV なので電子の静止系で見たとき 100 eV 位の光子でも散乱断面積としてトムソンの値を使うことができ、電子との散乱の後には $100 \times \gamma$ eV という高エネルギー光子を作り出すことになる。上の議論を常に観測者の系から見て行うこともできる。

5.3 逆コンプトン散乱の式、式

観測者の系で見たとき衝突の前後での光子をそれぞれ

$$p_{\gamma i}^\alpha = \left(\frac{\varepsilon_i}{c}, \frac{\varepsilon_i}{c} \mathbf{n}_i \right), \quad p_{\gamma f}^\alpha = \left(\frac{\varepsilon_f}{c}, \frac{\varepsilon_f}{c} \mathbf{n}_f \right)$$

と書く。同様に電子について、

$$p_{e i}^\alpha = \left(\frac{E_i}{c}, \mathbf{p}_i \right), \quad p_{e f}^\alpha = \left(\frac{E_f}{c}, \mathbf{p}_f \right)$$

と書くことにする。衝突の前後で保存則 (17) が成り立つとき、Eq.(18) より、先と同じように計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\varepsilon_i E_i}{c^2} + \frac{\varepsilon_i}{c} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_i - \left(-\frac{\varepsilon_f E_i}{c^2} + \frac{\varepsilon_f}{c} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_f \right) - \left(-\frac{\varepsilon_i \varepsilon_f}{c^2} + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_f}{c^2} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_f \right) \\ 0 &= -\varepsilon_i E_i + \varepsilon_i c \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_i + \frac{\varepsilon_f}{c^2} (E_i - c \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_f) + \frac{\varepsilon_i \varepsilon_f}{c^2} (1 - \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_f) \\ &= -\varepsilon_i E_i + \varepsilon_i c \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_i + \frac{\varepsilon_f}{c^2} \{ E_i - c \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_f + \varepsilon_i (1 - \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_f) \} \\ \varepsilon_f &= \varepsilon_i \frac{E_i - c \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_i}{E_i - c \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_f + \varepsilon_i (1 - \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_f)} \quad (28) \end{aligned}$$

を得る。今

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_i = p_i \cos \theta_i, \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}_f = p_i \cos \theta_f, \quad \beta = \frac{v_i}{c}$$

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_f = \cos \Theta = \cos \theta_i \cos \theta_f + \sin \theta_i \sin \theta_f \cos(\phi_i - \phi_f)$$

などとすると、

$$\varepsilon_f = \varepsilon_i \frac{1 - \beta \cos \theta_i}{1 - \beta \cos \theta_f + \frac{\varepsilon_i}{E_i} (1 - \cos \Theta)} \quad \because E_i = mc^2 = \frac{p_i c^2}{v_i} \quad (29)$$

となる。このとき、相対論的な電子 ($\gamma \gg 1$) を考えて、

$$\theta_f \sim \gamma^{-1}, \quad |1 - \cos \Theta| \sim 1$$

であるような光子と電子との散乱について、Eq.(29) の分母は

$$\begin{aligned} 1 - \beta \cos \theta_f + \frac{\varepsilon_i}{E_i} (1 - \cos \Theta) &\leq 1 - \beta \cos \theta_f + \frac{\varepsilon_i}{E_i} |1 - \cos \Theta| \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \left(1 - \frac{\theta_f^2}{2} + o(\theta_f^2)\right) + \frac{\varepsilon_i}{E_i} \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\varepsilon_i}{E_i} + o(\gamma^{-2}) \\ &\cong \gamma^{-2} + \frac{\varepsilon_i}{E_i} \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\frac{\varepsilon_i}{E_i} \ll \left(\frac{mc^2}{E_i}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{及び、} \quad |1 - \beta \cos \theta_i| \sim 1 \quad (30)$$

を満たすような電子と光子との散乱については、

$$\varepsilon_f = \frac{1 - \beta \cos \theta_i}{1 - \beta \cos \theta_f + \frac{\varepsilon_i}{E_i} (1 - \cos \Theta)} \leq \varepsilon_i \frac{|1 - \beta \cos \theta_i|}{\gamma^{-2} + \frac{\varepsilon_i}{E_i}} \approx \varepsilon_i \frac{1}{\gamma^{-2}} = \gamma^2 \varepsilon_i \quad (31)$$

となる。Eq.(30) の最初の条件は $\gamma \varepsilon_i \ll mc^2$ と書き換えられるが、これは電子の静止系で見た光子のエネルギー $\gamma \varepsilon_i$ が電子の静止エネルギーに比べてとても小さいという条件になる。

6 コンプトン散乱による光子エネルギーの増幅

6.1 Klein-Nishina の公式

光子と電子との散乱の効率を考える。例えば、 x 軸に平行な散乱中心に向かう粒子の流束（単位時間当たり単位面積を通過する粒子数）を j_{incident} 、散乱された粒子が (θ', ϕ') 方向の微小立体角 $d\Omega'$ を通る粒子の流束を $j_{\text{scattered}}(\theta', \phi')$ とすれば、微分散乱断面積 $d\sigma$ は

$$d\sigma(\Omega') = \frac{j_{\text{scattered}} r^2 d\Omega'}{j_{\text{incident}}} \quad (32)$$

で定義される。分子は距離 r にある微小面積 $r^2 d\Omega'$ を単位時間に通過する粒子数 $j_{\text{scattered}} r^2 d\Omega'$ であり、それを入射粒子流束で割ったものが微分散乱断面積 $d\sigma$ となる。全散乱断面積はこれを立体角で積分して

$$\sigma = \int d\sigma(\Omega') = \int \frac{j_{\text{scattered}} r^2 d\Omega'}{j_{\text{incident}}} \quad (33)$$

与えられる。これは又、散乱される粒子数について

$$\int j_{\text{scattered}} r^2 d\Omega' = \sigma j_{\text{incident}} \quad (34)$$

と書くことができ、左辺の単位時間当たり散乱された粒子数が右辺の j_{incident} と σ との積で与えられることを示している。

電子と光子との全散乱断面積は、光子のエネルギーについて非相対論的極限 ($h\nu \ll mc^2$) ではトムソン散乱の断面積として与えられ、

$$\sigma = \sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_0^2, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \quad (35)$$

となる。ここで r_0 は古典電子半径である。光子と電子との散乱を量子力学的に取り扱えば **Klein-Nishina** の公式が導かれ、無偏光の輻射について全散乱断面積が

$$\sigma = \sigma_T \frac{3}{4} \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{\ln(1+2x)}{2x} - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad (36)$$

で与えられることが知られている。ここで $x = h\nu/mc^2$ である。光子と電子との散乱は光子と電子の電荷との相互作用として表れる。電子の代わりに陽子を使えば（符号を別にして）電荷は同じであるが質量が約 2000 倍になるため、散乱断面積が電子のそれと比べて $1/(2000)^2$ 程度になる。一般に電子と光子との散乱に比べて、陽子と電子との散乱は無視できる程小さいと考えてよい。

6.2 非相対論的極限に於ける散乱断面積の近似値

非相対論の場合 $x \ll 1$ であるから、Eq.(36) を $x = 0$ の回りでテーラー展開すると、

$$\sigma = \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26}{5}x^2 - \frac{133}{10}x^3 + \frac{1144}{35}x^4 + o(x^4) \right), \quad x \ll 1 \quad (37)$$

となる。

6.3 相対論的極限に於ける散乱断面積の近似値

相対論的な場合 $x \gg 1$ であるから、Eq.(36) を $x = \infty$ でテーラー展開すると、

$$\sigma = \frac{3}{8}\sigma_T \left[\frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} + \ln 2x \right) + \frac{1}{x^2} \left(\frac{9}{2} - 2 \ln 2x \right) - \frac{1}{x^3} \left(\frac{5}{4} + 2 \ln 2x \right) - \frac{7}{12} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right], \quad x \gg 1 \quad (38)$$

となる。光子のエネルギーが高くなる相対論的極限では、断面積が小さくなり、相互作用しにくくなることが分かる。

6.4 入射光子流束

さて、様々なエネルギー ε の光子が様々な方向から入射して電子に散乱される場合、エネルギーが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間で、立体角 $d\Omega$ 中を通過する入射光子流束 dj_{incident} を

$$dj_{\text{incident}} = c \tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon d\Omega, \quad \sigma = \sigma_T \quad (39)$$

と書くことができる。ここで、 $\tilde{f}_\varepsilon = \tilde{f}(\mathbf{x}, \varepsilon, \Omega)$ は光子気体について

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \frac{d^3\mathbf{p}}{\varepsilon} = \tilde{f}(\mathbf{x}, \varepsilon, \Omega) \frac{d\varepsilon d\Omega}{\varepsilon}$$

とおいて定義された単位体積単位立体角単位エネルギー当たりの粒子数である。左辺はローレンツ不変量である。ここで用いられている $d\Omega$ は入射光子についての量であり、Eq.(34) で現れる $d\Omega$ は散乱光子についての量であるからこれらは同じものではない。散乱される全光子数は、エネルギーと立体角で積分して、

$$\int \sigma_T dj_{\text{incident}} = c\sigma_T \int \tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon d\Omega \quad (40)$$

で与えられる。

6.5 単位時間に散乱される光子気体の全エネルギー、式

エネルギー ε の入射光子が電子に散乱されてエネルギー ε_1 になるとすれば、単位時間あたりに散乱される光子気体の全エネルギーは

$$P = c\sigma_T \int \varepsilon_1 \tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon d\Omega \quad (41)$$

で与えられる。この量は Power(出力 = 単位時間に発するエネルギー) P の次元を持っている。

P は単位時間単位立体角あたり散乱される光子のエネルギー dE/dt を用いると

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{dE}{dt} d\Omega \quad (42)$$

と書くこともできる。

6.6 単位時間に散乱される光子気体の全エネルギー、式

電子の静止系 O' から見たとき、単位時間単位立体角あたりにコンプトン散乱される光子の全エネルギーを

$$\frac{dE'_1}{dt'} = c\sigma_T \int \varepsilon'_1 \tilde{f}'_\varepsilon d\varepsilon' \quad (43)$$

と書く。 $\varepsilon' \ll mc^2, \varepsilon'_1 = \varepsilon'$ のとき

$$\frac{dE'_1}{dt'} = \frac{dE_1}{dt}$$

が成り立つと考えられるので、散乱断面積としてトムソンの値が使えるとすると、観測者の系 O では Eq.(43) より

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{dE'_1}{dt'} = c\sigma_T \int \varepsilon'^2_1 \frac{\tilde{f}'_\varepsilon d\varepsilon'}{\varepsilon'_1} = c\sigma_T \int \varepsilon'^2 \frac{\tilde{f}'_\varepsilon d\varepsilon'}{\varepsilon'}$$

と書くことができる。 $\tilde{f}'_\varepsilon d\varepsilon'/\varepsilon'$ はローレンツ不変量であるから、

$$\frac{\tilde{f}'_\varepsilon d\varepsilon'}{\varepsilon'} = \frac{\tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon}{\varepsilon}$$

となり、よって

$$\frac{dE_1}{dt} = c\sigma_T \int \varepsilon'^2 \frac{\tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon}{\varepsilon}$$

と書ける。ドップラー効果の Eq.(25) を用いると

$$\frac{dE_1}{dt} = c\sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta \cos \theta)^2 \varepsilon \tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon$$

となるので、観測者の系 O では単位時間あたりにコンプトン散乱された光子の全エネルギーは、

$$P_{\text{compt}} = \int \frac{dE_1}{dt} d\Omega = c\sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta \cos \theta)^2 \varepsilon \tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon d\Omega \quad (44)$$

であることが分かる。

6.7 コンプトン散乱による正味の光子エネルギー増加率

入射光の分布 $\tilde{f}_\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega)$ が等方で、入射方向に依存しないとして

$$\tilde{f}_\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega) = \tilde{f}_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad (45)$$

とするとき、Eq.(43) の立体角に対する積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int (1 - \beta \cos \theta) d\Omega &= 2\pi \int_0^\pi (1 - \beta \cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^\pi (\sin \theta - 2\beta \sin \theta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \left\{ \sin \theta - \beta \sin 2\theta - \frac{\beta^2}{3} (\cos^3 \theta)' \right\} d\theta = 2\pi \left[-\cos \theta + \frac{\beta}{2} \cos 2\theta - \frac{\beta^2}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \\ &= 4\pi \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} P_{\text{compt}} &= c\sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta \cos \theta)^2 \varepsilon \tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon d\Omega = c\sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) \left(4\pi \int \varepsilon \tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon \right) \\ &= c\sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) U_{\text{ph}}, \quad U_{\text{ph}} = 4\pi \int \varepsilon \tilde{f}_\varepsilon d\varepsilon \end{aligned} \quad (46)$$

となる。ここで U_{ph} は入射光子気体のエネルギー密度である。入射光子気体のうち、単位時間当たり

$$c\sigma_T U_{\text{ph}} \quad (47)$$

が散乱されるので、観測者の系から見たとき、コンプトン散乱による正味のエネルギーの増加率は Eq.(46) と Eq.(47) の差を取って

$$\begin{aligned} \left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{compt}} &= c\sigma_T \gamma^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) U_{\text{ph}} - c\sigma_T U_{\text{ph}} = c\sigma_T \gamma^2 U_{\text{ph}} \left(1 + \frac{\beta^2}{3} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \\ &= \frac{4}{3} c\sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{\text{ph}} \end{aligned} \quad (48)$$

となる。この量は常に正であるから、

$$R \equiv \frac{1}{c\sigma_T U_{\text{ph}}} \left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{compt}} = \frac{4}{3} \gamma^2 \beta^2 \quad (49)$$

であるが、非相対論的な電子の極限では $\gamma \sim 1, \beta \ll 1$ であるから、 $R \propto \beta^2 \ll 1$ と小さくなり、逆に相対論的な極限では $\gamma \gg 1, \beta \sim 1$ であるから $R \propto \gamma^2 \gg 1$ と大きくなる。

7 コンプトン散乱による輻射スペクトルの変形

ここでは Rybicki & Lightman(1979) に従って、一回のコンプトン散乱によって輻射スペクトルがどのような変形を受けるかを計算する。ここで行われるのは、観測者の系に於ける放射係数 j_ν を、吸収された $\sigma_\nu J_\nu$ 分だけ放射されたと考えて

$$j_\nu = \alpha_\nu J_\nu, \quad J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$$

なる式で計算することがあるが、それをするのに電子の静止系と観測者の静止系との間のローレンツ変換を用いる。ここで、 α_ν は散乱吸収係数であり、散乱体の粒子密度を N とすれば、散乱断面積とは $\alpha_\nu = N\sigma_\nu$ なる

関係がある。以下では光子は散乱を受けるだけで生成消滅はせず、その数に変化はないものとし、輻射場を表すのに輻射強度 $I_V = I(\varepsilon)$ を $\varepsilon = h\nu$ で割った $f(\varepsilon) = I_V/h\nu$ を用いることにする。単位体積単位振動数単位立体角当たりの光子数 n_ν を用いて、 $f(\varepsilon) = cn_\nu$ と書けるので、これは単位振動数単位立体角当たりの光子数流束であると考えることができる。ここでは観測者の系を K 系とし、電子の静止系を K' 系とする。

観測者の系で一様で単一エネルギーの輻射場を考え、流束を

$$f(\varepsilon) = F_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (50)$$

で与える。今、 x 軸に沿ってエネルギー γmc^2 で運動している電子を考え、この電子と一様な輻射場との間の散乱を考える。電子の静止系 K' で見る入射光子の流束を $f'(\varepsilon', \mu')$ と書けば、 $f(\varepsilon)/\varepsilon^2$ がローレンツ不変量となるので、

$$\frac{f'(\varepsilon', \mu')}{\varepsilon'^2} = \frac{f(\varepsilon, \mu)}{\varepsilon^2}$$

であるから、

$$f'(\varepsilon', \mu') = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} F_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon_0^2} F_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (51)$$

が得られる。ここで $\mu' = \cos \theta'$ で K' の x' 軸（電子の運動方向）と光子の運動方向とが成す角度である。

ドップラー効果の Eq.(26) を用いると Eq.(51) は

$$\begin{aligned} f'(\varepsilon', \mu') &= \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon_0^2} F_0 \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon_0^2} F_0 \delta(\gamma \varepsilon' (1 + \beta \mu') - \varepsilon_0) = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon_0^2} F_0 \delta\left(\gamma \beta \varepsilon' \left\{ \mu' - \frac{\varepsilon_0 - \gamma \varepsilon'}{\gamma \beta \varepsilon'} \right\}\right) \\ &= \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon_0^2} \frac{F_0}{\gamma \beta \varepsilon'} \delta\left(\mu' - \frac{\varepsilon_0 - \gamma \varepsilon'}{\gamma \beta \varepsilon'}\right) \end{aligned} \quad (52)$$

と書ける。

もし、Thomson 散乱の微分断面積 $d\sigma'/d\Omega'$ を使い、しかもその角度依存性を無視すれば、放射係数 j'_ν を ε'_1 で割ったもの $g'(\varepsilon'_1)$ が

$$g'(\varepsilon'_1) = N' \sigma_T \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f'(\varepsilon'_1, \mu') d\mu' = \frac{N' \sigma_T \varepsilon'_1 F_0}{2 \varepsilon_0^2 \gamma \beta} \quad (53)$$

で与えられることになる。ここで、電子の静止系で散乱光子のエネルギー ε'_1 と入射光子のエネルギー ε' が等しいとする弾性散乱の仮定を行った。 N' は静止系での電子の数密度である。

ドップラー効果の Eq.(26) より、 ε'_1 が取り得る範囲は

$$\frac{\varepsilon_0}{\gamma(1+\beta)} < \varepsilon'_1 < \frac{\varepsilon_0}{\gamma(1-\beta)}$$

であり、このときだけ Eq.(53) の値を持ち、それ以外の範囲では零であるから、 $g'(\varepsilon'_1)$ は

$$g'(\varepsilon') = \begin{cases} \frac{N' \sigma_T \varepsilon'_1 F_0}{2 \varepsilon_0^2 \gamma \beta}, & \text{if } \frac{\varepsilon_0}{\gamma(1+\beta)} < \varepsilon'_1 < \frac{\varepsilon_0}{\gamma(1-\beta)} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (54)$$

となる。

放射係数を $h\nu$ で割った g_ν については g_ν/ν がローレンツ不変量となる。観測者の系で見た g_ν は、

$$g(\varepsilon_1, \mu_1) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1} g'(\varepsilon'_1) = \frac{N' \sigma_T \varepsilon_1 F_0}{2 \varepsilon_0^2 \gamma \beta} = \frac{N \sigma_T \varepsilon_1 F_0}{2 \varepsilon_0^2 \gamma^2 \beta}, \quad N = \gamma N' : \text{観測者の系で見た数密度} \quad (55)$$

と書け、この式が成り立つ ε_1 の範囲は、

$$\varepsilon'_1 = \gamma \varepsilon_1 (1 - \beta \mu_1)$$

作用させて

$$\frac{\varepsilon_0}{\gamma^2(1+\beta)(1-\beta\mu_1)} < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{\gamma^2(1-\beta)(1-\beta\mu_1)} \quad (56)$$

となる。この範囲以外では値を持たないので、結局 $g(\varepsilon_1, \mu_1)$ は

$$g(\varepsilon_1, \mu_1) = \begin{cases} \frac{N\sigma_T\varepsilon_1F_0}{2\varepsilon_0^2\gamma^2\beta}, & \text{if } \frac{\varepsilon_0}{\gamma^2(1+\beta)(1-\beta\mu_1)} < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{\gamma^2(1-\beta)(1-\beta\mu_1)} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (57)$$

と書ける。Eq.(56) は

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{\gamma^2(1-\beta)(1-\beta\mu_1)} = \frac{\varepsilon_0(1+\beta)}{1-\beta\mu_1} &\implies \mu_1 > \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1+\beta) \right\} \\ \varepsilon_1 > \frac{\varepsilon_0}{\gamma^2(1+\beta)(1-\beta\mu_1)} = \frac{\varepsilon_0(1-\beta)}{1-\beta\mu_1} &\implies \mu_1 < \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1-\beta) \right\} \end{aligned}$$

であるから、 ε_1 を μ_1 で書き換えると

$$\frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1+\beta) \right\} < \mu_1 < \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1-\beta) \right\} \quad (58)$$

となる。

$-1 < \mu_1 < 1$ であるから、Eq.(58) よりこの範囲外の、

$$\frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1-\beta) \right\} < -1 \quad \text{or} \quad 1 < \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1+\beta) \right\}$$

従って、これを $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ で整理して、

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} < \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad \text{or} \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} > \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

のとき、 $g(\varepsilon_1, \mu_1)$ は零である。よって $g(\varepsilon_1, \mu_1)$ が値を持つ範囲は次のようになる。

$$-1 < \mu_1 < \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1-\beta) \right\}, \quad \text{for } \frac{1-\beta}{1+\beta} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} < 1. \quad (59)$$

$$\frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1+\beta) \right\} < \mu_1 < 1, \quad \text{for } 1 < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} < \frac{1+\beta}{1-\beta}. \quad (60)$$

これを元に Eq.(55) から、電子の全入射方向についての値を得るために、電子と散乱光子とが成す角度で平均の値を計算すると、

$$g(\varepsilon_1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu_1 g(\varepsilon_1, \mu_1)$$

より、 μ_1 の範囲が Eq.(59) のとき、

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_1) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{\frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1-\beta) \right\}} \frac{N\sigma_T\varepsilon_1F_0}{2\varepsilon_0^2\gamma^2\beta} d\mu_1 = \frac{N\sigma_T\varepsilon_1F_0}{4\varepsilon_0^2\gamma^2\beta} \left[\frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1-\beta) \right\} + 1 \right] \\ &= \frac{N\sigma_TF_0}{4\varepsilon_0\gamma^2\beta^2} \left[(1+\beta) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - (1-\beta) \right], \quad \text{for } \frac{1-\beta}{1+\beta} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} < 1 \end{aligned} \quad (61)$$

となり、同様に範囲が Eq.(60) のとき

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_1) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1+\beta) \right\}}^1 \frac{N\sigma_T\varepsilon_1F_0}{2\varepsilon_0^2\gamma^2\beta} d\mu_1 = \frac{N\sigma_T\varepsilon_1F_0}{4\varepsilon_0^2\gamma^2\beta} \left[1 - \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} (1+\beta) \right\} \right] \\ &= \frac{N\sigma_TF_0}{4\varepsilon_0\gamma^2\beta^2} \left[(1+\beta) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (1-\beta) \right], \quad \text{for } 1 < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} < \frac{1+\beta}{1-\beta} \end{aligned} \quad (62)$$

となる。

今 $\gamma \gg 1$ の極限で Eq.(62) は近似を用いて表すと

$$g(\varepsilon_1) = \frac{N\sigma_T F_0}{4\varepsilon_0 \gamma^2 \beta^2} \left[(1+\beta) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (1-\beta) \right] = \frac{N\sigma_T F_0}{4\varepsilon_0 \gamma^2} \left(\frac{1+\beta}{\beta^2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \frac{1-\beta}{\beta^2} \right) \cong \frac{N\sigma_T F_0}{4\varepsilon_0 \gamma^2} \left(2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \frac{1}{2\gamma^2} \right)$$

$$= \frac{3N\sigma_T F_0}{4\varepsilon_0 \gamma^2} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{4\gamma^2 \varepsilon_0} \right) = \frac{3N\sigma_T F_0}{4\varepsilon_0 \gamma^2} \frac{2}{3} (1-x), \quad x = \frac{\varepsilon_1}{4\gamma^2 \varepsilon_0}$$
(63)

$$\cong \frac{3N\sigma_T F_0}{4\varepsilon_0 \gamma^2} h(x)$$
(64)

となることが分かる。但し $0 < x < 1$ である。より詳しい計算によれば、 $\gamma \gg 1$ の極限で

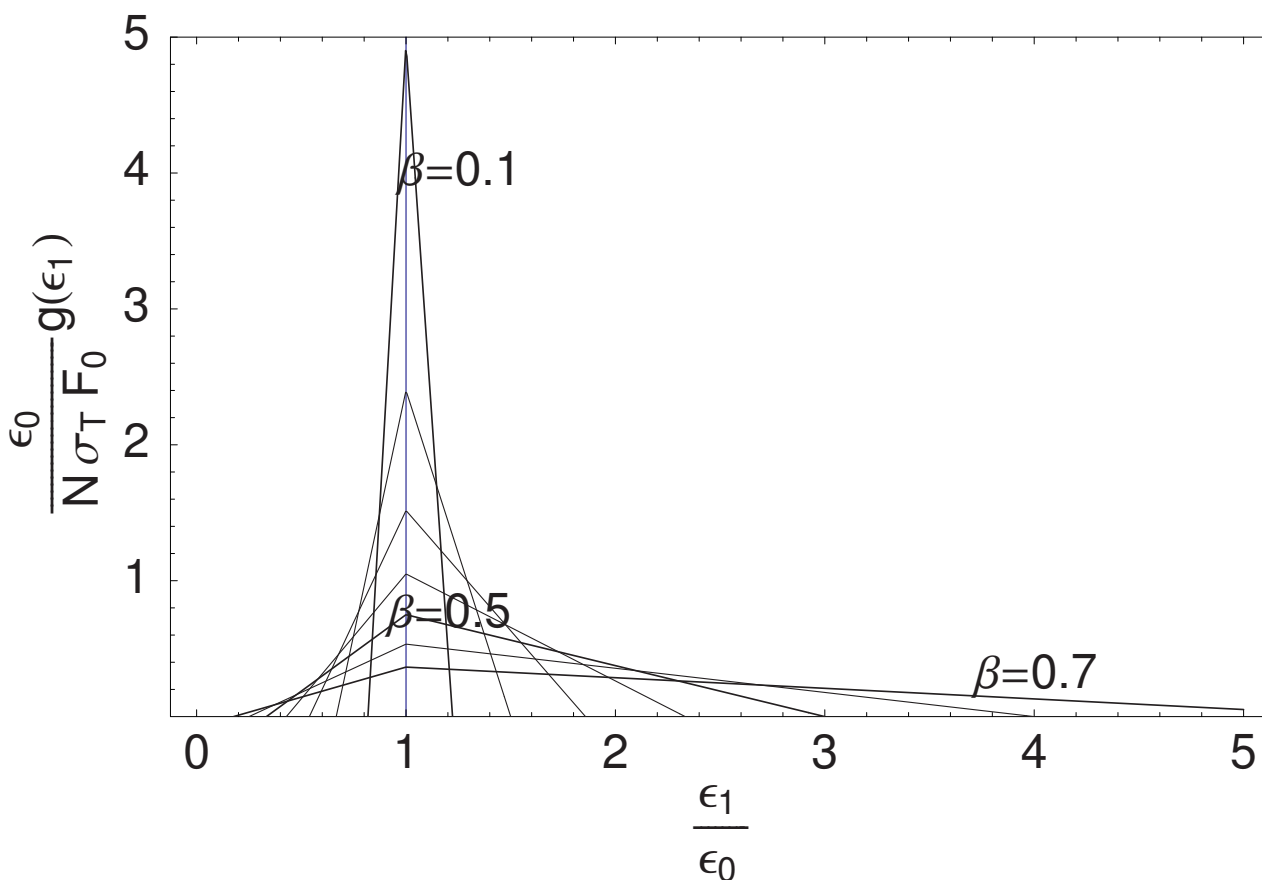
$$h(x) = 2x \ln x + x + 1 - 2x^2, \quad \text{但し、} \quad 0 < x < 1$$
(65)

であることが知られている。

Eq.(61) と Eq.(62) に於ける $g(\varepsilon_1)$ を用いて

$$\frac{\varepsilon_0}{N\sigma_T F_0} g(\varepsilon_1) = \begin{cases} \frac{1}{4\gamma^2 \beta^2} \left[(1+\beta) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - (1-\beta) \right], & \text{if } \frac{1-\beta}{1+\beta} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} < 1 \\ \frac{1}{4\gamma^2 \beta^2} \left[(1+\beta) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (1-\beta) \right], & \text{if } 1 < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} < \frac{1+\beta}{1-\beta} \end{cases}$$

をグラフにすると次のようになる。



β が壹に近づくとつれ $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ となる粒子が増えることが分かる（散乱を受けることで、入射光子エネルギーの何倍にもなる光子の割合が増える）。