

星のエネルギー源

1 核融合反応の概要

星の主なエネルギー源は軽い原子核（水素やヘリウム等）の間で起こる核融合反応であると考えられている。核融合反応は基本的には二つ（ときにはそれ以上の）原子核の衝突の結果として起こる。核融合によるエネルギーの発生について簡単に考えてみる。

1.1 CN 系でのエネルギー保存則

一般に原子核 X に粒子 a が衝突して原子核 Y と粒子 b ができる反応を $X(a, b)Y$ などと書く。二つの粒子の衝突を相対論的に取り扱い、その非相対論的極限をとるとき、例えば質量中心系（CN 系）で見たエネルギー保存則は

$$M_X c^2 + M_a c^2 + \frac{1}{2}\mu_{aX} \vec{u}_{aX}^2 = M_Y c^2 + M_b c^2 + \frac{1}{2}\mu_{bY} \vec{u}_{bY}^2 \quad (1)$$

で与えられる。ここで $\mu_{aX} = M_X M_a / (M_X + M_a)$ なる換算質量である。核反応前後に於ける粒子質量の和の違いが、**CM** 系で見たときの反応前後に於ける二粒子の運動エネルギーの和 $\mu \vec{u}^2 / 2$ の違いとなって現れることが分かる。 $M_X + M_a > M_Y + M_b$ のとき、 $\mu_{aX} \vec{u}_{aX}^2 / 2 < \mu_{bY} \vec{u}_{bY}^2 / 2$ であるから、この反応が数多く起こると考えれば、CN 系で見たとき反応後の二粒子 b と Y の運動エネルギーの和 $\mu_{bY} \vec{u}_{bY}^2 / 2$ が、反応前の二粒子 a と X の運動エネルギーの和 $\mu_{aX} \vec{u}_{aX}^2 / 2$ に比べて平均的に大きくなると考えることができる。これを核反応による気体粒子の熱運動エネルギーの増加、つまり気体温度の上昇に結びつけることができる。

1.2 発熱反応、吸熱反応

今 $E_{aX} = \mu_{aX} \vec{u}_{aX}^2 / 2$ 、 $E_{bY} = \mu_{bY} \vec{u}_{bY}^2 / 2$ などとし、更に原子核の質量のかわりに原子の質量を用い（従って、反応の前後に於いて電子の原子核への結合エネルギーの差を無視することになる）、質量数（mass number）A で原子番号（＝陽子の数：atomic number）Z の原子の質量を $M_{AZ} = \bar{M}_{AZ} M_u$ と書いて、

$$M_{AZ} c^2 \equiv \bar{M}_{AZ} M_u c^2 = A M_u c^2 + \Delta M_{AZ} \quad (2)$$

$$\Delta M_{AZ} \equiv (\bar{M}_{AZ} - A) M_u c^2 = 931.478 (\bar{M}_{AZ} - A) \text{ [MeV]} \quad (3)$$

などと表すことにすれば、

$$E_{aX} + \Delta M_a + \Delta M_X = E_{bY} + \Delta M_b + \Delta M_Y \quad (4)$$

$$Q \equiv E_{bY} - E_{aX} = \Delta M_a + \Delta M_X - (\Delta M_b + \Delta M_Y) \quad (5)$$

などを得る。ここで、

$$M_u \equiv C_6^{12} / 12 = 1.66043 \times 10^{-24} \text{ [g]} \quad (6)$$

は原子質量単位であり、また $1 \text{ [MeV]} = 10^6 \text{ [eV]} = 1.6021 \times 10^{-6} \text{ [erg]}$ である。 Q 値が正であれば反応は発熱反応 (**exothermic**) であり、負であれば吸熱反応 (**endothermic**) である。

1.2.1 例巻

(5) より

$$E_{bY} = E_{aX} + Q = E_{aX} + \Delta M_a + \Delta M_X - (\Delta M_b + \Delta M_Y)$$

となる、よって $\Delta M_d = 13.13591$ [MeV], $\Delta M_{C^{12}} = 0$ [MeV], $\Delta M_p = 7.28899$ [MeV], $\Delta M_{C^{13}} = 3.12460$ [MeV] であるから、 $C^{12}(d,p)C^{13}$ について、

$$\begin{aligned} E_{pC^{13}} &= E_{dC^{12}} + \Delta M_d + \Delta M_{C^{12}} - (\Delta M_p + \Delta M_{C^{13}}) \\ &= E_{dC^{12}} + 13.13591 + 0 - (7.28899 + 3.12460) \\ &= E_{dC^{12}} + 2.72232 \text{ [MeV]} \end{aligned}$$

となる。

1.2.2 例式

$He^3(He^3, 2p)He^4$ によって発生するエネルギーは、 $\Delta M_{He^3} = 14.93134$ [MeV], $\Delta M_{He^4} = 2.42475$ [MeV] であるから

$$\begin{aligned} Q &= \Delta M_{He^3} + \Delta M_{He^3} - (\Delta M_{2p} + \Delta M_{He^4}) = 2\Delta M_{He^3} - (2\Delta M_p + \Delta M_{He^4}) \\ &= 2 \cdot 14.93134 - (2 \cdot 7.28899 + 2.42475) \\ &= 12.85995 \text{ [MeV]} \end{aligned}$$

となる。

1.3 結合エネルギー

さて原子核の結合エネルギー (**binding energy**) を

$$E_b \equiv [(A - Z)m_n + Zm_p - M_{AZ}] c^2 = [(A - Z)(m_n - m_p) + Am_p - M_{AZ}] c^2 \quad (7)$$

で定義する。ここで m_n と m_p はそれぞれ中性子と陽子の質量である。この E_b の定義は原子核をばらばらの核子に壊すのに必要な最低限のエネルギーを表してる。これを使って核子一個当たりの平均結合エネルギーを

$$f = \frac{E_b}{A} \quad (8)$$

で定義する。

$$m_p c^2 = 938.27231 \pm 0.00028 \text{ [MeV]}, \quad m_n c^2 = 939.56563 \pm 0.00028 \text{ [MeV]}$$

$$\therefore (m_n - m_p)c^2 = 1.29332 \text{ [MeV]}, \quad M_u c^2 = 931.47747 \text{ [MeV]}$$

であるから

$$E_b = 1.29332(A - Z) + 938.27231 A - 931.47747 A - \Delta M_{AZ} = 8.08816 A - 1.29332 Z - \Delta M_{AZ}$$

となる。よって

$$f = \frac{E_b}{A} = 8.08816 - 1.29332 \frac{Z}{A} - \frac{\Delta M_{AZ}}{A}$$

と書ける。これを用い f を水素原子と $A = 2Z$ の原子核とについて計算し、 f を縦軸、 A を横軸としてグラフを書くと図 1 のようになる。ちなみに Z が同じ元素を同位元素 (**isotope**)、 A が同じ元素を同重元素 (**isobar**) という。

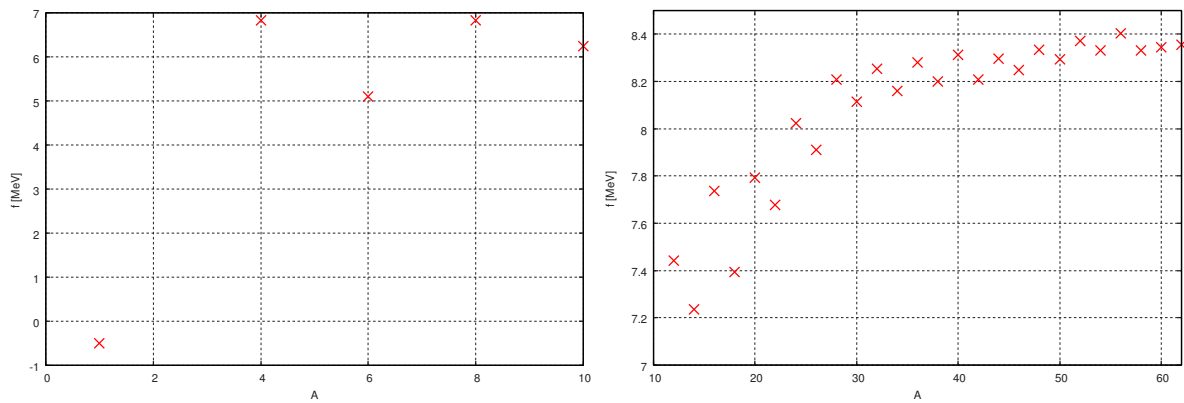


図1 原子番号と核子一個当たりの平均結合エネルギーの関係

1.3.1 例壱

四つの水素原子が反応を起こして一個のヘリウムになるとして発生するエネルギーを計算すれば、

$$4 \cdot 7.28899 - 2.42475 \cong 26.73 \text{ [MeV]}$$

となるが、これを4で割って核子一個当たりの値を求めると、6.68 [MeV]である。これはもともと核子一個の静止質量エネルギー 931.478 [MeV]の約0.7%である。

1.3.2 例弐

同様の方法で、鉄 Fe^{52} について、最初52個の水素原子が反応を起こして一個の Fe^{52} になるとして核子一個当たりの発生エネルギーを求めると

$$\frac{52 \cdot 7.28899 - (-48.3280)}{52} = 427.35548/52 \cong 8.22 \text{ [MeV]}$$

となる。これは核子一個当たりの静止質量エネルギーの約0.88%である。

1.4 最も安定な原子核

詳細な計算によれば、最も結合エネルギーが大きい原子核は Fe^{56} であることが知られている。(より小さな結合エネルギーを持つ)軽い原子核が融合して(より大きな結合エネルギーを持つ)大きな原子核を作るとき、生成核が Fe^{56} より小さい場合は原則的に、核融合によりエネルギーを生成することになる。逆に、とても大きな原子核が分裂して、生成される原子核が Fe^{56} よりも大きい場合には、核分裂によりエネルギーが発生することになる。

2 核反応の反応率

核反応 $X(a, b)Y$ の反応率を計算することを考える。粒子 X の数密度を N_X とし、粒子 a の数密度を N_a と書くことにする。更に、反応の断面積を $\sigma_{aX}(v)$ と書き、二粒子の相対速度 v が v と $v + dv$ との間にある粒子 a (または粒子 X) の割合を $\phi(v)$ (但し $\int_0^\infty \phi(v)dv = 1$) と書くことにする。このとき、反応率(単位時間単位体積当たりにかかる反応の数)は

$$r_{aX} = N_a N_X \int_0^\infty v \sigma_{aX}(v) \phi(v) dv \equiv N_a N_X \langle v \sigma \rangle_{aX} \quad (9)$$

与えられる。粒子 X と粒子 a が同一である場合を考えて

$$r_{aX} = \frac{N_a N_X \langle v\sigma \rangle_{aX}}{1 + \delta_{aX}} \quad (10)$$

と書く必要がある。ここで δ_{aX} はクロネッカーのデルタである。後の便利のために、

$$\lambda_{aX} = \langle v\sigma \rangle_{aX} \quad (11)$$

なる記号を導入する。核反応による粒子 X の数密度の時間変化は

$$\left(\frac{\partial N_X}{\partial t} \right)_a = -(1 + \delta_{aX}) r_{aX} = -N_a N_X \lambda_{aX} \equiv -\frac{N_X}{\tau_a(X)} \quad (12)$$

与えられる。ここで $(1 + \delta_{aX})$ は一回の反応で消滅する粒子 X の数であり、また

$$\tau_a(X) = \frac{1}{N_a \lambda_{aX}} \quad (13)$$

は粒子 X の粒子 a との反応に対する寿命である。核反応 $X(a, b)Y$ の Q 値を Q_{aX} と書けば、この反応によって単位時間単位体積あたりに発生する（または吸収される）エネルギーの量は $Q_{aX} r_{aX}$ と書ける。このとき等式

$$\rho \varepsilon_{ax} = Q_{aX} r_{aX} \quad (14)$$

で単位時間単位体積あたりに発生するエネルギー ε_{ax} を定義することができる。この ε_{ax} を使って r_{aX} を

$$r_{aX} = \frac{\rho \varepsilon_{ax}}{Q_{aX}} \quad (15)$$

と表せば

$$\left(\frac{\partial N_X}{\partial t} \right)_a = -(1 + \delta_{aX}) \frac{\rho \varepsilon_{ax}}{Q_{aX}} \quad (16)$$

と書くこともできる。また、質量密度 ρ のガス中に含まれる粒子 X の割合を質量比で X と書き、粒子 X 一つの質量を M_X と書けば、 $N_X = \rho X / m$ であるので

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_a = -(1 + \delta_{aX}) \frac{m_X \varepsilon_{ax}}{Q_{aX}} \quad (17)$$

と書くこともできる。もし、更なる反応 $c + Y \rightarrow d + Z + Q_{cY}$ が起こるとすれば $Q_{cY} r_{cY} = \rho \varepsilon_{cY}$ として、

$$\frac{\partial N_Y}{\partial t} = r_{aX} - (1 + \delta_{cY}) r_{cY} \quad \text{または} \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = m_Y \frac{\varepsilon_{ax}}{Q_{aX}} - (1 + \delta_{cY}) m_Y \frac{\varepsilon_{cY}}{Q_{cY}} \quad (18)$$

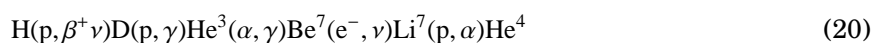
などとなる。

3 連鎖反応

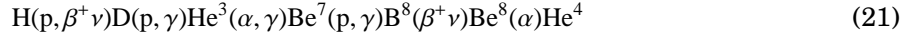
生まれたばかりの星がその中心で最初行う核融合反応は、水素をヘリウムに変換する（連鎖）核反応で、普通 **pp-chain** と **CNO cycle** の二系列の連鎖反応が重要であるとされている。pp-chain では三つの系列が重要とされ、それぞれ ppI、ppII、そして ppIII とすれば、ppI の連鎖反応は



と書け、ppII の連鎖反応は



と書け、ppIII の連鎖反応は



と書くことができる。ここで $p = \text{H}$, $\alpha = \text{He}^4$, $\gamma = \text{photon}$, $\text{D} = \text{deuterium}$ であり、 $\text{Be}^7(e^-, \nu)$ は電子捕獲を、 $\text{B}^8(\beta^+ \nu) \text{Be}^8$ は B^8 (中の陽子) の β^+ 崩壊 $\text{B}^8 \rightarrow \text{Be}^8 + e^+ + \nu$ ($p \rightarrow n + e^+ + \nu$) を表し、 $\text{Be}^8(\alpha) \text{He}^4$ は $\text{Be}^8 \rightarrow 2\text{He}^4$ の意味である。以下では、粒子の数密度をその原子記号をそのまま使って表すことにする。

3.1 連鎖核反応 ppl

連鎖核反応 ppI に於ける各原子核の数密度変化を考える。H は (19) より、 $\text{H}(p, \beta^+) \text{D}$, $\text{D}(p, \gamma) \text{He}^3$ で消滅、 $\text{He}^3(\text{He}^3, 2p) \text{He}^4$ で生成されるので、

$$\frac{d\text{H}}{dt} = -2r_{\text{pp}} - r_{\text{pD}} + 2R_{\text{He}^3\text{He}^3} = -2\lambda_{\text{pp}} \frac{\text{H}^2}{2} - \lambda_{\text{pD}} \text{HD} + 2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} \quad \because (10), (12) \quad (22)$$

となる。以下同様に考えると D は $\text{H}(p, \beta^+) \text{D}$ で生成され、 $\text{D}(p, \gamma) \text{He}^3$ で消滅するので、

$$\frac{d\text{D}}{dt} = r_{\text{pp}} - r_{\text{pD}} = \lambda_{\text{pp}} \frac{\text{H}^2}{2} - \lambda_{\text{pD}} \text{HD} \quad (23)$$

となる。He³ は $\text{D}(p, \gamma) \text{He}^3$ で生成され、 $\text{He}^3(\text{He}^3, 2p) \text{He}^4$ で消滅するので

$$\frac{d\text{He}^3}{dt} = r_{\text{pD}} - r_{\text{He}^3\text{He}^3} = \lambda_{\text{pD}} - 2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} \quad (24)$$

となる。He⁴ は $\text{He}^3(\text{He}^3, 2p) \text{He}^4$ で生成されるので

$$\frac{d\text{He}^4}{dt} = r_{\text{He}^3\text{He}^3} = \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} \quad (25)$$

となる。これを時間積分するとき、各反応に於けるその反応の速さを決める係数 λ_{aX} または σ_{aX} が大きく異なることを使うと、何がどのように起こるか見やすくなることがある。例えば、星の内部で実現される温度や化学組成では一般に

$$\lambda_{\text{pD}} \gg \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \gg \lambda_{\text{pp}} \quad (26)$$

が成り立っている。この場合 (23) を良い近似で H が一定である (H の変化する速さに比べ、D の変化する速さがずっと速い) とし、更に λ_{pD} と λ_{pp} が一定であるとして時間について積分することができる。この近似の元で積分すると、これはベルヌーイの微分方程式の形であるから

$$\begin{aligned} D(t) &= e^{-\int \lambda_{\text{pD}} \text{H} dt} \left\{ \int \frac{\lambda_{\text{pp}} \text{H}^2}{2} e^{\int \lambda_{\text{pD}} \text{H} dt} dt + C \right\} = e^{-\lambda_{\text{pD}} \text{H} t} \left(\int \frac{\lambda_{\text{pp}} \text{H}^2}{2} e^{\lambda_{\text{pD}} \text{H} t} dt + C \right) \\ &= e^{-\lambda_{\text{pD}} \text{H} t} \left(\frac{\lambda_{\text{pp}} \text{H}}{2\lambda_{\text{pD}}} [e^{\lambda_{\text{pD}} \text{H} t} - 1] + C \right) = C e^{-\lambda_{\text{pD}} \text{H} t} + \frac{\lambda_{\text{pp}} \text{H}}{2\lambda_{\text{pD}}} (1 - e^{-\lambda_{\text{pD}} \text{H} t}) \end{aligned}$$

となるが、初期値 $D(0) = D_0$ を考慮すると

$$D(t) = D_0 e^{-\lambda_{\text{pD}} \text{H} t} + \frac{\lambda_{\text{pp}} \text{H}}{2\lambda_{\text{pD}}} (1 - e^{-\lambda_{\text{pD}} \text{H} t}) = D_0 e^{-t/\tau_{\text{p}}(\text{D})} + \frac{\lambda_{\text{pp}} \text{H}}{2\lambda_{\text{pD}}} (1 - e^{-t/\tau_{\text{p}}(\text{D})}) \quad (27)$$

と求めることができる。従って $\tau_{\text{p}}(\text{D}) \equiv 1/(\lambda_{\text{pD}} \text{H})$ が短いとすれば、短時間 (厳密には $t \rightarrow \infty$) で

$$D = \frac{\lambda_{\text{pp}} \text{H}}{2\lambda_{\text{pD}}} \quad (28)$$

となることが分かる。これは又、(23) に於いて左辺の時間微分を零とおいたとき、つまり反応が平衡に達したときの解になっている。これを使えば (24) は

$$\frac{d\text{He}^3}{dt} = -\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 + \frac{\lambda_{\text{pp}}\text{H}^2}{2} \quad (29)$$

と書ける。 $\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \gg \lambda_{\text{pp}}$ のとき、同様な理屈で、やはり H を一定として (29) を積分すると、これはリカッチの微分方程式の形をしているので、特解 $\alpha = \text{H} \sqrt{\lambda_{\text{pp}}/(2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3})}$ はすぐ分かり、一般解は

$$\text{He}^3 = \frac{e^{\int -2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} dt}}{\int \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} e^{\int -2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} dt} + C} + \alpha = \frac{e^{-2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} t}}{\int \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} e^{-2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} t} + C} + \alpha = -2\alpha \frac{e^{-2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} t}}{e^{-2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} t} + C'} + \alpha$$

となるが、これを初期条件 $\text{He}^3(0) = \text{He}_0^3$ の元で解けば

$$\begin{aligned} [(\text{He}^3 - \alpha) + 2\alpha] e^{-2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} t} &= C'' (\text{He}^3 - \alpha) \\ (\text{He}^3 + \alpha) e^{-2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} t} &= C'' (\text{He}^3 - \alpha) \implies C'' = \frac{\text{He}_0^3 + \alpha}{\text{He}_0^3 - \alpha} \end{aligned}$$

となるので、結局

$$\frac{\text{He}^3 + \alpha}{\text{He}^3 - \alpha} = \frac{\text{He}_0^3 + \alpha}{\text{He}_0^3 - \alpha} e^{-2\alpha\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} t} \quad (30)$$

を得る。従って $\tau \sim 1/\sqrt{2\lambda_{\text{pp}}\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3}}$ 程度の時間の経過（厳密には $t \rightarrow \infty$ ）で

$$\text{He}^3 = \text{H} \sqrt{\frac{\lambda_{\text{pp}}}{2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3}}} \quad (31)$$

となることが分かる。これは (29) で左辺を零とおいたとき（反応が平衡に達したとき）の解になっている。(28),(31) を使うと、(22) は

$$\begin{aligned} \frac{d\text{H}}{dt} &= -2\lambda_{\text{pp}} \frac{\text{H}^2}{2} - \lambda_{\text{pD}}\text{HD} + 2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} = -\lambda_{\text{pp}} \frac{\text{H}^2}{2} - \lambda_{\text{pD}} \frac{\lambda_{\text{pp}}\text{H}^2}{2\lambda_{\text{pD}}} + 2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{\lambda_{\text{pp}}\text{H}^2}{2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3}} \\ &= -\lambda_{\text{pp}} \frac{\text{H}^2}{2} = -2r_{\text{pp}} \end{aligned} \quad (32)$$

となり、(25) は

$$\frac{d\text{He}^4}{dt} = \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} = r_{\text{He}^3\text{He}^3} \quad (33)$$

$$= \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{\text{H}^2\lambda_{\text{pp}}}{2 \cdot 2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3}} = \frac{\lambda_{\text{pp}}}{4} \text{H}^2 = \frac{r_{\text{pp}}}{2} \quad (34)$$

となる。

さて、連鎖核反応 ppI によるエネルギー発生率は、形式的に

$$\rho\varepsilon_{\text{ppI}} = (Q_{\text{pp}} - Q_{\nu})r_{\text{pp}} + Q_{\text{pD}}r_{\text{pD}} + Q_{\text{He}^3\text{He}^3}r_{\text{He}^3\text{He}^3} \quad (35)$$

と書けるが、反応 (23),(24) が平衡に達しているとすれば、(28) と (31) より

$$r_{\text{pD}} = \lambda_{\text{pD}}\text{HD} = \lambda_{\text{pp}} \frac{\text{H}^2}{2} = r_{\text{pp}}, \quad \text{そして、} \quad r_{\text{He}^3\text{He}^3} = \frac{r_{\text{pp}}}{2} \quad (36)$$

である。これらを使えば

$$\begin{aligned} \rho \varepsilon_{\text{ppI}} &= (Q_{\text{pp}} - Q_{\nu}) r_{\text{pp}} + Q_{\text{pD}} r_{\text{pD}} + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} r_{\text{He}^3\text{He}^3} = (Q_{\text{pp}} - Q_{\nu}) r_{\text{pp}} + Q_{\text{pD}} r_{\text{pp}} + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{r_{\text{pp}}}{2} \\ &= \left[2(Q_{\text{pp}} + Q_{\text{pD}}) + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} - 2Q_{\nu} \right] \frac{r_{\text{pp}}}{2} \end{aligned} \quad (37)$$

$$= \left(Q_{\text{pp}} - Q_{\nu} + Q_{\text{pD}} + \frac{Q_{\text{He}^3\text{He}^3}}{2} \right) r_{\text{pp}} \quad (38)$$

が成り立つ。ここで $2(Q_{\text{pp}} + Q_{\text{pD}}) + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} = (4M_{\text{H}} - M_{\text{He}})c^2$ であり、また Q_{ν} はニュートリノにより運び去られる平均エネルギーである。

3.2 ppl に ppII と ppIII を加えた場合

ppI に ppII と ppIII を加えたとき、各原子核の数密度の時間変化を表す式を考える。H の関しては、ppI の場合に加え $\text{Be}^7(\text{p}, \gamma)\text{B}^8, \text{Li}^7(\text{p}, \alpha)\text{He}^4$ の反応より

$$\frac{d\text{H}}{dt} = -2r_{\text{pp}} - r_{\text{pD}} + 2R_{\text{He}^3\text{He}^3} - r_{\text{pBe}^7} - r_{\text{pLi}^7} = -2\lambda_{\text{pp}} \frac{\text{H}^2}{2} - \lambda_{\text{pD}} \text{HD} + 2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} - \lambda_{\text{pBe}^7} \text{HBe}^7 - \lambda_{\text{pLi}^7} \text{HLi}^7 \quad (39)$$

となる。以下同様に考えると、D については変化が無いので

$$\frac{d\text{D}}{dt} = r_{\text{pp}} - r_{\text{pD}} = \lambda_{\text{pp}} \frac{\text{H}^2}{2} - \lambda_{\text{pD}} \text{HD} \quad (40)$$

となる。He³ は $\text{He}^3(\alpha, \gamma)\text{Be}^7$ の反応より

$$\frac{d\text{He}^3}{dt} = r_{\text{pD}} - r_{\text{He}^3\text{He}^3} - r_{\text{He}^4\text{He}^3} = -2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} + \lambda_{\text{pD}} \text{HD} - \lambda_{\text{He}^3\text{He}^4} \text{He}^3\text{He}^4 \quad (41)$$

となる。He⁴ は $\text{He}^3(\alpha, \gamma)\text{Be}^7$ 、また $\text{Be}^7(\text{p}, \gamma)\text{B}^8(\beta^+\nu)\text{Be}^8(\alpha)\text{He}^4$ の反応に於いて、 $\text{B}^8(\beta^+\nu)$ の反応が極めて短く、壱秒程度なので、実質的に $\text{Be}^7 + \text{H} \rightarrow 2\text{He} + \nu$ なる反応と同様であることから

$$\frac{d\text{He}^4}{dt} = r_{\text{He}^3\text{He}^3} - r_{\text{He}^4\text{He}^3} + 2r_{\text{pBe}^7} + 2r_{\text{pLi}^7} = \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} - \lambda_{\text{He}^3\text{He}^4} \text{He}^3\text{He}^4 + 2\lambda_{\text{pBe}^7} \text{HBe}^7 + 2\lambda_{\text{pLi}^7} \text{HLi}^7 \quad (42)$$

となる。Be⁷ は $\text{Be}^7(\text{p}, \gamma)\text{B}^8, \text{He}^3(\alpha, \gamma)\text{Be}^7, \text{Be}^7(\text{e}^-, \nu, \text{Li}^7)$ の反応より

$$\frac{d\text{Be}^7}{dt} = r_{\text{He}^3\text{He}^4} - r_{\text{pBe}^7} - r_{\text{eBe}^7} = \lambda_{\text{He}^3\text{He}^4} \text{He}^3\text{He}^4 - \lambda_{\text{eBe}^7} N_{\text{e}} \text{Be}^7 - \lambda_{\text{pBe}^7} \text{HBe}^7 \quad (43)$$

となる。Li⁷ は $\text{Be}^7(\text{e}^-, \nu)\text{Li}^7, \text{Li}^7(\text{p}, \alpha)\text{He}^4$ の反応より

$$\frac{d\text{Li}^7}{dt} = r_{\text{eBe}^7} - r_{\text{pLi}^7} = \lambda_{\text{eBe}^7} N_{\text{e}} \text{Be}^7 - \lambda_{\text{pLi}^7} \text{HLi}^7 \quad (44)$$

となる。ここで N_{e} は電子の数密度である。

ppI の場合と同様にして、適当な近似のもとで解くことを考える。まず、deuterium が直ちに平衡に達するとして

$$D = \frac{\lambda_{\text{pp}}}{2\lambda_{\text{pD}}} \text{H} \quad (45)$$

とする。また、Be⁷ や Li⁷ は p と反応してすぐに壊れるので、やはり容易に平衡に達するとして

$$\frac{d\text{Be}^7}{dt} = \lambda_{\text{He}^3\text{He}^4} \text{He}^3\text{He}^4 - \lambda_{\text{eBe}^7} N_{\text{e}} \text{Be}^7 - \lambda_{\text{pBe}^7} \text{HBe}^7 = 0 \quad (46)$$

$$\frac{d\text{Li}^7}{dt} = \lambda_{\text{eBe}^7} N_{\text{e}} \text{Be}^7 - \lambda_{\text{pLi}^7} \text{HLi}^7 = 0 \quad (47)$$

が成り立つとする。更に He^3 も十分速く平衡に達するとして

$$\frac{d\text{He}^3}{dt} = -2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \frac{(\text{He}^3)^2}{2} + \lambda_{\text{pD}}\text{HD} - \lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 = 0 \quad (48)$$

とする。このとき (39) は

$$\begin{aligned} \frac{d\text{H}}{dt} &= -\lambda_{\text{pp}}\text{H}^2 - \lambda_{\text{pD}}\text{HD} + \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 - \lambda_{\text{pBe}^7}\text{HBe}^7 - \lambda_{\text{pLi}^7}\text{HLi}^7 = -\lambda_{\text{pp}}\text{H}^2 - \lambda_{\text{pD}}\text{HD} + \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 - \lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 \\ &\quad \therefore (46) + (47) \\ &= -\lambda_{\text{pp}}\text{H}^2 + \lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 - \lambda_{\text{pD}}\text{HD} - \lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 \\ &= -\lambda_{\text{pp}}\text{H}^2 - 2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 \quad \therefore (48) \end{aligned} \quad (49)$$

となる。同様に (42) は

$$\begin{aligned} \frac{d\text{He}^4}{dt} &= -\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 + \frac{1}{2}\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 + 2\lambda_{\text{pBe}^7}\text{HBe}^7 + 2\lambda_{\text{pLi}^7}\text{HLi}^7 \\ &= -\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 + \frac{1}{2}\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 + 2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 \quad \therefore (46) + (47) \\ &= \lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 + \frac{1}{2}\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 \\ &= \frac{1}{2}\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 + \frac{1}{2}\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 = \frac{1}{2}\lambda_{\text{pD}}\text{HD} + \frac{1}{2}\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4 \quad \therefore (48) \\ &= \frac{\lambda_{\text{pp}}}{4}\text{H}^2 \left(1 + \frac{2\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4}{\lambda_{\text{pp}}\text{H}^2} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

となる。

ppI によるヘリウムの生成効率と ppII と ppIII によるヘリウム生成の効率との比は

$$\frac{\text{ppI}}{\text{ppII} + \text{ppIII}} = \frac{r_{\text{He}^3\text{He}^3}}{r_{\text{He}^3\text{He}^4}} = \frac{\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} (\text{He}^3)^2 / 2}{\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4}\text{He}^3\text{He}^4} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\text{He}^3\text{He}^3} \text{He}^3}{\lambda_{\text{He}^3\text{He}^4} \text{He}^4} \quad (52)$$

で与えられる。さて、pp 連鎖核融合反応に於けるエネルギーの生成率は、形式的に

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon_{\text{pp}} &= (Q_{\text{pp}} - Q_{\nu}^{\text{pp}}) r_{\text{pp}} + Q_{\text{pD}} r_{\text{pD}} + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} r_{\text{He}^3\text{He}^3} \\ &\quad + Q_{\text{He}^3\text{He}^4} r_{\text{He}^3\text{He}^4} + (Q_{\text{eBe}^7} - Q_{\nu}^{\text{eBe}^7}) r_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7} r_{\text{pLi}^7} + (Q_{\text{pBe}^7} - Q_{\nu}^{\text{pBe}^7}) r_{\text{pBe}^7} \end{aligned} \quad (53)$$

と書ける。 $Q_{\nu}^{\text{pp}}, Q_{\nu}^{\text{eBe}^7}, Q_{\nu}^{\text{pBe}^7}$ はニュートリノによるエネルギー損失を表す。今の場合、平衡状態に達している核反応の反応率について次の様な関係式が成り立っている。

$$r_{\text{pD}} = r_{\text{pp}}, \quad r_{\text{He}^3\text{He}^4} = r_{\text{eBe}^7} + r_{\text{pBe}^7}, \quad r_{\text{eBe}^7} = r_{\text{pLi}^7}, \quad -2r_{\text{He}^3\text{He}^3} + r_{\text{pD}} - r_{\text{He}^3\text{He}^4} = 0 \quad (54)$$

(54) を用いるとエネルギーの生成率は、

$$\begin{aligned}
\rho\varepsilon_{pp} &= (Q_{pp} - Q_v^{pp})r_{pp} + Q_{pD}r_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^3}r_{\text{He}^3\text{He}^3} \\
&\quad + Q_{\text{He}^3\text{He}^4}r_{\text{He}^3\text{He}^4} + (Q_{\text{eBe}^7} - Q_v^{\text{eBe}^7})r_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7}r_{\text{pLi}^7} + (Q_{\text{pBe}^7} - Q_v^{\text{pBe}^7})r_{\text{pBe}^7} \\
&= (Q_{pp} + Q_{pD} - Q_v^{pp})r_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^3}r_{\text{He}^3\text{He}^3} \\
&\quad + Q_{\text{He}^3\text{He}^4}r_{\text{He}^3\text{He}^4} + (Q_{\text{eBe}^7} - Q_v^{\text{eBe}^7})r_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7}r_{\text{pLi}^7} + (Q_{\text{pBe}^7} - Q_v^{\text{pBe}^7})r_{\text{pBe}^7} \\
&= (Q_{pp} + Q_{pD} - Q_v^{pp})(2r_{\text{He}^3\text{He}^3} + r_{\text{He}^3\text{He}^4}) + Q_{\text{He}^3\text{He}^3}r_{\text{He}^3\text{He}^3} \\
&\quad + Q_{\text{He}^3\text{He}^4}r_{\text{He}^3\text{He}^4} + (Q_{\text{eBe}^7} - Q_v^{\text{eBe}^7})r_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7}r_{\text{pLi}^7} + (Q_{\text{pBe}^7} - Q_v^{\text{pBe}^7})r_{\text{pBe}^7} \\
&= [2(Q_{pp} + Q_{pD}) + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} - 2Q_v^{pp}]r_{\text{He}^3\text{He}^3} + (Q_{pp} + Q_{pD} - Q_v^{pp})R_{\text{He}^3\text{He}^4} \\
&\quad + Q_{\text{He}^3\text{He}^4}r_{\text{He}^3\text{He}^4} + (Q_{\text{eBe}^7} - Q_v^{\text{eBe}^7})r_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7}r_{\text{pLi}^7} + (Q_{\text{pBe}^7} - Q_v^{\text{pBe}^7})r_{\text{pBe}^7} \\
&= [2(Q_{pp} + Q_{pD}) + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} - 2Q_v^{pp}]r_{\text{He}^3\text{He}^3} + (Q_{pp} + Q_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^4} - Q_v^{pp})(r_{\text{eBe}^7} + r_{\text{pBe}^7}) \\
&\quad + (Q_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7} - Q_v^{\text{eBe}^7})r_{\text{eBe}^7} + (Q_{\text{pBe}^7} - Q_v^{\text{pBe}^7})r_{\text{pBe}^7} \\
&= [2(Q_{pp} + Q_{pD}) + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} - 2Q_v^{pp}]r_{\text{He}^3\text{He}^3} \\
&\quad + [Q_{pp} + Q_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^4} + Q_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7} - Q_v^{pp} - Q_v^{\text{pBe}^7}]r_{\text{eBe}^7} \\
&\quad + [Q_{pp} + Q_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^4} + Q_{\text{pBe}^7} - Q_v^{pp} - Q_v^{\text{pBe}^7}]r_{\text{pBe}^7}
\end{aligned}$$

と書けることから、

$$\begin{aligned}
\rho\varepsilon_{pp} &= [2(Q_{pp} + Q_{pD}) + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} - 2Q_v^{pp}]r_{\text{He}^3\text{He}^3} \\
&\quad + [Q_{pp} + Q_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^4} + Q_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7} - Q_v^{pp} - Q_v^{\text{pBe}^7}] \frac{r_{\text{eBe}^7}}{r_{\text{He}^3\text{He}^4}} r_{\text{He}^3\text{He}^4} \\
&\quad + [Q_{pp} + Q_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^4} + Q_{\text{pBe}^7} - Q_v^{pp} - Q_v^{\text{pBe}^7}] \frac{r_{\text{pBe}^7}}{r_{\text{He}^3\text{He}^4}} r_{\text{He}^3\text{He}^4} \quad (55)
\end{aligned}$$

であることが分かる。ここで

$$\begin{aligned}
2(Q_{pp} + Q_{pD}) + Q_{\text{He}^3\text{He}^3} &= Q_{pp} + Q_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^4} + Q_{\text{eBe}^7} + Q_{\text{pLi}^7} = Q_{pp} + Q_{pD} + Q_{\text{He}^3\text{He}^4} + Q_{\text{pBe}^7} \\
&= (4M_{\text{H}} - M_{\text{He}})c^2 \equiv Q_{4\text{p}\rightarrow\text{He}} = 26.73 \text{ [MeV]}
\end{aligned}$$

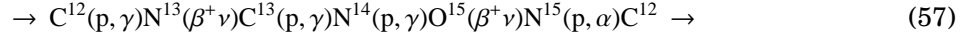
であるとすれば、(55) は更に

$$\begin{aligned}
\rho\varepsilon_{pp} &= (Q_{4\text{p}\rightarrow\text{He}} - 2Q_v^{pp})r_{\text{He}^3\text{He}^4} \\
&\quad + [Q_{4\text{p}\rightarrow\text{He}} - (Q_v^{pp} + Q_v^{\text{eBe}^7})] \frac{r_{\text{eBe}^7}}{r_{\text{He}^3\text{He}^4}} r_{\text{He}^3\text{He}^4} \\
&\quad + [Q_{4\text{p}\rightarrow\text{He}} - (Q_v^{pp} + Q_v^{\text{pBe}^7})] \frac{r_{\text{pBe}^7}}{r_{\text{He}^3\text{He}^4}} r_{\text{He}^3\text{He}^4} \\
&= (r_{\text{He}^3\text{He}^3} + r_{\text{He}^3\text{He}^4})Q_{4\text{p}\rightarrow\text{He}} \left\{ \left(1 - \frac{2Q_v^{pp}}{Q_{4\text{p}\rightarrow\text{He}}}\right) \frac{r_{\text{He}^3\text{He}^3}}{r_{\text{He}^3\text{He}^3} + r_{\text{He}^3\text{He}^4}} \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(1 - \frac{Q_v^{pp} + Q_v^{\text{eBe}^7}}{Q_{4\text{p}\rightarrow\text{He}}}\right) \frac{r_{\text{eBe}^7}}{r_{\text{He}^3\text{He}^4}} + \left(1 - \frac{Q_v^{pp} + Q_v^{\text{pBe}^7}}{Q_{4\text{p}\rightarrow\text{He}}}\right) \frac{r_{\text{pBe}^7}}{r_{\text{He}^3\text{He}^4}} \right] \frac{r_{\text{He}^3\text{He}^3}}{r_{\text{He}^3\text{He}^3} + r_{\text{He}^3\text{He}^4}} \right\} \quad (56)
\end{aligned}$$

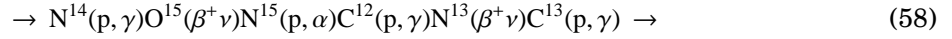
と書けることが分かる。pp 連鎖反応に於いて、どの過程がどのくらいの割合でエネルギーを発生させているかは、反応の起こっている領域の温度や組成に依存する。

4 CNO 循環連鎖反応

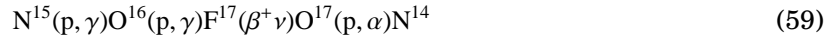
星の中心で起こっている水素燃焼のもう一つの重要な連鎖反応は、**CNO** 循環連鎖反応と呼ばれる。この反応は C^{12} 、 C^{13} 、 N^{14} そして N^{15} などの原子核が触媒として働き、結果として $4H \rightarrow He$ なる核融合反応を起こすものである。記号で書けば



と書けるが、これは例えば



と書いてもよい。CNO 循環連鎖反応には、もう一つの脇道が知られていて、 $N^{15}(p, \alpha)C^{12}$ のかわりに、 $N^{15}(p, \gamma)O^{16}$ がある頻度で起こるとき



なる連鎖反応で He を作ることもある。いずれにせよ、一巡することで、触媒核が陽子捕獲を四回行い、二回 β^+ 崩壊をすることで、He を一個生成することになる。(57) は CN 循環、(59) を経過するものを ON 循環と呼ぶ。

4.1 CN 循環、ON 循環

今まで同様に反応の式より関係を書き下すと、(59) は反応の分岐率 α に注意して、

$$\frac{dC^{12}}{dt} = -r_{pC^{12}} + \alpha r_{pN^{15}} = -\lambda_{pC^{12}}HC^{12} + \alpha \lambda_{pN^{15}}HN^{15} = -\frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} + \alpha \frac{N^{15}}{\tau_p(N^{15})} \quad (60)$$

$$\frac{dN^{13}}{dt} = \underbrace{r_{pC^{12}} - r_{\beta^+ N^{13}}}_{\text{ベータ崩壊}} = \frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} - \frac{N^{13}}{\tau_\beta(N^{13})} \quad (61)$$

$$\frac{dC^{13}}{dt} = r_{\beta^+ N^{13}} - r_{pC^{13}} = \frac{N^{13}}{\tau_\beta(N^{13})} - \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})} \quad (62)$$

$$\frac{dN^{14}}{dt} = r_{pC^{13}} - r_{pN^{14}} + r_{pO^{17}} = \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})} - \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} + \frac{O^{17}}{\tau_p(O^{17})} = \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})} - (\alpha + \gamma) \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} + \frac{O^{17}}{\tau_p(O^{17})} \quad (63)$$

$$\frac{dO^{15}}{dt} = r_{pN^{14}} - r_{\beta^+ O^{15}} = \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} - \frac{O^{15}}{\tau_\beta(O^{15})} \quad (64)$$

$$\frac{dN^{15}}{dt} = r_{\beta^+ O^{15}} - r_{pN^{15}} = \frac{O^{15}}{\tau_\beta(O^{15})} - \frac{N^{15}}{\tau_p(N^{15})} \quad (65)$$

$$\frac{dO^{16}}{dt} = \gamma r_{pN^{15}} - r_{pO^{16}} = \gamma \frac{N^{15}}{\tau_p(N^{15})} - \frac{O^{16}}{\tau_p(O^{16})} \quad (66)$$

$$\frac{dF^{17}}{dt} = r_{pO^{16}} - r_{\beta^+ F^{17}} = \frac{O^{16}}{\tau_p(O^{16})} - \frac{F^{17}}{\tau_\beta(F^{17})} \quad (67)$$

$$\frac{dO^{17}}{dt} = r_{\beta^+ F^{17}} - r_{pO^{17}} = \frac{F^{17}}{\tau_\beta(F^{17})} - \frac{O^{17}}{\tau_p(O^{17})} \quad (68)$$

と書けることが分かる。ここで時間スケール（問題にしている反応に対する寿命）などは、(13)を使って

$$\tau_p(C^{12}) = \frac{1}{\lambda_{pC^{12}}H} \quad (69)$$

などと定義される量である。また分岐率は $\alpha = 1 - \gamma$ であり、 $\gamma \approx 4 \times 10^{-4}$ 程度の小さい数である。 $\tau_\beta(N^{13})$ などは、 N^{13} 原子核の β^+ 崩壊に対する寿命であり、数分から数十分程度の時間である。以下では、 H の時間変化率は C^{12} に比べて十分小さいものとする。

4.2 温度が低い場合の連鎖反応

10^8 [K] 以下の温度では、 β^+ 崩壊による寿命が短いので、 N^{13} 、 O^{15} 、 F^{17} は短時間で平衡に達すると考えられることができる。また、普通の条件では $\tau_p(N^{15})$ は数年程度なので、 N^{15} もやはりその程度の時間で平衡に達すると考えられる。よってこのときの平衡の条件式は

$$\frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} = \frac{N^{13}}{\tau_\beta(N^{13})}, \quad \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} = \frac{O^{15}}{\tau_\beta(O^{15})}, \quad \frac{O^{16}}{\tau_p(O^{16})} = \frac{F^{17}}{\tau_\beta(F^{17})}, \quad \frac{O^{15}}{\tau_\beta(O^{15})} = \frac{N^{15}}{\tau_p(N^{15})} \quad (70)$$

と書けるので、(60)~(68)は

$$\frac{dC^{12}}{dt} = -\frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} + \alpha \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} \quad (71)$$

$$\frac{dC^{13}}{dt} = \frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} - \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})} \quad (72)$$

$$\frac{dN^{14}}{dt} = \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})} - (\alpha + \gamma) \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} + \frac{O^{17}}{\tau_p(O^{17})} \quad (73)$$

$$\frac{dO^{16}}{dt} = \gamma \frac{O^{15}}{\tau_p(O^{15})} - \frac{O^{16}}{\tau_p(O^{16})} = \gamma \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} - \frac{O^{16}}{\tau_p(O^{16})} \quad (74)$$

$$\frac{dO^{17}}{dt} = \frac{O^{16}}{\tau_p(O^{16})} - \frac{O^{17}}{\tau_p(O^{17})} \quad (75)$$

と簡略化できることが分かる。これらを足しあわせると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(C^{12} + C^{13} + N^{14} + O^{16} + O^{17}) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} + \alpha \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} + \frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} - \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})} + \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})} - (\alpha + \gamma) \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{O^{17}}{\tau_p(O^{17})} + \gamma \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} - \frac{O^{16}}{\tau_p(O^{16})} + \frac{O^{16}}{\tau_p(O^{16})} - \frac{O^{17}}{\tau_p(O^{17})} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (76)$$

が示される。

4.3 CN 循環についての閉じた方程式

CN 循環については (73) の右辺の最後の項を無視できるとし、また、 $\alpha = 1$ ($\gamma = 0$) として

$$\frac{dC^{12}}{dt} = -\frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} + \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})}, \quad \frac{dC^{13}}{dt} = \frac{C^{12}}{\tau_p(C^{12})} - \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})}, \quad \frac{dN^{14}}{dt} = \frac{C^{13}}{\tau_p(C^{13})} - \frac{N^{14}}{\tau_p(N^{14})} \quad (77)$$

とすれば、これは閉じた方程式になっていて、行列を使って

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C^{12} \\ C^{13} \\ N^{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_p^{-1}(C^{12}) & 0 & \tau_p^{-1}(N^{14}) \\ \tau_p^{-1}(C^{12}) & -\tau_p^{-1}(C^{13}) & 0 \\ 0 & \tau_p^{-1}(C^{13}) & -\tau_p^{-1}(N^{14}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{12} \\ C^{13} \\ N^{14} \end{pmatrix} \quad (78)$$

と書ける。また、

$$\frac{d}{dt}(C^{12} + C^{13} + N^{14}) = 0 \quad (79)$$

であるから、 $C^{12} + C^{13} + N^{14} = \text{Constant}$ である。

(78)の解を

$$\vec{W}(t) = \begin{pmatrix} C^{12}(t) \\ C^{13}(t) \\ N^{14}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} e^{\mu t} \equiv \vec{U} e^{\mu t} \quad \text{よって} \quad \mu \vec{U} = \begin{pmatrix} -\tau_p^{-1}(C^{12}) & 0 & \tau_p^{-1}(N^{14}) \\ \tau_p^{-1}(C^{12}) & -\tau_p^{-1}(C^{13}) & 0 \\ 0 & \tau_p^{-1}(C^{13}) & -\tau_p^{-1}(N^{14}) \end{pmatrix} \vec{U} \quad (80)$$

として求める。特性方程式を立てると

$$\begin{vmatrix} \mu + \tau_p^{-1}(C^{12}) & 0 & -\tau_p^{-1}(N^{14}) \\ -\tau_p^{-1}(C^{12}) & \mu + \tau_p^{-1}(C^{13}) & 0 \\ 0 & -\tau_p^{-1}(C^{13}) & \mu + \tau_p^{-1}(N^{14}) \end{vmatrix} = 0$$

であるから、これを整理すると

$$\mu \{ \mu^2 + (\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14}))\mu + (\tau_p^{-1}(C^{12})\tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(C^{13})\tau_p^{-1}(N^{14}) + \tau_p^{-1}(N^{14})\tau_p^{-1}(C^{12})) \} = 0$$

となるので、固有値は

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \frac{-(\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14}))}{2}$$

$$+ \frac{\sqrt{(\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14}))^2 - 4(\tau_p^{-1}(C^{12})\tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(C^{13})\tau_p^{-1}(N^{14}) + \tau_p^{-1}(N^{14})\tau_p^{-1}(C^{12}))}}{2}$$

$$= \frac{-\Sigma + \Delta}{2}$$

$$\mu_3 = \frac{-(\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14}))}{2}$$

$$- \frac{\sqrt{(\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14}))^2 - 4(\tau_p^{-1}(C^{12})\tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(C^{13})\tau_p^{-1}(N^{14}) + \tau_p^{-1}(N^{14})\tau_p^{-1}(C^{12}))}}{2}$$

$$= \frac{-\Sigma - \Delta}{2}$$

となる。ここで

$$\Sigma = \tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14})$$

$$\Delta = \sqrt{(\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14}))^2 - 4(\tau_p^{-1}(C^{12})\tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(C^{13})\tau_p^{-1}(N^{14}) + \tau_p^{-1}(N^{14})\tau_p^{-1}(C^{12}))}$$

である。(80)より

$$(\mu + \tau_p^{-1}(C^{12}))U^1 = \tau_p^{-1}(N^{14})U^3$$

$$(\mu + \tau_p^{-1}(C^{13}))U^2 = \tau_p^{-1}(C^{12})U^1$$

$$(\mu + \tau_p^{-1}(N^{14}))U^3 = \tau_p^{-1}(C^{13})U^2$$

であるから、固有値を代入すると、適当な規格化のもと $\mu = \mu_1 = 0$ のとき

$$U^1 = \frac{\tau_p(C^{12})}{\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14})}, \quad U^2 = \frac{\tau_p(C^{13})}{\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14})}, \quad U^3 = \frac{\tau_p(N^{14})}{\tau_p^{-1}(C^{12}) + \tau_p^{-1}(C^{13}) + \tau_p^{-1}(N^{14})}$$

より

$$\vec{U}_1 = \frac{1}{\tau_p(C^{12}) + \tau_p(C^{13}) + \tau_p(N^{14})} \begin{pmatrix} \tau_p(C^{12}) \\ \tau_p(C^{13}) \\ \tau_p(N^{14}) \end{pmatrix} \quad (81)$$

となる。 $\mu = \mu_2 = (-\Sigma + \Delta)/2$ のとき、 $U^1 = 1$ とすると

$$U^2 = \frac{\tau_p^{-1}(C^{12})}{\mu + \tau_p^{-1}(C^{13})} = \frac{\tau_p^{-1}(C^{12})}{\tau_p^{-1}(C^{13}) - \frac{\Sigma - \Delta}{2}} = p$$

$$\begin{aligned} \mu U^3 + \mu U^1 + \tau_p^{-1}(C^{12}) U^1 &= \tau_p^{-1}(C^{13}) U^2 \\ \mu U^3 + \mu U^1 + \tau_p^{-1}(C^{12}) U^1 &= \tau_p^{-1}(C^{12}) U^1 - \mu U^2 \implies U^3 = -1 - p \end{aligned}$$

より

$$\vec{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -1 - p \end{pmatrix} \quad (82)$$

となる。 $\mu = \mu_3 = (-\Sigma - \Delta)/2$ のとき $U^1 = 1$ とすると

$$U^3 = \frac{\mu + \tau_p^{-1}(C^{12})}{\tau_p^{-1}(N^{14})} = \frac{\tau_p^{-1}(C^{12}) - \frac{\Sigma + \Delta}{2}}{\tau_p^{-1}(N^{14})} = q$$

$$\begin{aligned} \mu U^2 + \mu U^3 + \tau_p^{-1}(N^{14}) U^3 &= \tau_p^{-1}(C^{12}) U^1 \\ \mu U^2 + \mu U^3 + \tau_p^{-1}(N^{14}) U^3 &= \tau_p^{-1}(N^{14}) U^3 - \mu U^1 \implies U^3 = -1 - q \end{aligned}$$

より

$$\vec{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ q \\ -1 - q \end{pmatrix} \quad (83)$$

となる。これより一般解は、任意定数を A, B, C として

$$\vec{W}(t) = A\vec{U}_1 + B\vec{U}_2 e^{\mu_2 t} + C\vec{U}_3 e^{\mu_3 t} \quad (84)$$

で与えられる。 $t \rightarrow \infty$ の極限、つまり循環が平衡に達するとき、 $\mu_2 < 0, \mu_3 < 0$ であるから、

$$\vec{W}(t) \rightarrow A\vec{U}_1 \quad (85)$$

であることが分かる。もし $\tau_p(C^{12}), \tau_p(C^{13}) \ll \tau_p(N^{14})$ なら、触媒核の殆ど全てが N^{14} になることが分かる。

4.4 方程式の解

$C^{12} + C^{13} + N^{14} = 1$ とした場合

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C^{12}(0) \\ C^{13}(0) \\ N^{14}(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C^{12}(\infty) + B + C \\ C^{13}(\infty) + pB + (-1 - q)C \\ N^{14}(\infty) + (-1 - q)B + qC \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} C^{12}(\infty) \\ C^{13}(\infty) \\ N^{14}(\infty) \end{pmatrix} &= \frac{A}{\tau_p(C^{12}(\infty)) + \tau_p(C^{13}(\infty)) + \tau_p(N^{14}(\infty))} \begin{pmatrix} \tau_p(C^{12}(\infty)) \\ \tau_p(C^{13}(\infty)) \\ \tau_p(N^{14}(\infty)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、 $A = 1$ となり B, C に関しては

$$B + C = C^{12}(0) - C^{12}(\infty), \quad pB + (-1 - q)C = C^{13} - C^{13}(\infty) \quad (86)$$

の解として与えられる。ここで当然 $\dot{W}(t=0) \neq \dot{W}(t \rightarrow \infty)$ である。

$C^{12}(p, \gamma)N^{13}(\beta^+ \nu)C^{13}$ 、 $C^{13}(p, \gamma)N^{14}$ 、 $N^{14}(p, \gamma)O^{15}(\beta^+ \nu)N^{15}(p, \alpha)C^{12}$ の Q の値は、 $Q_1 = 4.165$ [MeV]、 $Q_2 = 7.550$ [MeV]、 $Q_3 = 15.019$ [MeV] であり、エネルギー生成率 $\rho \varepsilon_{\text{CN}}$ は

$$\rho \varepsilon_{\text{CN}} = (Q_1 - Q_\nu^1) \lambda_{\text{pC}^{12}} \text{HC}^{12} + Q_2 \lambda_{\text{pC}^{13}} \text{HC}^{13} + (Q_3 - Q_\nu^3) \lambda_{\text{pN}^{14}} \text{HN}^{14} \quad (87)$$

$$= \frac{Q_1 - Q_\nu^1}{\tau_{\text{pC}^{12}}} C^{12} + \frac{Q_2}{\tau_{\text{pC}^{13}}} C^{13} + \frac{Q_3 - Q_\nu^3}{\tau_{\text{pN}^{14}}} N^{14} \quad (88)$$

と書ける。ここで $Q_1 + Q_2 + Q_3 = (4M_{\text{H}} - M_{\text{He}})c^2$ である。また、 Q_ν^1 や Q_ν^3 はニュートリノの持ち去る平均エネルギーで、 $Q_\nu^1 = 0.71$ [MeV]、 $Q_\nu^3 = 1.0$ [MeV] であるとされている。

4.5 平衡に達している場合

CN 循環反応が平衡状態に達しているとすれば、

$$\rho \varepsilon_{\text{CN}} = \frac{Q_1 - Q_\nu^1}{\tau_{\text{pC}^{12}}} C^{12}(\infty) + \frac{Q_2}{\tau_{\text{pC}^{13}}} C^{13}(\infty) + \frac{Q_3 - Q_\nu^3}{\tau_{\text{pN}^{14}}} N^{14}(\infty) \quad (89)$$

であるが、(77) から

$$\tau_{\text{pN}^{14}} C^{12}(\infty) = \tau_{\text{pC}^{12}} N^{14}(\infty)$$

$$\tau_{\text{pC}^{13}} C^{12}(\infty) = \tau_{\text{pC}^{12}} C^{13}(\infty)$$

$$\tau_{\text{pN}^{14}} C^{13}(\infty) = \tau_{\text{pC}^{13}} N^{14}(\infty)$$

の関係式が成り立つので、

$$\begin{aligned} (89) &= \frac{Q_1 - Q_\nu^1}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} \left(1 + \frac{\tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}}{\tau_{\text{pC}^{12}}} \right) C^{12}(\infty) \\ &\quad + \frac{Q_2}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} \left(1 + \frac{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pN}^{14}}}{\tau_{\text{pC}^{13}}} \right) C^{13}(\infty) + \frac{Q_3 - Q_\nu^3}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} \left(1 + \frac{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}}}{\tau_{\text{pN}^{14}}} \right) N^{14}(\infty) \\ &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_\nu^1 - Q_\nu^3}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} (C^{12}(\infty) + C^{13}(\infty) + N^{14}(\infty)) \\ &\quad - \frac{Q_1 - Q_\nu^1}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} \left[\frac{\tau_{\text{pC}^{13}} C^{12}(\infty) + \tau_{\text{pN}^{14}} C^{12}(\infty) - \{\tau_{\text{pC}^{12}} C^{13}(\infty) + \tau_{\text{pC}^{12}} N^{14}(\infty)\}}{\tau_{\text{pC}^{12}}} \right] \\ &\quad - \frac{Q_2}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} \left[\frac{\tau_{\text{pC}^{12}} C^{13}(\infty) + \tau_{\text{pN}^{14}} C^{13}(\infty) - \{\tau_{\text{pC}^{13}} C^{12}(\infty) + \tau_{\text{pC}^{13}} N^{14}(\infty)\}}{\tau_{\text{pC}^{13}}} \right] \\ &\quad - \frac{Q_3 - Q_\nu^3}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} \left[\frac{\tau_{\text{pC}^{12}} N^{14}(\infty) + \tau_{\text{pC}^{13}} N^{14}(\infty) - \{\tau_{\text{pN}^{14}} C^{12}(\infty) + \tau_{\text{pN}^{14}} C^{13}(\infty)\}}{\tau_{\text{pN}^{14}}} \right] \\ &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_\nu^1 - Q_\nu^3}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} N_{\text{CN}} + 0 + 0 + 0 \\ &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_\nu^1 - Q_\nu^3}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} N_{\text{CN}} \\ &\therefore \rho \varepsilon_{\text{CN}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_\nu^1 - Q_\nu^3}{\tau_{\text{pC}^{12}} + \tau_{\text{pC}^{13}} + \tau_{\text{pN}^{14}}} N_{\text{CN}} \quad (90) \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで $C^{12}(\infty) + C^{13}(\infty) + N^{14}(\infty) = C^{12}(0) + C^{13}(0) + N^{14}(0) = N_{\text{CN}}$ とする。

もし、 $N^{14} + p$ の反応が共鳴反応でなければ $\tau_{pC^{12}}, \tau_{pC^{13}} \ll \tau_{pN^{14}}$ であり、よい近似で

$$\rho \varepsilon_{CN} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_v^1 - Q_v^3}{\tau_{pN^{14}}} N_{CN} \quad (91)$$

で与えられる。(pp chain の場合も含めて) エネルギー生成率は最も遅い反応の時間スケールで決まる。

5 核反応の反応率の具体的な計算

以下では、(9) で導入した反応率を今少し具体的に計算してみる。

5.1 Maxwell 分布

粒子 X と粒子 a からなる温度 T の混合気体を考え、それぞれの粒子数密度を N_X と N_a と書く。それぞれ温度 T で熱平衡にあるとすれば、気体粒子の速度分布は

$$N_a(\vec{v}_a) d v_{ax} v_{ay} v_{az} = N_a \left(\frac{m_a}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_a \vec{v}_a^2}{2kT}\right) d v_{ax} v_{ay} v_{az} \quad (92)$$

$$N_X(\vec{v}_X) d v_{Xx} v_{Xy} v_{Xz} = N_X \left(\frac{m_X}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_X \vec{v}_X^2}{2kT}\right) d v_{Xx} v_{Xy} v_{Xz} \quad (93)$$

なる Maxwell 分布で与えられる。これを使って

$$r_{aX} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} v \sigma_{aX}(\vec{v}) N_a(\vec{v}_a) N_X(\vec{v}_X) d^3 \vec{v}_a d^3 \vec{v}_X \quad (94)$$

と書く。ここで $v = |\vec{v}|$ であり、 $\vec{v} = \vec{v}_a - \vec{v}_X$ である。また以下では $\sigma_{aX}(\vec{v}) = \sigma_{aX}(|\vec{v}|)$ とする。

二粒子の重心の速度 \vec{V} を $\vec{V} = (m_a \vec{v}_a + m_X \vec{v}_X) / (m_a + m_X)$ と定義する。 $(\vec{v}_a, \vec{v}_X) \rightarrow (\vec{V}, \vec{v})$ と積分変数変換を行うと、(94) は

$$\begin{aligned} r_{aX} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} v \sigma_{aX}(\vec{v}) N_a(\vec{v}_a) N_X(\vec{v}_X) d^3 \vec{v}_a d^3 \vec{v}_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} v \sigma_{aX}(\vec{v}) N_a(\vec{V}) N_X(\vec{v}) \left| \frac{\partial(\vec{v}_a, \vec{v}_X)}{\partial(\vec{V}, \vec{v})} \right| d^3 \vec{V} d^3 \vec{v} \\ &= N_a N_X \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} v \sigma_{aX}(\vec{v}) \frac{(m_a m_X)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} \exp\left\{-\frac{(m_a + m_X) \vec{V}^2 + \mu \vec{v}^2}{2kT}\right\} d^3 \vec{V} d^3 \vec{v} \\ &= N_a N_X \int_0^{+\infty} 4\pi v^2 \cdot v \sigma_{aX}(v) \frac{(m_a m_X)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m_a + m_X}} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) dv \\ &= N_a N_X \int_0^{+\infty} v \sigma_{aX}(v) \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv \end{aligned} \quad (95)$$

と書けることが分かる。これから、(9) の $\phi(v)$ が

$$\phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) \quad (96)$$

で求められることが分かる。これは相対速度に対する Maxwell 分布になっている。

5.2 鞍点法 (method of steepest descent)

次のサブセクションで必要になる鞍点法についてまとめておく。

複素平面上の経路積分の値

$$I = \int_C g(z) e^{f(z)} dz$$

を近似的に求めることを考える。ここで $g(z)$ と $f(z)$ は複素平面上的解析関数であり、積分経路はその両端に於いて $f(z)$ の実部が負の無限大となり、積分の被積分関数が零になるように選べるか、あるいは閉曲線に選べるものとする。 $f(z) = u(x, y) + iw(x, y)$ と書くとき、もし実部が複素平面上的ある点 z_0 で極大値をとるとすれば

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

であり、従って

$$\frac{df(z_0)}{dz} = 0$$

となる。ところが解析関数について **Cauchy-Riemann** の関係式から

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つので、点 z_0 で例えば $\partial^2 u / \partial x^2 > 0$ (上に凸) のときは、 $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ (下に凸) となるので、この極大値は絶対的な極大値ではなく、ある経路に沿って得られる極大値であるにすぎず、点 z_0 は鞍点 (**saddle point**) になっている。従って、積分を実行するに当たって必要なのは、

1. $u(x, y)$ が鞍点に於いて極大となるような
2. 鞍点の近傍で虚部 $w(x, y)$ が一定

となるように経路を選択する必要がある。このように積分経路を選ぶことは、鞍点 z_0 近傍の経路を

$$z - z_0 = \delta e^{i\alpha}$$

で与えるとき (ここで α と δ は実数) 関数 $f(z)$ の

$$f(z) - f(z_0) \cong f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 = \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 \quad (97)$$

なる展開に於いて

$$f''(z_0)(z - z_0)^2$$

が負の実数になるよう位相 α を選ぶことに対応する。このとき実数 t を

$$t^2 = -f''(z_0)\delta^2 e^{2i\alpha}$$

を満たすように定義すれば、

$$t = \pm \delta \sqrt{|f''(z_0)|}$$

が得られ、これを新しい変数として使えば、求める積分は

$$I \approx \frac{g(z_0)e^{f(z_0)}e^{i\alpha}}{\sqrt{|f''(z_0)|}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi} g(z_0)e^{f(z_0)}e^{i\alpha}}{\sqrt{|f''(z_0)|}} \quad (98)$$

で与えられる。ここで、鞍点 z_0 の近傍で $g(z)$ は十分ゆっくり変化するものとして。極大値が複素平面上に複数あるときは、積分の近似は (98) の表現の和になる。

5.3 核反応の量子力学的考察

核力が引力として働く距離は斥力としてクーロン力の働く距離に比べてとても小さいので、星の中心で核融合反応が進行するためには（中性子が関わる反応を除けば）反応粒子は粒子間のクーロン力による斥力ポテンシャルを克服しなければならない。原子核表面で、クーロンポテンシャルは、

$$U_{\text{Coulomb}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} = 1.44 \frac{Z_1 Z_2}{\tilde{R}} \text{ [MeV]} \quad (99)$$

程度の大きさを持つ。ここで \tilde{R} は $1 \text{ [fm]} = 10^{-13} \text{ [cm]}$ を単位として測った原子核半径であり、よい近似で $\tilde{R} \cong 1.2 A^{1/3} \text{ [fm]}$ と与えられることが知られている。また、粒子の熱運動の運動エネルギーは

$$kT \cong 8.6 \times 10^{-8} T \text{ [keV]} \quad (100)$$

程度である。このことから、星の内部の密度や温度では、クーロンポテンシャルエネルギーに匹敵するエネルギーを持つ粒子の数は、星の中心温度 T の Maxwell 分布の高エネルギー側の尻尾に対応するのでとても小さい。従って、星の内部温度 T に対応したエネルギーを持った粒子同士の反応を考えるときには、量子力学的トンネル効果でクーロンポテンシャルの壁を透過する確率が重要な役割を果たすことになる。この透過率は量子力学によれば

$$\exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right) \quad (101)$$

に比例することが知られている。このとき断面積 $\sigma_{\text{ax}}(v)$ を

$$\sigma_{\text{ax}}(v) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right) \quad (102)$$

と書いて、(面積)×(エネルギー)の次元を持つ $S(E)$ なる量を導入する。ここで $E = \mu v^2/2$ である。このように定義された $S(E)$ は衝突のエネルギー E にあまり強く依存しないことが期待される。

以上から

$$\lambda = \int_0^{\infty} v \sigma(v) \phi(v) dv$$

を求めると

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^{\infty} v \sigma(v) \phi(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} v \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right) 4\pi v^2 \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) = \sqrt{\frac{2\mu^3}{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} dv \frac{S(E)}{E} v^3 \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} - \frac{\mu v^2}{2kT}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\mu^3}{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} dE \frac{S(E)}{E} \frac{2E}{\mu^2} \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} dE S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right) \end{aligned} \quad (103)$$

となる。ここで

$$b = \frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \quad (104)$$

である、 $S(E)$ は衝突エネルギーに E に強く依存しないとしている。この積分を鞍点法を用いて近似的に計算する。

今、

$$f(E) = -\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}, \quad g(E) = S(E)$$

とすると、どちらも実関数で

$$f(E) = 0, -\frac{1}{kT} + \frac{b}{E^{3/2}} = 0 \implies E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{2/3}$$

となる。更に $f(E)$ は (97) より

$$f(E) \cong \frac{1}{2}f''(E - E_0) + f(E_0) = -\frac{3}{4kTE_0}(E - E_0)^2 - \frac{3E_0}{kT} = -\left(\frac{E - E_0}{\Delta/2}\right)^2 - \tau$$

と書くことができる。ここで

$$\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{E_0kT}, \quad \tau = \frac{3E_0}{kT}$$

である。以上より鞍点法 (98) を用いると、 $\alpha = 0$ とおいて

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-\tau} \int_0^\infty dE S(E) \exp\left[-\left(\frac{E - E_0}{\Delta/2}\right)^2\right] \\ &\approx \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-\tau} \frac{\sqrt{2\pi} g(E_0) e^{f(E_0)}}{\sqrt{|f''(E_0)|}} = \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-\tau} \frac{\sqrt{2\pi} S(E_0)}{\sqrt{\left|-\frac{8}{\Delta^2}\right|}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\mu}} \frac{\Delta}{(kT)^{3/2}} e^{-\tau} S(E_0) \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{2}{\mu}} \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{E_0kT} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \frac{(kT)^2}{9E_0^2} \tau^2 e^{-\tau} S(E_0) = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2}{3\mu}} E_0^{-3/2} kT \tau^2 e^{-\tau} S(E_0) = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2}{3\mu}} \left(\frac{bkT}{2}\right)^{-1} kT \tau^2 e^{-\tau} S(E_0) \\ &= \frac{8}{9\sqrt{3}} \frac{\hbar}{\pi Z_1 Z_2 e^2} \frac{1}{\mu} \tau^2 e^{-\tau} S(E_0) \end{aligned} \quad (106)$$

と計算することができる。また $\tau = 3(b/2)^{2/3} / (kT)^{1/3} \equiv B / (T_6)^{1/3}$ であるから、

$$\lambda \propto (T_6)^{-2/3} \exp\left(-\frac{B}{(T_6)^{1/3}}\right) \quad (107)$$

という温度依存性をもつことが分かる。ここで $T_6 \equiv T/10^6$ [K] である。ここで行った計算は、非共鳴反応の場合であり、共鳴反応の場合には、 $S(E)$ が衝突エネルギー E に強く依存し、 λ の温度依存性などが多岐異なってくる。

反応エネルギー E_0 が低いとき $S(E_0)$ はほぼ一定の値をとるので、 $S(E_0) \cong S(0) + (dS/dE)_{E_0=0} E_0$ として、 $S_0 = S(E_0 = 0)$ と $(dS/dE)_{E_0=0}$ を $S(E_0)$ の代わりに使うことがある。また、核反応に於ける断面積 σ は面積の次元を持つが、普通これを cm^2 単位ではなく

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

を単位として表すことが良く行われる。反応断面積 σ 、また S_0 と $(dS/dE)_{E_0=0}$ を理論計算や実験から知ることができれば、反応の速さを知ることができる。