円偏光した電磁波の性質

$z = 0$ の面内に電荷 q、質量 m の粒子が存在し**右回りに円偏光**した電磁波の元で**定常的**な運動をしている状況を考える。空間は真空とする。

1 右回りに円偏光した電磁波

1.1 電場

平面電磁波が、z **軸の負の方向から正の方向**に伝わっていて

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x(t,z) \\ E_y(t,z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ -E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

で電場成分が与えられているとする。

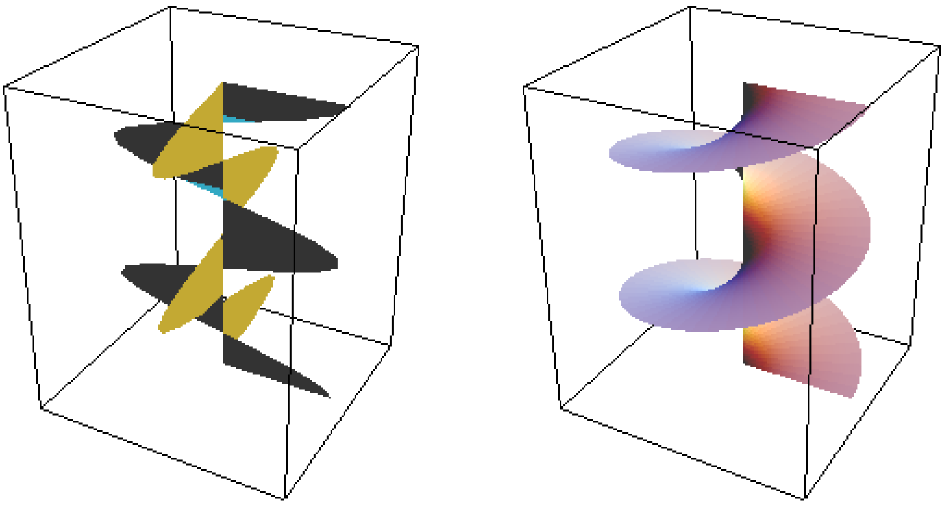


図 1　左：電場の x,y 成分、右：電場の x,y 成分の和（上方向が z 軸正の向きである）

粒子には速度に比例する抵抗力 $-\gamma\mathbf{v}$ が働いているとする。このとき粒子の運動方程式は、

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma\mathbf{v} + q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \tag{2}$$

で与えられる。

1.2　磁場

今考えている電磁波は平面電磁波であるから、**真空中の Maxwell 方程式**より

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}, \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

という関係式が成り立っていることが分かる。つまり磁場と電場は直交しており、進行方向は $\mathbf{E} \to \mathbf{B}$ としたとき、右ねじが進む方向であるから結局（符号に注意して）

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x(t,z) \\ B_y(t,z) \\ B_z(t,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \sin(\omega t - kz) \\ B_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる ($E_0 = B_0$)。このとき確かに

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} &= E_0^2\left[\cos(\omega t - kz)\,\sin(\omega t - kz) - \cos(\omega t - kz)\,\sin(\omega t - kz)\right] = 0 \\ \mathbf{k} &= \frac{\omega}{c}\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B_0^2} = \frac{\omega}{c}\frac{1}{B_0^2}\left(0, 0, E_0^2\left[\cos^2(\omega t - kz) + \sin^2(\omega t - kz)\right]\right) = \frac{\omega}{c}(0,0,1) \end{aligned}$$

であるから、上記の関係式が成り立っていることが分かる。

2　抵抗力が慣性力よりも圧倒的に強い場合

抵抗力が慣性力 $m(d\mathbf{v}/dt)$ よりも圧倒的に強く、抵抗力と Lorentz 力の釣り合いで定常運動が実現されているとする。$v/c \ll 1, B_0 = E_0$ より運動方程式中の磁場による Lorentz 力の項は第零近似で無視できる。この近似で粒子は。$z = 0$ の平面内を動くことになる。

2.1　粒子の速度の時間変化

運動方程式を各成分について書き下すと

$$\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= -\gamma v_x + q\left[E_x + \frac{1}{c}\left(v_y B_z - v_z B_y\right)\right] = -\gamma v_x + q\left[E_0\cos(\omega t - kz) - \frac{v_z}{c}E_0\cos(\omega t - kz)\right] \\ &= -\gamma v_x + qE_0\cos(\omega t - kz)\left(1 - \frac{v_z}{c}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} m\frac{dv_y}{dt} &= -\gamma v_y + q\left[E_y + \frac{1}{c}\left(v_z B_x - v_x B_z\right)\right] = -\gamma v_y + q\left[-E_0\sin(\omega t - kz) + \frac{v_z}{c}E_0\sin(\omega t - kz)\right] \\ &= -\gamma v_y + qE_0\sin(\omega t - kz)\left(-1 + \frac{v_z}{c}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -\gamma v_z + q\left[E_z + \frac{1}{c}\left(v_x B_y - v_y B_x\right)\right] = -\gamma v_z + qE_0\left[\frac{v_x}{c}\cos(\omega t - kz) - \frac{v_y}{c}\sin(\omega t - kz)\right] \tag{7}$$

となる。抵抗力が Lorent 力に比べて十分大きいため、抵抗力と Lorentz 力の釣り合いで定常運動が実現されており、$v/c \ll 1$ であるから運動方程式 (5),(6),(7) は次のように書き換えられる。

$$\begin{cases} \gamma v_x = qE_0\cos(\omega t - kz) \\ \gamma v_y = -qE_0\sin(\omega t - kz) \\ \gamma v_z = 0 \end{cases} \tag{8}$$

以上より、速度の時間変化は

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{qE_0}{\gamma}\cos(\omega t - kz) \\ v_y(t) = -\dfrac{qE_0}{\gamma}\sin(\omega t - kz) \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

となる。

2.2　粒子の軌道

粒子の軌道を考える。但し、円運動の中心が原点になるように座標を選ぶものとする。速度をそれぞれの成分について、時間 t で不定積分する。まず、z 成分を考えると、軌道の中心が原点であるようにすると、

$$z(t) = \mathrm{Const} = 0 \tag{10}$$

である。$z(t)$ が定数であることが分かったので、x, y 成分についての積分は簡略化され、

$$x(t) = \int v_x(t)\,dt = \frac{qE_0}{\gamma\omega}\sin\omega t + C_1$$
$$y(t) = \int v_y(t)\,dt = \frac{qE_0}{\gamma\omega}\cos\omega t + C_2$$

となる。

これは xy 平面上で円を描く軌道であるが、中心が原点になるようにすると $C_1 = C_2 = 0$ となり、結局

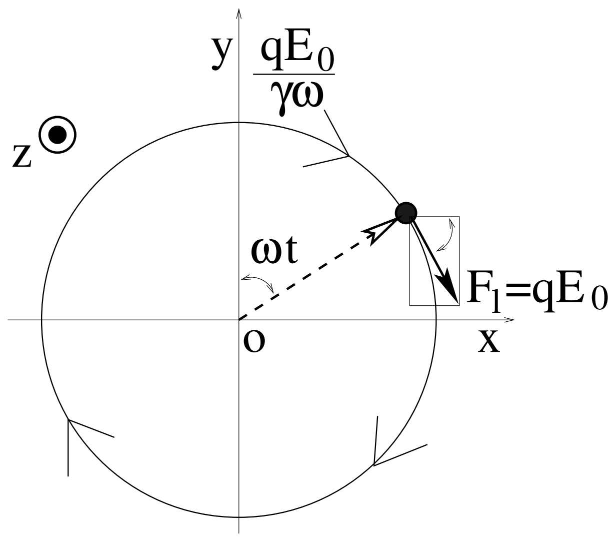
$$x(t) = \frac{qE_0}{\gamma\omega}\sin\omega t \tag{11}$$

$$y(t) = \frac{qE_0}{\gamma\omega}\cos\omega t \tag{12}$$

を得る。x, y について整理すると

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{qE_0}{\gamma\omega}\right)^2$$

となるので、粒子が xy 平面上で半径 $qE_0/\gamma\omega$ の時計回りの円運動をすることが分かる。



2.3　電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー

電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー（=電磁波の仕事率、仕事の時間についての一階微分）を考える。**粒子は電磁波によって与えられたエネルギーによって運動をしている（エネルギーが与えられなかったら、抵抗力により運動は止まってしまう。全ての運動は電磁波の影響によるもの）**。今考えているのは、電磁波が与えるエネルギー量であって、粒子が持っているエネルギーではない。電磁波は Lorentz 力という形で粒子に影響を及ぼしているので、電磁波が Lorentz 力を用いて粒子に行っている仕事に対する仕事率が、今求めるべき値である。Lorentz 力を $\mathbf{F}_l$ とすると、求めるべき仕事率 W は $W = \mathbf{F}_l \cdot \mathbf{v}$ と書けるので、電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギーは

$$W = \mathbf{F}_l \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} qE_0\cos\omega t \\ -qE_0\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{qE_0}{\gamma}\cos\omega t \\ -\dfrac{qE_0}{\gamma}\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{q^2E_0^2}{\gamma} \tag{13}$$

となる。

2.4 電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量の一周期に渡る時間平均

電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量の x, y 成分の一周期に渡る時間平均を考える。前同様に考えると、単位時間当たりに電磁波が粒子に与えてる運動量は、粒子に働く Lorentz 力であると考えられる。これを元に計算すると、電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量の x, y 成分の一周期に渡る時間平均は

$$\bar{P}_x = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, F_{lx} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\, qE_0\cos\omega t = \frac{qE_0}{2\pi}\left[\sin\omega t\right]_0^{2\pi/\omega} = 0$$
$$\bar{P}_y = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, F_{ly} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt\, \left(-qE_0\sin\omega t\right) = \frac{qE_0}{2\pi}\left[\cos\omega t\right]_0^{2\pi/\omega} = 0$$

であるから、ともに零であることが分かる。

2.5 電磁波のトルク

電磁波が粒子に与える単位時間当たりの角運動量を考える。電磁波が粒子に与える単位時間当たりの角運動量は**電磁波のトルク**であり、これは電磁波が Lorentz 力を通じて粒子に与えるトルクである。よってトルク $\boldsymbol{\tau}$ は

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_l = \begin{pmatrix} \frac{qE_0}{\gamma\omega}\sin\omega t \\ \frac{qE_0}{\gamma\omega}\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} qE_0\cos\omega t \\ -qE_0\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{q^2E_0^2}{\gamma\omega} \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる。z 成分以外の成分は持たず、また z 成分の符号は電磁波が右回りに偏光していることからも明らかである。（電磁波が進んでくる―きた―方向に向かって、時計回りを右回りとしている。つまり**右回りに偏光している場合、トルクは電磁波が進んできた方向、つまり電磁波の進行方向と逆向きになる。**）

2.6 電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギーと、電磁波が粒子に与える単位時間当たりの角運動量の比

(13),(14) より

$$\frac{W}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{\frac{q^2E_0^2}{\gamma}}{\frac{q^2E_0^2}{\gamma\omega}} = \omega \tag{15}$$

となる。電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー（=電磁波の仕事率）と、電磁波が粒子に与える単位時間当たりの角運動量（=電磁波のトルク）の比は、電磁波が粒子に与えるエネルギーと、電磁波が粒子に与える角運動量の比である。

3 Lorentz 力による影響

電磁波の電場により粒子が速度の x, y 成分を持つため、電磁波の磁場による Lorentz 力を受ける。

3.1 磁場による Lorentz 力の成分

運動方程式 (5),(6),(7) を見ると、$v/c \ll 1$ であるために Lorentz 力の項の括弧の中身は x, y 成分について

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{v_z}{c} \sim 1 \\ -1 + \dfrac{v_z}{c} \sim -1 \end{cases}$$

となり、磁場による Lorentz 力はなくなってしまう。z 成分を見てみると小さいにせよ v/c の項のみが存在するため、磁場による Lorentz 力の影響が現れる。このことから、磁場による Lorentz 力が z 成分のみ持つことが分かる。

z 成分を書き下すと

$$F_z = \frac{qE_0}{c}\left(v_x \cos\omega t - v_y \sin\omega t\right) = \frac{qE_0}{c}\frac{qE_0}{\gamma} = \frac{q^2E_0^2}{\gamma c} \tag{16}$$

となる。

3.2 電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量

(16) から、電磁波が粒子に与える**単位時間当たりの運動量**の z 成分を考える。今の場合、電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量は、粒子が受ける Lorentz 力であると考えられるので、電磁波が粒子に与える単位時間当たりの運動量の z 成分を P_z とすると

$$P_z = F_z = \frac{q^2E_0^2}{\gamma c}$$

である。また電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー（=電磁波の仕事率）との比をとると

$$\frac{W}{P_z} = \frac{\dfrac{q^2E_0^2}{\gamma}}{\dfrac{q^2E_0^2}{\gamma c}} = c \tag{17}$$

となる。**この比は結局、電磁波が粒子に与えるエネルギーと、電磁波が粒子に与える z 成分の運動量の比である。**

3.3 定常状態に於ける粒子の速度

定常状態に於ける粒子の速度の z 成分と x, y 成分とを比較してみる。但し、粒子の速度は光速よりも十分小さいとする。定常状態は抵抗力と Lorentz 力との釣り合いであるから、運動方程式 (7) より

$$\gamma v_z = F_z \qquad \therefore\ v_z = \frac{q^2E_0^2}{\gamma^2 c} \tag{18}$$

となる。v_z と v_x or v_y の絶対値の最大値 $v = qE_0/\gamma$ との比を考えると

$$\frac{v_z}{v} = \frac{\dfrac{q^2E_0^2}{\gamma^2 c}}{\dfrac{qE_0}{\gamma}} = \frac{v}{c} \qquad \left[\therefore\ v_z = \frac{v^2}{c}\right] \tag{19}$$

であるから、粒子の速度 v が光速よりも十分小さいとすると、z 成分の速度は x, y 成分の速度に比べて十分小さいことが分かる。

4 量子力学的考察

量子力学によれば、角周波数 ω の単色の電磁波は、エネルギー $\hbar\omega$ の光子の集まりであると考えられている。

4.1 単位時間当たりに粒子が吸収する光子の数

単位時間当たりに粒子が吸収する光子の数を考える。光子一個当たりのエネルギーは $\hbar\omega$ であるから、単位時間当たりに粒子が吸収する光子の数は電磁波が粒子に与える単位時間当たりのエネルギー W を $\hbar\omega$ で割ることで得られるので、

$$(\text{単位時間当たりに粒子が吸収する光子の数}) = N = \frac{W}{\hbar\omega} = \frac{q^2E_0^2}{\gamma\hbar\omega}\ [\text{個}] \tag{20}$$

となる。

4.2 光子一個当たりの角運動量と運動量

右回りに円偏光した z 正の方向に進む電磁波を形成する光子一個当たりの角運動量、運動量を考える。(20) より

$$W = N\hbar\omega$$

とする。

(15) は電磁波が粒子に与えるエネルギーと、電磁波が粒子に与える角運動量の比である。これより電磁波が粒子に与える角運動量は

$$\frac{W}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{N\hbar\omega}{|\boldsymbol{\tau}|} = \omega \qquad \therefore\ |\boldsymbol{\tau}| = N\hbar \tag{21}$$

となる。光子が粒子に吸収されことから、これは全光子の角運動量と一致するはずである。角運動量の向きを踏まえると、(14) から進行方向と逆向きであるので、進行方向を正（z 軸正を正）とすると、

$$(\textbf{右回りに円偏光した z 軸正の方向に進む電磁波を形成する光子一個当たりの角運動量}) = -\hbar \tag{22}$$

である。

同様に考えると (17) は電磁波が粒子に与えるエネルギーと、電磁波が粒子に与える z 成分の運動量の比であるので、これより電磁波が粒子に与える z 成分の運動量は、

$$\frac{W}{P_z} = \frac{N\hbar\omega}{P_z} = c \qquad \therefore\ P_z = N\frac{\hbar\omega}{c}$$

となる。光子が粒子に吸収されことから、これは全光子の z 成分の運動量と一致するはずであり、また光子は z 方向のみの運動であるから、

$$|\,\textbf{光子一個当たりの運動量}| = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{E}{c} \tag{23}$$

となる。