物 理（1）

質量の無視できる長さ l の糸の先に質量 m の小さなおもりをつけた振り子がある。水平方向に x 軸を、鉛直上方に y 軸をとる。振り子の支点 (おもりと反対側の端) を x 軸上で時間 t の関数として $x = S(t)$ に従って動かす。おもりには鉛直下方に一様な重力加速度 g が作用し、振り子は xy 平面内を運動するものとする。また、糸は伸縮しないものとする。以下の問に答えよ。

問 1. 鉛直下方と振り子のなす角 θ を一般化座標として、振り子の運動エネルギー T、ポテンシャルエネルギー U、ラグランジアン (ラグランジュ関数) L を書け。

問 2. 振り子の運動方程式を書け。

以下の問では $S(t) = A\sin(\omega t)$ (A と ω は正の定数) と仮定する。

問 3. 振り子が微小振動する場合、運動方程式の一般解を求めよ。

問 4. 重力以外に、速さに比例した抵抗力がおもりに働く場合を考える。直交座標において、抵抗力の x 成分と y 成分はそれぞれ、

$$F_x = -k\frac{dx}{dt}, \quad F_y = -k\frac{dy}{dt}$$

で与えられるとする (k は正の定数)。このとき、座標 θ に対する一般化力

$$Q_\theta = F_x\frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

を計算せよ。また、θ に関する運動方程式を導け。

問 5. 問 4 の場合、十分長い時間が経過したのちの振り子の微小振動について、振幅および支点の運動との位相のずれを求めよ。

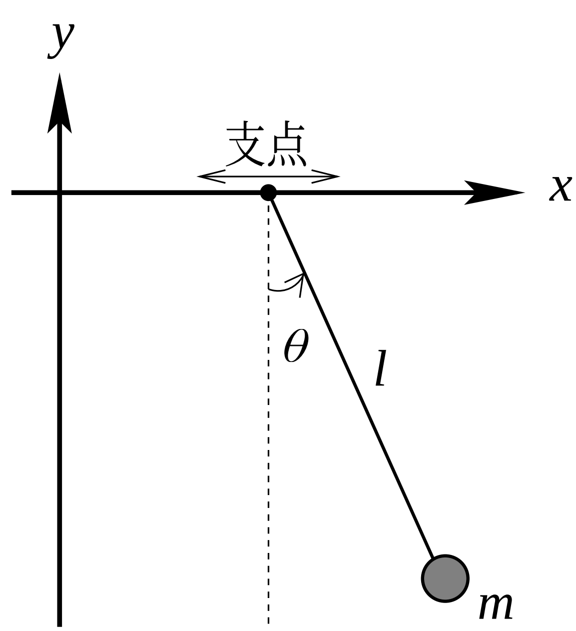

図 1

物 理（2）

粒子数 N が変化しない希薄な理想気体について以下の問に答えよ。ただし以下では、V、T、P はそれぞれ、その気体の体積、絶対温度、圧力をあらわすものとする。

問 1. 理想気体を構成する粒子の速度はどのような分布であらわされるか。この分布を用いて気体の内部エネルギー U を求めよ。この結果から $(\partial U/\partial V)_T = 0$ であることを示せ。

問 2. 理想気体の状態方程式は、$PV = RT$ のようにあらわすことが出来る。この式に現れる定数 R が $C_p - C_v$ であることを示せ。ここで、C_p、C_v はそれぞれ定圧比熱と定積比熱をあらわす。

問 3. この気体のエントロピーを求めよ。また、この気体の温度と体積がそれぞれ ΔT、ΔV だけ断熱的に変化したとき、

$$\frac{\Delta T}{T} = -(\gamma - 1)\frac{\Delta V}{V}$$

の関係があることを示せ。ここで、$\gamma \equiv C_p/C_v$ である。

問 4. この気体が図 2 のような断面積 A の直立シリンダーに、質量 m の摩擦なく自由に動くピストンで閉じ込められているとする。

(a) 釣り合っている状態でのシリンダー内の気体の圧力 P と外気圧 P_0 との関係をあらわせ。ここで、重力加速度は g とする。

(b) このピストンを釣り合いの状態から少しだけずらして手を離すとピストンは振動する。このピストンの平衡位置からのずれの大きさと体積変化の関係をもとに、前者を変数としてピストンに対する運動方程式をもとめよ。ただし、この振動のあいだ気体は断熱的に振る舞うとする。

(c) ピストンの振動の角振動数を用いて、この気体の比熱比 γ をあらわせ。

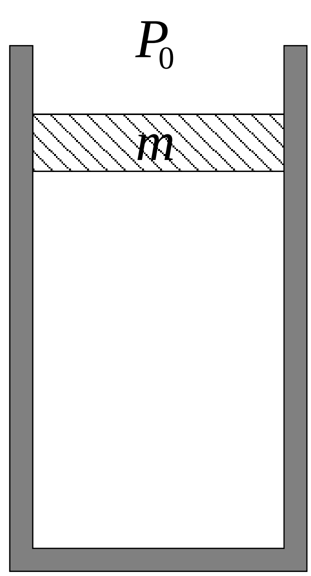

図 2

物 理（3）

真空中、x 軸上の点 $x=-R/2$ と $x=R/2$ に電荷 q が一つずつ固定されているとする。ここで、$R>0$ である。また、yz 平面に平行で、x 軸と $x=a$ で交わる平面を S_a とする。一般に、真空中の電荷による電場 $\vec{E}$ が面 S におよぼす力 $\vec{F}$ の i 成分 $(i=x,\,y,\,z)$ は、

$$F_i=\int_S \left(T_{ix}n_x+T_{iy}n_y+T_{iz}n_z\right)dS \tag{1}$$

で与えられる。ここで、dS は微小面積要素、$\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$ は面 S にたてた単位法線ベクトル、$T_{ij}\ (i,\,j=x,\,y,\,z)$ は電場によるマックスウェルの応力テンソルで、

$$T_{ij}=\epsilon_0\left(E_iE_j-\delta_{ij}|\vec{E}|^2/2\right) \tag{2}$$

で定義される。E_j は電場 $\vec{E}$ の j 成分、δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、ϵ_0 は真空の誘電率である。面 S が閉曲面であるとき、力 $\vec{F}$ は閉曲面 S に囲まれた領域に働く力となる。以下の問に答えよ。

問 1. $a=0$ のとき、無限に拡がる平面 S_0 に働く力 $\vec{F}$ を、式 (1) を使って計算することを考える。ただし、$\vec{n}=(1,0,0)$ とする。

- **(a)** 平面 S_0 上の点 $\mathrm{P}(0,y,z)$ における電場 $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$ を求めよ。
- **(b)** 平面 S_0 上の点 $\mathrm{P}(0,y,z)$ における T_{xx} と T_{xy} を求めよ。
- **(c)** $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$ を求めよ。

問 2. a が任意の値を取るとき、無限に拡がる平面 S_a に働く力 $\vec{F}$ を考える。ただし、$\vec{n}=(1,0,0)$ とする。

- **(a)** $|a|\neq R/2$ のとき、F_y と F_z を求めよ。
- **(b)** $|a|<R/2$ のとき、F_x を求めよ。
- **(c)** $|a|>R/2$ のとき、F_x を求めよ。

問 3. $a<-R/2<b<R/2$ のとき、無限に拡がる平面 S_a と S_b に挟まれた領域に働く力 F_x を求めよ。また、この力 F_x はどのような力に対応するか答えよ。

(参考) 必要であれば、次の積分は既知のものとして使ってよい。

$$\int_0^\infty d\rho\frac{\rho}{\left(\rho^2+\alpha^2\right)^{3/2}\left(\rho^2+\beta^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{|\alpha||\beta|}\frac{1}{(|\alpha|+|\beta|)^2}$$

$$\int_0^\infty d\rho\frac{\rho^3}{\left(\rho^2+\alpha^2\right)^{3/2}\left(\rho^2+\beta^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{(|\alpha|+|\beta|)^2}$$

ただし、α と β は零でない実数とする。

物 理（4）

z 軸方向の一様な静磁場 $\vec{B}=(0,0,B)$ 中の電子の量子力学的運動を扱う。ベクトルポテンシャルを $\vec{A}$ とすると運動量 $\vec{p}$ を持つ電子 (質量 m、電荷 $-e$) のハミルトニアンは以下のように与えられる。ただし、電磁場は古典場として扱う。

$$H \quad = \quad \frac{1}{2m}(\vec{p}+e\vec{A})^2$$

問 1. ベクトルポテンシャル $\vec{A}=(A_x,A_y,0)$ を用いて磁場 $\vec{B}$ を表す式を書け。

問 2. 以下の式で定義される演算子

$$\Pi_x \equiv p_x + eA_x, \qquad \Pi_y \equiv p_y + eA_y$$

が以下の交換関係を満たすことを示せ。

$$[\Pi_x,\Pi_y] \quad = \quad -i\hbar^2/\ell_B^2$$

ただし、$\hbar = h/2\pi$ で、h はプランク定数、$\ell_B \equiv \sqrt{\hbar/eB}$ である。ここで運動量演算子は $\vec{p}=-i\hbar\vec{\nabla}$ である。

問 3. 生成演算子 $a^\dagger$、消滅演算子 a を以下のように定義する。

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\ell_B}{\hbar}(\Pi_y + i\Pi_x), \qquad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\ell_B}{\hbar}(\Pi_y - i\Pi_x)$$

ハミルトニアンが生成消滅演算子を用いて以下のように書けることを示せ。

$$H \quad = \quad \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ここで、$\omega_c \equiv eB/m$ は電子サイクロトロン振動数である。

問 4. 以下では、ベクトルポテンシャルが $\vec{A}=(-yB,0,0)$ となるようにゲージを選択する。基底状態は $\varphi_0(x,y,z) = C\chi_0(y)\mathrm{e}^{i(k_x x + k_z z)}$ と書ける。この時 χ_0 が

$$\chi_0(y) \quad = \quad \exp\left[-\frac{(y-k_x\ell_B^2)^2}{2\ell_B^2}\right]$$

で与えられることを示せ。ここで C は規格化因子である。

問 5. 基底状態のエネルギー固有値を答えよ。さらに、基底状態の縮退度 N が以下の式で与えられることを示せ。

$$N \quad = \quad \Phi/\Phi_0$$

ただし、$\Phi = L_x L_y B$ は系を貫く磁束、$\Phi_0 = h/e$、L_x, L_y はそれぞれ x, y 方向の系の大きさ、Φ/Φ_0 は整数とし、 電子のスピンの自由度は無視する。
縮退度の計算には以下の条件を用いよ。

- x 方向の周期境界条件
- 関数 $\chi_0(y)$ のピークが $0 < y \le L_y$ 内にある