物 理（1）

問 1. ポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ の中で 3 次元運動をしている 1 個の質点を考える。質点の質量を m とし、質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は 3 次元極座標 (r, θ, ϕ) で表されるものとする。

(a) 質点の位置の微小変化ベクトルを $d\boldsymbol{r}$ とする。このベクトルの r 方向の成分 $(d\boldsymbol{r})_r$、θ 方向の成分 $(d\boldsymbol{r})_\theta$、ϕ 方向の成分 $(d\boldsymbol{r})_\phi$ のそれぞれを、(r, θ, ϕ) を用いて表せ。

(b) 3 次元極座標における質点の速度を (v_r, v_θ, v_ϕ) とする。これらの速度成分を (r, θ, ϕ) やその時間微分などを使って表せ。

(c) ラグランジアン L を書け。

(d) 各座標方向の共役な運動量 (p_r, p_θ, p_ϕ) を求めよ。

問 2. 図 1 のように、円錐面の内側に沿ってなめらかに運動する質量 m の質点の運動を考える。円錐の頂角を 2α とする。鉛直下向きの方向に働く重力加速度を g とする。

(a) 円錐頂点を原点とする 3 次元極座標 (r, θ, ϕ) を用いて、質点の運動を表すハミルトニアン H を書け。

(b) 質点の運動方程式を書け。

(c) 一般に質点の r 方向の運動は有限な領域 $r_1 \leq r \leq r_2$ に限られる。質点のエネルギーを E として、r_1 と r_2 を求めるための式を書け。また、$p_\phi \neq 0$ の場合、質点は $r = 0$ を通ることができない。その物理的理由を記述せよ。

(d) 質点が一定の高さで水平な円周上をまわるとき、その角速度 Ω を求めよ。

(e) 上記の定常な円運動に対して r 方向に微小な摂動を加えた時、質点は r 方向に単振動をする。その振動数を Ω と α を用いて表せ。

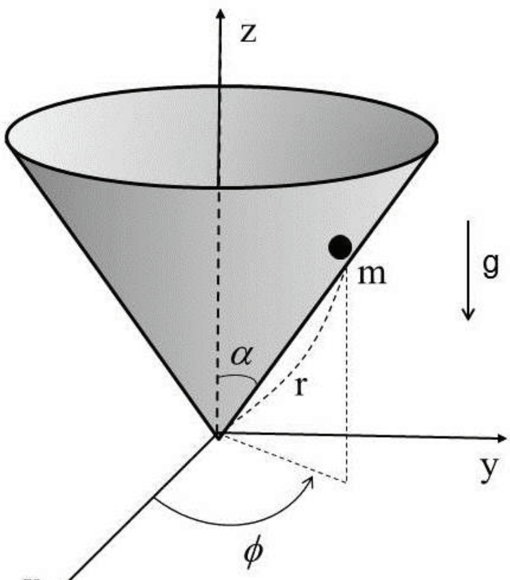

図 1

物 理（2）

熱関数 $H = U + PV$ を一定にたもつ熱力学的過程について以下の問に答えよ。ここで、U は気体の内部エネルギー、P は圧力、V は体積である。

問 1. この過程における圧力変化に対するエントロピー S の変化率 $(\partial S/\partial P)_H$ を、体積 V と温度 T を用いて表せ。

問 2. 同様に、圧力変化に対する温度の変化率 $(\partial T/\partial P)_H$ を、C_p、$(\partial V/\partial T)_P$、$T$、$V$ を用いて表せ。ここで、C_p は定圧比熱である。必要ならマクスウェルの関係式 $(\partial S/\partial P)_T = -(\partial V/\partial T)_P$ を使え。

問 3. 理想気体の場合の $(\partial T/\partial P)_H$ の値を求めよ。

問 4. ファン・デル・ワールスの状態方程式

$$(P + a/V^2)(V - b) = \mathcal{R}T \tag{1}$$

に従う 1 モルの気体を考える。ここで、a と b は正の定数で、$\mathcal{R}$ は気体定数である。

(a) 状態方程式 (1) を $a/PV^2 \ll 1$、$b/V \ll 1$ という仮定のもとで

$$PV = \mathcal{R}T\,[1 + B(T)/V]$$

の形に書き換えるとき、$B(T)$ を a、b、$\mathcal{R}$、T を用いて表せ。ここで、$B(T)/V \ll 1$ とする。

(b) このとき、$(\partial T/\partial P)_H = 0$ を満たす温度 T_m と圧力 P_m を、a、b、$\mathcal{R}$、V を用いて表せ。

問 5. ファン・デル・ワールスの状態方程式 (1) を用いると、ある臨界温度 T_c で、V-P 平面上の等温曲線に、$(\partial P/\partial V)_T = 0$ と $(\partial^2 P/\partial V^2)_T = 0$ とを同時に満たす臨界点 (V_c, P_c) が現れる。

(a) a、b、P_c を、T_c、V_c、$\mathcal{R}$ を用いて表せ。

(b) $T' = T/T_c$、$V' = V/V_c$、$P' = P/P_c$ で定義される無次元の変数を用いて状態方程式 (1) を書き換えよ。

問 6. 問 5 (b) で得た無次元化されたファン・デル・ワールスの状態方程式について、$(\partial T/\partial P)_H = 0$ を満たすときの P' と T' の関係式を $P' = f(T')$ とする。関数 $f(T')$ を求め、P'-T' 平面上に $P' = f(T')$ の概形を描け。また、問 4 で求めた T_m と P_m をそれぞれ無次元化した $T'_m = T_m/T_c$ と $P'_m = P_m/P_c$ は、$P' = f(T')$ のどのような極限における解に対応するか簡単に述べよ。

物 理（3）

問 1. 半径 a の導体円盤の中心軸を一様な上向きの磁場 (磁束密度 B) に平行に置き、導線と抵抗 (電気抵抗 R を図 1 のように接続した。円盤外縁と導線とは接触器 (接触抵抗は無視する) で滑らかに接触している。

(a) 導体円盤を角速度 ω で回転させると、導線に電流が流れた。電流の強さと向きを答えよ。ここで、電流により生成される磁場の影響は無視できるものとする。

(b) 円盤を一定の角速度で回転させ続けるためには外部から力を加える必要がある。この際に外力がなす仕事率を求めよ。また、この仕事率と抵抗で消費される電力とを比較せよ。

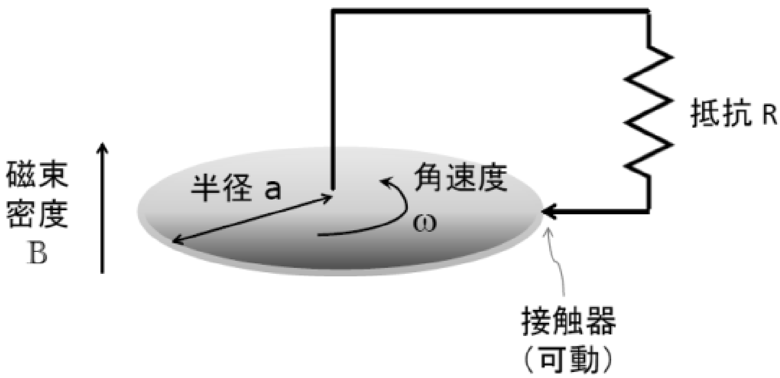

図 1

問 2. 一辺の長さ L の正方形の薄い金属板 2 枚を距離 $d(\ll L)$ だけ離して平行におき、コンデンサをつくった。いま、一辺 L の正方形で厚さが d の誘電体板を考える。この誘電体板の誘電率は左端からの距離 ξ に依存して、$\varepsilon(\xi) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \xi / L$ と与えられるとする。なお、真空の誘電率を ε_0 とし、$\varepsilon_1 > \varepsilon_0$、$\varepsilon_2 > 0$ とする。コンデンサの両極間に電圧 V の電源をつなぎ、コンデンサの右端から距離 X まで、この誘電体板を図 2 のように挿入した。

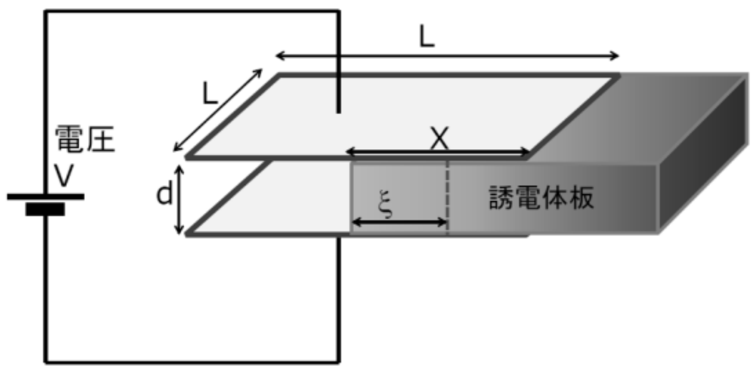

図 2

(a) この時、コンデンサと誘電体板がなす系に蓄えられた静電エネルギーを求めよ。

(b) 誘電体板内の $\xi = \xi'$ となる面と $\xi = \xi' + \Delta\xi'$ となる面に挟まれた薄い領域を考える (ここで、$0 < \xi' < \xi' + \Delta\xi' < X$ とする)。この領域に働く力の大きさと向きをマクスウェル応力テンソルを用いて求めよ。なお、マクスウェル応力テンソルはデカルト座標系 (x, y, z) を用いて、

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_xD_x - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} & E_xD_y & E_xD_z \\ E_yD_x & E_yD_y - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} & E_yD_z \\ E_zD_x & E_zD_y & E_zD_z - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、$\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$、$\boldsymbol{D} = (D_x, D_y, D_z)$ はそれぞれ電場ベクトルと電気変位 (電束密度) ベクトルである。

(c) 誘電体板全体に作用する力とその向きを求めよ。

(d) 次にこの状態から、誘電体板を左に微小な距離 $\Delta X (> 0)$ だけ押しこみ、誘電体左端とコンデンサ右端との距離が $X + \Delta X$ となるようにした。この移動の際に誘電体板に対してなされる仕事、ならびにコンデンサと誘電体板がなす系に蓄えられた静電エネルギーの変化量を、それぞれ ΔX の 1 次まで求めよ。これらの合計は正の量となっている。この理由をエネルギー保存の観点から述べよ。

物 理（4）

問 1. 1 次元ポテンシャル $V(x)$ 中を運動する、質量 m の粒子の波動関数 $\psi(x,t)$ は以下のシュレディンガー方程式を満たす。

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$$

ここで、$\hbar = h/2\pi$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである。

確率密度

$$\rho = \psi^*(x,t)\psi(x,t)$$

および確率流れ密度

$$j(x,t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\right)$$

が以下の連続の式を満たすことを示せ。ここで、ψ^* は ψ の複素共役を表す。

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0$$

問 2. 1 次元ポテンシャルとして次のような階段型ポテンシャル $V(x)$ を考える。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (0 \le x) \end{cases}$$

このポンテシャルの概形を図 1 に示した。

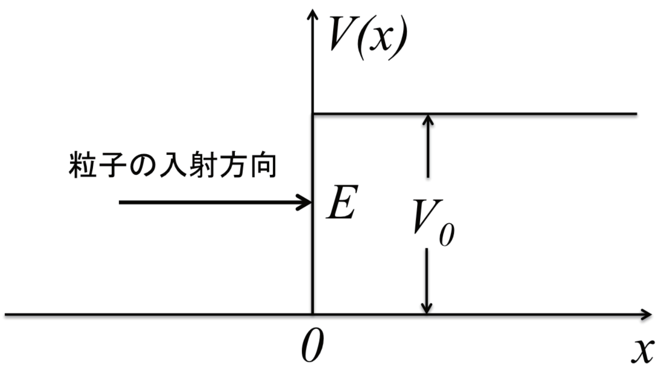

図 1: 原点に存在するポテンシャル障壁と粒子の入射方向。E は入射粒子のエネルギーで、$E < V_0$ である。

図 1 に示したように、エネルギー E を持った粒子が x の負の方向からポテンシャル障壁に入射する。以下では、$E < V_0$ とする。この時、粒子は以下の定常状態のシュレディンガー方程式を満たす。

$$E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} + V(x)\varphi(x)$$

この粒子のポテンシャル障壁による量子力学的散乱に関する以下の問に答えよ。

(a) 領域 $x < 0$ および $0 \leq x$ での上記のシュレディンガー方程式の一般解を求めよ。

(b) 入射粒子の振幅を A とする。反射波および透過波の振幅を求めよ。

(c) (b) の結果からポテンシャルの壁による散乱前後で確率が保存していることを示せ。

(d) 領域 $0 < x$ への粒子の侵入長及び反射波の入射波に対する位相のずれを、$V_0 \gg E$ として求めよ。ここで侵入長とは、減衰波の振幅が $1/e$(e はネイピア数) になる長さのことである。

(e) (d) で得られた反射波の位相のずれのうち、古典的な波の固定端での反射前後の位相のずれとの差はいくらか。また、この差の物理的意味を考察せよ。