

物理 (1)

問 1. 任意の物理量 f, g について、Poisson 括弧は次で定義される。

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

ただし N は系の独立な座標の数であり、 q_i, p_i は i 番目の一般化座標とそれと共役な運動量である。以下の問いに答えよ。Poisson 括弧について、Leibniz 則 $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$ 及び Jacobi 恒等式 $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ が成立することは既知としてよい。

(a) 系のハミルトニアンを H とする。物理量 f の時間全微分が

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

と書けることを示せ。

(b) ある物理量 f が保存する条件を Poisson 括弧を用いて説明せよ。

(c) 粒子の角運動量 $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ について、3次元デカルト座標で以下の Poisson 括弧を計算せよ。

(i) $\{x, L_y\}$, (ii) $\{p_x, L_y\}$, (iii) $\{L_x, L_y\}$, (iv) $\{L_x, L_z\}$.

(d) 角運動量の成分 L_x と L_y が保存する時、 L_z も保存することを Poisson 括弧を用いて示せ。

問 2. 太陽のまわりを運動するある惑星の運動を考える。太陽質量を M 、惑星の質量を m とし、惑星と比べて太陽の質量は十分大きく惑星から太陽に働く力は無視できるため、太陽は動かないとして太陽を原点とした座標系で考える。太陽と惑星の間の距離を r とすると、重力ポテンシャルは $U = -\frac{GMm}{r}$ と書ける。ただし G は万有引力定数である。また、惑星間の相互作用は無視する。まず、太陽の質量が一定の場合を考える。

(a) 3次元球座標 (r, θ, ϕ) でこの系のラグランジアンを書け。

(b) 各座標に共役な運動量 (p_r, p_θ, p_ϕ) とこの系のハミルトニアンを求めよ。

(c) 正準方程式 (ハミルトン形式の運動方程式) を示せ。

(d) このような系では惑星の運動は常に同一平面内にある。その理由を説明せよ。

以下では $\theta = \frac{\pi}{2}$ の平面内に限定し、 (r, ϕ) 空間での2次元的な運動を考える。また、全エネルギー E が負であるような束縛された運動に限定する ($E = K + U < 0$, K は惑星の運動エネルギー)。

(e) この系の全エネルギー E と鉛直軸周りの角運動量 L_z が保存することを示せ。

(f) E と L_z が与えられた時、惑星の近日点と遠日点 (惑星が太陽に最も近づく点と最も離れる点) それぞれの太陽からの距離を求めよ。

系が準周期的な運動をする時、その一周期について積分した量 $J_i \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i$ を作用変数と呼ぶ。作用変数は系を特徴付けるパラメータ (今の場合は太陽質量) が軌道周期と比べて十分ゆっくり変化する時には不変に留まる。このような量を断熱不変量と呼ぶ。以下簡単のため、**惑星の軌道は常に円軌道であるとする。**

(g) ϕ に関する作用変数 J_ϕ を計算し、これがどのような物理量に対応するか説明せよ。

(次ページに続き有り)

太陽の進化が進み巨星段階に入ると、太陽の半径が大きく膨張するとともに表面からの質量放出で太陽の質量は減少していく。この時の惑星の軌道の進化を考える。質量放出の効果は太陽質量の減少のみであると考え。

- (h) 太陽の質量放出は非常にゆっくりであり、太陽質量が変化しても惑星は常に重力と遠心力の釣り合った円軌道を保つ。太陽の質量が初期質量 M_0 から M_1 まで減少した時、惑星の軌道半径が r_0 から r_1 に変化した。 J_ϕ が断熱不変量であることを用いて、 r_1 を r_0, M_0, M_1 を用いて表せ。
- (i) 巨星段階では太陽は質量放出によりおよそ半分の質量を失い、太陽の半径は元の約 200 倍にまで膨張する。この時、太陽系の惑星の一部は膨張した太陽に飲み込まれてしまうであろう。以下の太陽系の惑星のうち、太陽に飲み込まれてしまうと考えられるものを全て挙げよ。計算は必要と思われる精度で近似してよいが、判断の根拠となる計算を示すこと。必要なら以下の数値を用いてよい。万有引力定数 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 、初期太陽質量 $M_0 = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、初期太陽半径 $R_\odot = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$ 、天文単位 $1 \text{ au} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ 。

惑星	初期軌道半径 r_0 [au]
水星	0.39
金星	0.72
地球	1.0
火星	1.5
木星	5.2
土星	9.6

物理 (2)

問 1. 熱力学と古典電磁気学に基づき、黒体輻射を考察する。以下の問いに答えよ。

(a) 熱力学関係式

$$F = U - TS \quad (1)$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN \quad (2)$$

から、エネルギー方程式

$$\frac{\partial U}{\partial V} = T \frac{\partial P}{\partial T} - P \quad (3)$$

を導け。ただし F, U, T, S, P, V, μ, N はそれぞれ系のヘルムホルツ自由エネルギー、内部エネルギー、温度、エントロピー、圧力、体積、化学ポテンシャル、粒子数とする。

(b) 黒体輻射の内部エネルギーは

$$U(T, V) = u(T)V \quad (4)$$

のように粒子数 N に依存せず、温度のみの関数 $u(T)$ と体積 V に分離することができる。この理由を述べよ。

(c) 黒体輻射の状態方程式を考察する。 x 軸正の方向から入射した平面電磁波が $x \leq 0$ の導体に完全反射されて生じる定在電磁波、

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_0 \sin kx \cos \omega t),$$

$$\mathbf{B} = (0, B_0 \cos kx \sin \omega t, 0),$$

について次の問い (i),(ii),(iii) に MKSA 単位系を用いて答えよ。ただし $x > 0$ は真空であるとし、真空の誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 とする。

(i) 空間、時間平均した定在電磁波のエネルギー密度 \bar{u} を求めよ。

(ii) $x < 0$ の領域に磁場はないが、 $x = +0$ には有限の磁場が存在する。このとき $x = +0$ 面に生じる電流の線密度ベクトル \mathbf{j} を求めよ。

(iii) (ii) の電流は磁場から力を受ける。電流が流れている面の片側のみに磁場が存在することから、電流は実効的に $x = +0$ の磁場の半分の強度の磁場と相互作用する。このとき $x = +0$ 面の単位面積あたりに働く力の大きさの時間平均を求めよ。

(i),(ii),(iii) から、定在電磁波によって $x = +0$ 面に大きさ \bar{u} の圧力が生じることがわかる。平衡状態ではあらゆる方向に進行する電磁波が存在するので、等方性から黒体輻射の状態方程式が

$$P(T, V) = \frac{1}{3}u(T) \quad (5)$$

で与えられる。

(d) (a),(b),(c) の結果から $u(T)$ を求めよ。任意定数を含んでよい。

次のページにも問題があるので注意すること

問 2. 量子統計物理学に基づき、黒体輻射を考察する。以下の問いに答えよ。

(a) 量子的な調和振動子のエネルギー準位は

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

で与えられる。ここで $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ で h はプランク定数、 ω は調和振動子の振動数である。ボルツマン定数を k_B 、温度を T として量子的な調和振動子の分配関数とエネルギー期待値を求めよ。

(b) 一辺の長さが L の立方体状の領域中の電磁場を考える。このような電磁場を量子的な調和振動子の集まりとみなすとき、角振動数が ω と $\omega + \Delta\omega$ の間にある量子状態の総数が

$$L^3 \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \Delta\omega \quad (7)$$

になることを示せ。ここで、調和振動子としての電磁場は分散関係 $\omega = c|\mathbf{k}|$ (c は光速)、境界条件 $(k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ (n_x, n_y, n_z は正の整数) を満たし、各々について二つの偏光モードが存在することをを用いてよい。

(c) (a), (b) の結果から、ゼロ点振動の寄与を取り除いた単位体積あたりの電磁場のエネルギー $u(T)$ を計算せよ。

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (8)$$

を用いてよい。

物理 (3)

ここでは、MKSA 単位系を採用する。

問 1. z 軸を軸とした半径 R の円筒領域内に、一様磁場 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B)$ が存在する。ここで $B > 0$ である。この磁場中を運動する電荷 q 、質量 m の質点の運動に関する以下の問いに答えよ。

(a) まず、磁場の大きさ $B = B_0$ が時間によらず一定であるとする。

(i) 初速度が $\mathbf{v} = (v_x(0), v_y(0), v_z(0)) = (v_0, 0, 0)$ 、初期の位置が $\mathbf{r} = (x(0), y(0), z(0)) = (0, a_L, 0)$ であった。運動方程式を解いて、任意の時刻 t ($t > 0$) における質点の速度 $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ と位置 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ が、

$$(v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = (v_0 \cos \omega_c t, -v_0 \sin \omega_c t, 0)$$

$$(x(t), y(t), z(t)) = (a_L \sin \omega_c t, a_L \cos \omega_c t, 0)$$

で与えられることを示せ。ここでラーマー半径 a_L は、サイクロトロン角周波数 $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ を用いて、 $a_L = \frac{v_0}{\omega_c}$ と与えられる。また、 $a_L < R$ である。

(ii) 変数 J を、以下の式 (1) で定義する。

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

ここで \oint は、質点の運動の一周期での積分を表す。変数 J が

$$J = \frac{mv_0^2}{\omega_c}$$

となることを示せ。

(b) 次に、磁場の大きさ $B(t)$ が B_0 から一定の速さ $\frac{dB(t)}{dt} = \dot{B}$ で増大する場合を考える。ただし、磁場強度は以下の条件

$$\dot{B} \times \frac{2\pi}{\omega_c(t)} \ll B(t) \quad (2)$$

が満たされるようにゆっくり増大する。この条件の下では、時間間隔 $\frac{2\pi}{\omega_c(t)}$ の間の質点の運

動は、角振動数 $\omega_c(t) = \frac{qB(t)}{m}$ の円運動で近似できる。

(i) 式 (1) で定義された変数 J が断熱不変量であること、すなわち時間によらず一定値をとることを示せ。

(ii) 質点の軌道半径が磁場強度の増大に伴って減少することを示せ。

(iii) 質点の一周期の間の軌道で囲まれる領域を貫く磁束の時間変化率を示せ。

注意：裏面にも問題があります。

問 2. 以下の接地抵抗に関する問題に答えよ。

(a) 半径 a の完全導体球を考える。導体球の外部の静電ポテンシャルを $\phi(r)$ とする。ここで r は導体球の中心からの距離である。導体球の外部 $r > a$ に電荷が存在しないとする。導体球の外部の静電ポテンシャルの一般解を以下のラプラス方程式を解いて求めよ。

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = 0 \quad (3)$$

(b) 図1のようにこの導体球の半分を地中に埋める。大地の電気伝導率を σ とし、空気の電気伝導率を 0 とする。図のように導体球に電圧 V を掛け、電流 I を流す。導体球から接地点 P までの距離は、導体球の半径 a に比べて十分遠いとする。

(i) 導体球外部 ($r > a$) での静電ポテンシャルが

$$\phi(r) = V \frac{a}{r}$$

で与えられることを示せ。

(ii) オームの法則を用いて、大地を流れる電流密度の導体球表面での値 $j(a)$ を求めよ。

(iii) V を I, σ, a を用いて表せ。

(iv) 接地抵抗 R を σ, a を用いて表せ。接地抵抗とは、導体球の電位を導体球から大地に流れる電流で割ったものである。

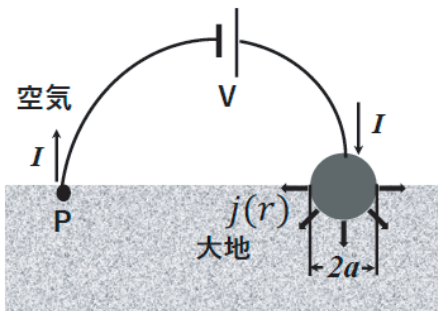


図 1

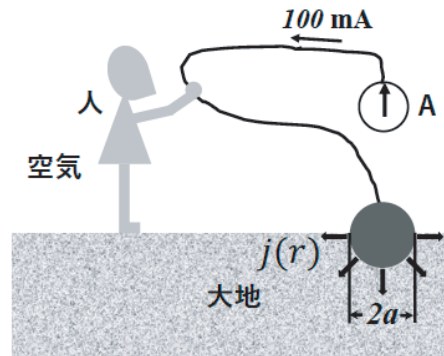


図 2

(v) 図2のように定電流源 A から 100 mA の直流電流が、半分が地中に埋まった導体球に繋がった導線に流れている。剥き出しの状態の導線を人が掴んだ時、導線と人の接触抵抗を 0 とし、人体に流れる電流を有効数字一桁で求めよ。大地の電気伝導率は $\sigma = 10^{-2} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ で一様であり、導体球の半径を $a = 0.3 \text{ m}$ 、人が導線を掴んだ手から大地と接する足の裏までの直流抵抗を 5000Ω とせよ。また人と導体球の距離は、 a に比べて十分離れており、人と大地の接地点での電位を 0 としてよい。

物理 (4)

問. 質量 m の粒子の波動関数 $\psi(x, t)$ が、以下の1次元シュレーディンガー方程式を満たすとする。

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t)$$

ここで、 $V(x)$ は時間に依存しない1次元ポテンシャル、 \hbar はプランク定数で、 $\hbar = h/2\pi$ である。

(a) 確率密度 ρ を

$$\rho(x, t) = \psi^*(x, t)\psi(x, t)$$

確率流れ密度 j を

$$j(x, t) = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*(x, t)}{\partial x} \psi(x, t) \right)$$

としたとき、連続の式

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0$$

が満たされることを示せ。ただし、 ψ^* は ψ の複素共役である。

以下、波動関数 ψ がエネルギー E の固有状態であり、 $\psi(x, t) = f(t)\phi(x)$ と変数分離できる場合を考える。

(b) $f(t)$ 、 $\phi(x)$ が満たす方程式を導出せよ。また、 $f(t)$ を求めよ。

以下では、粒子の定常状態を考え、1次元ポテンシャル $V(x)$ が図1のような幅 L 、高さ $V_0 (> 0)$ の矩形ポテンシャルであるとする。エネルギー E の粒子が、 x が負の領域から正の向きに入射する場合を考える。ただし、 $E < V_0$ とする。

(c) 以下のような k, α を定義して、

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$
$$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$$

各領域 1, 2, 3 における $\phi(x)$ の一般解を表せ。ただし、波動関数を規格化する必要はない。

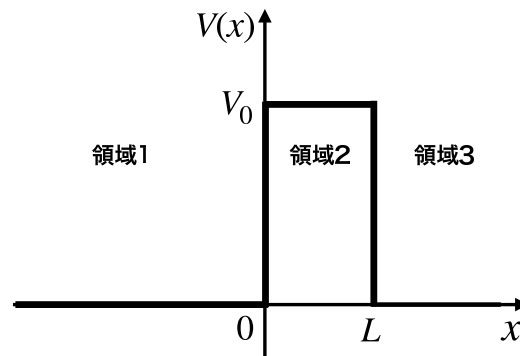


図 1

(d) (c) で求めた一般解を用いて、領域 1 における確率流れ密度を求めよ。

(e) 領域 1 から領域 3 への透過率 T は、入射波と透過波の確率流れ密度の比で表される。 $\alpha L \gg 1$ のとき、透過率 T が以下のように表せることを示せ。

$$T = \frac{16k^2\alpha^2}{(k^2 + \alpha^2)^2} e^{-2\alpha L}$$

原子核のアルファ崩壊では、図 2 のように飛び出すアルファ粒子のエネルギーが高くなると、崩壊の寿命が極端に短くなることが知られている。原子核のアルファ崩壊のモデルとして、図 3 のような一次元ポテンシャル

$$\begin{aligned} V(r) &= 0 \quad (r < R) \\ V(r) &= V_0 \frac{R}{r} \quad (r \geq R) \end{aligned}$$

を考え、エネルギー E のアルファ粒子が、 $r < R$ の領域から正の方向に透過するとする。

(f) 図 3 のようなポテンシャルにおける透過率は、近似的に

$$T \simeq \exp\left(-2 \int_R^{r_1} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(r) - E)} dr\right)$$

と表せることが知られている。この透過率を計算し、エネルギー E の関数として表せ。

ただし、 $V(r) = E$ となる位置 r_1 は R よりも十分大きいことを仮定してよい。また、 $b \gg a$ のとき、以下の式が成り立つことを使ってよい。

$$\int_a^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right)^{1/2} dx \simeq \sqrt{b} \left[\frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}\right]$$

(g) アルファ粒子が単位時間あたりにポテンシャル障壁に衝突する回数と、透過する確率を考えると、アルファ崩壊の寿命のエネルギー依存性を示せ。

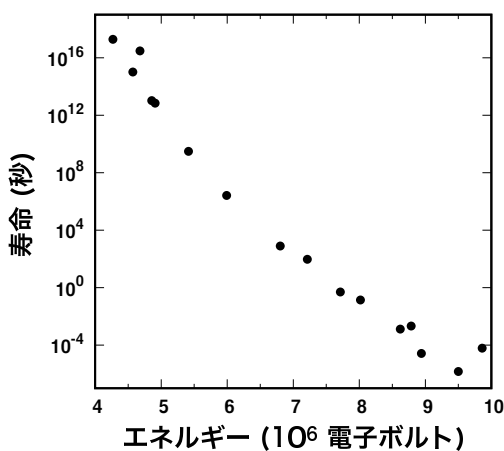


図 2

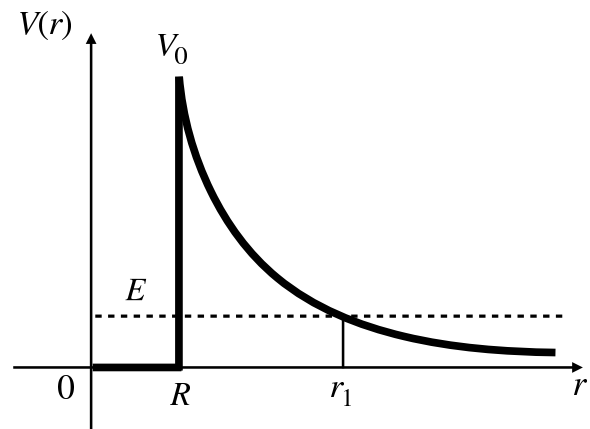


図 3