特殊相対性理論

1 特殊相対性原理

特殊相対論は、

1. **真空中での光の伝播速度が任意の慣性座標系で同じ値を持つこと、**
2. **物理法則が任意の慣性系で同じ形式で表される（慣性系は皆同等）**

という二つの要請を基礎としている。例えば、ある慣性系 O で粒子の運動を観測すれば、その運動は四つの数の組み合わせ $\left(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4\right) = (ct, x, y, z)$ の変化として表される。そして、この同じ粒子を慣性系 O に対して、速度 $\mathbf{v}$ で等速直線運動している別の慣性系 $\overline{O}$ で観測すれば $\left(\overline{x}^0, \overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3, \overline{x}^4\right) = (c\overline{t}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ を用いて記述することになる。以下では専ら時間の変数として $x^0 = ct$ を用い、時間を長さの単位で測ることにする。従って、例えば**速度は光の速度で規格化した（c を壱とした）無次元の量**となる。

同じ粒子の運動を別々の慣性系で観測したときに、一つの系で得られた結果を別の系で使われる「言葉」に翻訳することは**座標変換**によって行われる。上の二つの要請を満たす慣性系間の座標変換は**ローレンツ変換**と呼ばれている。特殊相対論に於いては、ニュートン力学に於ける絶対時間を導入することができず、時間も慣性系間に於ける座標変換の対象となる。従って、特殊相対論に於ける座標変換では、ニュートン力学に於ける三次元ベクトルや 3×3 のテンソルではなく、**時間成分も含めた四次元ベクトルや 4×4 テンソル**の変換則を考える必要がある。

2 Minkowski 空間

四次元時空の近接した二つの事象間の距離が、二つの慣性座標系 O と $\overline{O}$ に於いて

$$ds^2 = dx^\alpha dx_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = \overline{\eta}_{\alpha\beta}\, d\overline{x}^\alpha d\overline{x}^\beta \tag{1}$$

で与えられたとする。ここで、**平坦な**空間について、**計量テンソル** $\eta_{\alpha\beta}$ と $\overline{\eta}_{\alpha\beta}$ は、座標 x^i や $\overline{x}^i$ をデカルト座標にとるとき

$$\eta_{\alpha\beta} = \overline{\eta}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

で与えられるものとし（**Minkowski 空間**）、また同じ添え字が上下対に現れた場合は、ギリシャ文字は 0 から 3 まで、アルファベットに関しては 1 から 3 までの和をとる（縮約）ものとする（縮約を行わない場合でもこの規則に従うものとする）。

光子の弐点間の伝播

$$P = \left(x_P^0, x_P^1, x_P^2, x_P^3\right) = \left(\overline{x}_P^0, \overline{x}_P^1, \overline{x}_P^2, \overline{x}_P^3\right) \longrightarrow Q = \left(x_Q^0, x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3\right) = \left(\overline{x}_Q^0, \overline{x}_Q^1, \overline{x}_Q^2, \overline{x}_Q^3\right)$$

を考えれば、光の速度は両慣性座標系で同じであるから

$$\eta_{\alpha\beta}\left(x_Q^\alpha - x_P^\alpha\right)\left(x_Q^\beta - x_P^\beta\right) = \bar{\eta}_{\alpha\beta}\left(\bar{x}_Q^\alpha - \bar{x}_P^\alpha\right)\left(\bar{x}_Q^\beta - \bar{x}_P^\beta\right) = 0$$

なる関係が成立している。これは光の運動に関しては—光の運動だけが— $ds^2 = 0$ が成り立つことを示している。

3 ローレンツ変換

二つの慣性座標系 O と $\overline{O}$ の間の線形座標変換で、Eq.(1) を満たすものローレンツ変換である。空間座標 x^i をデカルト座標にとるとき、二つの慣性座標系間のローレンツ変換は、座標間の相対速度 $\mathbf{v}$ だけに依存し、座標系の回転などを考えず、proper なもの

$$\det\left(\Lambda_\alpha^{\bar{\beta}}(\mathbf{v})\right) = 1 \tag{3}$$

に限れば、一般に

$$\bar{x}^\alpha = \Lambda_\beta^{\bar{\alpha}}(\mathbf{v})x^\beta \tag{4}$$

$$\Lambda_0^{\bar{0}}(\mathbf{v}) = \gamma, \quad \Lambda_0^{\bar{i}}(\mathbf{v}) = -\gamma v^i = \Lambda_i^{\bar{0}}(\mathbf{v}) = -\gamma v_i, \quad \Lambda_j^{\bar{i}}(\mathbf{v}) = \delta_j^i + v^i v_j(\gamma - 1)/\mathbf{v}^2 \tag{5}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \quad \mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}/c \tag{6}$$

で与えられる。ここで両慣性座標系間の相対速度 $\mathbf{v}$ は光の速度で規格化してあり、δ_β^α は Kronecher delta である。

座標変換の行列を

$$\Lambda_\alpha^{\bar{\beta}}(\mathbf{v}) \equiv \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha}, \qquad \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\beta}(\mathbf{v}) \equiv \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \tag{7}$$

で定義すれば、$\Lambda_\alpha^{\bar{\beta}}(\mathbf{v}), \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\beta}(\mathbf{v})$ が

$$\Lambda_\alpha^{\bar{\beta}}(\mathbf{v})\,\Lambda_{\bar{\beta}}^{\gamma}(\mathbf{v}) = \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\gamma \tag{8}$$

を満たす。例えば、二つの近接した事象間隔を表す四元ベクトル $d\mathbf{x}$ の反変成分 dx^α や共変成分 dx_α はそれぞれ

$$d\bar{x}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta = \Lambda_\beta^{\bar{\alpha}}dx^\beta, \qquad d\bar{x}_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha}dx_\beta = \Lambda_{\bar{\beta}}^{\alpha}dx_\beta \tag{9}$$

と変換されるものとする。同様にすれば、二階のテンソルは

$$\overline{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\delta}T^{\gamma\delta} = \Lambda_\gamma^{\bar{\alpha}}\Lambda_\delta^{\bar{\beta}}T^{\gamma\delta}, \qquad \overline{T}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\beta}T_{\gamma\delta} = \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\gamma}\Lambda_{\bar{\beta}}^{\delta}T_{\gamma\delta} \tag{10}$$

などと変換される。

また計量テンソルを用いて反変成分と共変成分とが

$$dx_\alpha = \eta_{\alpha\beta}dx^\beta, \quad dx^\alpha = \eta^{\alpha\beta}dx_\beta \qquad \Longrightarrow \qquad dx_0 = -dx^0, dx^0 = -dx_0, \quad dx_i = dx^i, dx^i = dx_i \tag{11}$$

などで結びつけられる。ここで $\left(\eta^{\alpha\beta}\right) \equiv \left(\eta_{\alpha\beta}\right)^{-1} = \left(\eta_{\alpha\beta}\right)$ である。

3.1　任意の四元ベクトルに於けるローレンツ変換

任意の四元ベクトルを $f^\alpha = \left(f^0, \boldsymbol{f}\right)$ と書くことにする。この反変成分はローレンツ変換により、

$$\bar{f}^\alpha = \Lambda^{\bar\alpha}_\beta f^\beta$$

なる変換を受けることになる。これを書き下すと

$$\begin{aligned}
\bar{f}^0 &= \Lambda^{\bar 0}_\beta f^\beta = \Lambda^{\bar 0}_0 f^0 + \Lambda^{\bar 0}_i f^i = \gamma f^0 + (-\gamma v_i)\, f^i = \gamma f^0 - \gamma\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{f}) \\
\bar{f}^i &= \Lambda^{\bar i}_\beta f^\beta = \Lambda^{\bar i}_0 f^0 + \Lambda^{\bar i}_j f^j = -\gamma v^i f^0 + \left\{\delta^i_j + v^i v_j\,(\gamma-1)\,/\mathbf{v}^2\right\} f^j = -\gamma v^i f^0 + f^i + v^i v_j\,(\gamma-1)\,/\mathbf{v}^2 f^j \\
&= -\gamma f^0 v^i + f^i + v^i v_j f^j\,(\gamma-1)\,/\mathbf{v}^2 = -\gamma f^0 v^i + f^i + v^i\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{f})\,(\gamma-1)\,/\mathbf{v}^2
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix}\bar{f}^0\\ \bar{\boldsymbol{f}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma f^0 - \gamma\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{f})\\ -\gamma f^0\mathbf{v} + \boldsymbol{f} + \mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{f})\,(\gamma-1)\,/\mathbf{v}^2\end{pmatrix} \tag{12}$$

を得る。

ベクトルの空間成分 $\boldsymbol{f}$ を $\mathbf{v}$ に平行な成分と垂直な成分に分けて

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_\parallel + \boldsymbol{f}_\perp, \qquad \boldsymbol{f}_\perp = \mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{f})\,/\mathbf{v}^2$$

と書くことにすると、Eq.(12) は

$$\begin{aligned}
\bar{f}^0 &= \gamma f^0 - \gamma\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{f}_\parallel) \\
\bar{\boldsymbol{f}}_\parallel + \bar{\boldsymbol{f}}_\perp &= -\gamma f^0\mathbf{v} + \boldsymbol{f}_\parallel + \boldsymbol{f}_\perp + (\gamma-1)\,\boldsymbol{f}_\parallel \\
\Longrightarrow\ \bar{\boldsymbol{f}}_\parallel &= -\gamma f^0\mathbf{v} + \gamma\boldsymbol{f}_\parallel \qquad \because\ \bar{\boldsymbol{f}}_\perp = \boldsymbol{f}_\perp
\end{aligned}$$

と書けることから、

$$\begin{pmatrix}\bar{f}^0\\ \bar{f}^1_\parallel\\ \bar{f}^2_\parallel\\ \bar{f}^3_\parallel\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}1 & -v_1 & -v_2 & -v_3\\ -v_1 & 1 & 0 & 0\\ -v_2 & 0 & 1 & 0\\ -v_3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f^0\\ f^1_\parallel\\ f^2_\parallel\\ f^3_\parallel\end{pmatrix}$$

となり、

$$\begin{pmatrix}\bar{f}^0\\ \bar{\boldsymbol{f}}_\parallel\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}1 & -\mathbf{v}^T\\ -\mathbf{v} & \overleftrightarrow{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f^0\\ \boldsymbol{f}_\parallel\end{pmatrix} \tag{13}$$

を得る。ここで $\mathbf{v}^T = (v_1, v_2, v_3)$ で、$\overleftrightarrow{1}$ は三階の単位行列である。

式 (4) から式 (6) で与えられたローレンツ変換について $\Lambda^{\bar\beta}_\alpha(\mathbf{v})\Lambda^{\bar\gamma}_\beta(-\mathbf{v})$ を計算すると、

$\alpha = \gamma = 0$　のとき、

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\bar\beta}_0(\mathbf{v})\Lambda^{\bar 0}_\beta(-\mathbf{v}) &= \Lambda^{\bar 0}_0(\mathbf{v})\Lambda^{\bar 0}_0(-\mathbf{v}) + \Lambda^{\bar i}_0(\mathbf{v})\Lambda^{\bar 0}_i(-\mathbf{v}) = \gamma^2 + \left(-\gamma v^i\right)(\gamma v_i) = \gamma^2 - \gamma^2\mathbf{v}^2 = \left(1-\mathbf{v}^2\right)\gamma^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\alpha = 0, \gamma = i$　のとき、

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\bar\beta}_0(\mathbf{v})\Lambda^{\bar i}_\beta(-\mathbf{v}) &= \Lambda^{\bar 0}_0(\mathbf{v})\Lambda^{\bar i}_0(-\mathbf{v}) + \Lambda^{\bar j}_0(\mathbf{v})\Lambda^{\bar i}_j(-\mathbf{v}) = \gamma\left(\gamma v^i\right) + \left(-\gamma v^j\right)\left\{\delta^i_j + v^i v_j(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\} \\
&= \gamma^2 v^i - \gamma v^i - v^i(\gamma-1)\gamma \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\alpha = i, \gamma = 0$　のとき、

$$\begin{aligned}
\Lambda_i^{\bar{\beta}}(\mathbf{v})\Lambda_{\beta}^{\bar{0}}(-\mathbf{v}) &= \Lambda_i^{\bar{0}}(\mathbf{v})\Lambda_0^{\bar{0}}(-\mathbf{v}) + \Lambda_i^{\bar{j}}(\mathbf{v})\Lambda_j^{\bar{0}}(-\mathbf{v}) = (-\gamma v_i)\,\gamma + \left\{\delta_i^j + v^j v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\}\left(\gamma v_j\right) \\
&= -\gamma^2 v_i + \gamma v_i + v_i(\gamma-1)\gamma \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\alpha = i, \gamma = j$　のとき、

$$\begin{aligned}
\Lambda_i^{\bar{\beta}}(\mathbf{v})\Lambda_{\beta}^{\bar{j}}(-\mathbf{v}) &= \Lambda_i^{\bar{0}}(\mathbf{v})\Lambda_0^{\bar{j}}(-\mathbf{v}) + \Lambda_i^{\bar{k}}(\mathbf{v})\Lambda_k^{\bar{j}}(-\mathbf{v}) = (-\gamma v_i)\left(\gamma v^j\right) + \left\{\delta_i^k + v^k v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\}\left\{\delta_k^j + v^j v_k(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\} \\
&= \delta_i^j - \gamma^2 v^j v_i + 2v^j v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 + v^j v_i(\gamma-1)^2/\mathbf{v}^2 = \delta_i^j + v^j v_i\left[\frac{(\gamma-1)^2}{\mathbf{v}^2} + \frac{2(\gamma-1)}{\mathbf{v}^2} - \gamma^2\right] \\
&= \delta_i^j
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\Lambda_{\alpha}^{\bar{\beta}}(\mathbf{v})\Lambda_{\beta}^{\bar{\gamma}}(-\mathbf{v}) = \delta_{\alpha}^{\gamma}$$

が成り立つので、以下の関係が成り立つことが分かる。

$$\Lambda_{\bar{\beta}}^{\alpha}(\mathbf{v}) \equiv \Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}(-\mathbf{v}) \tag{14}$$

3.2　事象間隔、事象距離の変換

座標変換は、変換行列の行列因子、つまりヤコビアン J を用いて

$$d^4\bar{\mathbf{x}} = \frac{\partial\left(\bar{\mathbf{x}}\right)}{\partial\left(\mathbf{x}\right)}\,d^4\mathbf{x} = \det\left(\frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)d^4\mathbf{x} = \det\left(\Lambda_{\alpha}^{\bar{\beta}}(\mathbf{v})\right)d^4\mathbf{x} = J\,d^4\mathbf{x}$$

と書くことができる。式 (4) から式 (6) で与えられるローレンツ変換に対しては、座標間の相対速度 $\mathbf{v}$ だけに依存し、座標系の回転などを考えず、proper なものとして考えていたので、Eq.(3) にもあるように、

$$J = \det\left(\Lambda_{\alpha}^{\bar{\beta}}(\mathbf{v})\right) = 1$$

である。よって

$$d^4\bar{\mathbf{x}} = d^4\mathbf{x} \tag{15}$$

が成り立つ。この式から四次元微小体積 $d^4\mathbf{x}$ はローレンツ変換に対して不変であることが確認できる。同様にして、

$$\eta_{\alpha\beta} = \bar{\eta}_{\mu\nu}\Lambda_{\alpha}^{\bar{\mu}}\Lambda_{\beta}^{\bar{\nu}} \tag{16}$$

が成り立つのが分かる。以上から Eq.(1) の ds^2 がローレンツ変換に対して不変であることが分かる。

上の行列式 $\det\left(\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}(\mathbf{v})\right)$ を実際に計算してみる。

$$\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}
\gamma & -\gamma v^1 & -\gamma v^2 & -\gamma v^3 \\
-\gamma v_1 & 1 + v^1 v_1(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 & v^1 v_2(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 & v^1 v_3(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 \\
-\gamma v_2 & v^2 v_1(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 & 1 + v^2 v_2(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 & v^2 v_3(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 \\
-\gamma v_3 & v^3 v_1(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 & v^3 v_2(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 & 1 + v^3 v_3(\gamma-1)/\mathbf{v}^2
\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\det\left(\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}(\mathbf{v})\right) &= \gamma + \frac{\gamma^2}{\mathbf{v}^2}\left(v_1 v^1 + v_2 v^2 + v_3 v^3\right) - \frac{\gamma}{\mathbf{v}^2}\left(v_1 v^1 + v_2 v^2 + v_3 v^3\right) - \gamma^2\left(v_1 v^1 + v_2 v^2 + v_3 v^3\right) \\
&= \gamma^2\left(1 - \mathbf{v}^2\right) = 1
\end{aligned}$$

より確かに、$\det\left(\Lambda_{\beta}^{\bar{\alpha}}(\mathbf{v})\right) = 1$ が確認できる。

3.3 慣性系の軸に平行な他の慣性系が、等速直線運動している場合

慣性系 O の x 軸に平行な慣性系 $\overline{O}$ が速度 $v = v_x$ で等速直線運動しているとする。このとき、両慣性系の座標軸は平行であると仮定し、Eq.(4) から Eq.(6) で与えられたローレンツ変換の特別な場合であると考えれば、$\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, x, y, z)$ と $\left(x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}}\right) = (c\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ との関係が、

$$\begin{pmatrix} x^{\bar{0}} \\ x^{\bar{1}} \\ x^{\bar{2}} \\ x^{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

で与えられることは、変換 (13),(15) からも明らかである。これを近接する二事象間について書けば、

$$\begin{pmatrix} dx^{\bar{0}} \\ dx^{\bar{1}} \\ dx^{\bar{2}} \\ dx^{\bar{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

を得る。この場合、慣性系 $\overline{O}$ の原点に静止している時計に進み $dx^{\bar{0}}$ を、慣性系 O の観測者が測ったときの時計の進み dx^0 とを比較すれば、

$$dx^{\bar{i}} = 0, \quad dx^i = v dx^0$$

であるから、

$$dx^{\bar{0}} = \gamma dx^0 - \gamma v dx^1 = \gamma\left(1 - v^2\right) dx^0 = \sqrt{1 - v^2}\, dx^0 \leq dx^0$$

となり、**慣性系 O から見て運動している時計の進みが遅くなった様に見える**ことが分かる。また、慣性系 $\overline{O}$ に静止している棒の長さ $dx^{\bar{1}}$ を慣性系 O で測ると、棒の両端の位置の計測は慣性系 O で同時刻に於いて成されなければばならないから、$dx^0 = 0$ として、

$$dx^{\bar{1}} = -\gamma v dx^0 + \gamma dx^1 = \gamma dx^1 \quad \Longrightarrow \quad dx^1 = \frac{1}{\gamma} dx^{\bar{1}} = \sqrt{1 - v^2}\, dx^{\bar{1}} \leq dx^{\bar{1}}$$

となり、**運動している物体が運動方向に収縮している**ように見える。

3.4 三次元速度

二つの慣性系 O と $\overline{O}$ とから見た、粒子の三次元速度を

$$u^i = \frac{dx^i}{dx^0}, \qquad u^{\bar{i}} = \frac{dx^{\bar{i}}}{dx^{\bar{0}}} \tag{19}$$

で定義すると、

$$u^{\bar{i}} = \Lambda^{\bar{i}}_{\alpha} \frac{dx^\alpha}{dx^{\bar{0}}} = \Lambda^{\bar{i}}_{\alpha} \frac{\dfrac{dx^\alpha}{dx^0}}{\dfrac{dx^{\bar{0}}}{dx^0}}$$

と書くことができる。今

$$\Lambda^{\bar{i}}_{\alpha} \frac{dx^\alpha}{dx^0} = \Lambda^{\bar{i}}_{0} \frac{dx^0}{dx^0} + \Lambda^{\bar{i}}_{j} \frac{dx^j}{dx^0} = \left(-\gamma v^i\right) + \left\{\delta^i_j + v^i v_j (\gamma - 1)/\mathbf{v}^2\right\} u^j = \left(-\gamma v^i\right) + u^i + v^i\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\,(\gamma - 1)/\mathbf{v}^2$$

$$\frac{dx^{\bar{0}}}{dx^0} = \frac{d}{dx^0}\left(\Lambda^{\bar{0}}_{\alpha} dx^\alpha\right) = \frac{d}{dx^0}\left(\Lambda^{\bar{0}}_{0} dx^0 + \Lambda^{\bar{0}}_{i} dx^k\right) = \frac{d}{dx^0}\left(\gamma dx^0 - \gamma v_k dx^k\right) = \gamma - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \gamma\,(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$$

であるから、

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathbf{u} - \gamma\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})(\gamma-1)/\mathbf{v}^2}{1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})} = \frac{1}{\gamma}\frac{\gamma(\mathbf{u}_{\parallel}-\mathbf{v}) + \mathbf{u}_{\perp}}{1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})} \tag{20}$$

となる (Eq.(12) で $f \to x$ として、両辺を t' で微分した場合も同じ結果を得る)。ここで $\mathbf{u}_{\parallel} = \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})/\mathbf{v}^2$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$ である。これは又今の場合、

$$\bar{u}^1 = \frac{u^1 - v}{1 - vu^1}, \quad \bar{u}^2 = \frac{1}{\gamma}\frac{u^2}{1-vu^1}, \quad \bar{u}^3 = \frac{1}{\gamma}\frac{u^3}{1-vu^1} \tag{21}$$

で与えられることも分かる。これらの関係式より、$\mathbf{u} = (1,0,0)$ のとき $\bar{\mathbf{u}} = (1,0,0)$ となるから、**光の速さは両慣性系で同じ**ことが確認される。

4 相対論的運動学

4.1 四元速度ベクトル

$d\tau^2 \equiv -ds^2$ **によって固有時間 τ を定義すると、これはローレンツ変換に対して不変なスカラー関数**となる。これは又慣性系 O とそれに対して速度 $\mathbf{v}$ で等速直線運動している慣性系 $\overline{O}$ とを考えたとき、慣性系 $\overline{O}$ で静止している観測者の時間間隔 $d\bar{x}^0$ と、それを慣性系 O に静止している観測者が測った時間間隔 dx^0 とが

$$d\tau^2 = -ds^2 = (dx^0)^2 - \left(d\mathbf{x}^2\right) = (dx^0)^2\left(1 - \frac{d\mathbf{x}^2}{dt^2}\right) = (dx^0)^2\left(1-\mathbf{v}^2\right) \quad \Longrightarrow \quad d\tau = \sqrt{1-\mathbf{v}^2}\,dx^0 = \frac{1}{\gamma}dx^0 \tag{22}$$

で結びついている。光よりも遅く運動する粒子については

$$-ds^2 = d\tau^2 > 0$$

が成り立つ。

物理法則を任意の慣性系で同じ形式で表すために、様々な物理量をローレンツ変換に対して四元ベクトル、またはテンソルとして振る舞うように定義する必要がある。例えば、ある慣性系 O で観測したとき、粒子が $\mathbf{u} = dx^i/dx^0$ の三次元速度で運動しているとき、その**四元速度**を

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}}\frac{dx^\alpha}{dx^0} = \gamma_u\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}, \ c\text{ をあからさまに書いて、}U^\alpha = \gamma_u\begin{pmatrix}c\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}} \tag{23}$$

とすれば、固有時間 $d\tau$ はスカラーであり、dx^α は反変成分として振る舞う四元ベクトルであるから、U^α も四元ベクトルの反変成分として振る舞うことになる。よってこれを四元速度ベクトルの定義とする。

今の場合、四元速度ベクトル U^α のローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix}\overline{U}^0\\ \overline{U}^1\\ \overline{U}^2\\ \overline{U}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_v & -\gamma_v v & 0 & 0\\ -\gamma_v v & \gamma_v & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U^0\\ U^1\\ U^2\\ U^3\end{pmatrix}$$

と書け、また定義から

$$U^\alpha = \gamma_u\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}, \qquad \overline{U}^\alpha = \gamma_{\bar{u}}\begin{pmatrix}1\\ \bar{\mathbf{u}}\end{pmatrix}$$

である。これより、

$$\overline{U}^0 = \gamma_{\bar{u}} = \gamma_u U^0 - \gamma_v v U^1 = \gamma_v\gamma_u - \gamma_v v\gamma_u u^1 = \gamma_u\gamma_v\left(1 - vu^1\right) \qquad \therefore\ \frac{\gamma_u\gamma_v}{\gamma_{\bar{u}}} = \frac{1}{1-vu^1}$$

$$\overline{U}^1 = \gamma_{\overline{u}}\overline{u}^1 = -\gamma_v v U^0 + \gamma_v U^1 = -\gamma_v v \gamma_u + \gamma_v \gamma_u u^1 \qquad \therefore\ \overline{u}^1 = \frac{u^1 - v}{1 - vu^1}$$

$$\overline{U}^2 = \gamma_{\overline{u}}\overline{u}^2 = U^2 = \gamma_u u^2 \qquad \therefore\ \overline{u}^2 = \frac{1}{\gamma_v}\frac{u^2}{1 - vu^1}$$

$$\overline{U}^3 = \gamma_{\overline{u}}\overline{u}^3 = U^3 = \gamma_u u^3 \qquad \therefore\ \overline{u}^3 = \frac{1}{\gamma_v}\frac{u^3}{1 - vu^1}$$

を得るが、これは Eq.(21) と一致している。

4.2　四元モーメンタムと全エネルギー

四元モーメンタム（四元運動量） p^α を

$$p^\alpha \equiv mU^\alpha \tag{24}$$

で定義する。ここで m は粒子の静止質量である。これを具体的に書けば

$$p^\alpha = mU^\alpha = m\gamma_u(1, \mathbf{u}) \equiv (E, \mathbf{p}), \quad c \text{ をあからさまに書いて、} p^\alpha = \begin{pmatrix} m\gamma_u c \\ m\gamma_u \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \tag{25}$$

と書ける。ここで $\mathbf{p}, \mathbf{u}$ 等のベクトルは空間成分を表すものとする。ここで E は**ポテンシャルを除く粒子の全エネルギー**であり、

$$E = m\gamma_u c^2 = Mc^2 \qquad m\text{：静止質量}$$

なる関係が成り立つことが分かる。この関係を**エネルギーと質量の等価性**と呼ぶ。

$\mathbf{u}^2 \ll 1$ とすれば

$$E \cong mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2$$

であるから、E は定数項 mc^2 を除いて、ニュートン力学に於ける粒子の運動エネルギーに近づく。このことから、相対論に於ける運動エネルギー $T(\mathbf{u})$ は全エネルギーから静止エネルギーを引いたものとして、

$$T(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}) - mc^2 = m\gamma_u c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma_u - 1)$$

と定義される。

固有時間 $d\tau$ は Eq.(1) より

$$ds^2 = dx^\alpha dx_\alpha = -d\tau^2$$

であるから、この両辺を $d\tau^2$ で割ると

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx_\alpha}{d\tau} = U^\alpha U_\alpha = \eta_\alpha U^\alpha U^\beta = -1$$

となるので、

$$p^\alpha p_\alpha = m^2 U^\alpha U_\alpha = -m^2$$

を得る。また $E, \mathbf{p}$ の定義から

$$E^2 = (\gamma_u m)^2 = \gamma_u^2 m^2, \qquad |\mathbf{p}|^2 = |\gamma_u m\mathbf{u}|^2 = \gamma_u^2 m^2 \mathbf{u}^2$$

であるから、

$$|\mathbf{p}|^2 + m^2 = m^2\left(\gamma_u^2\mathbf{u}^2 + 1\right) = m^2\left(\frac{\mathbf{u}^2}{1 - \mathbf{u}^2} + 1\right) = \gamma_u^2 m^2$$

となり、

$$E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2 \quad c \text{ をあからさまに書いて、} \quad E^2 = m^2c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2 \tag{26}$$

であることが分かる。

4.3　四元加速度ベクトル

四元速度ベクトルを定義したのと同じ理屈で四元加速度ベクトルを

$$a^{\alpha} = \frac{dU^{\alpha}}{d\tau} = \frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} \tag{27}$$

で定義する。このとき

$$\frac{d}{d\tau}(U^{\alpha}U_{\alpha}) = 2a^{\alpha}U_{\alpha} = 0 \tag{28}$$

なので、**四元速度と四元加速度が直交している**ことが分かる。このとき**四元速度と四元加速度は完全には独立ではない。**

4.4　四元力ベクトル

もし**四元力ベクトル** F^{α} を導入して粒子の運動方程式が

$$F^{\alpha} = ma^{\alpha} = \frac{dp^{\alpha}}{d\tau} = m\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} \tag{29}$$

と定義できれば、この両辺は慣性系間のローレンツ変換に対して同じように変換されるから、**任意の慣性系で成立する運動方程式**となる。これは任意の慣性系で物理法則—今の場合、運動方程式—を同じ形式で表現するという要請に対応している。

粒子の相対論的運動方程式を求めるには、四元力ベクトル F^{α} と Newton 力学に於ける力ベクトル K^j との関係を求める必要がある。

今、粒子が速度 $\mathbf{u}$ で運動している様に見える慣性系に於いて、Eq.(29) の空間成分を

$$\frac{dp^j}{dx^0} = \frac{dp^j}{dt} = \frac{1}{\gamma_u}F^j = K^j \tag{30}$$

と書き換えたときの右辺の $\gamma_u^{-1}F^j$ を Newton 力学に於ける力 K^j であると仮定する。また Eq.(28) から

$$U_{\alpha}F^{\alpha} = 0$$

であり、Eq.(30) を使って

$$U_{\alpha}F^{\alpha} = U_0F^0 + U_jF^j = -\gamma_uF^0 + \gamma_uu_jF^j = -\gamma_u\frac{dp^0}{d\tau} + \gamma_u(\mathbf{u}\cdot\mathbf{F}) = -\gamma_u^2\frac{dp^0}{dt} + \gamma_u^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}) = 0$$

と書けることから、

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{dE}{dt} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{K} \quad \text{または、} \quad F^0 = \gamma_u(\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}) \tag{31}$$

を得る。これは瞬間的に粒子が静止 ($u^j = 0$) しているような慣性系 $\overline{S}$ を考えたとき、従って

$$d\overline{t} = d\tau \quad \text{そして、} \quad \gamma_u = 1$$

のとき、その系では、四元力ベクトル $\overline{F}^j$ が Newton 力学に於ける $\overline{K}^j$ で与えられると仮定して、

$$\frac{d\overline{p}^j}{d\overline{t}} = \overline{K}^j \quad \text{そして、} \quad \frac{d\overline{p}^0}{d\overline{t}} = \overline{F}^0 = 0 \tag{32}$$

が成り立つと仮定することに対応する。Eq.(31) の右辺は仕事率である。Eq.(30) と Eq.(31) が四元力ベクトル F^{α} と Newton 力学に於ける力ベクトル K^j との関係

$$F^{\alpha} = \gamma_u\Big((\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}), \mathbf{K}\Big), \quad c \text{ をあからさまに書いて、} \quad F^{\alpha} = \left(\frac{\gamma_u}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma_u\mathbf{K}\right) = \left(\frac{\gamma_u}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma_u\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right) \tag{33}$$

を与える。

5 電磁気学

以下では c を復活させて、単位を露わにした書き方をする。

5.1 Maxwell 方程式のローレンツ共変性

真空中の Maxwell 方程式をローレンツ変換に対して共変型になるように書き換える。真空中の Maxwell 方程式は、電荷 q 、電荷密度 ρ 、電流密度 $\mathbf{j}$ 、電則密度 $\mathbf{D}$ 、電場の強さ $\mathbf{E}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ 、磁場の強さ $\mathbf{H}$ を使って、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=0 \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=\rho,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{j} \tag{35}$$

と書き表せる（MKS 単位系）。Eq.(34) から明らかなように、この単位系では $\mathbf{B}$ と $\mathbf{E}/c$ とが同じ次元を持つ。また、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$ 、$\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ とが真空の誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 とを使って

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E},\qquad \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H} \tag{36}$$

で結ばれる。ここで

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}$$

である。

さて、二階の反対称テンソル $f_{\mu\nu}, f^{\lambda\nu}$（**Maxwell tensor**） と**四元電流密度ベクトル** j^μ とを、

$$f_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c\\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y\\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x\\ E_z/c & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix},\quad f^{\lambda\nu}\equiv\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\nu\beta}f_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c\\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y\\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x\\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix},\quad j^\mu=\begin{pmatrix}c\rho\\ j_x\\ j_y\\ j_z\end{pmatrix} \tag{37}$$

で定義する。

今、

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}=0 \tag{38}$$

を考える。

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial f_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial x^3}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

より、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$$

であり、

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x^0}+\frac{\partial f_{30}}{\partial x^2}+\frac{\partial f_{02}}{\partial x^3}=\frac{\partial B_x}{\partial(ct)}+\frac{\partial(-c^{-1}E_z)}{\partial y}+\frac{\partial(c^{-1}E_y)}{\partial z}=0,\quad\Longrightarrow\quad\left[\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right]_x=0$$

であるから、以下同様に

$$\frac{\partial f_{31}}{\partial x^0}+\frac{\partial f_{10}}{\partial x^3}+\frac{\partial f_{03}}{\partial x^1}=0\quad\Longrightarrow\quad\left[\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right]_y=0$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial f_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial f_{01}}{\partial x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}\right]_z = 0$$

であるので、Eq.(34) が得られる。

次に

$$\frac{\partial f^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\lambda \tag{39}$$

を考える。

$$\frac{\partial f^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial f^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial f^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial f^{03}}{\partial x^3} = \frac{\partial(-c^{-1}E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(-c^{-1}E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(-c^{-1}E_z)}{\partial z} = \mu_0 c\rho$$

$$\therefore\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

であり、また

$$\frac{\partial f^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial f^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial f^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial f^{13}}{\partial x^3} = \frac{\partial(-c^{-1}E_x)}{\partial(ct)} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial z} = \mu_0 j_x \quad \Longrightarrow \quad \left[\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right]_x = \mu_0 j_x$$

であるから、同様に

$$\frac{\partial f^{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial f^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial f^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial f^{23}}{\partial x^3} = \mu_0 j^2 \quad \Longrightarrow \quad \left[\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right]_y = \mu_0 j_y$$

$$\frac{\partial f^{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial f^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial f^{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial f^{33}}{\partial x^3} = \mu_0 j^3 \quad \Longrightarrow \quad \left[\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right]_z = \mu_0 j_z$$

となり、Eq.(35) が得られる。

Eq.(38) と Eq.(39) は Maxwell 方程式をローレンツ変換に対する共変型に書き直したものであり、任意の慣性系で成立すると考える。そして一つの慣性系から別の慣性系に移るときは、テンソルやベクトルはその変換則—ローレンツ変換 — に従って変換されるものとする。

5.2 電場、磁場のローレンツ変換

S 系に於ける電場、磁場 $\mathbf{E}$ 、$\mathbf{B}$ と $\overline{S}$ 系に於ける電場、磁場 $\overline{\mathbf{E}}$ 、$\overline{\mathbf{B}}$ との関係を、$f_{\alpha\beta}$ の変換則を用いて求める。ここで $\overline{S}$ 系は S 系に対して速度 $\mathbf{v}$ で運動しているものとする。ローレンツ変換 Eq.(5) を用いると、

$$\begin{aligned}
\overline{f_{i0}} &= \Lambda^\mu_i \Lambda^\nu_0 f_{\mu\nu} = \Lambda^0_i \Lambda^\nu_0 f_{0\nu} + \Lambda^j_i \Lambda^\nu_0 f_{j\nu} = \Lambda^0_i \Lambda^0_0 f_{00} + \Lambda^0_i \Lambda^j_0 f_{0j} + \Lambda^j_i \Lambda^0_0 f_{j0} + \Lambda^j_i \Lambda^k_0 f_{jk} \\
&= \gamma^2 v_i v^j f_{0j} + \gamma\left\{\delta^j_i + v^j v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\} f_{j0} + \gamma v_k \left\{\delta^j_i + v^j v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\} f_{jk} \\
&= \gamma f_{i0} + v_i v^j \left\{-\gamma^2 + \gamma(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\} f_{j0} + \gamma f_{ik} v_k + \gamma v_k v^j v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 f_{jk} \\
&= \gamma f_{i0} + v_i v^j (1-\gamma) f_{j0}/\mathbf{v}^2 + \gamma f_{ik} v_k + \gamma v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 \Big(v^1 v_1 f_{11} + v^1 v_2 f_{12} + v^1 v_3 f_{13} \\
&\qquad + v^2 v_1 f_{21} + v^2 v_2 f_{22} + v^2 v_3 f_{23} \\
&\qquad + v^3 v_1 f_{31} + v^3 v_2 f_{32} + v^3 v_3 f_{33}\Big) \\
&= \gamma f_{i0} + (1-\gamma) v_i v^j f_{j0}/\mathbf{v}^2 + \gamma f_{ik} v_k
\end{aligned}$$

と書けることから、（この段階では、$c = 1$ であるので、 c をあからさまにして ($v \to v/c$) 考えると）

$$\overline{\mathbf{E}} = \gamma\mathbf{E} + (1-\gamma)\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})/\mathbf{v}^2 + \gamma\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{40}$$

である。同様にして、

$$\begin{aligned}
\overline{f}_{ij} &= \Lambda^{\mu}_{\bar{i}}\Lambda^{\nu}_{\bar{j}}f_{\mu\nu} = \Lambda^{0}_{\bar{i}}\Lambda^{\nu}_{\bar{j}}f_{0\nu} + \Lambda^{k}_{\bar{i}}\Lambda^{\nu}_{\bar{j}}f_{k\nu} = \Lambda^{0}_{\bar{i}}\Lambda^{0}_{\bar{j}}f_{00} + \Lambda^{0}_{\bar{i}}\Lambda^{l}_{\bar{j}}f_{0l} + \Lambda^{k}_{\bar{i}}\Lambda^{0}_{\bar{j}}f_{k0} + \Lambda^{k}_{\bar{i}}\Lambda^{m}_{\bar{j}}f_{km} \\
&= \gamma v_i\left\{\delta^{l}_{j} + v^{l}v_j(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\}f_{0l} + \gamma v_j\left\{\delta^{k}_{i} + v^{k}v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\}f_{k0} + \left\{\delta^{k}_{i} + v^{k}v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\}\left\{\delta^{m}_{j} + v^{m}v_j(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\}f_{km} \\
&= \gamma v_i f_{0j} + v_i v^l v_j(\gamma-1)\gamma/\mathbf{v}^2 f_{0l} + \gamma v_j f_{i0} + v_j v^k v_i(\gamma-1)\gamma/\mathbf{v}^2 f_{k0} \\
&\qquad + f_{ij} + v^m v_j(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 f_{im} + v^k v_i(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 f_{kj} + v^k v_i v^m v_j(\gamma-1)^2/\mathbf{v}^4 f_{km} \\
&= f_{ij} + \gamma\left(-v_i f_{j0} + v_j f_{i0}\right) + v_i v^j\gamma(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\left(v^l f_{0l} - v^k f_{0k}\right) + (\gamma-1)\left\{v^m v_j f_{im} - v^k v_i f_{jk}\right\}/\mathbf{v}^2 \\
&= f_{ij} + (\gamma-1)\left(v_j v_k f_{ik} - v_i v_k f_{jk}\right)/\mathbf{v}^2 + \gamma\left(-v_j f_{j0} + v_j f_{i0}\right)
\end{aligned}$$

と書けることから、$\mathbf{E}$ のときと同様にすると、

$$\overline{\mathbf{B}} = \gamma\mathbf{B} + (1-\gamma)\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\right)/\mathbf{v}^2 - \gamma\mathbf{v}\times\mathbf{E}/c^2 \tag{41}$$

となる。

電場や磁場を相対速度 $\mathbf{v}$ に平行な成分と垂直な成分に分けると

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\right)/\mathbf{v}^2, \qquad \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\right)/\mathbf{v}^2$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{E}}_{\parallel} + \overline{\mathbf{E}}_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}\right) + (1-\gamma)\mathbf{E}_{\parallel} + \gamma\mathbf{v}\times\left(\overline{\mathbf{B}}_{\parallel} + \overline{\mathbf{B}}_{\perp}\right) \\
&= \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_{\perp}\right)
\end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{E}}_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \overline{\mathbf{E}}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_{\perp}\right) \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}_{\parallel} + \overline{\mathbf{B}}_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}\right) + (1-\gamma)\mathbf{B}_{\parallel} - \gamma\mathbf{v}\times\left(\overline{\mathbf{E}}_{\parallel} + \overline{\mathbf{E}}_{\perp}\right)/c^2 \\
&= \mathbf{B}_{\parallel} + \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v}\times\mathbf{E}_{\perp}/c^2\right)
\end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{B}}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \overline{\mathbf{B}}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v}\times\mathbf{E}_{\perp}/c^2\right) \tag{43}$$

を得る。

5.3 ローレンツ力

今電荷 e 、質量 m の陽子が真空中で、慣性系 S に於いて与えられた電磁場 $f_{\mu\nu}$ の作用を受けて運動しているとしたとき、この陽子の運動方程式を求めることを考える。ある瞬間に於ける粒子の静止系を $\overline{S}$ 系とすれば、この系 Eq.(32) から、

$$\overline{F}^{i} = e\overline{E}_i = ce\overline{f}^{0i}, \qquad \overline{F}^{0} = 0$$

として、

$$\overline{F}^{\alpha} = ce\overline{f}^{0\alpha}$$

が得られる。

ローレンツ変換

$$F^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\beta}}\overline{F}^{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\beta}}\,ce\overline{f}^{0\beta} = ce\Lambda^{\alpha}_{\bar{\beta}}\Lambda^{\bar{0}}_{\gamma}\Lambda^{\bar{\beta}}_{\delta}f^{\gamma\delta} = ce\delta^{\alpha}_{\delta}\Lambda^{\bar{0}}_{\gamma}f^{\gamma\delta} = ce\Lambda^{\bar{0}}_{\gamma}f^{\gamma\alpha}$$

を計算すると、

$$\begin{aligned}
F^{i} &= ce\Lambda^{\bar{0}}_{\gamma}f^{\gamma i} = ce\left(\Lambda^{\bar{0}}_{0}f^{0i} + \Lambda^{\bar{0}}_{1}f^{1i} + \Lambda^{\bar{0}}_{2}f^{2i} + \Lambda^{\bar{0}}_{3}f^{3i}\right) \\
&= ce\left[\gamma_u\begin{pmatrix}E_x/c\\E_y/c\\E_z/c\end{pmatrix} - \gamma_u u_x/c\begin{pmatrix}0\\B_z\\-B_y\end{pmatrix} - \gamma_u u_y/c\begin{pmatrix}-B_z\\0\\B_x\end{pmatrix} - \gamma_u u_z/c\begin{pmatrix}B_y\\-B_x\\0\end{pmatrix}\right] \\
&= \gamma_u e\left(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}\right) \equiv \gamma_u\mathbf{K}
\end{aligned}$$

であり、また、

$$
\begin{aligned}
F^0 &= ce\Lambda^{\bar{0}}_{\gamma} f^{\gamma 0} = ce\left(\Lambda^{\bar{0}}_{0} f^{00} + \Lambda^{\bar{0}}_{1} f^{10} + \Lambda^{\bar{0}}_{2} f^{20} + \Lambda^{\bar{0}}_{3} f^{30}\right) = ce\left(+\Lambda^{\bar{0}}_{1} f^{10} + \Lambda^{\bar{0}}_{2} f^{20} + \Lambda^{\bar{0}}_{3} f^{30}\right) = ce\left(-\gamma_u(-u_i)E^i/c^2\right) \\
&= e\gamma_u \mathbf{u}\cdot\mathbf{E}/c = e\gamma_u\left(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right)\cdot\mathbf{u}/c \qquad \because\ (\mathbf{u}\times\mathbf{B}) \perp \mathbf{u} \\
&= \gamma_u/c\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}
\end{aligned}
$$

と書けることから、結局

$$
\mathbf{F} = \gamma_u e\left(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right) \equiv \gamma_u\mathbf{K}, \qquad c\gamma_u^{-1}F^0 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{K} \tag{44}
$$

を得る。ここで $\mathbf{K}$ は S 系に於けるローレンツ力である。従って Eq.(29) より

$$
\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \gamma_u\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma_u\frac{d}{dt}(m\gamma_u\mathbf{u}) = m\gamma_u\frac{d}{dt}(\gamma_u\mathbf{u}) = \gamma_u e\left(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right)
$$

となり、陽子の運動方程式が

$$
\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\gamma_u\mathbf{u}\right) = e\left(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right) \tag{45}
$$

で与えられることになる。また、

$$
F^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \gamma_u\frac{dm\gamma_u c}{dt} = \gamma_u mc\frac{d\gamma_u}{dt} = \gamma_u/c\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}
$$

であるから、

$$
mc^2\frac{d\gamma_u}{dt} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{K} = e\mathbf{u}\cdot\mathbf{E} \tag{46}
$$

が成り立ち、この量が慣性系 S に於ける仕事率に等しいことが分かる。また、

$$
\frac{dp^\alpha}{d\tau} = F^\alpha = e\eta^{\alpha\beta} f_{\beta\gamma}U^\gamma
$$

なる関係式を用いると、

$$
\frac{dp^0}{d\tau} = m\gamma_u\frac{d\gamma_u}{dt} = e\eta^{0\beta} f_{\beta\gamma}U^\gamma = e\,\eta^{00} f_{0\gamma}U^\gamma = e\gamma_u\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}/c^2 = \gamma_u/c^2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{K} \qquad \therefore\ mc^2\frac{d\gamma_u}{dt} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{K}
$$

$$
\frac{dp^i}{d\tau} = \gamma_u m\frac{d}{dt}(\gamma_u u^i) = e\eta^{i\beta} f_{\beta\gamma}U^\gamma = e\eta^{ii} f_{i\gamma}U^\gamma = e\left\{-(-E^i/c)m\gamma_u c + \gamma_u m\left[\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right]_i\right\} = em\gamma_u\left\{E^i + \left[\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right]_i\right\}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\gamma_u\mathbf{u}) = e\left(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right)
$$

と計算でき、Eq.(45) と Eq.(46) と一致することが確認できる。

5.4 Ohm の法則

媒質の静止慣性系 $\overline{S}$ で **Ohm の法則**

$$
\overline{j}^k = \sigma\overline{E}^k = c\sigma\overline{f}\,0k \tag{47}
$$

が成立しているとする。ここで σ は電気伝導度である。

慣性系 S に於ける Ohm の法則を求めるのに

$$
j^\alpha = \Lambda^\alpha_{\bar\beta}\overline{j}^\beta = \Lambda^\alpha_{\bar 0}\overline{j}^0 + \Lambda^\alpha_{\bar i}\overline{j}^i = \Lambda^\alpha_{\bar 0}\overline{j}^0 + \Lambda^\alpha_{\bar i}\,c\sigma\overline{f}^{\,0i} = \Lambda^\alpha_{\bar 0}\overline{j}^0 + c\sigma\Lambda^\alpha_{\bar\gamma}\Lambda^{\bar 0}_{\beta}\Lambda^{\bar\gamma}_{\delta} f^{\beta\delta} = \Lambda^\alpha_{\bar 0}\overline{j}^0 + c\sigma\Lambda^{\bar 0}_{\beta} f^{\beta\alpha}
$$

$$
u_\alpha j^\alpha = \overline{u}_\alpha\overline{j}^\alpha = \overline{u}_0\overline{j}^0 = -c\overline{j}^0 = -c^2\overline{\rho}
$$

なる関係式を用いると、

$$
\begin{aligned}
j^0 &= \Lambda^0_{\bar{0}}\bar{j}^{\bar{0}} + c\sigma\Lambda^{\bar{0}}_{\beta}f^{\beta 0} = \Lambda^{\bar{0}}_{0}\bar{j}^{\bar{0}} + c\sigma\Lambda^{\bar{0}}_{\beta}f^{\beta 0} = \gamma\bar{j}^{\bar{0}} + c\sigma\left(\Lambda^{\bar{0}}_{0}f^{00} + \Lambda^{\bar{0}}_{i}f^{i0}\right) = \gamma\bar{j}^{\bar{0}} + c\sigma\gamma v_i/c\,E^i/c \\
&= \gamma\bar{j}^{\bar{0}} + \sigma\gamma\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) \quad\Longrightarrow\quad \gamma\bar{j}^{\bar{0}} = j^0 - \sigma\gamma\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) \qquad \text{ここで } \boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c \\
j^i &= \Lambda^{\bar{i}}_{0}\bar{j}^{\bar{0}} + c\sigma\Lambda^{\bar{0}}_{\beta}f^{\beta i} = \gamma v^i/c\;\bar{j}^{\bar{0}} + c\sigma\left(\Lambda^{\bar{0}}_{0}f^{0i} + \Lambda^{\bar{0}}_{j}f^{ji}\right) \\
&= j^0\,v^i/c - \sigma\gamma v^i/c\;(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) + c\sigma\left(\gamma E^i/c + \gamma\,[\mathbf{v}/c\;\times\mathbf{B}]_i\right) = \rho v^i + \sigma\gamma\left[E^i + \{\mathbf{v}\times\mathbf{B}\}_i - \beta^i\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\right]
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{j} = \sigma\gamma\,[\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta}\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})] + \rho\mathbf{v} \equiv \mathbf{j}_{\mathrm{cond}} + \rho\mathbf{v} \tag{48}
$$

と書けることが分かる。よって明らかに、$|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$ のとき、

$$
\mathbf{j}_{\mathrm{cond}} \cong \sigma\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})
$$

となることが分かる。

6 立体角の変換

微分散乱断面積を定義するときに現れる微分立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ がローレンツ変換に対してどのように変換されるか調べる。この微分立体角の定義で使われる角度 (θ, ϕ) は散乱後の粒子の運動方向であるから、問題は運動速度の変換則を考えることになる。実験室系を O とし、実験室系の x 軸に沿って速度 v で運動している系を $\overline{O}$ とすれば、Eq.(20) の変換則を、

$$
u^1 = u\cos\theta, \quad u^2 = u\sin\theta\cos\phi, \quad u^3 = u\sin\theta\sin\phi \tag{49}
$$

などと書き換えれば、

$$
\bar{u}\cos\bar{\theta} = \frac{u\cos\theta - \beta}{1 - \beta u\cos\theta}, \quad \bar{u}\sin\bar{\theta}\cos\bar{\phi} = \frac{1}{\gamma}\frac{u\sin\theta\cos\phi}{1 - \beta u\cos\theta}, \quad \bar{u}\sin\bar{\theta}\sin\bar{\phi} = \frac{1}{\gamma}\frac{u\sin\theta\sin\phi}{1 - \beta u\cos\theta} \tag{50}
$$

と書け、又逆に解いて

$$
u\cos\theta = \frac{\bar{u}\cos\bar{\theta} + \beta}{1 + \beta\bar{u}\cos\bar{\theta}}, \quad u\sin\theta\cos\phi = \frac{1}{\gamma}\frac{\bar{u}\sin\bar{\theta}\cos\bar{\phi}}{1 + \beta\bar{u}\cos\bar{\theta}}, \quad u\sin\theta\sin\phi = \frac{1}{\gamma}\frac{\bar{u}\sin\bar{\theta}\sin\bar{\phi}}{1 + beta\bar{u}\cos\bar{\theta}} \tag{51}
$$

と書ける。速度は皆光速度で規格化してあり $u/c \to u, \bar{u}/c \to \bar{u}, v/c \to \beta$ としている。ここで $\bar{\phi} = \phi$ であるとすれば、独立なものは

$$
\bar{u}\cos\bar{\theta} = \frac{u\cos\theta - \beta}{1 - \beta u\cos\theta}, \qquad \bar{u}\sin\bar{\theta} = \frac{1}{\gamma}\frac{u\sin\theta}{1 - \beta u\cos\theta} \tag{52}
$$

$$
u\cos\theta = \frac{\bar{u}\cos\bar{\theta} + \beta}{1 + \beta\bar{u}\cos\bar{\theta}}, \qquad u\sin\theta\frac{1}{\gamma}\frac{\bar{u}\sin\bar{\theta}}{1 + \beta\bar{u}\cos\bar{\theta}} \tag{53}
$$

となる。これから

$$
\tan\bar{\theta} = \frac{1}{\gamma}\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta - \beta}, \qquad \text{or} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\gamma}\frac{\bar{u}\sin\bar{\theta}}{\bar{u}\cos\bar{\theta} - \beta} \tag{54}
$$

を得る。

6.1　散乱断面積、微分散乱断面積のローレンツ変換

Eq.(54) より $\tan\theta$ を二乗すると

$$\tan^2\theta = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\sin^2\overline{\theta}}{\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2}$$

であるから、これを整理すると

$$\left\{\sin^2\overline{\theta}+\gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2\right\}\cos^2\theta = \gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta = \frac{\gamma\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)}{\sqrt{\sin^2\overline{\theta}+\gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2}} \tag{55}$$

を得る。$d\sigma = d\overline{\sigma}$ 、つまり

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\Omega}}d\overline{\Omega}$$

とし、$d\overline{\phi} = d\phi$ の場合を考えると、微分散乱断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Lab} d\Omega = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Lab}\sin\theta d\theta d\phi = \left(\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\Omega}}\right)_{\overline{O}} d\overline{\Omega} = \left(\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\Omega}}\right)_{\overline{O}}\sin\overline{\theta}d\overline{\theta}d\overline{\phi}$$

$$\Longrightarrow\quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Lab} = \left(\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\Omega}}\right)_{\overline{O}}\frac{\sin\overline{\theta}}{\sin\theta}\frac{d\overline{\theta}}{d\theta}$$

と書ける。Eq.(55) の $\cos\theta$ を θ で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) &= -\sin\theta = \frac{d}{d\overline{\theta}}\frac{d\overline{\theta}}{d\theta}\\
&= \frac{-\gamma\sin\overline{\theta}\sqrt{\sin^2\overline{\theta}+\gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2} \left\{\sin\overline{\theta}\cos\overline{\theta}-\gamma^2\sin\overline{\theta}\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)\right\}\gamma\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)\Big/\sqrt{\sin^2\overline{\theta}+\gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2}}{\sin^2\overline{\theta}+\gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2}\frac{d\overline{\theta}}{d\theta}\\
&= -\sin\overline{\theta}\frac{\gamma\left(1+\cos\overline{\theta}\,\beta/\overline{u}\right)}{\left\{\sin^2\overline{\theta}+\gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2\right\}^{3/2}}\frac{d\overline{\theta}}{d\theta}
\end{aligned}$$

となることから、

$$\frac{\sin\overline{\theta}}{\sin\theta}\frac{d\overline{\theta}}{d\theta} = \frac{\left\{\sin^2\overline{\theta}+\gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2\right\}^{3/2}}{\gamma\left(1+\cos\overline{\theta}\,\beta/\overline{u}\right)}$$

を得る。よって微分散乱断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Lab} = \left(\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\Omega}}\right)_{\overline{O}}\frac{\left\{\sin^2\overline{\theta}+\gamma^2\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2\right\}^{3/2}}{\gamma\left(1+\cos\overline{\theta}\,\beta/\overline{u}\right)} \tag{56}$$

となる。非相対論の極限では $\gamma\to 1$ であるから、Eq.(56) は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Lab} = \left(\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\Omega}}\right)_{\overline{O}}\frac{\left\{\sin^2\overline{\theta}+\left(\cos\overline{\theta}+\beta/\overline{u}\right)^2\right\}^{3/2}}{\left(1+\cos\overline{\theta}\,\beta/\overline{u}\right)} \tag{57}$$

である。

6.2 電子と光子との散乱

電子と光子の散乱を考えるとき、散乱後の光子の運動方向について実験室系 O と電子の静止系 $\overline{O}$ との交換は、光速度不変の原理から、$u, \overline{u} \to 1$ として、これを Eq.(52)、Eq.(53) に適応させると

$$\cos\theta = \frac{\cos\overline{\theta} + \beta}{\beta\cos\overline{\theta} + 1}, \qquad \cos\overline{\theta} = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta} \tag{58}$$

となる。この $\cos\theta$ を $\overline{\theta}$ で微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\overline{\theta}}(\cos\theta) &= \frac{d\theta}{d\overline{\theta}}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta\frac{d\theta}{d\overline{\theta}} \\
&= \frac{d}{d\overline{\theta}}\left(\frac{\cos\overline{\theta} + \beta}{\beta\cos\overline{\theta} + 1}\right) = \frac{-\sin\overline{\theta}\left(1 + \beta\cos\overline{\theta}\right) + \beta\sin\overline{\theta}\left(\cos\overline{\theta} + \beta\right)}{\left(1 + \beta\cos\overline{\theta}\right)^2} = -\sin\overline{\theta}\frac{1 - \beta^2}{\left(1 + \beta\cos\overline{\theta}\right)^2} = -\sin\overline{\theta}\frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{\left(1 + \beta\cos\overline{\theta}\right)^2}
\end{aligned}$$

となり、

$$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\sin\overline{\theta}}\frac{d\theta}{d\overline{\theta}} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{\left(1 + \beta\cos\overline{\theta}\right)^2}$$

を得るから、 $d\Omega$ から $d\overline{\Omega}$ への変換は

$$d\Omega = \frac{1}{\gamma^2\left(1 + \beta\cos\overline{\theta}\right)^2}\, d\overline{\Omega} = \gamma^2\left(1 - \beta\cos\theta\right)^2\, d\overline{\Omega} \tag{59}$$

となる。よって微分散乱断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Lab}} = \gamma^2\left(1 + \beta\cos\overline{\theta}\right)^2\left(\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\Omega}}\right)_{\overline{O}} = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \beta\cos\theta\right)^2}\left(\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\Omega}}\right)_{\overline{O}} \tag{60}$$

とである。

7 相対論的粒子からの放射

7.1 Larmor の公式

ある観測者の系 O から見たときに相対論的速度で運動している電荷粒子からの輻射（電磁波）の放射について考える。**加速度運動している電荷粒子は電磁波を放射することができ**、その放射の量（単位時間に放射されるエネルギー＝出力＝ Power）は、其の荷電粒子の瞬間的な静止系 $\overline{O}$ で、cgs 単位系を使って、

$$P' = \frac{2q^2}{3c^2}\left|\mathbf{a}'^2\right|^2 \tag{61}$$

なる **Larmor の公式**で与えられる。ここで q は電荷、$\mathbf{a}'$ は加速度ベクトルである。これを、単位立体角当たりの Power で求めれば、

$$\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\left|\mathbf{a}'\right|^2\sin^2\Phi' \tag{62}$$

で与えられる。ここで Φ' は粒子の加速度方向と電磁波が放出される方向とが成す角である。

7.2　三元加速度ベクトル

7.2.1　導出壱

慣性系 O に沿って速度 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ で運動している慣性系 O' を考え、二つの慣性系に於ける三元加速度ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ とを

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\,\mathbf{x}}{dt^2}, \qquad \mathbf{a}' = \frac{d^2\,\mathbf{x}'}{dt'^2} \tag{63}$$

で定義する。$\mathbf{u}$ を $\mathbf{u}'$ で表すには、Eq.(20) を参考に $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$ と置き換えることで

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathbf{u}' + \gamma\mathbf{v} + \mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')\,(\gamma-1)/\mathbf{v}^2}{1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')} \tag{64}$$

と書くことができる。また今、

$$\sigma = 1 + \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')}{c^2} = 1 + \frac{vu'_x}{c^2}$$

とする。

今角速度は光速度 c で規格化されているので、規格化する前に戻すと、

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathbf{u}' + \gamma\mathbf{v} + \mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')\,(\gamma-1)/\mathbf{v}^2}{1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'/c^2)}$$

であるので、

$$u_x = \frac{1}{\gamma_v}\frac{u'_x + \gamma_v v + u_x(\gamma_v - 1)}{\sigma}, \quad u_y = \frac{1}{\gamma_v}\frac{u'_y}{\sigma}, \quad u_z = \frac{1}{\gamma_v}\frac{u'_z}{\sigma}$$

となる。この両辺を t で微分すると、

$$dx^0 = \gamma_v dx'^0 + \gamma_v\frac{v}{c}dx' \quad \Longrightarrow \quad c\,dt = \gamma_v c\,dt' + \gamma\frac{v}{c}\,dx'$$

$$\therefore\ \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma_v\sigma} \tag{65}$$

であるから、これに注意すると、

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u'_x + v}{\sigma}\right) = \frac{\dfrac{du'_x}{dt}\sigma - \dfrac{d\sigma}{dt}\,(u'_x + v)}{\sigma^2} = \frac{\dfrac{dt'}{dt}\dfrac{du'_x}{dt'}\sigma - \dfrac{d}{dt}\left(1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}\right)\cdot(u'_x + v)}{\sigma^2} = \frac{\dfrac{1}{\gamma_v\sigma}a'_x\sigma - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{du'_x}{dt}\,(u'_x + v)}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\gamma_v}a'_x - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{1}{\gamma_v\sigma}a'_x\,(u'_x + v)}{\sigma^2} = \frac{a'_x}{\gamma_v\sigma^3}\left\{\sigma - \frac{v}{c^2}\,(u'_x + v)\right\} = \frac{a'_x}{\gamma_v\sigma^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{a'_x}{\gamma_v^3\sigma^3}$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u'_y}{\gamma_v\sigma}\right) = \frac{\dfrac{dt'}{dt}\dfrac{u'_y}{dt'}\,(\gamma_v\sigma) - u'_y\dfrac{d}{dt}\,(\gamma_v\sigma)}{\gamma_v^2\sigma^2} = \frac{a'_y}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{\dfrac{d}{dt}\sigma}{\gamma_v\sigma^2} = \frac{a'_y}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{u'_y\dfrac{v}{c^2}\dfrac{du'_x}{dt}}{\gamma_v\sigma^2} = \frac{a'_y}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{v}{c^2}\frac{u'_y}{\gamma_v\sigma}\frac{a'_x}{\gamma_v\sigma^2}$$

$$= \frac{a'_y}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{u'_y v}{c^2}\frac{a'_x}{\gamma_v^2\sigma^3}$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u'_z}{\gamma_v\sigma}\right) = \frac{\dfrac{dt'}{dt}\dfrac{u'_z}{dt'}\,(\gamma_v\sigma) - u'_z\dfrac{d}{dt}\,(\gamma_v\sigma)}{\gamma_v^2\sigma^2} = \frac{a'_z}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{\dfrac{d}{dt}\sigma}{\gamma_v\sigma^2} = \frac{a'_z}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{u'_z\dfrac{v}{c^2}\dfrac{du'_z}{dt}}{\gamma_v\sigma^2} = \frac{a'_z}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{v}{c^2}\frac{u'_z}{\gamma_v\sigma}\frac{a'_z}{\gamma_v\sigma^2}$$

$$= \frac{a'_z}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{u'_z v}{c^2}\frac{a'_z}{\gamma_v^2\sigma^3}$$

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma_v^3\sigma^3}, \quad a_y = \frac{a'_y}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{u'_y v}{c^2}\frac{a'_x}{\gamma_v^2\sigma^3}, \quad a_z = \frac{a'_z}{\gamma_v^2\sigma^2} - \frac{u'_z v}{c^2}\frac{a'_z}{\gamma_v^2\sigma^3} \tag{66}$$

となる。

7.2.2　導出式

$\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$ とすると Eq.(64) は

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathbf{u}' + \gamma\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}')(\gamma-1)}{\sigma}$$

と書ける。今、

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\mathbf{u}'}d\mathbf{u}' = \frac{v}{c^2}\left(\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}'\right)$$

とすると、$\mathbf{u}$ の全微分 $d\mathbf{u}$ は

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\sigma}\left\{d\mathbf{u}' + \mathbf{n}\left(\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}'\right)(\gamma-1)\right\} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{-d\sigma}{\sigma^2}\right)\left\{\mathbf{u}' + \gamma\mathbf{v} + \mathbf{n}\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'\right)(\gamma-1)\right\}\left(\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}'\right) \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\sigma}\left\{d\mathbf{u}' + \mathbf{n}\left(\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}'\right)(\gamma-1)\right\} - \frac{v}{\gamma\sigma^2c^2}\left\{\mathbf{u}' + \gamma\mathbf{v} + \mathbf{n}\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'\right)(\gamma-1)\right\}\left(\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}'\right) \end{aligned}$$

と書けることから、これを整理すると

$$\begin{aligned} \gamma d\mathbf{u} &= \frac{d\mathbf{u}'}{\sigma} - \frac{(\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}')}{\sigma^2}\left[-\sigma\mathbf{n}(\gamma-1) + \frac{v}{c^2}\mathbf{u}' + \frac{v}{c^2}\mathbf{n}\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'\right)(\gamma-1)\right] = \frac{d\mathbf{u}'}{\sigma} - \frac{(\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}')}{\sigma^2}\left[-\sigma\mathbf{n}(\gamma-1) + \frac{v}{c^2}\mathbf{u}' + \mathbf{n}(\sigma-1)(\gamma-1)\right] \\ &= \frac{d\mathbf{u}'}{\sigma} - \frac{(\mathbf{n}\cdot d\mathbf{u}')}{\sigma^2}\left[\frac{v}{c^2}\mathbf{u}' - \mathbf{n}(\gamma-1)\right] \end{aligned}$$

となる。Eq.(65) より

$$\begin{aligned} \gamma\frac{d\mathbf{u}}{dt'} &= \gamma\frac{d\mathbf{u}}{dt}\frac{dt}{dt'} = \gamma^2\sigma\mathbf{a} \\ &= \frac{1}{\sigma}\frac{d\mathbf{u}'}{dt'} - \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{n}\cdot\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}\right)\left[\frac{v}{c^2}\mathbf{u}' - \mathbf{n}(\gamma-1)\right] = \frac{\mathbf{a}'}{\sigma} - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}'}{\sigma^2}\left[\frac{v}{c^2}\mathbf{u}' - \mathbf{n}(\gamma-1)\right] \end{aligned}$$

となり、最終的に

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}'}{\gamma^2\sigma^2} - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}'}{\gamma^2\sigma^3}\left[\frac{v}{c^2}\mathbf{u}' - \mathbf{n}(\gamma-1)\right] \tag{67}$$

となる。今の場合、各成分は

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^2\sigma^2} - \frac{a'_x}{\gamma^2\sigma^3}\left[\frac{v}{c^2}u'_x - (\gamma-1)\right] = \frac{a'_x}{\gamma^3\sigma^3}\left(\gamma\sigma - \gamma\frac{vu'_x}{c^2} - \gamma + 1\right) = \frac{a'_x}{\gamma^3\sigma^3}\left\{\gamma\sigma - \gamma(\sigma-1) - \gamma + 1\right\} \\ &= \frac{a'_x}{\gamma^3\sigma^3} \\ a_y &= \frac{a'_y}{\gamma^2\sigma^2} - \frac{a'_x}{\gamma^2\sigma^3}\frac{v}{c^2}u'_y = \frac{a'_y}{\gamma^2\sigma^2} - \frac{u'_y v}{c^2}\frac{a'_x}{\gamma^2\sigma^3} \\ a_z &= \frac{a'_z}{\gamma^2\sigma^2} - \frac{a'_x}{\gamma^2\sigma^3}\frac{v}{c^2}u'_z = \frac{a'_z}{\gamma^2\sigma^2} - \frac{u'_z v}{c^2}\frac{a'_x}{\gamma^2\sigma^3} \end{aligned}$$

で与えられる。

もし慣性系 O' が粒子の**瞬間的な静止系**であるとすれば $u^j = 0 \to \sigma = 0$ であるから

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}, \quad a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2}, \quad a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2} \tag{68}$$

となる。運動方向 $\mathbf{v}$ について平行、垂直な加速度成分をそれぞれ $\mathbf{a}_\parallel, \mathbf{a}_\perp$ と書くと、

$$\mathbf{a}_\parallel = \frac{\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)}{\mathbf{v}^2}, \quad \mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel$$

であり、今の場合 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ であるので

$$\mathbf{a}'_\parallel = \gamma^3\mathbf{a}_\parallel, \quad \mathbf{a}'_\perp = \gamma^2\mathbf{a}_\perp \tag{69}$$

である。

7.3　粒子の瞬間的な静止系の場合

粒子の瞬間的な静止系 $\overline{O}$ では四元加速度ベクトルの空間成分について $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{a}'$ であり、四元速度ベクトルは $U'^{\nu} = (c, 0, 0, 0)$ であるので、$0 = \alpha'^{\nu} U'_{\nu} = -\alpha'^{0} c$ から $\alpha'^{0} = 0$ である。これから

$$\left|\mathbf{a}'\right|^2 = \alpha'^{k} \alpha'_{k} = -\alpha'^{0} \alpha'_{0} + \alpha'^{k} \alpha'_{k} = \alpha'^{\nu} \alpha'_{\nu} = \alpha^{\nu} \alpha_{\nu} \tag{70}$$

とスカラー量 $\alpha^{\nu}\alpha_{\nu}$ を使って書き換えられるので、Larmor の公式を座標系に依らない形—つまり、任意の慣性系で成り立つ形＝共変型—に

$$P' = \frac{2q^2}{3c^2} \left|\alpha^{\nu}\alpha_{\nu}\right| = P \tag{71}$$

と書くことができる。従って、Larmor の公式から出力を求めるときには、$\alpha^{\nu}\alpha_{\nu}$ が計算しやすい系を使って P を計算すればいいことになる。

7.4　電磁波の出力

光子（電磁波）のエネルギーと運動量とは二つの座標系の間で、

$$dW = \gamma \left(dW' + v\, dp_x\right) = \gamma \left(1 + \beta \cos\theta'\right) dW' \tag{72}$$

と変換される。このとき Eq.(59) から、

$$\frac{dW}{d\Omega} = \gamma^3 \left(1 + \beta \cos\theta'\right)^3 \frac{dW'}{d\Omega'} \tag{73}$$

を得る。

粒子の瞬間的な静止系での**電磁波の出力 (Power)** は

$$P' = \frac{dW'}{dt'} \tag{74}$$

で定義される。従って

$$\frac{d^2W}{dt' d\Omega} = \gamma^3 \left(1 + \beta \cos\theta'\right)^3 \frac{d^2W}{dt' d\Omega'} = \gamma^3 \left(1 + \beta \cos\theta'\right)^3 \frac{dP}{d\Omega'} \tag{75}$$

である。

観測者の系で電磁波の出力を $dt_e = \gamma dt'$ なる dt_e を使って

$$P_e = \frac{dW}{dt_e} \tag{76}$$

と定義する **(emitted power)**。このとき Eq.(73),Eq.(74),Eq.(76),dt_e と dt' の関係より、

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \gamma^3 \left(1 + \beta \cos\theta'\right)^3 \frac{d^2W'}{dt' d\Omega'} \tag{77}$$

$$= \gamma^3 \left(1 + \beta \cos\theta'\right)^3 \frac{1}{\gamma} \frac{dP'}{d\Omega'} = \gamma^2 \left(1 + \beta \cos\theta'\right)^2 \frac{dP'}{d\Omega'} = \gamma^2 \left(1 + \beta \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}\right)^3 \frac{dP'}{d\Omega'} = \gamma^2 \frac{\left(1 - \beta^2\right)^3}{\left(1 - \beta\cos\theta\right)^3} \frac{dP'}{d\Omega'}$$
$$= \frac{1}{\gamma^4 \left(1 - \beta\cos\theta\right)^3} \frac{dP'}{d\Omega'} \tag{78}$$

である。また、観測者の系での電磁波の出力を $dt_r = \gamma \left(1 - \beta\cos\theta\right) dt'$ なる dt_r を用いて、

$$P_r = \frac{dW}{dt_r} \tag{79}$$

と定義する (**received power**)。これも同様に考えて、

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{dW}{dt_r}\right) \frac{1}{\gamma\,(1-\beta\cos\theta)}\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{dW}{dt'}\right) = \frac{1}{\gamma\,(1-\beta\cos\theta)}\,\gamma^3\,(1+\beta\cos\theta')^3\,\frac{dW'}{d\Omega'} = \gamma^2\frac{1}{1-\beta\dfrac{\cos\theta'+\beta}{1+\beta\cos\theta'}}\;(1+\beta\cos\theta')^3\,\frac{dW'}{d\Omega'}$$

$$= \gamma^4\,(1+\beta\cos\theta')^4\,\frac{dP'}{d\Omega'} \tag{80}$$

$$= \gamma^2\,(1+\beta\cos\theta')^3\;\gamma^2\,(1+\beta\cos\theta')\,\frac{dW'}{d\Omega'} = \frac{1}{\gamma^4\,(1-\beta\cos\theta)^3}\,\gamma^2\,\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\frac{dW'}{d\Omega'}$$

$$= \frac{1}{\gamma^4\,(1-\beta\cos\theta)^4}\frac{dW'}{d\Omega'} \tag{81}$$

であることが分かる。

今、粒子の静止系で

$$\frac{dP'}{d\Omega'}\,(\pi-\theta',\pi+\phi') = \frac{dP'}{d\Omega'}\,(\theta',\phi') \tag{82}$$

が成立しているとする。このとき

$$P_e = \int d\Omega\,\frac{dP_e}{d\Omega} = \int d\Omega'\,\frac{d\Omega}{d\Omega'}\,\gamma^2\,(1+\beta\cos\theta')^3\,\frac{dP'}{d\Omega'} = \int d\Omega'\;(1+\beta\cos\theta')\,\frac{dP'}{d\Omega'}\,(\theta',\phi')$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} d\theta'\;\sin\theta'\,(1+\beta\cos\theta')\,\frac{dP'}{d\Omega'}\,(\theta',\phi') \qquad \text{ここで、}\theta'\to\pi-\theta',\phi'\to\pi+\phi'\text{ と変換すると、}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi}^{0} d(-\theta')\;\sin(\pi-\theta')\,\{1+\beta\cos(\pi-\theta')\}\,\frac{dP'}{d\Omega}\,(\pi-\theta',\pi+\phi')$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\phi' \int_{\pi}^{0} \sin\theta'\;(1-\beta\cos\theta')\,\frac{dP'}{d\Omega}\,(\theta',\phi') = \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi} d\theta'\;\sin\theta'\,(1-\beta\cos\theta')\,\frac{dP'}{d\Omega}\,(\theta',\phi')$$

$$= \int d\Omega'\;(1-\beta\cos\theta')\,\frac{dP'}{d\Omega'}\,(\theta',\phi')$$

なる関係が成り立つので、

$$\int d\Omega'\,\beta\cos\theta'\,\frac{dP'}{d\Omega'}\,(\theta',\phi') = 0$$

であることが分かる。よって上式は結局

$$P_e = \int d\Omega'\;(1+\beta\cos\theta')\,\frac{dP'}{d\Omega'} = \int d\Omega'\,\frac{dP'}{d\Omega'} = P' \tag{83}$$

と計算される。この場合、 P_e はどの慣性系でも同じ値を持つ量であることが分かる。

荷電粒子の静止系での Larmor の公式より、

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma^4\,(1-\beta\cos\theta)^4}\,\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\,\left|\mathbf{a}'\right|^2\,\frac{1}{\gamma^4\,(1-\beta\cos\theta)^4}\,\sin^2\Phi'$$

であるから、Eq.(69) より

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\,\frac{\gamma^6\mathbf{a}_\parallel^2+\gamma^4\mathbf{a}_\perp^2}{\gamma^4\,(1-\beta\cos\theta)^4}\,\sin^2\Phi' = \frac{q^2}{4\pi c^3}\,\frac{\gamma^2\mathbf{a}_\parallel^2+\mathbf{a}_\perp^2}{(1-\beta\cos\theta)^4}\,\sin^2\Phi' \tag{84}$$

となり、また粒子の加速度の方向が粒子の速度の方向に一致するとき、$\Phi'=\theta', \mathbf{a}'_\perp=0$ であるから、

$$\sin\Phi' = \sin\theta' = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

となり、次式を得る。

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\mathbf{a}_\parallel^2\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6} \tag{85}$$

8 粒子の衝突

二粒子の衝突を相対論的に考える。その静止質量を m_1 と m_2 とし、四元運動量を p_1^α と p_2^α とする。必要なときは衝突の後と前を bar を付けて $\bar{p}_1^\alpha$ などとし、区別する。ある慣性系で観測したときの二粒子の全四元運動量は、

$$p^\alpha \equiv p_1^\alpha + p_2^\alpha \tag{86}$$

と書くことができる。この四元運動量自信の縮約を取れば、

$$p^\alpha p_\alpha = -\frac{(E_1+E_2)^2}{c^2} + (\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)^2 \tag{87}$$

と書くことがで、これは任意の慣性系で同じ値を持つ。非相対論的な場合と同様に**質量中心 (center of mass、または、zero-momentum、center of momentum) 座標系 CM 系**を、

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$$

を満たす慣性系と取る。

二粒子の四元運動量が $p_1^\alpha = \left(p_1^0, \mathbf{p}_1\right)$ と $p_2^\alpha = \left(p_2^0, \mathbf{p}_2\right)$ であるような慣性座標系から、二粒子の CM 系 x'^μ へ移すローレンツ変換 $\Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha}(\mathbf{v})$ を考えると、$p'^\alpha = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} p^\beta$ より、

$$\begin{aligned} p'^0 &= \Lambda^{\bar{0}}_{\beta}(\mathbf{v}) p^\beta = \gamma p^0 - \gamma v_i / c\, p^i = \gamma\left(p^0 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}}{c}\right) \\ p'^i &= \Lambda^{\bar{i}}_{\beta}(\mathbf{v}) p^\beta = -\gamma v^i / c\, p^0 + \left[\delta^i_j + v^i v_j (\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right] p^j = -\frac{\gamma}{c} v^i p^0 + p^i + v^i \mathbf{v}\cdot\mathbf{p}(\gamma-1)/\mathbf{v}^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = -\frac{\gamma}{c}\mathbf{v}\left(p_1^0 + p_2^0\right) + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{v}\left\{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)(\gamma-1)/\mathbf{v}^2\right\}$$

と書ける。このとき、

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{p_1^0 + p_2^0} \tag{88}$$

とすると、上式は

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = -\frac{\gamma}{c}\mathbf{v}\left(p_1^0 + p_2^0\right) + \frac{\mathbf{v}}{c}(p_1^0 + p_2^0) + \frac{\mathbf{v}}{c}(p_1^0 + p_2^0)(\gamma - 1) = 0$$

となる。

Eq.(88) は非相対論的極限で非相対論的な質量中心の定義に一致している。この CM 系では、

$$p^\alpha_\alpha = -\frac{(E_1+E_2)^2_{\mathrm{CM}}}{c^2}$$

が成り立つ。ここで CM 系から見た運動エネルギーを

$$K_{\mathrm{CM}} = (E_1+E_2)_{\mathrm{CM}} - (m_1+m_2)\,c^2 \tag{89}$$

で定義すれば、任意の慣性系で、

$$K_{\mathrm{CM}} + (m_1+m_2)\,c^2 = (E_1+E_2)_{\mathrm{CM}} = c\sqrt{-p^\alpha p_\alpha} = \sqrt{(E_1+E_2)^2 - c^2(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)^2} \tag{90}$$

が成り立つことになる。

非相対論的極限で CM 系では、

$$\mathbf{r} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

であるから、

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$
$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

と書ける。 これを元に非相対論的運動エネルギーを求めると、

$$K_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{R}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{R}}_2^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2$$

となるが、

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \mu \text{ ：換算質量}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

とすると、

$$K_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\mu\mathbf{u}^2 \tag{91}$$

を得る。

ある慣性系で見たとき、衝突の前後で四元運動量は保存されるとすると、

$$p^\alpha \equiv p_1^\alpha + p_2^\alpha = \bar{p}_1^\alpha + \bar{p}_2^\alpha \equiv \bar{p}^\alpha \tag{92}$$

が成り立つ。このとき衝突の前後で Eq.(88) で定義される CM 系は、この量が変化しないことが分かる。エネルギー成分の保存則はその慣性系では次式で与えられる。

$$\sqrt{m_1^2c^4 + |\mathbf{p}_1|^2 c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + |\mathbf{p}_2|^2 c^2} = \sqrt{\bar{m}_1^2c^4 + |\bar{\mathbf{p}}_1|^2 c^2} + \sqrt{\bar{m}_2^2c^4 + |\bar{\mathbf{p}}_2|^2 c^2} \tag{93}$$

ある慣性系で見たエネルギー保存則 (93) の非相対論的極限を考えると、

$$\left(m^2c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2\right)^{1/2} = mc^2\left(1 + \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 \tag{94}$$

であるから、

$$m_1c^2 + m_2c^2 + \frac{1}{2}m_1\mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{u}_2^2 = \bar{m}_1c^2 + \bar{m}_2c^2 + \frac{1}{2}\bar{m}_1\bar{\mathbf{u}}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{m}_2\bar{\mathbf{u}}_2^2 \tag{95}$$

となる。また CM 系で見たエネルギー保存則

$$\sqrt{-p^\alpha p_\alpha} = \sqrt{-\bar{p}^\alpha \bar{p}_\alpha}$$

の非相対論的極限は、Eq.(91),Eq.(95) を参考にすると以下のようになる。

$$m_1c^2 + m_2c^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{u}^2 = \bar{m}_1c^2 + \bar{m}_2c^2 + \frac{1}{2}\overline{\mu\mathbf{u}}^2 \tag{96}$$

9 ローレンツ不変量 (Lorentz invariant)

以下ではローレンツ不変量を導くことを考える。粒子の集団を考え、ある瞬間に粒子が、位置及び運動量がある値を中心とした小さいな幅を持つ領域を占めているとする。粒子集団と共に運動する慣性系を O' とすれば、この系から見たとき粒子集団が位相空間で占める体積は

$$d^3\mathbf{x}'d^3\mathbf{p}' = dx'^1dx'^2dx'^3dp'^1dp'^2dp'^3 \tag{97}$$

で与えられ、その粒子集団を外から観測する慣性系 O から見れば $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p} = dx^1dx^2dx^3dp^1dp^2dp^3$ を占めるものとする。慣性系 O' 系から見たとき粒子集団の占めるエネルギー領域の幅は、

$$dE' = \frac{c^2\mathbf{p}'\cdot d\mathbf{p}'}{\sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{p}'^2}} \tag{98}$$

であるが、$|\mathbf{p}'| \le |d\mathbf{p}'|$ なので dE' は $|d\mathbf{p}'|$ の二次の量となり、一次の微少量については $dE' = cdp'^0 = 0$ としてよいことが分かる。従って $dp'^\alpha = (0, d\mathbf{p}')$ となる。これから

$$dp^2 = dp'^2, \quad dp^3 = dp'^3, \quad dp^1 = \gamma\left(dp'^1 + \beta dp'^0\right) = \gamma dp'^1, \quad 従って、\quad d^3\mathbf{p} = \gamma d^3\mathbf{p}' \tag{99}$$

が得られる。また、慣性系 O から見れば粒子の分布領域は x 軸方向に収縮を受けるので、

$$dx^2 = dx'^2, \quad dx^3 = dx'^3, \quad dx^1 = \frac{dx'^1}{\gamma}, \quad 従って、\quad d^3\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}'}{\gamma} \tag{100}$$

であるから、結局

$$d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p} = d^3\mathbf{x}'d^3\mathbf{p}' \tag{101}$$

を得、位相体積素はローレンツ不変量であることが分かる。

dN を位相体積素 $dV^{(6)} = d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$ 中に含まれる粒子の数であるとすれば、粒子数 dN は座標系に依らず一定で、ローレンツ不変量であるから

$$f = \frac{dN}{dV^{(6)}} \tag{102}$$

もローレンツ不変量である。f は単位位相体積当たりの粒子数である。また、粒子の静止系 O' での四元運動量は $p'^\alpha = (\varepsilon'/c, \mathbf{0})$ で与えられ、慣性系 O では $p^\alpha = (\varepsilon/c, \mathbf{p})$ であるから、$\varepsilon = \gamma\varepsilon'$ が得られ、

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{\varepsilon} = \frac{\gamma d^3\mathbf{p}'}{\gamma\varepsilon'} = \frac{d^3\mathbf{p}'}{\varepsilon'} \tag{103}$$

もローレンツ不変量であることが分かる。以下ではこの議論が光子気体についても成り立つとする。

ある容器に閉じこめられた光子気体を考えて、光子気体の単位振動数単位立体角当たりの数密度を n_ν と書けば、光子については $p = E/c = h\nu/c$ などとして、$d^3\mathbf{p} = p^2dpd\Omega = h^3\nu^2c^{-3}d\nu d\Omega$ と書いて、

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \equiv \frac{dN}{dV^{(6)}} = \frac{1}{h^3\nu^2c^{-3}}\frac{dN}{d^3\mathbf{x}d\nu d\Omega} \equiv \frac{1}{h^3\nu^2c^{-3}}n_\nu(\mathbf{x},\Omega) \tag{104}$$

を得る。$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ は微小立体角である。光子気体の単位振動数単位立体角当たりのエネルギー密度 $U_\nu(\mathbf{x},\Omega)$ と輻射強度 $I_\nu(\mathbf{x},\Omega)$ は、

$$U_\nu(\mathbf{x},\Omega) = h\nu n_\nu(\mathbf{x},\Omega), \quad I_\nu(\mathbf{x},\Omega) = cU_\nu(\mathbf{x},\Omega) \tag{105}$$

で与えられるので、

$$\frac{n_\nu(\mathbf{x},\Omega)}{\nu^2}, \quad \frac{U_\nu(\mathbf{x},\Omega)}{\nu^3}, \quad \text{and} \quad \frac{I_\nu(\mathbf{x},\Omega)}{\nu^3} \tag{106}$$

がローレンツ不変量であることが分かる。この光子気体について

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p})\frac{d^3\mathbf{p}}{\varepsilon} \tag{107}$$

もやはりローレンツ不変量である。