Low Pass Filter の性質

特定の周波数以下のスペクトルを通す簡単な **Low Pass Filter(LPF)** を考える。

1 RC 回路

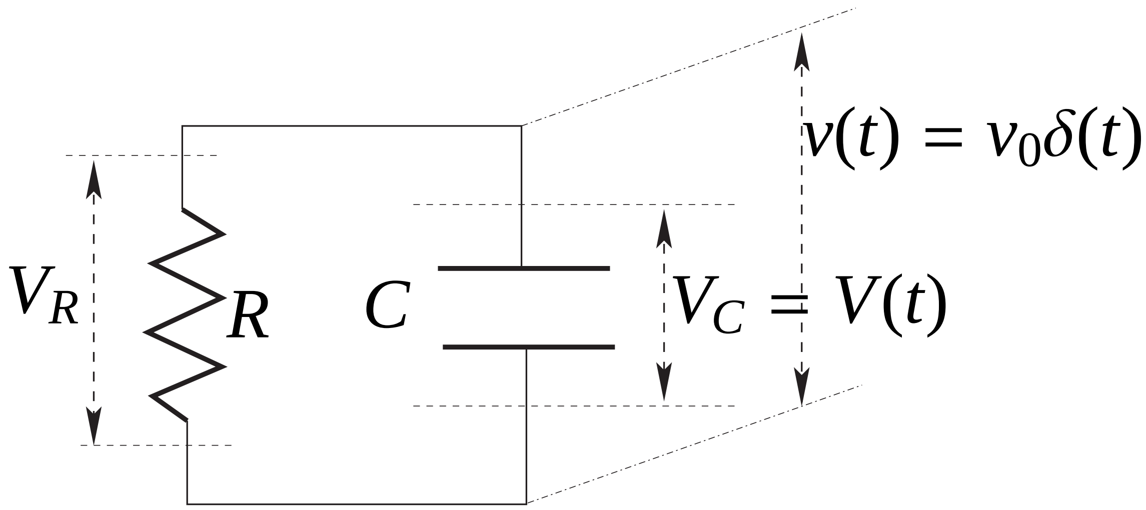

図 1 RC 回路

図壱のような RC 回路を考える。$v(t)$ が入力、$V(t)$ が出力である。外部から電圧がかかっていない場合に回路を一周すると、電圧降下は

$$+V_C + V_R = 0, \quad V_C = V(t)$$

であるから $q(t) = CV_C$, $V_R = I(t)R$ より、微分方程式は

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V(t) = 0 \tag{1}$$

と書ける。この同次微分方程式の解はすぐ求まり

$$V(t) = A\exp\left[-\frac{t}{RC}\right] = Ae^{-t/\tau}, \qquad A = \mathrm{Const}, \tau = RC$$

である。ここで τ は**時定数 (time constant)** といい、**系の典型的な反応時間 (typical response time scale)** を表す

今外部からコンデンサーの両端に $v(t) = v_0\delta(t)$ という**パルス電圧（入力信号）**をかける（入力信号を何故パルスにするかについては後述する）。これより微分方程式 Eq.(1) は次のような非同次方程式になる。

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}V(t) = \frac{v_0}{\tau}\delta(t) \tag{2}$$

同次方程式の解は既に得られているので、この解を元に**定数変化法** $A \to A(t)$ を用いることで解を求める。実際に代入すると、

$$\dot{A}(t) = \frac{v_0}{\tau}\delta(t)e^{t/\tau}$$

$$\therefore\ A(t) = \frac{v_0}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{t'/\tau}\delta(t')dt' = \frac{v_0}{\tau}\theta(t) + C, \qquad \theta(t)：単位階段関数, \quad C = \mathrm{Const}$$

となる。コンデンサーは最初帯電していなかったと考えると $C = 0$ であるから、電圧の時間変化は

$$V(t) = \frac{v_0}{\tau}\theta(t)e^{-t/\tau} \tag{3}$$

となる。このことから、一瞬に起きたパルス入力に対して、出力は τ 程度の時間を掛けてゆっくりと減少していくことが分かる。

2 電圧の Fourier 変換

Eq.(3) で与えられた出力電圧 $V(t)$ について Fourier 変換を行うと、

$$\begin{aligned}
\hat{V}(\omega) = \mathcal{F}[V(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{v_0}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\exp\left[-\frac{t}{\tau} - i\omega t\right]dt \\
&= \frac{v_0}{\tau}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)t\right]dt = \frac{v_0}{\tau}\frac{1}{-(1/\tau + i\omega)}\left[\exp\left\{-\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)t\right\}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{v_0}{\tau}\frac{1}{1/\tau + i\omega}
\end{aligned}$$

の様に、出力電圧のスペクトルを得る。

図 2　$\left|\hat{V}(\omega)\right|$: 振幅

振幅として絶対値を計算すると、

$$\begin{aligned}
\left|\hat{V}(\omega)\right|^2 &= \frac{v_0^2}{\tau^2}\frac{1}{1/\tau + i\omega}\frac{1}{1/\tau - i\omega} = \frac{v_0^2}{\tau^2}\frac{1}{1/\tau^2 + \omega^2} \\
&= \frac{v_0^2}{1 + \tau^2\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \hat{V}(\omega) = \frac{v_0}{\tau}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\tau^2} + \omega^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \tag{4}$$

となり、また位相は

$$\phi = \arg\hat{V}(\omega) = \tan^{-1}\tau\omega \tag{5}$$

となる。

3 伝導関数

伝達関数 $F(i\omega)$ を考える。伝達関数は

$$F(i\omega) = \frac{V_{\mathrm{out}}(\omega)}{V_{\mathrm{in}}(\omega)}$$

で表される関数であり、その定義から**出力が入力に対してどのような特性を持つか**を知ることができ、これにより各種フィルターの効果を見ることができる。今 $V_{\text{in}}, V_{\text{out}}$ それぞれは、

$$V_{\text{in}}(\omega) = |\mathcal{F}[v(t)]| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)e^{-i\omega t}dt\right| = \left|v_0\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt\right| = v_0, \quad \phi_{\text{in}} = \arg \hat{v}(\omega) = 0 \tag{6}$$

$$V_{\text{out}}(\omega) = \left|\hat{V}(\omega)\right| = \frac{v_0}{\tau}\frac{1}{1/\tau + i\omega} = \frac{v_0}{1+i\omega\tau}, \quad \phi_{\text{out}} = \arg \hat{V}(\omega) = \tan^{-1}\tau\omega \tag{7}$$

であるので、伝達関数は

$$F(i\omega) = \frac{1}{1+(i\omega)\tau} = \frac{1}{1+(i\omega)/(\omega_p)}, \quad \omega_p = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \tag{8}$$

と書ける。

4 Low Pass Filter

Eq.(6) より δ 関数的パルス電圧をかけることは、$0 \sim \infty$ までの全ての各周波数の電圧を、初期位相零で同じ強度でかけることと等価であることが分かる。Eq.(6),Eq.(7) より全ての正の各周波数 ω に対して、$\phi_{\text{out}} > 0$ なので、入力に対して出力の位相が遅れることになる。$\omega = 0$ では出力電圧の振幅は、入力電圧と等しいが $\omega > 0$ では、出力は入力より減少し、その差は ω が大きくなるに従って大きくなる。従って、**RC 回路は低周波は減衰無しに通すが、高周波は減衰させる効果**を持つことが分かる。これはつまり **RC 回路が低い周波数を選択的に通す Low Pass Filter** として働いていることを示している。**カットオフ**が起きる周波数の目安は

$$f_{\text{cut}} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi RC}\ [\text{Hz}] \tag{9}$$

である。

Low Pass Filter の効果を目に見える形で表すために、伝達関数 Eq.(8) を元に**周波数特性**を考える。伝達関数の絶対値をとると

$$|F(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}} \tag{10}$$

となるが、これをグラフにすると図参の様になる。

確かに低周波数域をよく通し、高周波数域を通しにくい low pass filter として働いていることが分かる。

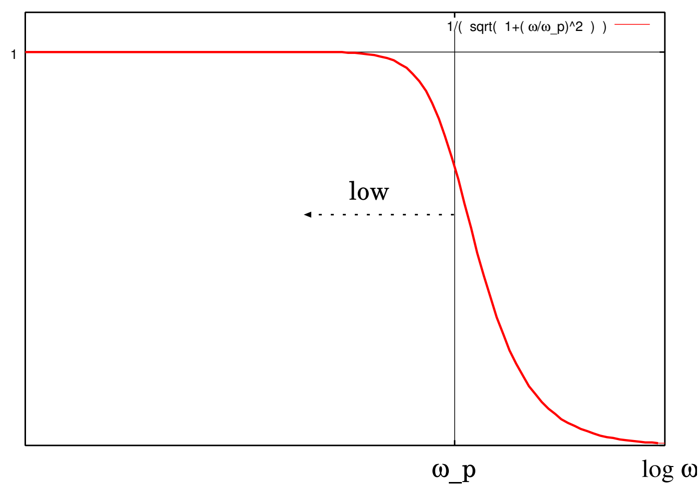

図 3　RC 回路に於ける周波数特性。横軸は Logscale で書いてある。