

# フーリエ級数

## 1 フーリエ変換、フーリエ級数

### 1.1 フーリエ変換

フーリエ変換及び逆フーリエ変換は以下の式で与えられる。

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \iff f(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

このフーリエ変換は周波数と時間との間に成り立つ変換であるが、波数と座標との間に成り立つ次のような関係もフーリエ変換である。

$$G(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ikx} dx \iff g(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k)e^{ikx} dk \quad (2)$$

$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$	$t$ 時間	$T$ 周期	$\omega = 2\pi/T$ (角) 周波数
$g(x) \longleftrightarrow G(k)$	$x$ 座標	$\lambda$ 波長	$k = 2\pi/\lambda$ 波数

### 1.2 フーリエ級数

フーリエ(逆)変換を離散的に書くと以下のようになる。

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad c_n \sim \frac{1}{T} \int_T f(t)e^{-in\omega t} dt \quad (3)$$

$$g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inkx}, \quad d_n \sim \frac{1}{\lambda} \int_\lambda g(x)e^{-inkx} dx \quad (4)$$

フーリエ変換の離散的な表現は確かにフーリエ級数であるが、 $n \rightarrow \infty$ の極限でフーリエ級数は必ずしも  $f(t)$  or  $g(x)$  に収束しないので、単に対応の意味で‘ $\sim$ ’と書き、‘ $=$ ’を用いない。

$f(t)$  は複素フーリエ級数を用いて

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}) + c_0 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} C_n + c_0, \quad C_n = c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

と書くことができる。

## 2 フーリエ級数の収束の様子

Eq.(5) をもとに幾つかの周期関数について、そのフーリエ級数での表現を考えてみる。

### 2.1 方形波

$$f_1(t) = \begin{cases} +1 & -2 \leq t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & 0 < t \leq 2 \end{cases} \quad \text{周期 : } T = 4, \omega = \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_T f_1(t) dt = 0$$

$$c_n = \frac{1}{4} \left( \int_{-2}^0 e^{-in\omega t} dt - \int_0^{+2} e^{-in\omega t} dt \right) = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{in\omega} (1 - e^{2in\omega}) + \frac{1}{in\omega} (e^{-2in\omega} - 1) \right\} = \frac{e^{2in\omega} + e^{-2in\omega} - 2}{4in\omega}$$

$$\begin{aligned} \therefore C_n &= \frac{-1}{2in\omega} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) + \frac{e^{in\omega(t+2)} + e^{in\omega(t-2)} - e^{-in\omega(t+2)} - e^{-in\omega(t-2)}}{4in\omega} = -\frac{\sin n\omega t}{n\omega} + \frac{1}{2} \frac{\sin \{n\omega(t+2)\}}{n\omega} + \frac{1}{2} \frac{\sin \{n\omega(t-2)\}}{n\omega} \\ &= -\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t+2) + \frac{1}{2}\delta(t-2) : \text{デルタ関数の和, as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

以上より、Eq.(6) は以下のように書くことができる。

$$f_1(t) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ -\frac{\sin n\omega t}{n\omega} + \frac{1}{2} \frac{\sin \{n\omega(t+2)\}}{n\omega} + \frac{1}{2} \frac{\sin \{n\omega(t-2)\}}{n\omega} \right], \quad \text{ここで、} \omega = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

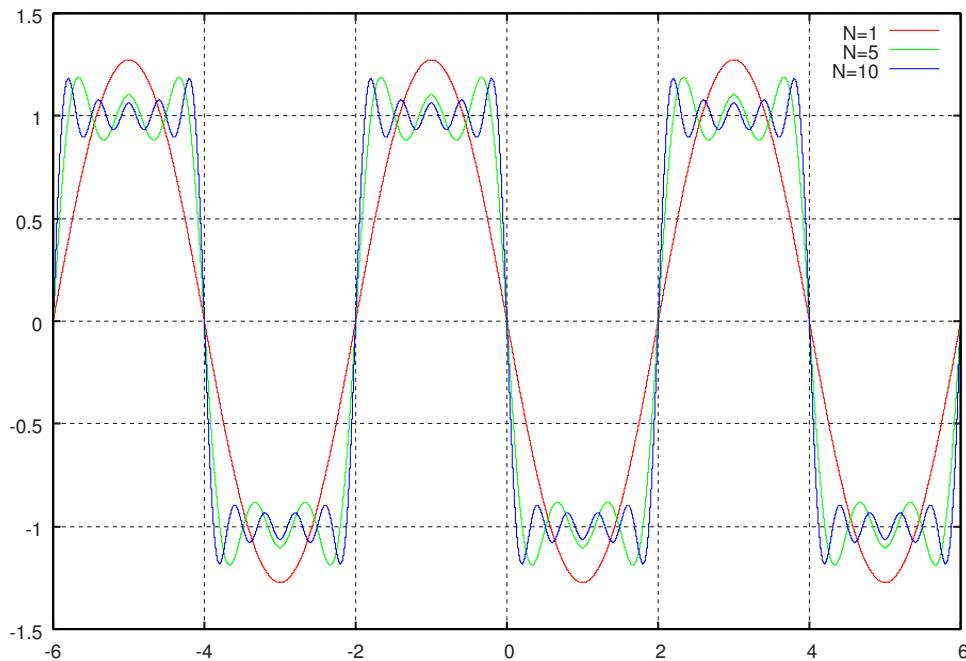


図1 N = 1, 5, 10

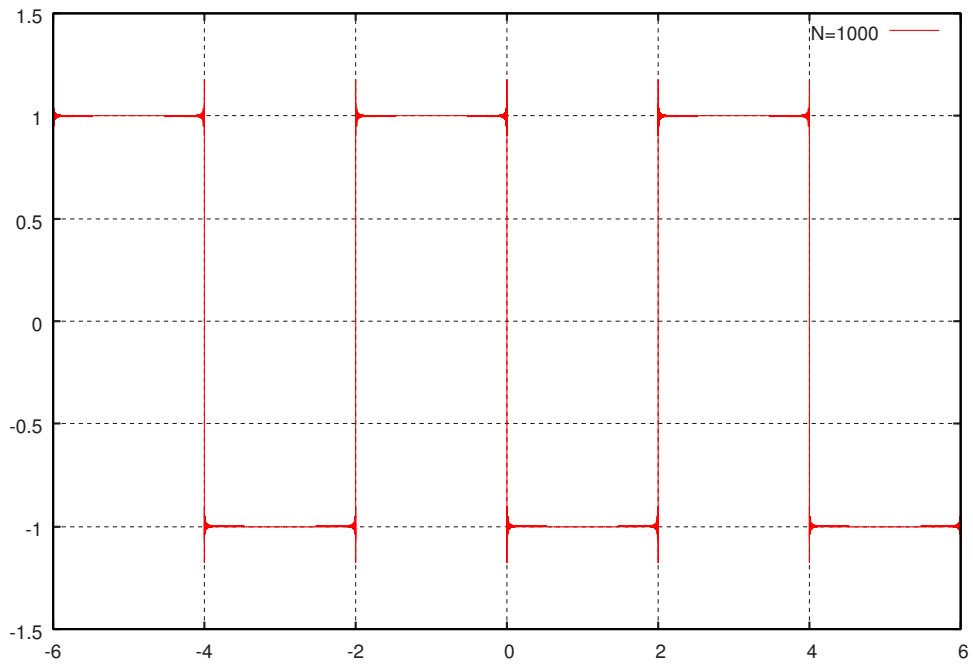


図 2  $N = 1000$

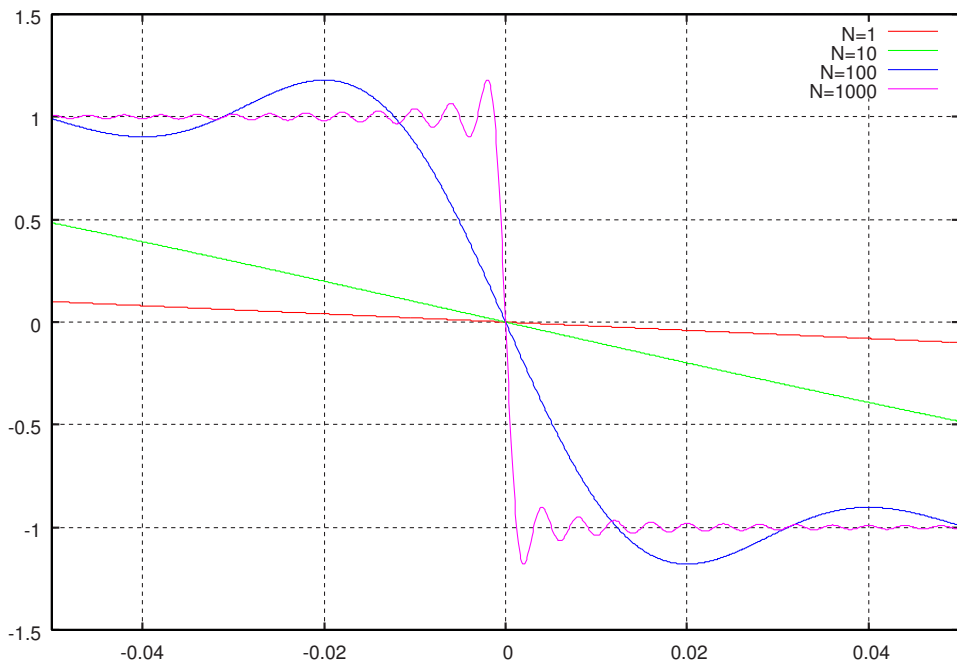


図 3 不連続点  $t = 0$  での挙動

## 2.2 鋸波

$$f_2(t) = \begin{cases} 1+t & -2 \leq t < 0 \\ 1 & t = 0 \\ 1-t & 0 < t \leq 2 \end{cases} \quad \text{周期: } T = 4, \omega = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_T f_2(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{-2}^0 (1+t)e^{-in\omega t} dt + \int_0^{+2} (1-t)e^{-in\omega t} dt \right\} \\ &= -\frac{1}{4in\omega} \left( \left[ (1+t)e^{-in\omega t} \right]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 t e^{-in\omega t} dt + \left[ (1-t)e^{-in\omega t} \right]_0^{+2} + \int_0^{+2} e^{-in\omega t} dt \right) \\ &= -\frac{1}{4in\omega} (1 + e^{2in\omega} - e^{-2in\omega} - 1) + \frac{1}{in\omega} \frac{1}{4} \left( \int_{-2}^0 e^{-in\omega t} dt - \int_0^{+2} e^{-in\omega t} dt \right) = -\frac{e^{2in\omega} - e^{-2in\omega}}{4in\omega} + \frac{1}{in\omega} \frac{e^{2in\omega} + e^{-2in\omega} - 2}{4in\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore C_n &= -\frac{e^{in\omega(t+2)} - e^{in\omega(t-2)}}{4in\omega} + \frac{e^{-in\omega(t+2)} - e^{-in\omega(t-2)}}{4in\omega} + \frac{1}{in\omega} \frac{e^{in\omega(t+2)} + e^{in\omega(t-2)} - 2e^{in\omega t}}{4in\omega} + \frac{1}{in\omega} \frac{e^{-in\omega(t+2)} + e^{-in\omega(t-2)} - 2e^{-in\omega t}}{4in\omega} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sin\{n\omega(t+2)\}}{n\omega} + \frac{1}{2} \frac{\sin\{n\omega(t-2)\}}{n\omega} + \frac{\cos(n\omega t)}{n^2\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos\{n\omega(t+2)\}}{n^2\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos\{n\omega(t-2)\}}{n^2\omega^2} \\ &= -\frac{1}{2} \delta(t+2) + \frac{1}{2} \delta(t-2) + \delta'(t) - \frac{1}{2} \delta'(t+2) - \frac{1}{2} \delta'(t-2), \quad \text{: デルタ関数とデルタ関数の微分の和, as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

以上より、Eq.(8) は以下のように書くことができる。

$$f_2(t) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\sin\{n\omega(t+2)\}}{n\omega} + \frac{1}{2} \frac{\sin\{n\omega(t-2)\}}{n\omega} + \frac{\cos(n\omega t)}{n^2\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos\{n\omega(t+2)\}}{n^2\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos\{n\omega(t-2)\}}{n^2\omega^2} \right], \quad \text{ここで, } \omega = \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

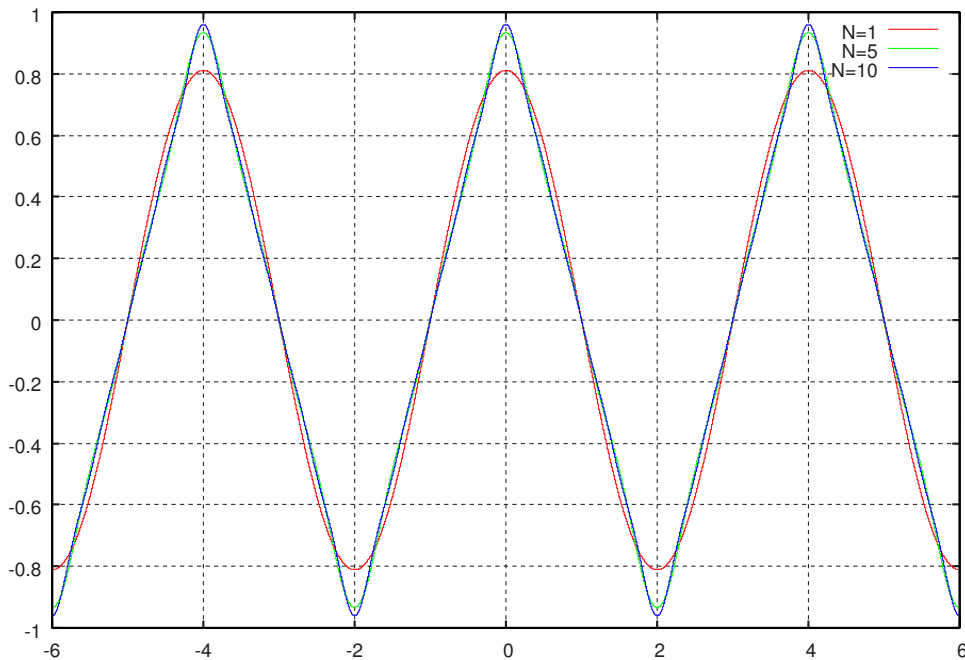


図4  $N = 1, 5, 10$

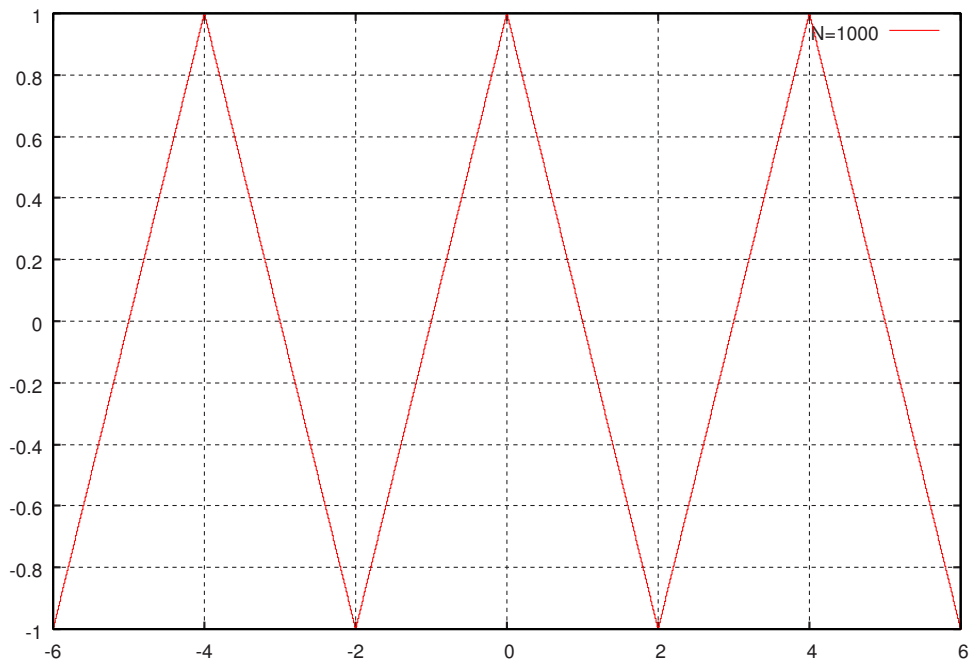


図 5  $N = 1000$

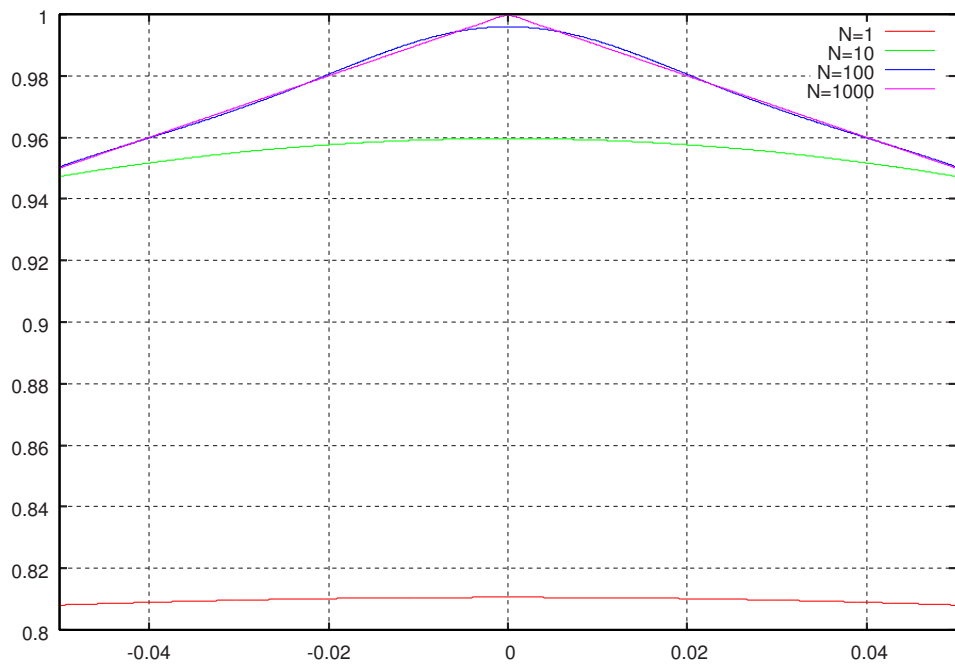


図 6  $t = 0$  での挙動

### 2.3 二次関数波

$$f_3(t) = \begin{cases} t\left(1 + \frac{t}{2}\right) & -2 \leq t < 0 \\ t & t = 0 \\ t\left(1 - \frac{t}{2}\right) & 0 < t \leq 2 \end{cases} \quad \text{周期 : } T = 4, \omega = \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_T f_3(t) dt = 0$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{-2}^0 \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-in\omega t} dt + \int_0^{+2} \left(t - \frac{t^2}{2}\right) e^{-in\omega t} dt \right\} \\ &= -\frac{1}{4in\omega} \left\{ \left[ \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-in\omega t} \right]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (1+t) e^{-in\omega t} dt + \left[ \left(t - \frac{t^2}{2}\right) e^{-in\omega t} \right]_0^{+2} - \int_0^{+2} (1-t) e^{-in\omega t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{in\omega} \left[ \frac{1}{4} \left( \int_{-2}^0 (1+t) e^{-in\omega t} dt + \int_0^{+2} (1-t) e^{-in\omega t} dt \right) \right] = \frac{1}{in\omega} \left[ -\frac{e^{2in\omega} - e^{-2in\omega}}{4in\omega} + \frac{1}{in\omega} \frac{e^{2in\omega} + e^{-2in\omega} - 2}{4in\omega} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore C_n &= \frac{1}{in\omega} \left[ -\frac{e^{in\omega(t+2)} - e^{in\omega(t-2)}}{4in\omega} + \frac{e^{-in\omega(t+2)} - e^{-in\omega(t-2)}}{4in\omega} + \frac{1}{in\omega} \frac{e^{in\omega(t+2)} + e^{in\omega(t-2)} - 2e^{in\omega t}}{4in\omega} + \frac{1}{in\omega} \frac{e^{-in\omega(t+2)} + e^{-in\omega(t-2)} - 2e^{-in\omega t}}{4in\omega} \right] \\ &= \frac{e^{in\omega(t+2)} - e^{in\omega(t-2)}}{4n^2\omega^2} - \frac{e^{-in\omega(t+2)} - e^{-in\omega(t-2)}}{4n^2\omega^2} - \frac{1}{n^2\omega^2} \frac{e^{in\omega(t+2)} + e^{in\omega(t-2)} - 2e^{in\omega t}}{4in\omega} - \frac{1}{n^2\omega^2} \frac{e^{-in\omega(t+2)} + e^{-in\omega(t-2)} - 2e^{-in\omega t}}{4in\omega} \\ &= \frac{\sin n\omega t}{n^3\omega^3} - \frac{1}{2} \frac{\sin \{n\omega(t+2)\}}{n^3\omega^3} - \frac{1}{2} \frac{\sin \{n\omega(t-2)\}}{n^3\omega^3} + \frac{1}{2} \frac{\cos \{n\omega(t+2)\}}{n^2\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos \{n\omega(t-2)\}}{n^2\omega^2} \\ &= -\delta''(t) + \frac{1}{2}\delta''(t+2) + \delta''(t-2) + \frac{1}{2}\delta'(t+2) - \frac{1}{2}\delta'(t-2), \quad \text{: デルタ関数の微分の和, as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

以上より、Eq.(10) は以下のように書くことができる。

$$f_3(t) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{\sin n\omega t}{n^3\omega^3} - \frac{1}{2} \frac{\sin \{n\omega(t+2)\}}{n^3\omega^3} - \frac{1}{2} \frac{\sin \{n\omega(t-2)\}}{n^3\omega^3} + \frac{1}{2} \frac{\cos \{n\omega(t+2)\}}{n^2\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos \{n\omega(t-2)\}}{n^2\omega^2} \right], \quad \text{ここで、} \omega = \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

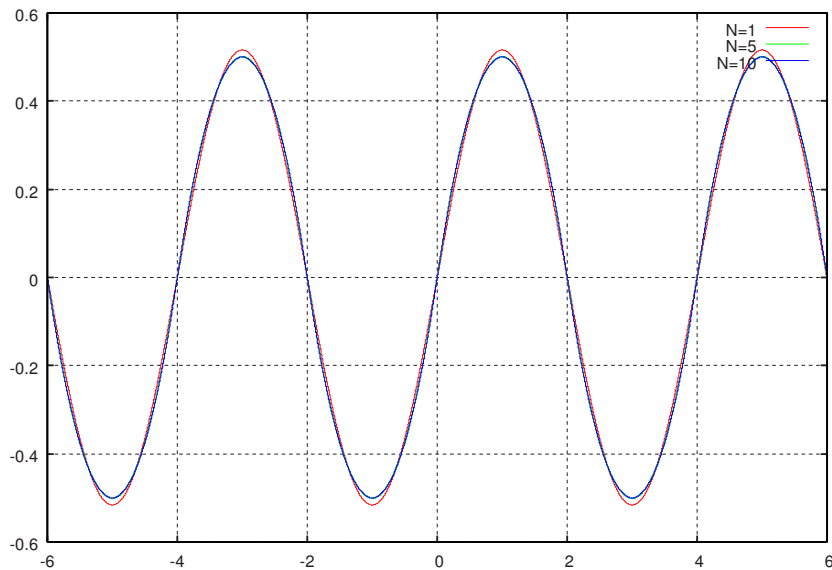


図7  $N = 1, 5, 10$

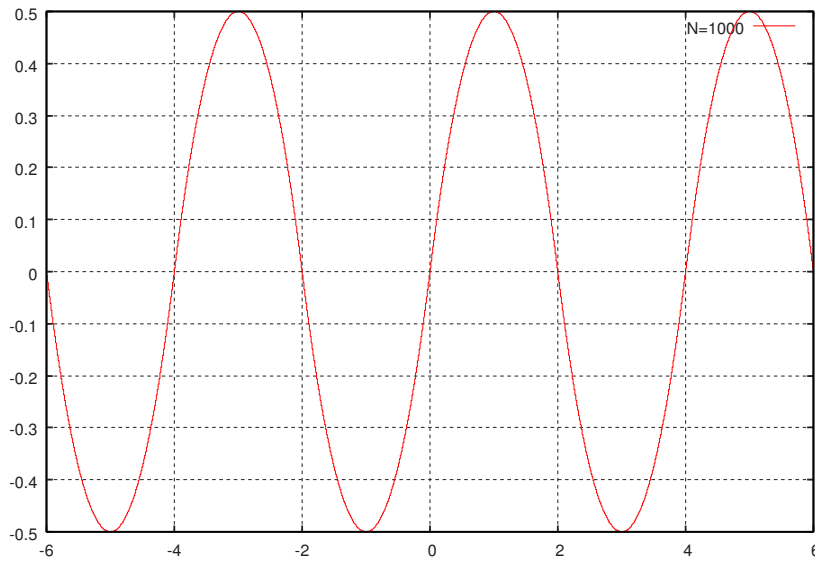


図 8  $N = 1000$

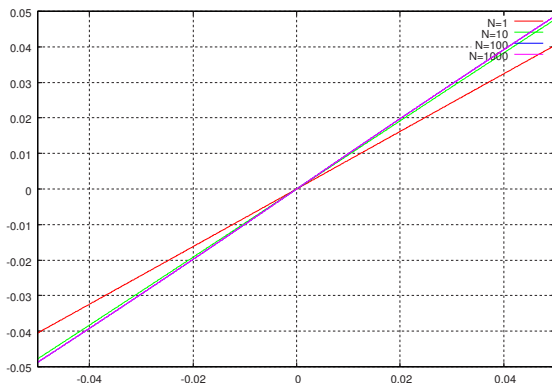


図 9  $t = 0$  での挙動

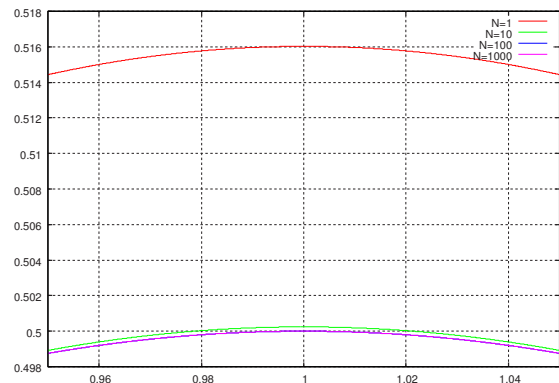


図 10  $t = 1.0$  での挙動

### 3 フーリエ級数の収束

図 3,6,9 を見比べると 3,6,9 の順に  $t = 0$  でのフーリエ係数がもとの関数に近くなってきていることが分かる。これは  $C_n$  が  $1/n$  の何乗に比例しているかによっても直感的に分かる ( $f_1$  では  $1/n$ 、 $f_2$  では  $1/n^2$ 、 $f_3$  では  $1/n^3$  にそれぞれ比例している。)

先にも述べたようにフーリエ級数が  $n \rightarrow \infty$  でもとの関数に収束するかは一般には分からない。 $f_1$  と  $f_2, f_3$  との違いを考えると、 $f_1$  は区分的に不連続であり、 $f_2, f_3$  は区分的に連続であることが挙げられる。このことより関数の連続性がフーリエ係数の収束に大きな影響を与えることが予想される。一般に区分的に連続な関数のフーリエ係数は零に収束するが、不連続な場合はその様にならない。 $f_2$  と  $f_3$  の関係を考えて、実は  $f_3' = f_2, f_3 = \int f_2 dt$  であることが分かる。そして又、フーリエ係数の間にも、この関係が成り立っていることが分かる。このときフーリエ級数が項別微分、項別積分可能であると言う。 $f_2, f_3$  は項別微分、項別積分の関係であるが  $f_1$  と  $f_2$  との間にはそのような関係はない。

以上に述べたようなフーリエ級数の性質から、 $f_1$  に関して、フーリエ係数がもとの関数に収束することはなく、図 3 のように不連続点ではいつまでも振動が存在することになる。これは項の数が増えるに従いだんだん

もとの関数に近づき、同時に振幅も小さくなるが、 $n \rightarrow \infty$  の極限でも有限の振幅を持つことを意味する。これはいわば級数が不連続点を超えるときに、その分だけ余分に飛躍をしていると言える。フーリエ級数が不連続点付近でこのような現象を起こすことを発見者のギブスにちなんでギブスの現象と呼ぶ。

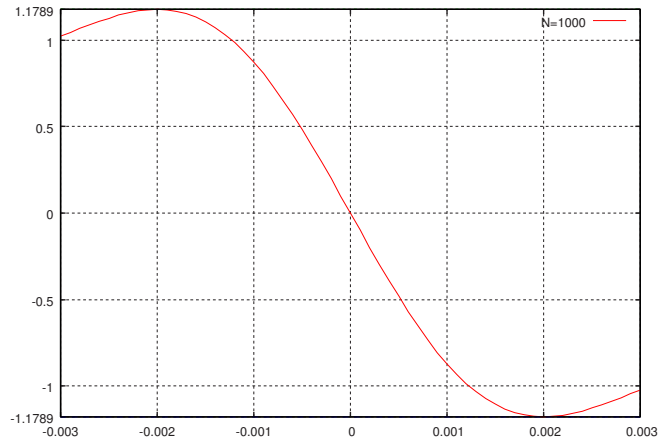


図 11  $f_1, N = 1,000$

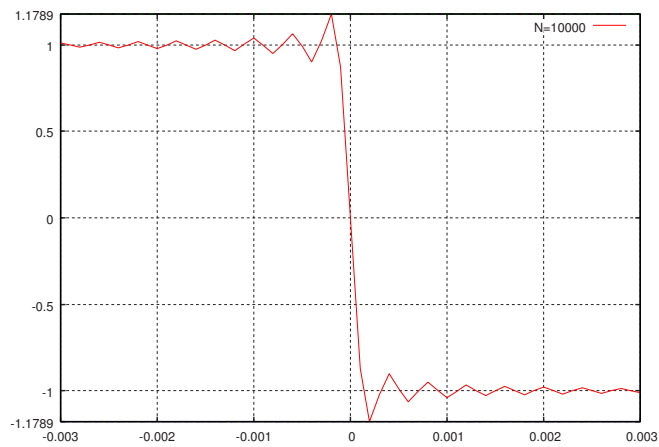


図 12  $f_1, N = 10,000$

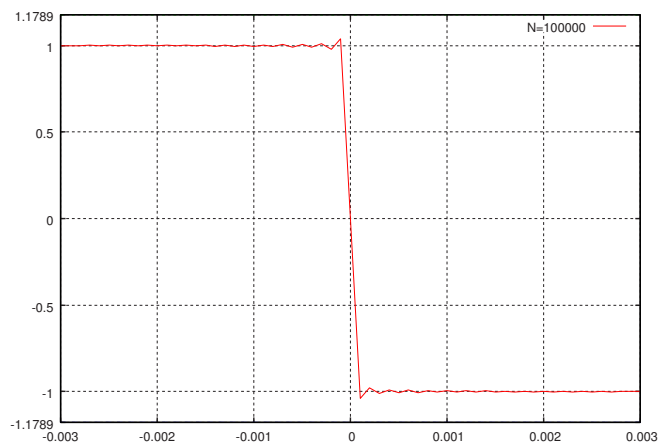


図 13  $f_1, N = 100,000$