プランクの輻射則 [改訂版]
—Newton 法、数値積分—

1 Blackbody Radiation

「真っ黒」な物質は光を全て吸収するが、その逆もまた成り立つ。つまり「真っ黒」な物質が熱せられれば、全ての波長域の光を放出する。これを黒体放射といい、「真っ黒」な物質を**完全黒体**という。完全黒体は実際には存在しない仮想的な物質のことを指す。

完全黒体は存在しないが、それに近い振る舞いをする場合がある。炉や釜のような箱を考え、その箱に小さな穴を開ける。熱を加えない限りこの穴から光がでてくることはない。熱を加え、箱の中の温度を上げていくと箱が熱せられ光を出すようになる。光は箱の別の部分に吸収されこれらのことが無限に繰り返され、熱平衡の状態となる。箱の中は完全黒体として扱うことができ、周りと十分熱を交換した後、箱の穴からでてきた光は**黒体放射（黒体輻射）**の関係を満たしている。これらの研究により量子力学の基礎が作られた。

このように熱平衡の状態にある物質から放射される電磁波は黒体放射の関係を満たすことが知られている。黒体から放射される光の周波数（波長）と強度の関係を「**プランク則 (Planck Law)**」という。関係式は以下の通りである。

$$B_\nu(T)\,d\nu d\Omega = \frac{2h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right]-1}\,d\nu d\Omega \quad \left[\mathrm{erg}\cdot\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{cm}^{-2}\right] \tag{1}$$

$$B_\lambda(T)d\lambda d\Omega = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left[\frac{hc}{\lambda kT}\right]-1}\,d\lambda d\Omega \quad \left[\mathrm{erg}\cdot\mathrm{sec}^{-1}\mathrm{cm}^{-2}\right] \tag{2}$$

式から明らかの様に、**黒体の温度が高ければ高いほど波長のピークは左に移動し、波長の短い（＝周波数の高い）電磁波が放射される割合が多くなる。**

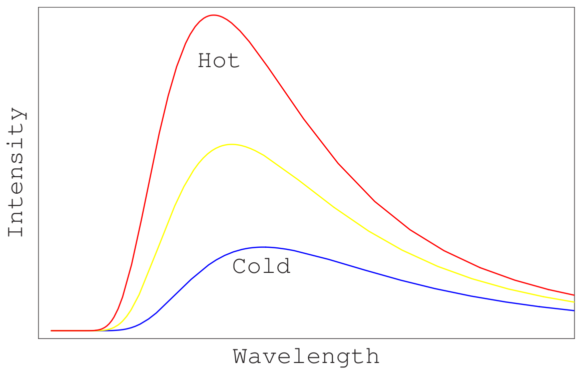


図 1　波長-強度関係

2 Blackbody Radiation の極限近似

2.1 Rayleigh-Jeans law

$h\nu \ll kT$ のとき、

$$\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1 = \frac{h\nu}{kT} + o\left(\frac{h\nu}{kt}\right)$$

であるから、Eq.(1) は、

$$B_\nu^{\mathrm{RJ}}(T) = \frac{2\nu^2}{c^3}kT$$

と書けるこれを **Rayleigh-Jeans law** という。

2.2 Wien law

$h\nu \gg kT$ のとき、

$$\frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1} \sim \exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]$$

と書けることから、Eq.(1) は、

$$B_\nu^{\mathrm{W}}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^3}\exp\left[-\frac{h\nu}{kT}\right]$$

となる。これを **Wien law** と言う。

3 超越方程式の数値解

3.1 Newton 法：壱変数の場合

超越方程式は解析的に解くことのできない方程式のことを指す。Newton 法は超越方程式の根を数値的に求める方法の一つである。例えば方程式 $g(x) = 0$ について、$x = x^0$ の近傍にある根 $\bar{x}$ を求めることを考える。x^0 が方程式の根 $\bar{x}$ の十分近傍にあるとすれば、近似的に

$$0 = g(\bar{x}) = g\left(x^0 + \bar{x} - x^0\right) \cong g(x^0) + \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x^0}(\bar{x} - x^0)$$

とすることができる。Newton 法では、この $x = x^0$ の近傍にある根 $\bar{x}$ を、

$$x^1 \equiv x^0 - \frac{g(x^0)}{\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x^0}}$$

として近似的に求める。しかしながら、このようにして求められた $\bar{x} = x^1$ は十分な精度で $g(\bar{x}) = 0$ を満たすとは限らないので、上の x^0 を x^1 で置き換えて同じ手続きを繰り返すことを考える。すなわち、この手続き

$$x^{i+1} \equiv x^i - \frac{g(x^i)}{\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x^i}}$$

を何度か繰り返して、ある十分に小さな数 ϵ について

$$\left|g\left(x^{i+1}\right)\right| < \epsilon$$

を満たす x^{i+1} をもとめ、それを求める根 $\bar{x}$ であると考える。もし上のように関数 $g(x)$ に壱のオーダーの定数が含まれているときは、例えば $\epsilon \sim 10^{-6}$ 程度の小さな数で十分精度よく根が求められることが多い。**一般に、このようにして根が上手く求められるか否かは、上手く推定値 x^0 を選べるか否かにかかっている。**

3.2 Newton 法：弐変数の場合

二変数 x, y についての連立方程式

$$f(x,y) = 0, \qquad g(x,y) = 0$$

の根を求めることを考える。壱変数の場合と同じように考えると

$$\begin{aligned} f(x_0+\delta x, y_0+\delta y) &\cong f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_0 \delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_0 \delta y = 0 \\ g(x_0+\delta x, y_0+\delta y) &\cong g(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_0 \delta x + \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_0 \delta y = 0 \end{aligned}$$

として

$$\begin{pmatrix} f_{x0} & f_{y0} \\ g_{x0} & g_{y0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix}$$

が得られる。ここで

$$f_{x0} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_0 = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0}$$

などである。これから逆行列を使って

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_{x0} & f_{y0} \\ g_{x0} & g_{y0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta x = \frac{g_{y0} f_0 - f_{y0} g_0}{f_{y0} g_{x0} - f_{x0} g_{y0}}, \quad \delta y = \frac{-g_{x0} f_0 + f_{x0} g_0}{f_{y0} g_{x0} - f_{x0} g_{y0}}$$

であるから、これらを使って

$$x_0 + \delta x \to x_0 \qquad y_0 + \delta y \to y_0$$

として、上の手順を繰り返し、適当に小さな数 ϵ_1 と ϵ_2 について

$$|f(x_0,y_0)| < \epsilon_1 \quad |g(x_0,y_0)| < \epsilon_2$$

または

$$|f(x_0,y_0)|^2 + |g(x_0,y_0)|^2 < \epsilon$$

が成立するような (x_0, y_0) が求められれば、それを根（の一つ）であると考える。

4 Wien Displacement Law の導出

Eq.(1) で強度が最大になるときの周波数 ν_{peak} を考えると、

$$\left.\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu}\right|_{\nu=\nu_{\text{peak}}} = 0$$

が成り立つ。今、$x = (h\nu)/(kT)$ とおいて

$$B_\nu(T) \propto \frac{x^3}{e^x - 1} = f(x)$$

として、$f(x)$ が最大となる x の値を求めることを考える。

$$f'(x) = \frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad 従って、\quad g(x) = 3(e^x - 1) - xe^x$$

などとして、関数 $g(x)$ の零点 $g(x) = 0$ を数値的に求めると、

$$x = 2.82143\cdots$$

となるので、 $\nu_{\rm peak}$ は

$$h\nu_{\rm peak} = 2.82kT \quad \text{or} \quad \nu_{\rm peak} = 5.88 \times 10^{10} T \quad \text{Hz} \tag{3}$$

となる。同様に、

$$\left.\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_{\rm peak}} = 0$$

を考えると $y = (hc)/(\lambda kT)$ とおいて、

$$B_\lambda(T) \propto \frac{y^5}{e^y - 1} = F(y)$$

として、$F(y)$ が最大となる y の値を求める。

$$F'(y) = \frac{5y^4}{e^y - 1} - \frac{y^5 e^y}{(e^y - 1)^2}, \quad 従って、\quad G(y) = 5(e^y - 1) - ye^y$$

より、 $G(y) = 0$ を数値的に解くと、

$$y = 4.96511\cdots$$

であるから、

$$\lambda_{\rm peak} = \frac{0.290}{T} \quad \text{cm} \tag{4}$$

となる。Eq.(3),Eq.(4) を **Wien Displacement Law** という。

5 Stefan-Boltzmann expression

Eq.(1) を積分すると、

$$\mathcal{U}(T) = \int B_\nu(T)\, d\nu d\Omega = \frac{2h}{c^3} \int \frac{\nu^3}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1} d\nu d\Omega = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3 d\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\exp\left[\frac{h\nu}{kT}\right] - 1}$$

$$= \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty dx\, \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} T^4, \qquad \because \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

となるので、

$$\mathcal{U}(T) = \sigma T^4 \quad \left[\mathrm{W \cdot m^{-2}}\right] \tag{5}$$

を得る。ここで

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} = 5.670400(40) \times 10^{-8} \left[\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot T^{-4}}\right] \quad \text{：Stefan-Boltzmann 定数}$$

である。

6　数値積分

ある関数の積分は必ずしも解析的に求められるとは限らない。そのような場合は数値積分を用いる。ここでは、**シンプソン則**を考えてみる。

6.1　シンプソン則

一般に補間関数の近似の精度を上げれば、数値積分の精度が高くなることが予想される。そこで二次関数で近似することを考える。

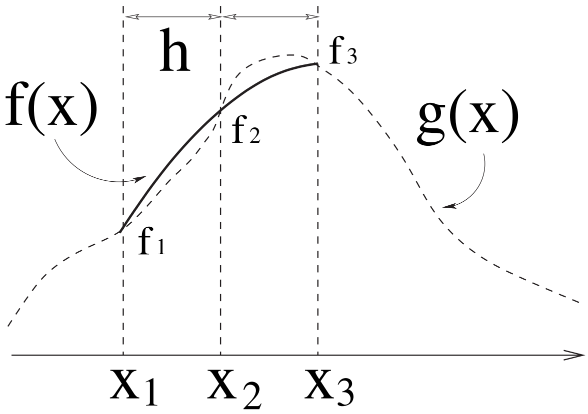


図 2　二次曲線での補完

二次関数で補間するには三点の場合を考えてからそれを一般化すればいいので、三点 x_1, x_2, x_3 を等間隔として、その点における関数値 f_1, f_2, f_3 とする。これを

$$f(x) = a\,(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

で補完することを考える。$h = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ とおくと、すぐに

$$f_1 = ah^2 - bh + c, \quad f_2 = c, \quad f_3 = ah^2 + bh + c,$$

が成り立つことが分かるので、これを解いて

$$a = \frac{f_1 + f_3 - 2f_2}{2h^2}, \quad b = \frac{f_3 - f_1}{2h}, \quad c = f_2$$

を得る。以上より被積分関数を $g(x)$ とすると積分値は

$$\int_{x_1}^{x_3} g(x)dx \cong \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f_1 + 4f_2 + f_3\right]$$

と近似することができる。

参点を一般化する場合には積分の近似値を S_N とおいて、

$$S_N = \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{N-1}\left[f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})\right] = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{j=1}^{N} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(x_{2j})\right]$$

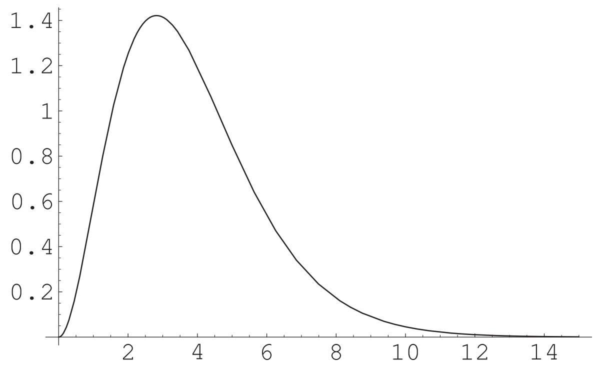
v とすることで、計算することができる。

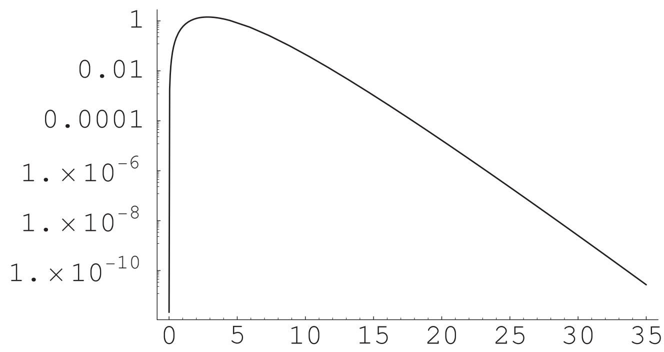
6.2 計算

実際に先ほどの積分 $\int_0^\infty x^3/(e^x-1)dx$ を計算してみる。この積分は、積分変数 x の値を大きくとると e^x が数値的に発散してしまうので、

$$I=\int_0^\infty dx\,\frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}\cong\int_\epsilon^A dx\,\frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}\sim I(\epsilon,A) \tag{6}$$

と書き換えて計算するのが適当である。ここで $A>0$ は適当に大きな数であり、$\epsilon>0$ は適当に小さな数である。$\epsilon=0$ とすると、数値積分領域に被積分関数中分母が $1-e^{-x}$ が零となる点が含まれることになるので、数値計算をするときは、適当に小さな ϵ を使う必要がある。今回は A を指定するのではなく I_n と I_{n+1} の差の絶対値が十分小さな値以下になるまで計算する様にした。実際のところはグラフから分かるように高々 $x\sim35$ 程度で被積分関数は 10^{-10} 程度の大きさになるので、A の値が十分大きくなる前に値が求まることになる。





計算結果は次の通りである。($\epsilon=dx$ としてある。)

$$I(10^{-1},45.4000)=6.49361995786866695233$$
$$I(10^{-2},42.7400)=6.49393907034742845 50$$
$$I(10^{-3},40.2220)=6.49393940193391649 98$$
$$I(10^{-4},37.7242)=6.49393940226090826 68$$
$$I(10^{-5},35.2147)=6.49393940223079724 21$$
$$I(10^{-6},32.6888)=6.49393940193300345 24$$

$\epsilon=10^{-4}$ のときの値が最も理想値に近い。