星の内部構造 [改訂版]
—ポリトロープの計算、数値積分 (Runge-Kutta 法)—

1 運動方程式

重力が働いている流体の運動を記述する方程式は粘性や熱の発生や移動を無視すれば、**流体のオイラー方程式、連続の式、ポアッソン方程式、そして状態方程式**で与えられる。それぞれ

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \ + \frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \Phi = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{3}$$

$$P = P(\rho, s) \tag{4}$$

であり、 Φ は重力ポテンシャル、 P は圧力、 ρ は密度、 s は単位質量当たりのエントロピーである。

静水圧平衡にある星の構造を考えるとき

$$\mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

とし、更に球対称を仮定すれば、球面極座標を使って

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \tag{6}$$

とする。

2 星の構造を記述する方程式

球面極座標系を用いるとき、上の仮定の許で静水圧平衡にある球対称な星の構造を記述する方程式を考える。(3) は条件より

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = 4\pi G \rho$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \int_0^r dr' \, 4\pi G \rho r'^2 = M_r G \qquad \because \quad M_r = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho \, dr'$$

となるので、

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{G M_r}{r^2} \tag{7}$$

を得る。また (1) より

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\Phi = 0 + 0 + \frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\Phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla P = -\rho\nabla\Phi$$

であるが、条件より

$$\nabla = \vec{r}\frac{\partial}{\partial r} + \vec{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} = \vec{r}\frac{d}{dr}$$

となるので、(7) を代入して

$$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{d\Phi}{dr} = -\rho\frac{GM_r}{r^2} \tag{8}$$

となることが分かる。

3 ポリトロープ

星の構造は、粘性や熱の発生や移動などを無視すれば、適当な状態方程式 $P = P(\rho, s)$ を使って、上に与えられた二つの常微分方程式を、ある適当な境界条件のもとで積分することで求めることができる。上の常微分方程式を（静水圧平衡の式と連続の式とを）組み合わせれば、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{9}$$

となるが、この式はもし圧力 P が密度 ρ だけの（密度 ρ が圧力 P だけの ）関数として与えられれば積分できることを示している。ここでは、圧力と密度の関係を

$$P = P(\rho) = K\rho^{\frac{n+1}{n}} \tag{10}$$

で与えて星の構造を調べることを考える。ここで、 n と K はある定数である。静水圧平衡にあるガス球で、ガス球内の中心からの距離に沿った各点で上の関係式が成り立っているものを**ポリトロープ**と呼び、n を**ポリトロープ指数 (polytropic index)** という。

4 Lane-Emden equation

今、密度 ρ を

$$\rho = \lambda\phi^n \tag{11}$$

とおき、変数変換

$$\xi = \frac{r}{a}, \qquad a = \sqrt{\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}} \tag{12}$$

とする。すると

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\xi}{dr}\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\xi}$$

であるから、(9) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) &= \frac{1}{a^2\xi^2}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\xi^2a^2K\lambda^{\frac{n+1}{n}}}{\lambda\phi^n}\frac{d\phi^{n+1}}{d\xi}\right] = \frac{1}{\xi^2a^2}\frac{d}{d\xi}\left\{\xi^2(n+1)K\lambda^{1/n}\frac{d\phi}{d\xi}\right\} = \frac{(n+1)K\lambda^{1/n}}{\xi^2a^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)\\ &= -4\pi G\rho = -4\pi G\lambda\phi^n\end{aligned}$$

となるから、結局

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)=\frac{-4\pi G\lambda\phi^n a^2}{(n+1)K\lambda^{1/n}}=-\frac{4\pi Ga^2}{(n+1)K\lambda^{\frac{1-n}{n}}}\phi^n=-\phi^n \tag{13}$$

を得る。この方程式は **Lane-Emden equation** と呼ばれている。

5 Lane-Emden equation の解

$\lambda=\rho_c$（中心密度）としてガス球の中心 $(\xi=0)$ で

$$\phi=1,\qquad \frac{d\phi}{d\xi}=0 \tag{14}$$

となるような解を求める。

ガス球の中心近傍で関数 $\phi(\xi)$ を

$$\phi(\xi)=c_0+c_1\xi+c_2\xi^2+c_3\xi^3+c_4\xi^4+\cdots \tag{15}$$

と展開して、係数比較により $\phi(\xi)$ を求めることを考える。始めに (14) より $c_0=1, c_1=0$ は明らかである。次に (15) を (13) に代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)=\frac{d^2\phi}{d\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{d\phi}{d\xi}=2c_2+3\cdot2c_3\xi+4\cdot3c_4\xi^2+5\cdot4c_5\xi^3+6\cdot5c_6\xi^4+\cdots\\
&\quad+\frac{2}{\xi}\left(2c_2\xi+3c_3\xi^2+4c_4\xi^3+5c_5\xi^4+6c_6\xi^5+\cdots\right)\\
&=6c_2+12c_3\xi+20c_4\xi^2+\cdots\\
(\text{右辺})&=-\phi^n=-\left(1+c_2\xi^2+c_3\xi^3+c_4\xi^4+\cdots\right)^n=-1-nc_2\xi^2+\cdots
\end{aligned}$$

であるから、係数を比較すると

$$6c_2=-1,\quad 12c_3=0,\quad 20c_4=-nc_2,\quad \Longrightarrow\quad c_2=-\frac{1}{6},\quad c_3=0,\quad c_4=-\frac{nc_2}{20}=\frac{n}{120}$$

となるので、$\phi(\xi)$ は

$$\phi(\xi)=1-\frac{1}{6}\xi^2+\frac{n}{120}\xi^4+\cdots \tag{16}$$

となることが分かる。

中心から積分していったときの最初の零点 $\phi(\xi=\xi_1)=0$ を星の外側の境界（星の表面）であるとする。従って、星の半径は $R=a\xi_1$ で与えられることになる。このとき

$$R=a\xi_1=\sqrt{\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}}\,\xi_1=\sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G}}\,\lambda^{\frac{1-n}{2n}}\xi_1 \tag{17}$$

である。また $M(R)$ を星の中心から半径 R までの全質量だとすると $4\pi Gr^2\rho\,dr$ を $0\to R$ まで積分することで

$$\begin{aligned}
M(R)&=\int_0^R 4\pi Gr^2\rho\,dr=4\pi\int_0^{\xi_1}a^2\xi^2\lambda\phi^n\,ad\xi=4\pi a^3\lambda\int_0^{\xi_1}\xi^2\phi^n\,d\xi=-4\pi a^3\lambda\int_0^{\xi_1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)\qquad\because\ (13)\\
&=-4\pi a^3\lambda\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}=-4\pi\left[\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}\right]^{3/2}\lambda\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}=-4\pi\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2}\lambda^{\frac{3-n}{n}}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad M(R)=-4\pi\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2}\lambda^{\frac{3-n}{n}}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} \tag{18}$$

を得ることができる。また星の平均密度 $\bar{\rho}$ を $\bar{\rho} = \frac{M}{4\pi R^3/3}$ とすると、$\lambda = \rho_c$ であるから

$$\bar{\rho} = \frac{M}{4\pi R^3/3} = \frac{3M}{4\pi R^3} = -\frac{3}{4\pi a^3 \xi_1^3} \cdot 4\pi a^3 \lambda \left(\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} = -\frac{3}{\xi_1} \rho_c \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$

となることから、

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = -\frac{3}{\xi_1} \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} \tag{19}$$

を得る。従って、星の質量と半径とを与えれば

$$\lambda = \rho_c = -\frac{\bar{\rho}}{\frac{3}{\xi_1}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}} \tag{20}$$

として ρ_c が求められ

$$K = \frac{4\pi G}{n+1} \frac{R^2}{\xi_1^2} \rho_c^{-\frac{1-n}{n}} \tag{21}$$

として定数 K を求めることができる。

ポリトロープ指数 n のガス球について、その半径 R と質量 M とが与えられているとすると、圧力 P は

$$P(\xi) = K\lambda^{\frac{n+1}{n}} \phi^{n+1} = K\rho_c^{\frac{n+1}{n}} \phi^{n+1} = \frac{4\pi G}{n+1} \frac{R^2}{\xi_1^2} \rho_c^{-\frac{1-n}{n}} \rho_c^{\frac{n+1}{n}} \phi^{n+1} = \frac{4\pi G}{n+1} \frac{R^2}{\xi_1^2} \rho_c^2 \phi^{n+1} \tag{22}$$

$$= \frac{4\pi G}{n+1} \frac{R^2}{\xi_1^2} \frac{\bar{\rho}^2}{\frac{9}{\xi_1^2}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_1}} \phi^{n+1} = \frac{4\pi G}{n+1} \frac{R^2}{\xi_1^2} \frac{\frac{M^2}{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)^2}}{\frac{9}{\xi_1^2}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_1}} \phi^{n+1}$$

$$= \frac{1}{4\pi(n+1)} \left[\frac{1}{(d\phi/d\xi)_{\xi=\xi_1}}\right]^2 \frac{GM^2}{R^4} \{\phi(\xi)\}^{n+1} \tag{23}$$

と書け、中心 $\xi = 0$ に於いては

$$P_c = P(0) = \frac{1}{4\pi(n+1)} \left[\frac{1}{(d\phi/d\xi)_{\xi=\xi_1}}\right]^2 \frac{GM^2}{R^4} \tag{24}$$

で与えられることが分かる。但しここでの議論は全て $\lambda = \rho_c$ としている。同様に密度 ρ を計算すると、

$$\rho(\xi) = \rho_c \phi^n = -\frac{\bar{\rho}}{\frac{3}{\xi_1}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}} \phi^n = -\frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}} \frac{\phi^n}{\frac{3}{\xi_1}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}}$$

$$= -\frac{M}{4\pi R^3} \frac{\xi_1}{\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}} \{\phi(\xi)\}^n \tag{25}$$

となる。

以上からも分かるように、あるポリトロープ指数 n について、星の半径 R と質量 M とを与えればパラメータ K も決まることになり, 星のポリトロープな構造が決まることになる。

6 Runge-Kutta 法を用いた Lane-Emden equation 積分

Runge-Kutta 法を用いて、**Lane-Emden equation 積分**することを考える。

6.1　Lane-Emden equation 積分

さて

$$y_1 = \phi, \qquad y_2 = \frac{d\phi}{d\xi} \tag{26}$$

とすれば、Lane-Emden equation は

$$\frac{dy_1}{d\xi} = y_2 = f_1(y_2), \qquad \frac{dy_2}{d\xi} = -(y_1)^n - \frac{2}{\xi}y_2 = f_2(\xi, y_1, y_2) \tag{27}$$

と書ける。これを積分するとき、微分方程式中に $1/\xi$ が含まれているので、これを原点 $\xi = 0$ から始めて数値積分するのは困難である。この困難を避けるために普通とられる手段は、ある十分小さな $\xi = \xi_0 \ll 1$ から積分を始めることである。従って、原点近傍での展開式を用いて

$$y_1(\xi_0) = \phi(\xi_0) = 1 - \frac{1}{6}\xi_0^2 + \frac{n}{120}\xi_0^4, \qquad y_2(\xi_0) = -\frac{1}{3}\xi_0 + \frac{n}{30}\xi_0^3 \tag{28}$$

として、$\xi = \xi_0$ に於ける $y_1(\xi_0)$ と $y_2(\xi_0)$ とを求めてこれを積分の初期値とする。この初期値を使って中心から外に向かって積分を行い最初の零点 $\xi = \xi_1$ で積分を停止する。ここで零点は $y_1 = \phi(\xi_1) = 0$ を満たす ξ_1 である。積分の幅 h は等間隔にとっても良いかもしれないが、今の場合求める関数は途中に零点（節）を持たないことから、ある小さな数 e_i について

$$\left|\frac{\Delta y_i}{y_i}\right| = \left|\frac{f_i(x, \mathbf{y})\,h}{y_i}\right| \le e_i \tag{29}$$

を満たす最大の h を求めて積分の刻み幅とするのも一つの方法である。こうすることで星の表面での密度変化や圧力の ξ についての急激な変化も正しく追うことができるようになる。また、星の表面は、やはりある小さな ϵ について $|y_i(\xi)| < \epsilon$ となるような ξ として星の表面 ξ_1 を決めるのが適当である。

式 (29) を満たす最大の h を求めることは

$$h_i = \left|\frac{y_i}{f_i(x, \mathbf{y})}\right| e_i$$

なる $h_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ について

$$h = \min\,(h_1, h_2, \ldots h_i)$$

とすることを意味する。もし y_i の零点を通過するような解を求めるときには、幅 h に適当な最小値を課す必要がある。

6.2　常微分方程式の数値積分：四次の Runge-Kutta 法

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{30}$$

を数値的に積分することを考える。従ってここでは x に於ける、$y(x)$ と $f(x, y)$ とが与えられたときに、$x + h$ に於ける $y(x + h)$ をどのように与えるかが問題となる。例えばもし $y(x + h)$ を

$$y(x + h) = y(x) + f\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + f(x, y(x))\,\frac{h}{2}\right)h \tag{31}$$

で与えるとすれば、この $y(x + h)$ の評価はステップ h の二次 h^2 まで正しいことを示すことができる。この拡張として、常微分方程式を数値的に積分する方法として最もよく使われるのは**四次の Runge-Kutta 法** と呼ばれるものであり、$y(x + h)$ を

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{32}$$

で与えるものである。これは、ステップ幅 h の四次 h^4 まで正しいとされる。ここで

$$k_1 = f\,(x, y(x))\;h, \quad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{k_1}{2}\right) h$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{k_2}{2}\right) h, \quad k_4 = f\,(x + h, y(x) + k_3)\;h$$

である。これを連立微分方程式に拡張するのは容易である。与えられた連立微分方程式を

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}\,(x, \mathbf{y}) \tag{33}$$

と書けば、 $\mathbf{y}\,(x + h)$ を

$$\mathbf{y}(x + h) = \mathbf{y}(x) + \frac{1}{6}\,(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{34}$$

で与える。ここでは

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}\,(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1\,(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \\ f_2\,(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \\ f_3\,(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n\,(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))\,h, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x + \frac{h}{2}, \mathbf{y} + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right) h, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(x + \frac{h}{2}, \mathbf{y} + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right) h, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\,(x + h, \mathbf{y} + \mathbf{k}_3)\;h$$

である。

7 例

7.1 木星

$n = 1$ のポリトロープは木星の構造をよく表していることが知られている。木星の質量 M と半径 R を与え、その密度や圧力を r/R を横軸として図を描かせると次のようになる。ここでは cgs 単位系を用いている。

7.2 中性子星

中性子星の構造がやはり $n = 1$ のポリトロープでよく表せるとする。$M = 1.4\,M_\odot$ で $R = 10\,\mathrm{km}$ であるような中性子星中心の密度と圧力は次のようになる。同様に cgs 単位系を用いている。

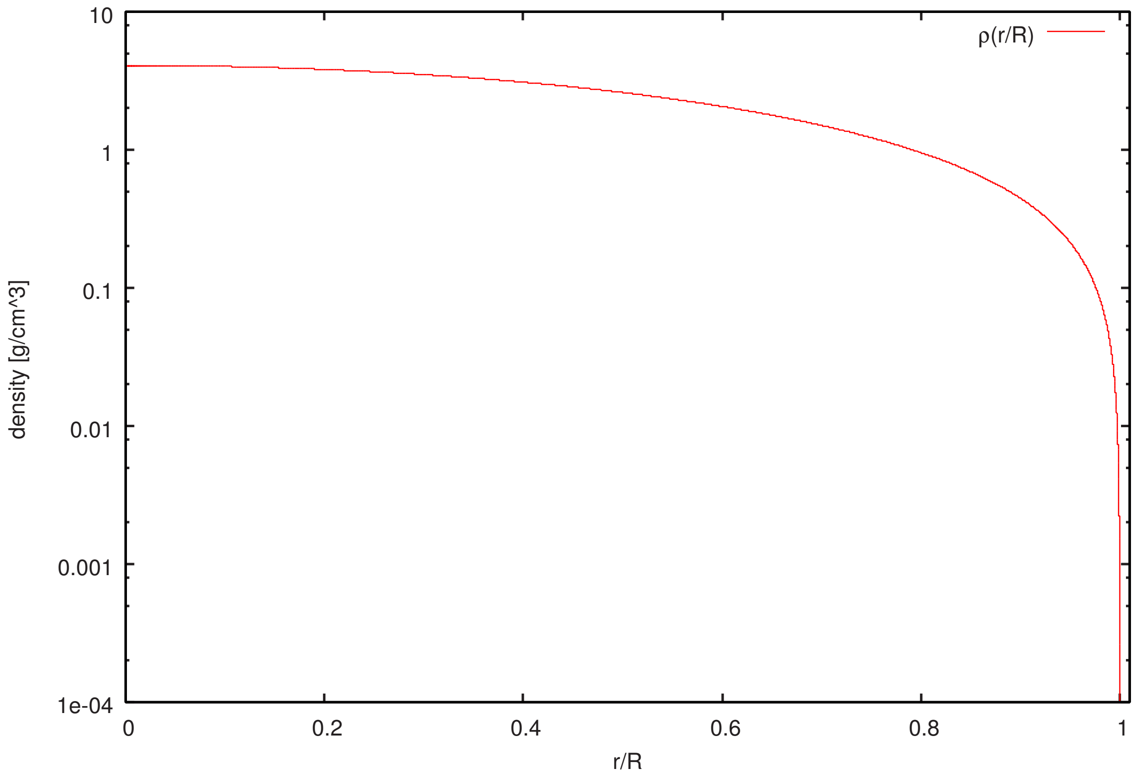

図 1　木星：(25) をもとに、横軸を r/R 、縦軸を ρ としてプロットしたもの。

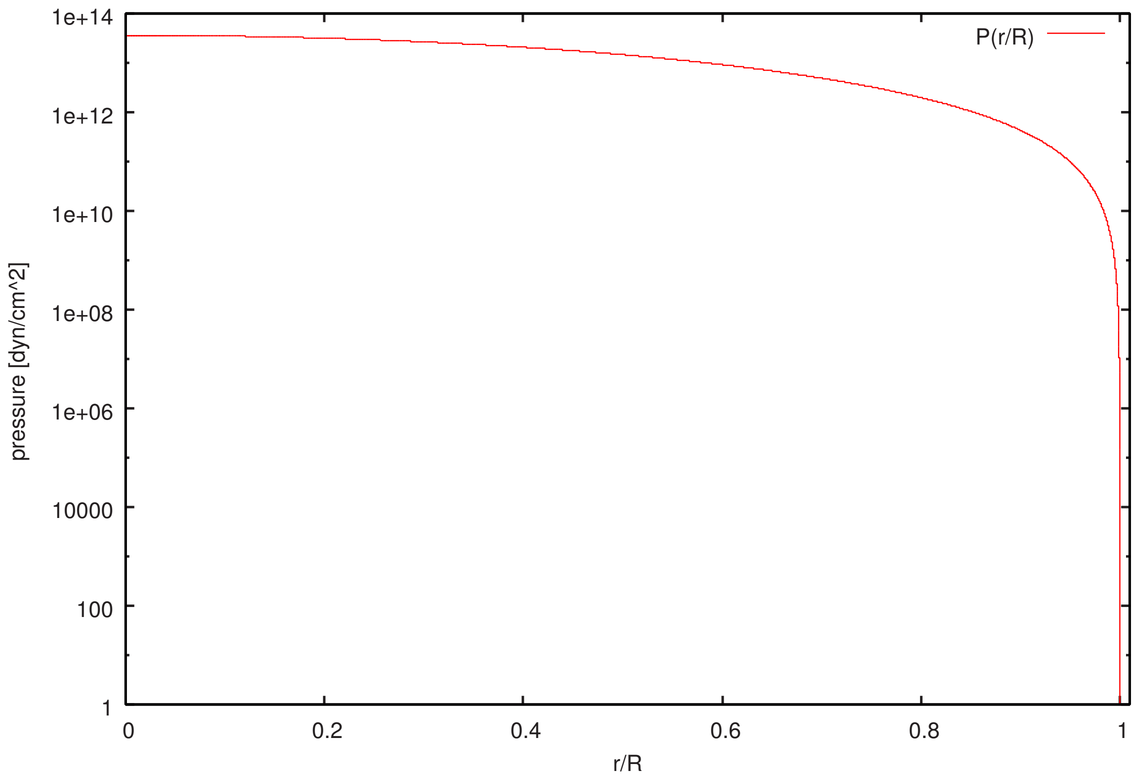

図 2　木星：(23) をもとに、横軸を r/R 、縦軸を P としてプロットしたもの。

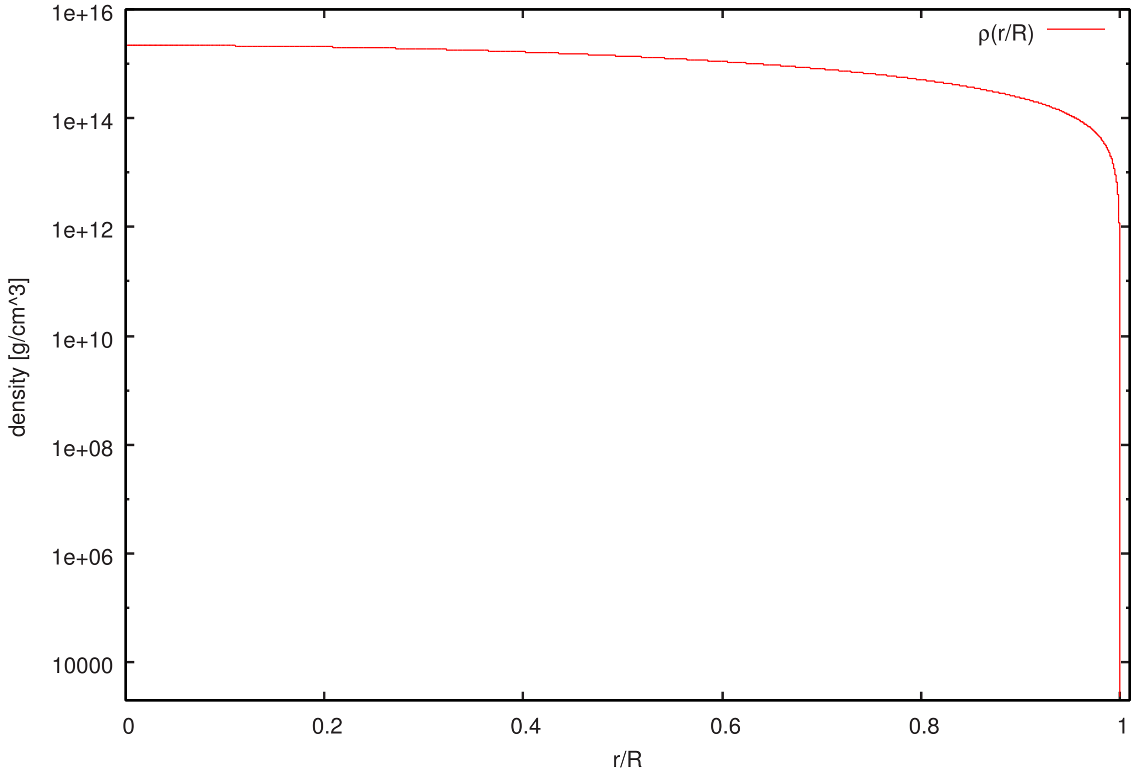

図 3　中性子星：(25) をもとに、横軸を r/R 、縦軸を ρ としてプロットしたもの。

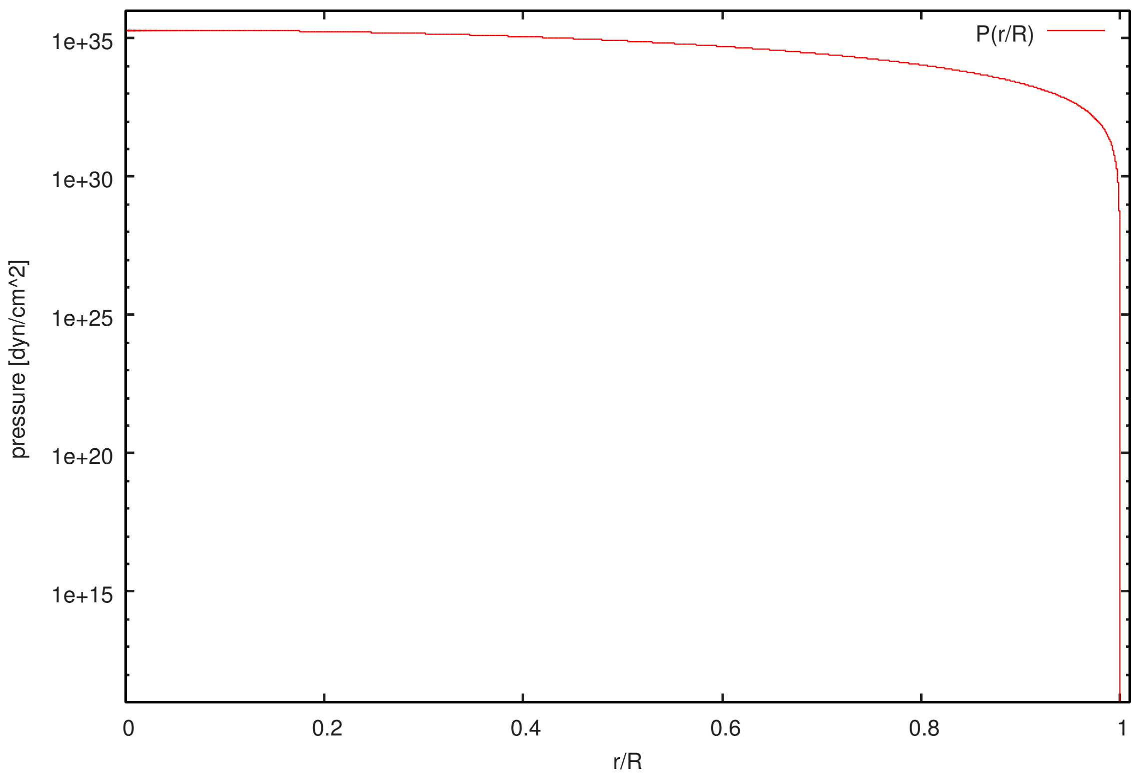

図 4　中性子星：(23) をもとに、横軸を r/R 、縦軸を P としてプロットしたもの。