デルタ関数 (Delta function)

1 デルタ関数の定義、性質

デルタ関数の定義

$$x \neq 0 \text{ に対して、} \delta(x) = 0, \qquad \text{かつ} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)dx = 1 \tag{1}$$

及び、その性質

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad \text{但し、} f(x) \text{ は任意の連続関数} \tag{2}$$

であり、非常に特殊な関数であることが分かる。**デルタ関数の値は $x = 0$ の一点以外では至る所で零であり、デルタ関数を全領域で積分すれば壱になるように、$x = 0$ では非常に大きくなる。**このほかに基本的な性質として以下のようなものがある。

$$\delta(x) = \delta(-x), \quad \text{：偶関数} \tag{3}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\}, \quad a > 0 \tag{4}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad a \neq 0 \tag{5}$$

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x), \quad \Theta(x)\text{：Step Function（階段関数）} \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \quad \text{：Eq.(1) の拡張} \tag{7}$$

定義 Eq.(1) を実現する関数は存在しない。この様な、「ある範囲の関数 $f(x)$ を試験的に掛けて積分し、極限をとった結果」を表す記号を**超関数 (distribution)** と呼ぶ。**超関数はそれに対する演算が定義されたとき意味を持つ**。

2 デルタ関数の関数列による表現

デルタ関数は形式的に解析関数の関数列 $\{\varphi_n\}$ の極限として

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \tag{8}$$

と言う形で表現することができる。関数列は次のような性質を備えていなければならない。

1. $x = 0$ **での値は** $n \to \infty$ **と共に単調に増加する一方、**$x \neq 0$ **では単調に連続的に零となる。**

2. **全領域で積分すると、あらゆる n に対して**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)dx = 1 \tag{9}$$

となっていなければならない。

実際には関数列 $\{\varphi_n\}$ は数多く存在するが、今回は以下の二つについて考えることにする。

2.1 周期関数を含む場合

デルタ関数としてよく用いられる（周期関数を含む)、

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}, \quad n \in \mathbf{N} \tag{10}$$

について考える。極限 $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ から、$x = 0$ での値は

$$\varphi_n(0) = \frac{n}{\pi} \tag{11}$$

で、$n \to \infty$ と共に単調に増加し、無限大になる。また $x \neq 0$ では周期 $2\pi/n$ で振動していて、その振幅は $|x| \to \infty$ と共に減衰していくことが分かる。$n \to \infty$ では非常に激しく振動することになり、ついに周期 $2\pi/n$ が零になる。更に全領域で積分すると (付録 A「複素積分」の Eq.(22) を参照)、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\pi x}dx = 1 \tag{12}$$

となる。$n \to \infty$ では、$x \neq 0$ の部分の関数は激しく正負に振動しており、この積分にはほとんど寄与してこなくなる。一方で $x = 0$ の部分の寄与は次第に大きくなるので、Eq.(12) の性質は保たれることになる。

以上から Eq.(10) の関数は $n \to \infty$ の極限でデルタ関数の全ての性質を再現するので、

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x}, \quad n \in \mathbf{N} \tag{13}$$

とすることができる。

2.2 周期関数を含まない場合

デルタ関数として周期関数を含まない、

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \exp\left(-nx^2\right), \quad n \in \mathbf{N} \tag{14}$$

について考える。$x = 0$ での値は

$$\varphi_n(0) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \tag{15}$$

で、$n \to \infty$ と共に単調に増加し、無限大になる。また $x \neq 0$ ではその値は指数関数的に急激に小さくなることから、この関数の値はほとんど $x = 0$ 付近にあることが分かる。更に全領域で積分すると (付録 B「ガウス積分公式」の Eq.(23) を参照)、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)dx = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-nx^2\right)dx = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{n}} = 1 \tag{16}$$

となる。

以上から Eq.(14) の関数は $n \to \infty$ の極限でデルタ関数の全ての性質を再現するので、

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \exp\left(-nx^2\right), \quad n \in \mathbf{N} \tag{17}$$

とすることができる。

3 デルタ関数の可視化

先に証明したデルタ関数 Eq.(13),Eq.(17) の関数列 $\{\varphi_n\}$ がデルタ関数に収束する様子をグラフにしてみる。

3.1 Eq.(13) で表される関数列

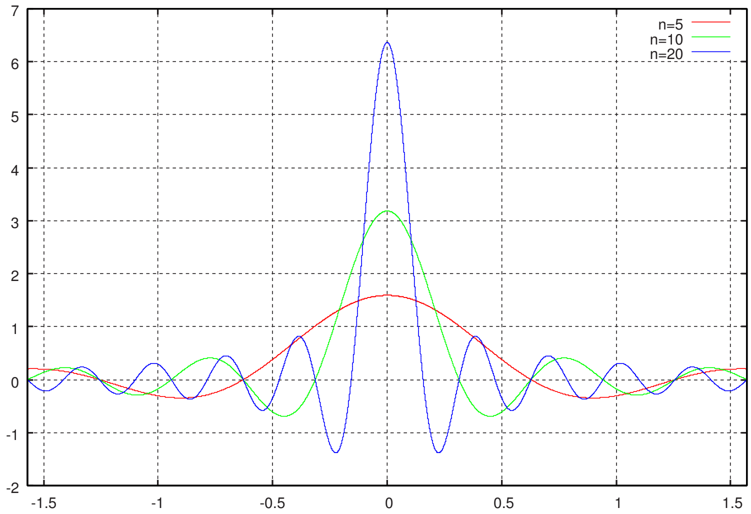

図 1 $\boxed{-\pi/2 < x < \pi/2}$ $n = 15, 10, 20$

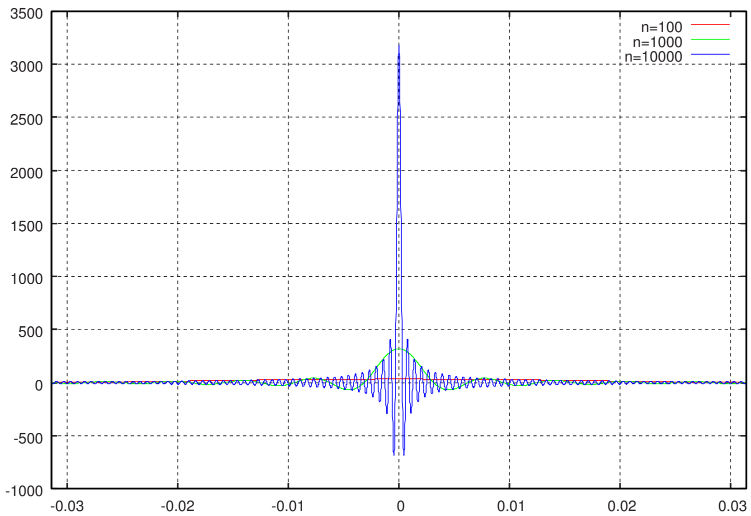

図 2 $\boxed{-\pi/100 < x < \pi/100}$ $n = 100, 1000, 10000$

n の値が大きくなるにつれ、振動の波長が短くなり、振動が激しくなる。また $x=0$ での値が大きくなっていくのが分かる。更に n の値を大きくしていくと、$x=0$ での値が支配的になる。

次に Eq.(13) を微分したものをグラフにする。

$$
\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= \frac{nx\cos nx - \sin nx}{\pi x^2} \\
\varphi_n''(x) &= \frac{-2nx\cos nx + (2-n^2x^2)\sin nx}{\pi x^3} \\
\varphi_n'''(x) &= \frac{nx(6-n^2x^2)\cos nx + 3(n^2x^2-2)\sin nx}{\pi x^4} \\
\varphi_n''''(x) &= \frac{4nx(n^2x^2-6)\cos nx + (24-12n^2x^2+n^4x^4)\sin nx}{\pi x^5} \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

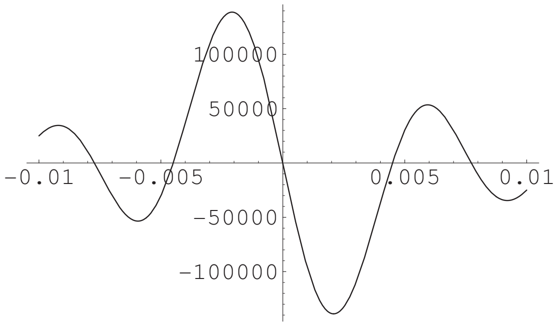

図 3　一階微分 ($n=10000$)

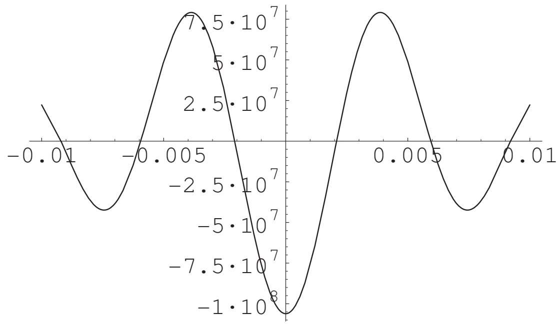

図 4　二階微分 ($n=10000$)

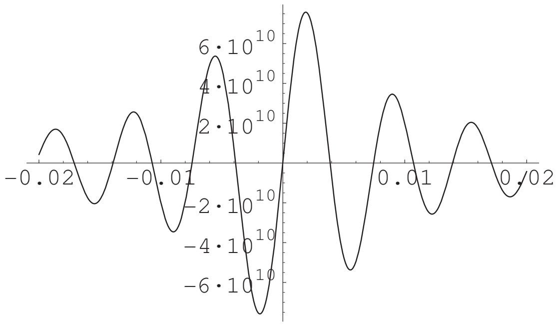

図 5　三階微分 ($n=10000$)

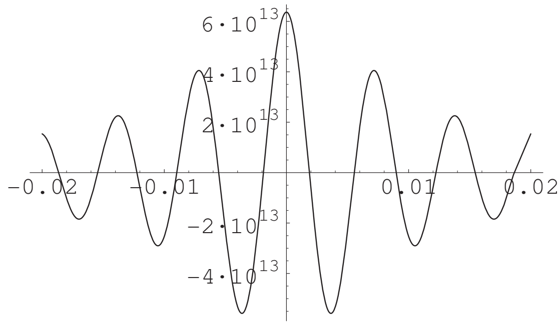

図 6　四階微分 ($n=10000$)

微分をする毎にピークとなる箇所が一つずつ増えていくのが分かる（ピークとなる箇所は微分の回数プラス壱個)。しかしピークの数が大きくなるにつれ（微分の階数が大きくなるにつれ)、まわりの余分な振幅が邪魔をして、そのピークが見えづらくなってくる。

3.2　Eq.(17) で表される関数列

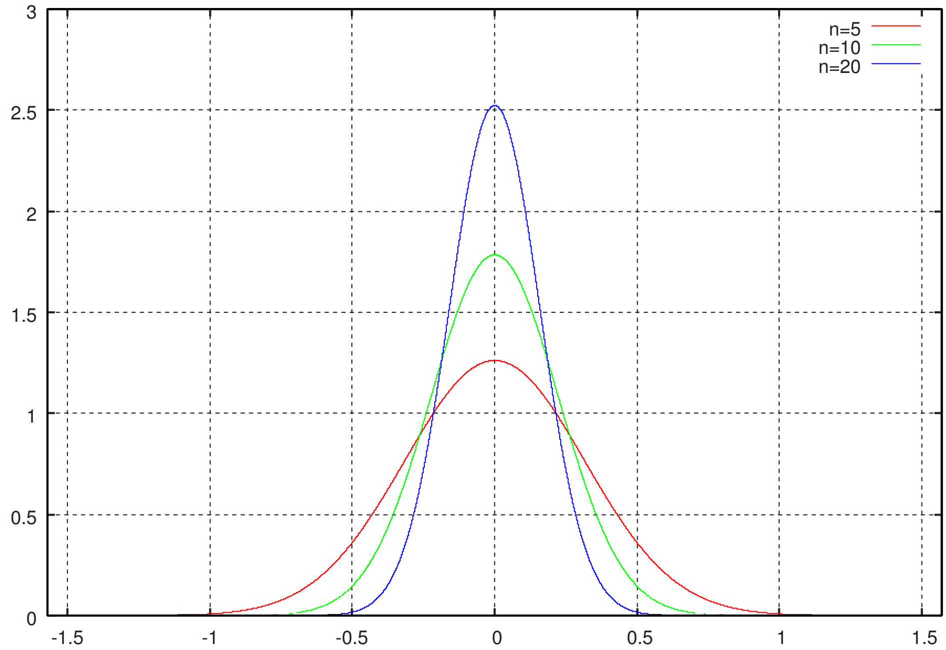

図 7　$n = 15, 10, 20$

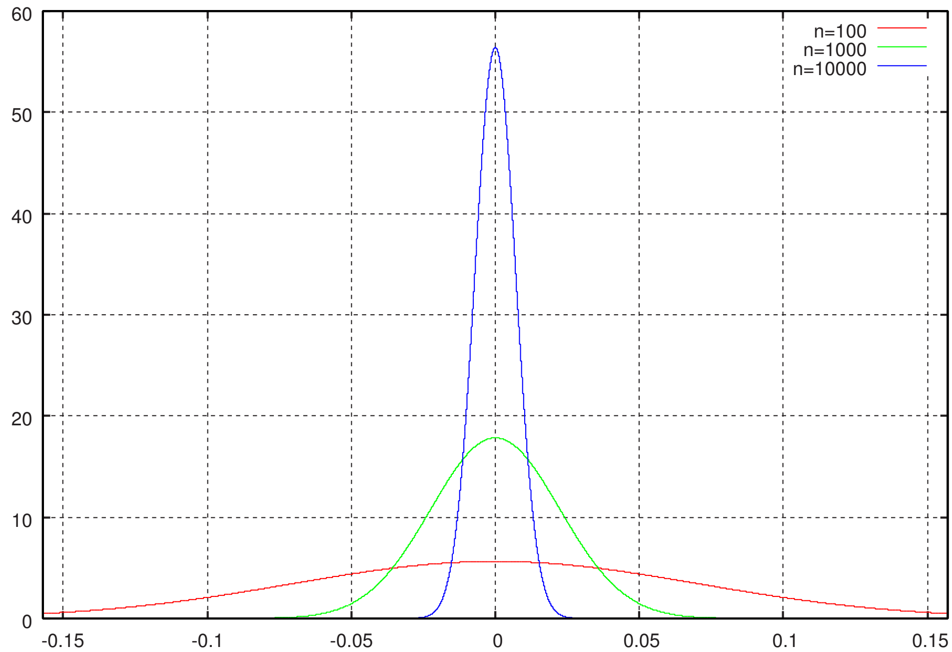

図 8　$n = 100, 1000, 10000$

Eq.(13) のときと同様に、n の値が大きくなるにつれ $x \neq 0$ での値は無視できる程に小さくなり、$x = 0$ での値が支配的になるようが分かる。Eq.(13) のときとは違い振動がないが、収束の速度が遅いのが分かる (Eq.(11) と Eq.(15) の違いによる)。

次に **Eq.(17)** を微分したものをグラフにする。

$$
\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= (-2nx)\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,\exp\left(-nx^2\right)\\
\varphi_n''(x) &= \frac{2\,n^{\frac{3}{2}}\,\left(-1+2\,n\,x^2\right)}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-nx^2\right)\\
\varphi_n'''(x) &= \frac{-4\,n^{\frac{5}{2}}\,x\,\left(-3+2\,n\,x^2\right)}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-nx^2\right)\\
\varphi_n''''(x) &= \frac{4\,n^{\frac{5}{2}}\,\left(3+4\,n\,x^2\,\left(-3+n\,x^2\right)\right)}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-nx^2\right)\\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

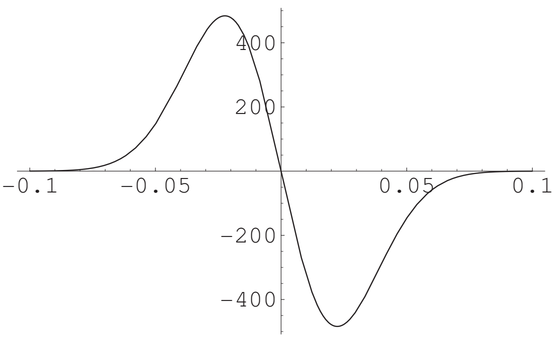

図 9　一階微分 ($n = 1000$)

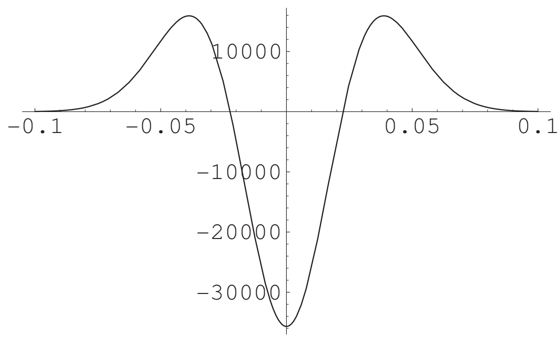

図 10　二階微分 ($n = 1000$)

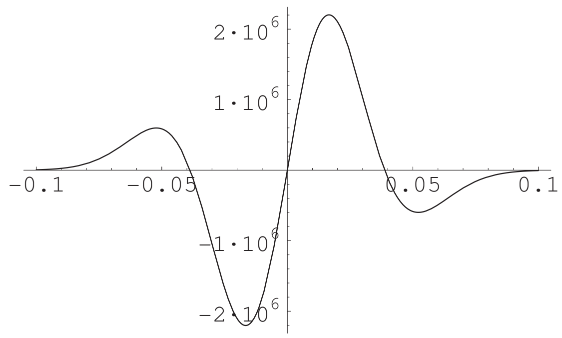

図 11　三階微分 ($n = 1000$)

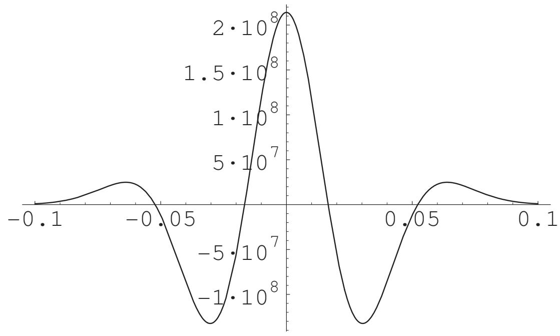

図 12　四階微分 ($n = 1000$)

微分についても **Eq.(13)** のとき同様であるが、振動がないぶんピークがはっきり分かる。しかしその減衰は指数関数的であるから、内側のピークに比べると外側のピークの値は小さくなっている。

付録 A　複素積分

積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

を求める。

右図の様な二つの半円と線分からなるジョルダン曲線を考える。今 $f(z) = e^{iz}/z$ とおくと、

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + o(z^2)}{z}$$

よりこの曲線の内部で $f(z)$ は正則である。よってコーシー・グルサの定理より

$$\left(\int_{+r}^{+R} + \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{C_r}\right) f(z)\,dz = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\int_{+r}^{+R} \int_{-R}^{-r}\right) \frac{e^{iz}}{z} dz = -\left(\int_{C_R} + \int_{C_r}\right) \frac{e^{iz}}{z} dz \qquad (18)$$

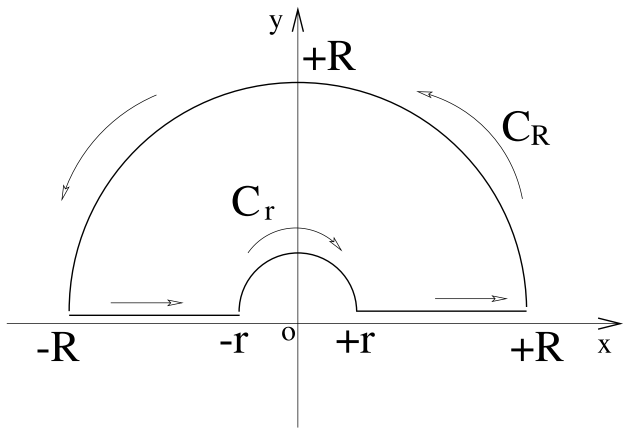

図 13　積分経路

が成り立つ。ここで

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{+R}^{+r} \frac{e^{i(-w)}}{-w} d(-w) = -\int_{+r}^{+R} \frac{e^{-iw}}{w} dw = -\int_{+r}^{+R} \frac{e^{-iz}}{z} dz$$

であるから、Eq.(18) の左辺は

$$(\text{左辺}) = \int_{+r}^{+R} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} dz = 2i \int_{+r}^{+R} \frac{\sin z}{z} dz \qquad (19)$$

となる。

また経路 C_R について

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta\right| \le \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-R(2/\pi)\theta} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right) < \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R\to+\infty} 0 \qquad (20)$$

となり、経路 C_r に於いては

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{ir(\cos\theta + i\sin\theta)}}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = i\int_{\pi}^{0} e^{ir(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta$$

$$\xrightarrow{r\to 0} -i\int_0^{\pi} e^0 d\theta = -\pi i \qquad (21)$$

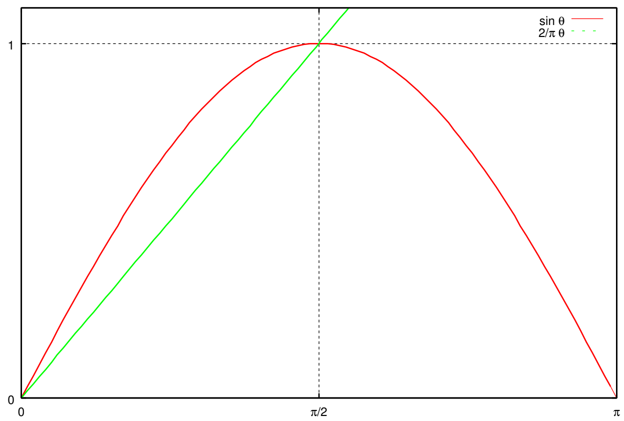

図 14　$\sin\theta \ge 2\theta/\pi \quad (0 \le \theta \le \pi/2)$

であることが分かる。以上より、

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

であり、$\sin x/x$ は偶関数であるから、求めるべき積分は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \tag{22}$$

である。

付録 B　ガウスの積分公式

$$\int_0^{\infty} x^{2n} \exp\left(-\lambda x^2\right) dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^{2n+1}}}, \quad n \in \mathbf{N} \tag{23}$$