曲線座標に於けるベクトルやテンソル

1 ベクトル、テンソル

1.1 テンソル、反変ベクトル、共変ベクトル

例えば、**粘性流体の運動方程式**をベクトルやテンソルを用いて表せば

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v})\right]=-\nabla p-\rho\nabla\Psi+\nabla\cdot\overleftrightarrow{\sigma} \tag{1}$$

と書くことができ（ここで $\overleftrightarrow{\sigma}$ は**粘性応力テンソル**）、デカルト座標系 $\left(x^1,x^2,x^3\right)=(x,y,z)$ では

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^k\frac{\partial v^i}{\partial x^k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x^i}-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}+\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x^k} \tag{2}$$

と成分を使って表すことができる。ここで

$$\sigma_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+\frac{\partial v^k}{\partial x^i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v^l}{\partial x^l}\right)+\zeta\delta_{ik}\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \tag{3}$$

は粘性応力テンソルであり、η,ζ は**粘性係数**で、**圧力と温度の関数**であると考える。また簡単のため添え字については以下の様なルールに従っている。

1. 上下一対になって表れる添え字に関しては和をとるものとする。
2. 両辺とも同じ場所に現れる添え字に関しては和をとらないものとする。

以上のような添え字に関するルールを**アインシュタインの縮約規則**といい、特に断りがない限り、**上付きと下付の同じ添え字のペアが現れたときには、添えに関して和をとる（「縮約」する）ものとし、和記号を省く**という約束である。例えば

$$v^k\frac{\partial v^i}{\partial x^k}\equiv\sum_{k=1}^{3}v^k\frac{\partial v^i}{\partial x^k},\qquad \frac{\partial v^l}{\partial x^l}\equiv\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \tag{4}$$

などとする。**デカルト座標系の場合を除いては、この運動方程式を任意の曲線座標系でベクトルやテンソルの成分を用いて書き表すことは必ずしも容易ではない。**従ってここでは、流体の運動方程式をベクトルやテンソルの成分を用いて任意の極座標系で成立するような形に表すことを考える。

今、ベクトルやテンソルの成分表示を考えるとき、ベクトルを任意の座標間の座標変換に対してどのようにその成分が変換されるかで区別する。二つの座標系 $\left(x^1,x^2,x^3\right)$ と $\left(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\overline{x}^3\right)$ を考え、それぞれが

$$\overline{x}^i=\overline{x}^i\left(x^1,x^2,x^3\right),\qquad x^i=x^i\left(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\overline{x}^3\right) \tag{5}$$

で関係しているとする。一つのベクトル $\vec{\xi}$ について**反変ベクトル (contravariant)** 成分と **共変ベクトル (covariant)** 成分とを区別して、それぞれの座標系に於ける成分 $\xi^j\left(x^1,x^2,x^3\right)$ と $\overline{\xi}^j\left(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\overline{x}^3\right)$ が、座標変換

$x^j \to \overline{x^j}$ に対して

$$\overline{\xi^i} = \frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^j}\xi^j \tag{6}$$

の様に結びつけられるとき、このベクトル成分を**反変ベクトル成分**と呼び、上付きの添え字を用いて ξ^i と表す。同様に $\xi_j\left(x^1, x^2, x^3\right)$ と $\overline{\xi_j}\left(\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}\right)$ が、

$$\overline{\xi_i} = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x^i}}\xi_j \tag{7}$$

の様に結びつけられるとき、このベクトル成分を**共変ベクトル成分**と呼び、下付の添え字を用いて ξ_i と表すものとする。また、ξ^i, ξ_i を単に反変ベクトル、共変ベクトルなどと言ったりする。

スカラー関数 Φ の**空間微分** $\partial\Phi/\partial x^j$ は、二つの座標系の間で常に $\Phi\left(x^1, x^2, x^3\right) = \overline{\Phi}\left(\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}\right)$ が成り立つものとすると、微分の chain rule より

$$\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}} = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{x^j}} = \frac{\partial}{\partial \overline{x^j}}\overline{\Phi}\left(\overline{x^1}, \overline{x^2}, \overline{x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{x^j}}\Phi\left(x^1, x^2, x^3\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x^j}}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

であるから、これは式 (7) の形と同じなので共変ベクトルであることが分かる。また座標二点間の微小間隔 dx^j は全微分であるから

$$d\overline{x^j} = d\overline{x^j}\left(x^1, x^2, x^3\right) = \frac{\partial \overline{x^j}}{\partial x^i}dx^i$$

となり、反変ベクトルであることが分かる。従ってこの両辺を時間 t で微分した $\dot{x}^j = \frac{dx^j}{dt}$ は反変ベクトルである。

1.2 反変、共変、混合テンソル

テンソルについても同様に定義する。例えば二階の反変、共変、混合テンソルは添え字一つ一つについて

$$\overline{T}^{ij} = \frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x^j}}{\partial x^l}T^{kl}, \qquad \overline{T}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x^i}}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x^j}}T_{kl}, \qquad \overline{T}^i_j = \frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x^j}}T^k_l \tag{8}$$

の様に変換するものとする。更に高階の（反変、共変、混合）テンソルについてもこの変換則を拡張できるものとする。**スカラーは零階、ベクトルは一階のテンソルと考えることができる。**

さて、ベクトルの反変成分に関する基底ベクトルを、それぞれの座標系に於いて $\boldsymbol{a}_i, \overline{\boldsymbol{a}}_i$ と書けば、任意のベクトル $\vec{\xi}$ は

$$\vec{\xi} = \xi^i \boldsymbol{a}_i = \overline{\xi^i}\,\overline{\boldsymbol{a}}_i \tag{9}$$

と表される。同様に、共変成分に対する基底ベクトルを $\boldsymbol{a}^i, \overline{\boldsymbol{a}^i}$ と書けば

$$\vec{\xi} = \xi_i \boldsymbol{a}^i = \overline{\xi_i}\,\overline{\boldsymbol{a}^i} \tag{10}$$

と表すことができる。

これが任意の二つの座標系で成り立つためにはベクトル $\vec{\xi}$ が二つの座標系に於いて等しくなればいいので $\vec{\xi} = \overline{\vec{\xi}}$、つまり基底ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ は座標変換に対して、

$$\begin{aligned}\vec{\xi} = \overline{\vec{\xi}} = \overline{\xi^i}\,\overline{\boldsymbol{a}}_i &= \frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^j}\xi^j\overline{\boldsymbol{a}}_i = \xi^j\,\frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^j}\overline{\boldsymbol{a}}_i \\ &= \xi^i \boldsymbol{a}_i = \xi^j \boldsymbol{a}_j \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a}_j = \frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^j}\overline{\boldsymbol{a}}_i\end{aligned} \tag{11}$$

でなければならず、同様に基底ベクトル $\boldsymbol{a}^j$ は座標変換に対しては、

$$\begin{aligned}\vec{\xi} = \overline{\vec{\xi}} = \overline{\xi_i}\,\overline{\boldsymbol{a}^i} &= \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x^i}}\xi_j\overline{\boldsymbol{a}^i} = \xi_j\,\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x^i}}\overline{\boldsymbol{a}^i} \\ &= \xi_i \boldsymbol{a}^i = \xi_j \boldsymbol{a}^j \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a}^j = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x^i}}\overline{\boldsymbol{a}^i}\end{aligned} \tag{12}$$

でなければならない。

1.3　計量テンソル

空間中の近接する二点 x^i と $x^i + dx^i$（$\bar{x}^i$ と $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$） とを結ぶベクトルを

$$d\boldsymbol{x} = dx^i\,\boldsymbol{a}_i = d\bar{x}^i\bar{\boldsymbol{a}}_i \tag{13}$$

と表せば（従って $\boldsymbol{a}_i = \partial\boldsymbol{x}/\partial x^i$ など ）、この二点間の距離はスカラー積を用いて

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j\,dx^idx^j \equiv g_{ij}dx^idx^j \\ &= \bar{\boldsymbol{a}}_i\cdot\bar{\boldsymbol{a}}_j\,d\bar{x}^id\bar{x}^j \equiv \bar{g}_{ij}d\bar{x}^id\bar{x}^j \end{aligned} \tag{14}$$

と書ける。ここで

$$g_{ij} = \boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j, \qquad \bar{g}_{ij} = \bar{\boldsymbol{a}}_i\cdot\bar{\boldsymbol{a}}_j \tag{15}$$

などとした。二点間の距離がスカラー量であり座標系に依存しないことから

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^idx^j = \bar{g}_{ij}\,d\bar{x}^id\bar{x}^j \tag{16}$$

であり、従って

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}g_{kl} \tag{17}$$

が成り立ち、g_{ij} が二階の共変テンソルであることが分かる。この共変テンソル g_{ij} は計量 (metric) テンソルと呼ばれ、

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{18}$$

が成り立つ**対称テンソル**である。$\boldsymbol{a}_i$ を直交系にとれば g_{ik} は対角成分のみが零でない値をもつことになる。また g_{ik} の逆行列を g^{ik} と書くことにすると、g^{ij} は

$$\bar{g}^{ij} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}g^{kl} \tag{19}$$

であり、二階の反変テンソルである。従って

$$g^{ik}g_{jk} = \delta^i_j \tag{20}$$

と書ける。 δ^i_j は Kronecker delta であり、任意の座標系で $i = j$ のとき $\delta^i_j = 1$ 、$i \neq j$ のとき $\delta^i_j = 0$ で定義されるとする。このとき δ^i_j は

$$\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k} = \delta^i_j = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j} = \bar{\delta}^i_j$$

を満たすので、二階の混合テンソルである。また $\delta^{ij} = g^{ik}\delta^j_k = g^{ij}$ であるから、δ^i_j を Kronecker delta とすれば、 δ^{ij} や δ_{ij} は必ずしも Kronecker delta として振る舞わないことが分かる。

ξ^j を反変ベクトル（成分）とするとき、 $\xi_i = g_{ij}\xi^j$ で定義される ξ_i は

$$\bar{\xi}_i = \bar{g}_{ij}\bar{\xi}^j = \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}g_{kl}\cdot\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^m}\xi^m = \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\,\delta^l_m\,g_{kl}\,\xi^m = \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\,g_{km}\,\xi^m = \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\xi_k = \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}\xi_j$$

であるから、共変ベクトル（成分）として振る舞うことが分かる。同様にして ξ_j を反変ベクトル（成分）とするとき、 $\xi^i = g^{ij}\xi_j$ で定義される ξ^i は

$$\bar{\xi}^i = \bar{g}^{ij}\bar{\xi}_j = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}g^{kl}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^j}\xi_m = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\,\delta^m_l\,g^{kl}\xi_m = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\,g^{km}\xi_m = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\xi^k = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\xi^j$$

であるから、反変ベクトル（成分）として振る舞うことが分かる。

上の様にして計量テンソル g_{ij} や g^{ij} などを使って反変テンソル成分と共変テンソル成分とを結びつけることは、$\vec{\xi} = \xi^i \boldsymbol{a}_i = g^{ij}\xi_j \boldsymbol{a}_i = \xi_j \boldsymbol{a}^j$ であることから、反変成分と共変成分の基底ベクトルを $\boldsymbol{a}^j = g^{ij}\boldsymbol{a}_i$ などの関係で結びつけることに対応する。これはまた、$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{a}_i \cdot g^{kj}\boldsymbol{a}_k = g^{kj}\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_k = g^{kj}g_{ik} = \delta_i^j$ であることを意味している。またこのとき二つのベクトル量の**内積**は

$$\vec{\xi} \cdot \vec{\eta} = \xi^i \eta^j \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = g_{ij}\xi^i \eta^j = \xi^i \eta_i = \xi_i \eta^i \tag{21}$$

で定義されることになる。また $\boldsymbol{a}_i$ が**単位直交基底**となるような定ベクトルを使うデカルト座標の場合は、反変ベクトルと共変ベクトルの区別は必ずしも必要では無くなる。また、例えば $d\boldsymbol{x} = dx^i \boldsymbol{a}_i$ を球座標 (r, θ, ϕ) の場合にあからさまに書き表せば

$$d\boldsymbol{x} = dr\,\boldsymbol{a}_r + d\theta\,\boldsymbol{a}_\theta + d\phi\,\boldsymbol{a}_\phi$$

となるが、ベクトル

$$\boldsymbol{b}_r = \sqrt{g^{rr}}\,\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_r, \qquad \boldsymbol{b}_\theta = \sqrt{g^{\theta\theta}}\,\boldsymbol{a}_\theta = \frac{\boldsymbol{a}_\theta}{r}, \qquad \boldsymbol{b}_\phi = \sqrt{g^{\phi\phi}}\,\boldsymbol{a}_\phi = \frac{\boldsymbol{a}_\phi}{r\sin\theta}$$

を導入して

$$d\boldsymbol{x} = dr\,\boldsymbol{b}_r + r\,d\theta\,\boldsymbol{b}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\boldsymbol{b}_\phi$$

などと書くのが普通である。直交系の場合、$\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = \delta_{ij}$ となり、 $\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_\theta, \boldsymbol{b}_\phi$ の前に来る量が同じ物理的次元を持つようにすることができる。同様にして

$$\boldsymbol{b}^r = \sqrt{g_{rr}}\,\boldsymbol{a}^r = \boldsymbol{a}^r, \qquad \boldsymbol{b}^\theta = \sqrt{g_{\theta\theta}}\,\boldsymbol{a}^\theta = r\boldsymbol{a}^\theta, \qquad \boldsymbol{b}^\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}}\,\boldsymbol{a}^\phi = r\sin\theta\,\boldsymbol{a}^\phi$$

として, ベクトル $\boldsymbol{b}^i$ を導入することができる。

1.4 共変微分

さて任意のベクトル $\vec{\xi}$ に対する空間微分を行い

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\xi^i \boldsymbol{a}_i\right) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\boldsymbol{a}_i + \xi^i \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} \equiv \xi^i_{;j}\boldsymbol{a}_i \tag{22}$$

によって反変ベクトル成分の微分演算子 $\xi^i_{;j}$ を定義する。これは**共変微分 (covariant derivative)** と呼ばれる。上の式は、$\vec{\xi} = \vec{\bar{\xi}}$ 、また $\boldsymbol{a}_i$ の性質から

$$\begin{aligned}
\overline{\xi^i_{;k}\boldsymbol{a}_i} = \bar{\xi}^i_{;k}\bar{\boldsymbol{a}}_i &= \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \bar{x}^k}\bar{\boldsymbol{a}}_i + \bar{\xi}^i \frac{\partial \bar{\boldsymbol{a}}_i}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k}\left(\bar{\xi}^i \bar{\boldsymbol{a}}_i\right) = \frac{\partial \vec{\bar{\xi}}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \bar{x}^k} \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x^j} \qquad \because \text{chain rule} \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \cdot \left(\xi^i_{;j}\boldsymbol{a}_i\right) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \cdot \xi^i_{;j}\left(\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\bar{\boldsymbol{a}}_l\right) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\xi^i_{;j}\bar{\boldsymbol{a}}_l
\end{aligned} \tag{23}$$

と書き換えられることが分かる。従って

$$\bar{\xi}^l_{;k} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\xi^i_{;j} \tag{24}$$

が成り立ち、$\xi^i_{;j}$ が混合テンソルとして振る舞うことが分かる。同様にすれば、例えばテンソル（成分） T^{ij} を共変微分した $T^{ij}_{;k}$ が混合テンソル（成分）として振る舞うこと

$$\bar{T}^{ij}_{;k} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}T^{mn}_{;l}$$

を示すことができる。基底ベクトルの微分を

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{a}_k \tag{25}$$

の様に $\boldsymbol{a}_i$ の一次結合を用いて表せば、反変ベクトルの共変微分は

$$\xi^i_{;j} \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj}\xi^k \tag{26}$$

と書くことができる。全く同様にして

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\xi_i \boldsymbol{a}^i\right) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j}\boldsymbol{a}^i + \xi_i \frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^j} \equiv \xi_{i;j}\boldsymbol{a}^i$$

として、共変ベクトル（成分）の共変微分 $\xi_{i;j}$ を定義することができ、$\xi_{i;j}$ が二階の共変テンソルとして振る舞うことも示せる。また、$\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta^i_j$ を微分すれば

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_j\right) = \frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}^i \cdot \Gamma^l_{jk}\boldsymbol{a}_l$$

が得られるが、$\partial \boldsymbol{a}^i/\partial x^k = \gamma^i_{kl}\boldsymbol{a}^l$ とすれば、$\gamma^i_{kl}\boldsymbol{a}^l \cdot \boldsymbol{a}_j + \Gamma^l_{jk}\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_l = 0$ と書けるので、$\boldsymbol{a}^l \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta^l_j$ 等を使って、$\gamma^i_{kj} = -\Gamma^i_{jk}$ を得る、従って

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{lk}\boldsymbol{a}^l \tag{27}$$

であり、

$$\xi_{i;j} \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\xi_k \tag{28}$$

が得られる。

1.5 Christoffel の記号

g_{ij} の空間微分 $\partial g_{ij}/\partial x^k$ は (25) より

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j\right) = \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_j + \frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}_i = \Gamma^l_{ik}\boldsymbol{a}_l \cdot \boldsymbol{a}_j + \Gamma^l_{jk}\boldsymbol{a}_l \cdot \boldsymbol{a}_i = \Gamma^l_{ik}g_{lj} + \Gamma^l_{jk}g_{li}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik}g_{lj} + \Gamma^l_{jk}g_{li} \tag{29}$$

である。また、($\boldsymbol{a}_i = \partial \boldsymbol{x}/\partial x^i$で､$\partial \boldsymbol{a}_i/\partial x^j = \partial^2 \boldsymbol{x}/\partial x^j \partial x^i = \partial^2 \boldsymbol{x}/\partial x^i \partial x^j = \partial \boldsymbol{a}_j/\partial x^i$であるから)

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \tag{30}$$

とすれば、(29) を用いると

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \Gamma^i_{kj}g_{il} + \Gamma^i_{lj}g_{ik}$$
$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}g_{il} + \Gamma^i_{lk}g_{ij}$$
$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} = \Gamma^i_{kl}g_{ij} + \Gamma^i_{jl}g_{ik}$$

であるので、これを組み合わせて、

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} = \left(\Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{jk}\right)g_{il} + \left(\Gamma^i_{lk} - \Gamma^i_{kl}\right)g_{ij} + \left(\Gamma^i_{lj} - \Gamma^i_{jl}\right)g_{ik} = 2\Gamma^i_{kj}g_{il}$$

$$\therefore \quad \Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \right) \tag{31}$$

であることが分かる。これを Christoffel の記号と呼ぶ。

ベクトルの積 $\xi^i \xi^j$ はそれぞれの反変性より

$$\overline{\xi^i \xi^j} = \overline{\xi}^i \overline{\xi}^j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \xi^k \cdot \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \xi^l = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \xi^k \xi^l$$

であるから、二階の反変テンソルとして振る舞うことが分かる。共変微分について

$$\left(\xi^i \xi^j\right)_{;k} = \xi^i_{;k} \xi^j + \xi^i \xi^j_{;k} \tag{32}$$

が成立するとすれば、この式を展開することで

$$\begin{aligned} \left(\xi^i \xi^j\right)_{;k} &= \xi^i_{;k} \xi^j + \xi^i \xi^j_{;k} = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} \xi^l \right) \xi^j + \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} + \Gamma^j_{lk} \xi^l \right) \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \cdot \xi^j + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} \cdot \xi^i + \Gamma^i_{lk} \xi^l \xi^j + \Gamma^j_{lk} \xi^i \xi^l \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\xi^i \xi^j\right) + \Gamma^i_{lk} \xi^l \xi^j + \Gamma^j_{lk} \xi^i \xi^l \end{aligned} \tag{33}$$

となる。同様にすれば (28) より

$$\begin{aligned} \left(\xi_i \xi_j\right)_{;k} &= \xi_{i;k} \xi_j + \xi_i \xi_{j;k} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} \xi_l \right) \xi_j + \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x^k} - \Gamma^l_{jk} \xi_l \right) \xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} \cdot \xi_j + \frac{\partial \xi_j}{\partial x^k} \cdot \xi_i - \Gamma^l_{ik} \xi_l \xi_j - \Gamma^l_{jk} \xi_i \xi_l \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\xi_i \xi_j\right) - \Gamma^l_{ik} \xi_l \xi_j - \Gamma^l_{jk} \xi_i \xi_l \end{aligned} \tag{34}$$

が成立する。これより任意の二階の反変テンソルや共変テンソルの共変微分が

$$\left(T^{ij}\right)_{;k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} T^{lj} + \Gamma^j_{lk} T^{il} \tag{35}$$

$$\left(T_{ij}\right)_{;k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il} \tag{36}$$

で与えられることが分かる。

1.6 テンソルとスカラー

計量テンソル g_{ij} は二階の共変テンソルであるから (36) より

$$\left(g_{ij}\right)_{;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{jk} g_{il}$$

であり、また (29) を用いると

$$\left(g_{ij}\right)_{;k} = \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{jk} g_{il} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{jk} g_{il} = 0$$

となる。また g^{ij} に関しても、これは二階の反変テンソルであるから (35) より

$$\begin{aligned} \left(g^{ij}\right)_{;k} &= \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} g^{lj} + \Gamma^j_{lk} g^{il} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^j\right) + \Gamma^i_{lk} g^{lj} + \Gamma^j_{lk} g^{il} = \frac{\partial \boldsymbol{a}^i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}^j + \frac{\partial \boldsymbol{a}^j}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{a}^i + \Gamma^i_{lk} g^{lj} + \Gamma^j_{lk} g^{il} \\ &= -\Gamma^i_{lk} \boldsymbol{a}^l \cdot \boldsymbol{a}^j - \Gamma^j_{lk} \boldsymbol{a}^l \cdot \boldsymbol{a}^i + \Gamma^i_{lk} g^{lj} + \Gamma^j_{lk} g^{il} = -\Gamma^i_{lk} g^{lj} - \Gamma^j_{lk} g^{lj} + \Gamma^i_{lk} g^{lj} + \Gamma^j_{lk} g^{il} \qquad \left(\Longrightarrow \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{lk} g^{lj} - \Gamma^j_{lk} g^{lj} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから結局、計量テンソルが反変微分に対して以下のように定数として振る舞うことが分かる。

$$g_{ij;k} = 0 = g^{ij}_{;k} \tag{37}$$

スカラー関数の勾配 (gradient) $\nabla\Phi$ の共変成分と反変成分とはそれぞれ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}, \qquad g^{jk}\frac{\partial\Phi}{\partial x^k} \tag{38}$$

で定義される。ベクトル $\vec{\xi}$ の発散 (divergence) $\nabla\cdot\vec{\xi}$ は、$\nabla\cdot\vec{\xi}$ がスカラー関数（**値が座標系に依らない**）になるように定義する。従って、（共変成分は反変成分に直してから）ベクトルの反変成分について共変微分を行い

$$\nabla\cdot\vec{\xi} \equiv \xi^j_{;j} = \frac{\partial\xi^j}{\partial x^j} + \Gamma^j_{kj}\xi^k \tag{39}$$

と定義する。実際、(24) で $k = l$ とすれば

$$\overline{\xi}^{l}_{;l} = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i}\xi^i_{;j} = \delta^j_i\xi^i_{;j} = \xi^j_{;j}$$

であり、 $\xi^j_{;j}$ が座標系に依存せず同じ値を持つスカラーであることが分かる。同様にして、例えば、二次のテンソル量の発散 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$ は $\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}$ がベクトル（一階のテンソル）として振る舞うように定義すればよい。従って、その反変成分について共変微分を行い

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} \equiv T^{ij}_{;j}, \quad \text{または} \quad \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} \equiv T^{ji}_{;j} \tag{40}$$

などと定義すればよい。

一般に、ベクトルやテンソルの成分を含む等式を考えるとき、等式の両辺は座標変換に対して同じように変換されなければならない。従って、例えば、(スカラー) = (スカラー)、(反変ベクトル) = (反変ベクトル)、(共変ベクトル) = (共変ベクトル) となっている必要があり、(反変ベクトル) = (共変ベクトル) などは等式として適当ではないと考える。

2 球座標

球座標 $\left(x^1, x^2, x^3\right) = (r, \theta, \phi)$ のときその**線素（無限小離れた二点間の距離の二乗）**を

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{41}$$

で与えると、

$$\begin{aligned} &g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta \\ &g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{aligned} \tag{42}$$

となることが分かる。

今、定義 (31) に従って Γ^i_{kj} を計算することを考える。零でない成分を考えると、計量テンソルは対角成分しか存在しないので、 括弧の外側で $l = i$ でなければならない。同様に括弧の中では $k = l$ or $j = l$ or $k = j$ であるから、結局実際計算する必要があるのでは $k = l = i$ のときと $k = j, l = i$ のときである（$j = l = i$ のときは $\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$ の交換関係より $k = l = i$ の場合と結果は同じになる）。

$$\Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2}\overbrace{g^{li}}^{l=i}\left(\underbrace{\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}}_{k=l} + \overbrace{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}}^{j=l} - \underbrace{\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}}_{k=j}\right)$$

実際に計算をすると

k=l=i=1 j=1

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0$$

j=2

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^r_{r\theta} = \Gamma^r_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0$$

j=3

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^r_{r\phi} = \Gamma^r_{\phi r} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0$$

k=l=i=2

j=1

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\,2r = \frac{1}{r}$$

j=2

$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 0$$

j=3

$$\Gamma^2_{23} = \Gamma^\theta_{\theta\phi} = \Gamma^\theta_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = 0$$

k=l=i=3

j=1

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,2r\sin^2\theta = \frac{1}{r}$$

j=2

$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,2r^2\cos\theta\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

j=3

$$\Gamma^3_{33} = \Gamma^\phi_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 0$$

k=j=1

l=i=2

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^\theta_{rr} = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0$$

l=i=3

$$\Gamma^3_{11} = \Gamma^\phi_{rr} = -\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0$$

k=j=2

l=i=1

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}2r = -r$$

l=i=3

$$\Gamma^3_{22} = \Gamma^\phi_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = 0$$

k=j=3

l=i=1

$$\Gamma^1_{33} = \Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}2r\sin^2\theta = -r\sin^2\theta$$

l=i=2

$$\Gamma^2_{33}=\Gamma^\theta_{\phi\phi}=-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}r^2 2\sin\theta\cos\theta=-\sin\theta\cos\theta$$

となるから、零でないものは

$$\Gamma^r_{\theta\theta}=-r,\quad \Gamma^r_{\phi\phi}=-r\sin^2\theta,\quad \Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^\theta_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta,\quad \Gamma^\phi_{r\phi}=\Gamma^\phi_{\phi r}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^\phi_{\theta\phi}=\Gamma^\phi_{\phi\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

となる。共変微分の定義に従って

$$\nabla^2\Phi\equiv\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)_{;i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)+\Gamma^i_{ki}g^{kj}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\tag{43}$$

を計算すると Γ^i_{ki} に注意して

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi\equiv\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)_{;i}&=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(g^{11}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(g^{22}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(g^{33}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)+\Gamma^2_{12}g^{11}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}+\Gamma^3_{13}g^{11}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}+\Gamma^3_{23}g^{22}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\\&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\\&=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

となる。また $\left(\dot{x}^j\right)_{;j}$ を計算すると (26) より

$$\begin{aligned}\left(\dot{x}^j\right)_{;j}&=\frac{\partial\dot{x}^j}{\partial x^j}+\Gamma^j_{kj}\dot{x}^k=\frac{\partial\dot{x}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\dot{x}^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\dot{x}^3}{\partial x^3}+\Gamma^2_{12}\dot{x}^1+\Gamma^3_{13}\dot{x}^1+\Gamma^3_{23}\dot{x}^2=\frac{\partial\dot{x}^r}{\partial x^r}+\frac{\partial\dot{x}^\theta}{\partial x^\theta}+\frac{\partial\dot{x}^\phi}{\partial x^\phi}+\frac{1}{r}\dot{r}+\frac{1}{r}\dot{r}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\\&=\frac{\partial v^r}{\partial r}+\frac{2}{r}v^r+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{\theta})}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}r\dot{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(r\sin\theta\dot{\phi}\right)\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2v^r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta v^\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v^\phi}{\partial\phi}\end{aligned}\tag{44}$$

となる。ここで v^r, v^θ, v^ϕ は $v^r=\dot{r}, v^\theta=r\dot{\theta}, v^\phi=r\sin\theta\dot{\phi}$ の関係が成り立つ速度成分である。

さて、粘性応力テンソル σ_{ij} は $\sigma_{ij}dx^idx^j$ がスカラーになるように定義すれば二階の共変テンソルとなる。応力テンソル σ_{ij} を粘性係数 η を用いて、簡単のため以下では

$$\sigma_{ij}=\eta\left[(\dot{x}_i)_{;j}+\left(\dot{x}_j\right)_{;i}\right]=\eta\left[g_{ik}\left(\frac{\partial\dot{x}^k}{\partial x^j}+\Gamma^k_{lj}\dot{x}^l\right)+g_{jk}\left(\frac{\partial\dot{x}^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{li}\dot{x}^l\right)\right]\tag{45}$$

で定義する。$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ であり対称テンソルである。また、デカルト座標（$i=j$ のとき $g_{ij}=1$、$i\neq j$ のとき $g_{ij}=0$ で、$\Gamma^i_{jk}=0, \dot{x}^j=v^j, \dot{x}^j=v^j=v_j$ など）では、単に

$$\sigma_{ij}=\eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right)\tag{46}$$

で与えられる。

ベクトルやテンソルの空間部分を共変微分に書き換えて、両辺が共変ベクトルとなるように変換すれば、粘性流体の運動方程式は

$$\rho g_{ij}\left(\frac{\partial\dot{x}^j}{\partial t}+\dot{x}^k\dot{x}^j_{;k}\right)\boldsymbol{a}^i=\left[-\frac{\partial p}{\partial x^i}-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}+\left(g^{km}\sigma_{im}\right)_{;k}\right]\boldsymbol{a}^i\tag{47}$$

または、両辺が反変ベクトルとなるように変換すれば次のように書ける。

$$\rho\left(\frac{\partial\dot{x}^j}{\partial t}+\dot{x}^k\dot{x}^j_{;k}\right)\boldsymbol{a}_j=\left[-\frac{\partial p}{\partial x^i}-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}+\left(g^{km}\sigma_{im}\right)_{;k}\right]g^{ij}\boldsymbol{a}_j\tag{48}$$

3 円筒座標

円筒座標 $\left(x^1, x^2, x^3\right) = (r, \phi, z)$ のとき、線素は $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$ で与えられるので、計量テンソルは

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = 1$$
$$g^{11} = 1, \qquad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \qquad g^{33} = 1$$

と与えられる。 Γ^i_{kj} を計算すれば、零でないものは

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r, \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}$$

だけである。円筒座標を用いて、(47) の左辺で $\boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{a}^r$ にかかる係数を計算すると

$$\begin{aligned}
\left[\rho g_{ij}\left(\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial t} + \dot{x}^k \dot{x}^j_{;k}\right)\right]_r &= \rho g_{1j}\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial t} + \rho g_{1j}\dot{x}^k \dot{x}^j_{;k} = \rho g_{11}\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial t} + \rho g_{11}\left[\dot{x}^1\left(\frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x^1} + \Gamma^1_{m1}\dot{x}^m\right) + \dot{x}^2\left(\frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x^2} + \Gamma^1_{m2}\dot{x}^m\right) + \dot{x}^3\left(\frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x^3} + \Gamma^1_{m3}\dot{x}^m\right)\right] \\
&= \rho\dot{r} + \rho\left[\dot{r}\frac{\partial \dot{r}}{\partial r} + \dot{\phi}\left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \phi} - r\dot{\phi}\right) + \dot{z}\frac{\partial \dot{r}}{\partial z}\right] = \rho\left[\dot{v}^r + v^r\frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{v^\phi}{r}\frac{\partial v^r}{\partial \phi} + v^z\frac{\partial v^r}{\partial z} - r\dot{\phi}^2\right] \\
&= \rho\left[\frac{\partial v^r}{\partial t} + v^r\frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{v^\phi}{r}\frac{\partial v^r}{\partial \phi} + v^z\frac{\partial v^r}{\partial z} - \frac{\left(v^\phi\right)^2}{r}\right]
\end{aligned}$$

となることが分かる。同様にして (47) の左辺の $\boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{a}^3$ のかかる係数を計算すると

$$\begin{aligned}
g_{2j}\left(\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial t} + \dot{x}^k \dot{x}^j_{;k}\right) &= r\left(\frac{\partial v^\phi}{\partial t} + v^r\frac{\partial v^\phi}{\partial r} + \frac{v^\phi}{r}\frac{\partial v^\phi}{\partial \phi} + v^z\frac{\partial v^\phi}{\partial z} + \frac{v^\phi}{r}v^r\right) \\
g_{3j}\left(\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial t} + \dot{x}^k \dot{x}^j_{;k}\right) &= \frac{\partial v^z}{\partial t} + v^r\frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{v^\phi}{r}\frac{\partial v^z}{\partial \phi} + v^z\frac{\partial v^z}{\partial z}
\end{aligned}$$

となる。ここで、物理的な速度 $v^r = \dot{r}, v^\phi = r\dot{\phi}, v^z = \dot{z}$ を用いて表した。

円筒座標の場合に、例えば (47),(48) の右辺 $\left(g^{kj}\sigma_{ij}\right)_{;k}$ は

$$\left(g^{kj}\sigma_{ij}\right)_{;k} = g^{kj}\sigma_{ij;k} = g^{kj}\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik}\sigma_{lj} - \Gamma^l_{jk}\sigma_{il}\right)$$

と書き直すことができる。 $i = 1$ のときこれを計算すると

$$\begin{aligned}
\left(g^{kj}\sigma_{ij}\right)_{;k}\Big|_{i=1} &= \left(g^{kj}\sigma_{1j}\right)_{;k} = g^{kj}\left(\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{1k}\sigma_{lj} - \Gamma^l_{jk}\sigma_{1l}\right) \\
&= g^{11}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + g^{22}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} + g^{33}\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x^3} - g^{22}\Gamma^2_{12}\sigma_{22} - g^{22}\Gamma^1_{22}\sigma_{11} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\right)\sigma_{\phi\phi} - \frac{1}{r^2}(-r)\sigma_{rr} \\
&= \frac{\partial \tilde{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\tilde{\sigma}_{rr} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{r}\tilde{\sigma}_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tilde{\sigma}_{rr}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} - \frac{\tilde{\sigma}_{\phi\phi}}{r}
\end{aligned}$$

となる。ここで $\sigma_{12} = \sigma_{r\phi}$ などである。また**物理的な次元をあわせるため**に

$$\sigma_{rr} = \tilde{\sigma}_{rr}, \quad \sigma_{r\phi} = r\tilde{\sigma}_{r\phi}, \quad \sigma_{\phi\phi} = r^2\tilde{\sigma}_{\phi\phi}, \quad \sigma_{z\phi} = r\tilde{\sigma}_{z\phi}, \quad \sigma_{zz} = \tilde{\sigma}_{zz}, \quad \sigma_{rz} = \tilde{\sigma}_{rz} \tag{49}$$

なる $\tilde{\sigma}_{ij}$ を用いた（$\sigma_{ij}\boldsymbol{a}^i \otimes \boldsymbol{a}^j = \tilde{\sigma}_{ij}\boldsymbol{b}^i \otimes \boldsymbol{b}^j$）。同様にして $i = 2, 3$ について計算すれば、次のようになることが分かる。

$$\begin{aligned}
\left(g^{kj}\sigma_{2j}\right)_{;k} &= r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tilde{\sigma}_{r\phi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial z} + \frac{\tilde{\sigma}_{r\phi}}{r}\right] \\
\left(g^{kj}\sigma_{3j}\right)_{;k} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tilde{\sigma}_{zr}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{\sigma}_{z\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}$$

4 応力テンソル

応力テンソル $\tilde{\sigma}_{ij}$ を定義 (45) を用いて計算し、$v^r = \dot{r}, v^\phi = r\dot{\phi}, v^z = \dot{z}$ などを使って表すことを考える。例えば $\tilde{\sigma}_{r\phi}$ は

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{r\phi} = \frac{1}{r}\sigma_{r\phi} &= \frac{\eta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x^\phi}\left(g_{rk}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{r\phi}g_{lk}\dot{x}^k + \frac{\partial}{\partial x^r}\left(g_{\phi k}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{\phi r}g_{lk}\dot{x}^k\right) = \frac{\eta}{r}\left(\frac{\partial\dot{r}}{\partial\phi} - \frac{1}{r}r^2\dot{\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dot{\phi}\right) - \frac{1}{r}r^2\dot{\phi}\right) \\
&= \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v^r}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rv^\phi\right) - \frac{2}{r}v^\phi\right) = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v^r}{\partial\phi} + \frac{v^\phi}{r} + \frac{\partial v^\phi}{\partial r} - \frac{2}{r}v^\phi\right) = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v^r}{\partial\phi} + r\frac{r\frac{\partial v^\phi}{\partial r} - v^\phi}{r^2}\right) \\
&= \eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v^r}{\partial\phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^\phi}{r}\right)\right]
\end{aligned}$$

となることが分かる。同様に計算すると（$i = j$ のときは簡略化できて）

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{rr} &= \sigma_{rr} = 2\eta\left[\frac{\partial}{\partial x^r}\left(g_{rk}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{rr}g_{lk}\dot{x}^k\right] = 2\eta\frac{\partial\dot{r}}{\partial r} = 2\eta\frac{\partial v^r}{\partial r} \\
\tilde{\sigma}_{\phi\phi} &= \frac{1}{r^2}\sigma_{\phi\phi} = \frac{2\eta}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\phi}\left(g_{\phi k}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{\phi\phi}g_{lk}\dot{x}^k\right] = \frac{2\eta}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}\left(r^2\dot{\phi}\right) + r\dot{r}\right] = 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v^\phi}{\partial\phi} + \frac{v^r}{r}\right) \\
\tilde{\sigma}_{zz} &= \sigma_{zz} = 2\eta\left[\frac{\partial}{\partial x^z}\left(g_{zk}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{zz}g_{lk}\dot{x}^k\right] = 2\eta\frac{\partial\dot{z}}{\partial z} = 2\eta\frac{\partial v^z}{\partial z} \\
\tilde{\sigma}_{zr} &= \sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \eta\left[\frac{\partial}{\partial x^z}\left(g_{rk}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{rz}g_{lk}\dot{x}^k + \frac{\partial}{\partial x^r}\left(g_{zk}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{zr}g_{lk}\dot{x}^k\right] = \eta\left(\frac{\partial\dot{r}}{\partial z} + \frac{\partial\dot{z}}{\partial r}\right) = \eta\left(\frac{\partial v^z}{\partial r} + \frac{\partial v^r}{\partial z}\right) \\
\tilde{\sigma}_{\phi z} &= \sigma_{z\phi} = \frac{1}{r}\sigma_{z\phi} = \frac{\eta}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x^\phi}\left(g_{zk}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{z\phi}g_{lk}\dot{x}^k + \frac{\partial}{\partial x^z}\left(g_{\phi k}\dot{x}^k\right) - \Gamma^l_{\phi z}g_{lk}\dot{x}^k\right] = \frac{\eta}{r}\left[\frac{\partial\dot{z}}{\partial\phi} + \frac{\partial\left(r^2\dot{\phi}\right)}{\partial z}\right] = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v^z}{\partial\phi} + \frac{\partial v^\phi}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

となる。

5 散逸エネルギー発生率

応力テンソルの反変成分を

$$\sigma^{ij} = g^{ik}g^{jl}\sigma_{kl} \tag{50}$$

で定義する。さて、粘性による単位時間当たりの散逸エネルギー発生率 ϵ は、σ_{ij} が対称テンソルであることから、デカルト座標系（従って $\sigma_{ij} = \sigma^{ij}$） で

$$\epsilon = \sigma_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2\eta}\sigma_{ij}\sigma^{ij} \tag{51}$$

と与えられることが分かる。これが一般の曲線座標系でも成り立つとすれば、円筒座標系に於いて

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{1}{2\eta}\sigma_{ij}\sigma^{ij} = \frac{1}{2\eta}g^{ik}g^{jl}\sigma_{ij}\sigma^{kl} \\
&= \frac{1}{2\eta}\Big[g^{11}g^{11}\left(\sigma_{11}\right)^2 + g^{11}g^{22}\left(\sigma_{12}\right)^2 + g^{11}g^{33}\left(\sigma_{13}\right)^2 + g^{22}g^{11}\left(\sigma_{21}\right)^2 + g^{22}g^{22}\left(\sigma_{22}\right)^2 + g^{22}g^{33}\left(\sigma_{23}\right)^2 \\
&\qquad + g^{33}g^{11}\left(\sigma_{31}\right)^2 + g^{33}g^{22}\left(\sigma_{32}\right)^2 + g^{33}g^{33}\left(\sigma_{33}\right)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2\eta}\Big[\left(\sigma_{rr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\sigma_{r\phi}\right)^2 + \left(\sigma_{rz}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\sigma_{\phi r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\frac{1}{r^2}\left(\sigma_{\phi\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\sigma_{\phi z}\right)^2 + \left(\sigma_{zr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\sigma_{z\phi}\right)^2 + \left(\sigma_{zz}\right)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2\eta}\left[\left(\tilde{\sigma}_{rr}\right)^2 + \left(\tilde{\sigma}_{\phi\phi}\right)^2 + \left(\tilde{\sigma}_{zz}\right)^2 + 2\left(\tilde{\sigma}_{r\phi}\right)^2 + 2\left(\tilde{\sigma}_{rz}\right)^2 + 2\left(\tilde{\sigma}_{\phi z}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{52}$$

で与えられることが分かる。従って応力テンソルの $r\phi$ 成分だけが零でないとすると、それ以外の成分は零であるから、散逸エネルギー発生率 ϵ は

$$\epsilon = \frac{1}{2\eta} \cdot 2\left(\tilde{\sigma}_{r\phi}\right)^2 = \eta\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v^r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^\phi}{r}\right)\right\}^2 = \nu\rho\left(r\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^2 \qquad \because \quad \left[\frac{\partial}{\partial \phi} = 0, \eta = \rho\nu, \Omega = \dot{\phi}\right] \tag{53}$$

で与えられることが分かる。

6 Christoffel の記号を用いた divergence,Laplacian の導出

$\nabla \cdot \vec{\xi}$ を求めるときに現れる Γ^k_{ij} に関しては、便利な公式が知られている。例えば、正則な行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ とその逆行列 $A^{-1} = B = \left(b^{ij}\right)$ を考える。行列 A の行列式を $\det A$ と書くことにする。また行列 A の要素 a_{ij} に対する**余因子 (cofactor)** を Δ^{ij} と書くとすれば、行列 A の逆行列 B の要素 b^{ij} が

$$b^{ij} = \Delta^{ji}/\det A \tag{54}$$

で与えられることが知られている。ここで、余因子は行列 A からその i 行 j 列を取り除いた小行列 $\tilde{A}_{ij}$ を使って

$$\Delta^{ij} = (-1)^{i+j}\det\tilde{A}_{ij}$$

で定義される。$\delta^k_i = \sum_j a_{ij}b^{jk} = \sum_j a_{ij}\Delta^{kj}/\det A$ であるから、 $i = k$ として

$$\sum_j a_{ij}\Delta^{ij} = \det A \tag{55}$$

を得る。ここで i については和をとらない。定義より Δ^{ij} に要素 a^{ij} は含まれないので

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}(\det A) = \Delta^{ij} \tag{56}$$

が得られる。これを使えば

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\det A) = \sum_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}(\det A) = \sum_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\Delta^{ij} = \det A\sum_{ij} b^{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = (\det A)\,\mathrm{Tr}\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^k}\right) \tag{57}$$

従って

$$\mathrm{Tr}\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}(\ln\det A) \tag{58}$$

が得られる。ここで $\mathrm{Tr}\,M$ は行列 M の対角成分の和を表す。

Γ^j_{ij} は

$$\Gamma^j_{ij} = \frac{1}{2}g^{kj}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

であるから、零以外の値をとるには $k = j$ でなければならないので、これを踏まえると (58) を用いて

$$\begin{aligned}
\Gamma^j_{ij} &= \frac{1}{2}g^{jk}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}g^{mm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}g^{jk}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(\ln g) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\ln g^{1/2}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\ln\sqrt{g}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}
\end{aligned} \tag{59}$$

となることが分かる。ここで $g=\det g_{ij}$ である。これから

$$\nabla\cdot\vec{\xi}\equiv\xi^j_{;j}=\frac{\partial\xi^j}{\partial x^j}+\Gamma^j_{ij}\xi^i=\frac{\partial\xi^j}{\partial x^j}+\frac{\xi^i}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}=\frac{\partial\xi^j}{\partial x^j}+\frac{\xi^j}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\,\xi^j\right) \tag{60}$$

を得る。同様に

$$\nabla^2\Phi\equiv\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)_{;i}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right) \tag{61}$$

を得るが、これを展開すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)&=\frac{g^{ij}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)=\Gamma^l_{il}g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)+\Gamma^l_{kl}g^{kj}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)+\Gamma^i_{ki}g^{kj}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}=(43)\end{aligned}$$

であるから、(43) で計算したものと一致していることが分かる。

7 Levi-Civita 記号と Jacobian

さて、三つの添え字を持った Levi-Civita 記号 $\epsilon^{ijk},\epsilon_{ijk}$ を導入する。その定義は任意の座標系で

$$\epsilon_{ijk}=\epsilon^{ijk}=\begin{cases}+1 & \text{if (ijk) is an even permutation of 1,2,3}\\-1 & \text{if (ijk) is an odd permutation of 1,2,3}\\0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{62}$$

で与えられるものとする。

今 Jacobian

$$J=\det\left(\frac{\partial\vec{\bar{x}}}{\partial\vec{x}}\right),\qquad \tilde{J}=\det\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\bar{x}}}\right)=J^{-1} \tag{63}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}J&=\det\left(\frac{\partial\vec{\bar{x}}}{\partial\vec{x}}\right)=\left|\frac{\partial\left(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}&\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1}&\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^1}\\\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^2}\\\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^3}&\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^3}&\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}=\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}\begin{vmatrix}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^2}\\\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^3}&\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}-\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1}\begin{vmatrix}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^2}\\\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^3}&\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}+\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^1}\begin{vmatrix}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2}&\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2}\\\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^3}&\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^3}\end{vmatrix}\\&=\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^3}-\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^3}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^2}-\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^3}+\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^3}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^1}+\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^3}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^1}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^2}-\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^3}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^1}\\&=\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^r}\epsilon^{pqr}=\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^r}\epsilon^{pqr}=\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^r}\epsilon^{pqr}=-\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^r}\epsilon^{pqr}=-\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^r}\epsilon^{pqr}=-\frac{\partial\bar{x}^3}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^r}\epsilon^{pqr}\\&=\epsilon_{ijk}\cdot\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\epsilon^{pqr}\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^r}\epsilon^{pqr}=J\epsilon^{ijk} \tag{64}$$

となり、同様にして（$\vec{x}\leftrightarrow\vec{\bar{x}}$ の単純な交換により）

$$\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\epsilon_{pqr}=\tilde{J}\epsilon_{ijk} \tag{65}$$

となることが分かる。これから、任意の座標系で (62) が成立するためには、ϵ^{ijk} と ϵ_{ijk} の交換則はそれぞれ

$$\bar{\epsilon}^{ijk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\tilde{J}\epsilon^{pqr} = \epsilon^{ijk}, \qquad \bar{\epsilon}_{ijk} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}J\epsilon_{pqr} = \epsilon_{ijk} \tag{66}$$

で与えられなければならないことが分かる。

8 relative tensor,pseudotensor(**擬テンソル**),tensor density(**テンソル密度**)

一般に、例えば二階のテンソルについて

$$\bar{T}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\tilde{J}^w T^k_l \tag{67}$$

なる変換則を満たすテンソルを relative tensor と呼ぶ。特に $w = -1$ のとき擬テンソル (pseudotensor)、$w = 1$ のときテンソル密度 (tensor density) と呼ぶ。ϵ^{ijk} は三階の反変テンソル密度であり、ϵ_{ijk} は三階の共変擬テンソルである。また

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \quad \Longrightarrow \quad \bar{g} = \det \bar{g}_{ij} = (\det g_{ij})\left(\det \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)\left(\det \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\right) = J^{-2}g = \tilde{J}^2 g$$

であるから、$\sqrt{g}$ について $w = 1$ であり、$\sqrt{g}$ はスカラー密度として振る舞う。

二つの反変ベクトル a^i, b^i を用いて

$$c_i = \sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^j b^k \tag{68}$$

を定義すれば c_i は

$$\bar{c}_i = \sqrt{\bar{g}}\,\bar{\epsilon}_{ijk}\bar{a}^j\bar{b}^k = \sqrt{\tilde{J}g}\,\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}J\epsilon_{pqr}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}a^l b^m = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\sqrt{g}\,\epsilon_{plm}a^l b^m = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial \bar{x}^i}c_p$$

であるから、共変ベクトルとして振る舞う。同様にすれば、二つの共変ベクトル a_i, b_j を用いて

$$c^i = \frac{\epsilon^{ijk}a_j b_k}{\sqrt{g}} \tag{69}$$

を定義すれば c^i は反変ベクトルとして振る舞うことが示せる。

二階の反対称共変テンソル A_{ij} $(A_{ij} = -A_{ji})$ について

$$p^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}A_{jk} \tag{70}$$

で定義されるベクトル p^i は任意の座標変換に対して

$$\bar{p}^i = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^{ijk}\bar{A}_{jk} = \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\tilde{J}\epsilon^{pqr}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k}A_{lm} = \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\delta^l_q\delta^m_r\tilde{J}\epsilon_{pqr}A_{lm} = \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\tilde{J}\epsilon_{pqr}A_{qr} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\tilde{J}p^p$$

が成り立つので、一階の反変テンソル密度（反変ベクトル密度）として振る舞うことが分かる。また

$$p^i = \frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}A_{jk} \tag{71}$$

で定義されるベクトル p^i は

$$\bar{p}^i = \frac{1}{2\sqrt{g}}\bar{\epsilon}^{ijk}\bar{A}_{jk} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\tilde{J}^2 g}}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\tilde{J}\epsilon^{pqr}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k}A_{lm} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\epsilon^{pqr}\delta^l_q\delta^m_r A_{lm} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\epsilon^{pqr}A_{qr} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}p^p$$

であることから、一階の反変テンソル（反変ベクトル）として振る舞うことが分かる。

9 球面座標に於ける速度の rotation

ベクトル $\nabla\times\vec{v}$ は、二階の反対称共変テンソル

$$(\mathrm{curl}\ \vec{v})_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x^i} \tag{72}$$

を用いて、

$$(\nabla\times\vec{v})^i \equiv -\frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}(\mathrm{curl}\ \vec{v})_{jk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x^j} \tag{73}$$

で定義される。$(\nabla\times\vec{v})^i$ は任意の座標変換に対して一階の反変テンソル（反変ベクトル）として振る舞う。

球面座標 $(r,\theta,\phi) = \left(x^1, x^2, x^3\right)$ について、定義に従って $(\nabla\times\vec{v})$ を計算する。$\dot{x}_k$ $\left(\dot{x}_1 = v^r, \dot{x}_2 = rv^\theta, \dot{x}_3 = r\sin\theta\, v^\phi\right)$ に注意すると

$$\begin{aligned}
(\nabla\times\vec{v})^r &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\epsilon^{123}\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x^2} + \epsilon^{132}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x^3}\right) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta v^\phi\right) - \frac{\partial(rv^\theta)}{\partial\phi}\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta v^\phi\right) - \frac{\partial v^\theta}{\partial\phi}\right] \\
(\nabla\times\vec{v})^\theta &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\epsilon^{231}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x^3} + \epsilon^{213}\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial v^r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\sin\theta v^\phi)}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v^r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rv^\phi)}{\partial r}\right] \\
(\nabla\times\vec{v})^\phi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\epsilon^{312}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x^1} + \epsilon^{321}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(rv^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v^r}{\partial\theta}\right]
\end{aligned}$$

となる。また

$$\nabla\times\vec{v} = (\nabla\times\vec{v})^i\,\boldsymbol{a}_i = \sum_i \frac{(\nabla\times\vec{v})^i}{\sqrt{g^{ii}}}\boldsymbol{b}_i \tag{74}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{v} = (\nabla\times\vec{v})^i\,\boldsymbol{a}_i &= \sum_i \frac{(\nabla\times\vec{v})^i}{\sqrt{g^{ii}}}\boldsymbol{b}_i = (\nabla\times\vec{v})^r\ \boldsymbol{b}_r + \sqrt{r^2}\ (\nabla\times\vec{v})^\theta\ \boldsymbol{b}_\theta + \sqrt{r^2\sin^2\theta}\ (\nabla\times\vec{v})^\phi\ \boldsymbol{b}_\phi \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, v^\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial v^\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{b}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v^r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rv^\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{b}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rv^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v^r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{b}_\phi
\end{aligned}$$

であることが分かる。

10 直交デカルト座標間での変換

$x^j \leftrightarrow \overline{x}^j$ を二つの直交デカルト座標系 $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) = \left(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\right)$ と $\left(\vec{i}'_1, \vec{i}'_2, \vec{i}'_3\right)$ との間の変換であるとして

$$\vec{r} = \sum_j x^j\vec{i}_j = \sum_j \overline{x}^j\vec{i}'_j = x^j\vec{i}_j = \overline{x}^j\vec{i}'_j \tag{75}$$

とする。このとき、直交基底ベクトルの組 $\left(\vec{i}_i\right)$ をほかの直交ベクトルの組 $\left(\vec{i}'_i\right)$ の一次結合で表せば

$$\vec{i}'_i = \sum_j\left(\vec{i}'_i\cdot\vec{i}_j\right)\vec{i}_j = \sum_j a_{ij}\,\vec{i}_j, \qquad \vec{i}_i = \sum_j\left(\vec{i}_i\cdot\vec{i}'_j\right)\vec{i}'_j = \sum_j a_{ji}\,\vec{i}'_j$$

と書ける。ここで $a_{ij} = \left(\vec{i}'_i\cdot\vec{i}_j\right) = \left(\vec{i}_j\cdot\vec{i}'_i\right)$ である。

このとき $x^j\vec{i}_j = \overline{x}^i\vec{i}'_i$ の両辺に左から $\vec{i}'_i$ との内積をとると

$$x^j\left(\vec{i}'_i\cdot\vec{i}_j\right) = \sum_j a_{ij}\,x^j = \overline{x}^i\left(\vec{i}'_i\cdot\vec{i}'_i\right) = \overline{x}^i\delta_{ii} = \overline{x}^i, \qquad \therefore\quad \overline{x}^i = \sum_j a_{ij}x^j$$

となり、同様に $x^i\vec{i}_i = \overline{x}^j\vec{i}'_j$ の両辺に右から $\vec{i}_i$ との内積をとると

$$x^i\left(\vec{i}_i\cdot\vec{i}_i\right) = x^i\,\delta_{ii} = x^i = \overline{x}^j\left(\vec{i}'_j\cdot\vec{i}_i\right) = \sum_j a_{ji}\,x^j \qquad \therefore \quad x^i = \sum_j a_{ji}\overline{x}^j$$

である。これから

$$A = \left(a_{ij}\right) = \left(\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\right)$$

とする。今 $x^i, \overline{x}^i$ を縦ベクトル $\vec{x}, \vec{\overline{x}}$ として変換を行列の形で書くと、

$$\vec{\overline{x}} = A\vec{x}$$

であるから、**内積の不変性**より

$$\vec{\overline{x}}\cdot\vec{\overline{x}} = \vec{\overline{x}}^T\vec{\overline{x}} = \vec{x}^T A^T A\vec{x} = \vec{x}^T\vec{x} = \vec{x}\cdot\vec{x} \qquad \therefore \quad AA^T = A^T A = I$$

となる。ここで I は単位行列である。これから $A^T = A^{-1}$ であり、また

$$1 = \det\left(AA^T\right) = \left(\det A^T\right)(\det A) = (\det A)^2$$

が得られ、

$$\det A = J = \tilde{J} = \pm 1$$

となる。

11 回転、反転、恒等変換

普通の座標系の回転については $J = \tilde{J} = 1$ であるので、擬テンソルやテンソル密度は普通のテンソルと同じ変換を受ける。

$$\overline{T}^i_j = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}\,\tilde{J}^{\pm 1}\,T^k_l = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}\,T^k_l$$

ところが、$\vec{i}'_j \to -\vec{i}_j$ であるような**座標の反転（右手系から左手系への変換）**については $J = \tilde{J} = -1$ であるので、擬テンソルやテンソル密度の変換の仕方は、普通のテンソルの変換の仕方とは異なることになる。

$$\overline{T}^i_j = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}\,\tilde{J}^{\pm 1}\,T^k_l = -\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}\,T^k_l$$

二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ を

$$\vec{c}_i = c_i = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk}a^j b^k$$

で定義する。このとき c_i は

$$\begin{aligned}\overline{c}_i &= \overline{\epsilon}_{ijk}\overline{a}^j\overline{b}^k = \frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial\overline{x}^k}\,J\epsilon_{pqr}\cdot\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^m}\,a^l b^m = J\frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^i}\epsilon_{pqr}\delta^q_l\delta^r_m\,a^l b^m = J\frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^i}\epsilon_{pqr}\,a^q b^r \\ &= J\frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^i}\,c_p\end{aligned}$$

と変換されるから、座標の回転、反転に対して

$$\text{回転}: J = \ \ 1 \qquad\qquad \overline{c}_i = \frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^i}\,c_p \quad \text{：共変ベクトル}$$

$$\text{反転}: J = -1 \qquad\qquad \overline{c}_i = -\frac{\partial x^p}{\partial\overline{x}^i}\,c_p$$

の様に変換されることが分かる。また、微小変分 $d\vec{x}_1 . d\vec{x}_2, d\vec{x}_3$ に対して

$$\Delta = \epsilon_{ijk}\, dx_1^i dx_2^j dx_3^k$$

で定義される量は、

$$\begin{aligned}\overline{\Delta} &= \overline{\epsilon}_{ijk}\, d\overline{x}_1^i d\overline{x}_2^j d\overline{x}_3^k = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\, J\epsilon_{pqr} \cdot \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^m} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^n}\, dx_1^l dx_2^m dx_3^n = J\epsilon_{pqr}\, \delta_l^p \delta_m^q \delta_n^r\, dx_1^l dx_2^m dx_3^n = J\epsilon_{pqr}\, dx_1^p dx_2^q dx_3^r \\ &= J\Delta\end{aligned}$$

と変換されるので、座標の回転、反転に対して

$$\begin{array}{lll} \text{回転} : J = \ \ 1 & \overline{\Delta} = \Delta & \text{：恒等} \\ \text{反転} : J = -1 & \overline{\Delta} = -\Delta & \text{：符号反転} \end{array}$$

となる。