

平成 27 年度

修士論文

再電離期の銀河探査に向けた次世代超大型望遠
鏡用広視野補償光学系の光学設計

Optical design for wide field adaptive optics of
next-generation extreme large telescope targeting
galaxies in the reionization epoch

東北大学大学院 理学研究科 天文学専攻

高田 大樹

要旨

TMT の建設が始まり、それを用いた宇宙の再電離期の観測的な解明に期待が高まっている。しかし、TMT を用いても再電離期の天体を観測することは依然として難しく、多数の天体を統計的に観測するには広視野かつ高感度な装置が要求される。補償光学を用いると星像を小さくすることができ、それに伴い検出範囲が小さくなり、背景光を抑えることができる。そのため、補償光学は高感度な観測を実現する。そこで TMT で 10 分角という広視野を可能とする地表層補償光学 (Ground Layer Adaptive Optics, GLAO) 装置を実現することを提案する。

本研究では、まず TMT で GLAO を用いた場合の $S/N=10$ 、10 時間積分、1 視野での検出期待数について計算を行った。比較としてすばる望遠鏡で GLAO を行った場合についても計算を行った。その結果、TMT で GLAO を用いると $z=10$ で 1 天体が見つかる計算となった。TMT で GLAO を用いることは再電離期探索の有意義であることを示した。

次に、TMT で GLAO を用いた場合の光学設計について検討した。TMT で広視野補償光学を実現するには、装置の巨大化を抑え、瞳収差の小さい光学系の設計が必要である。本研究では視野 10 分角に対して瞳収差 3.06% の新しい光学系を作成した。この新光学系の像面での評価、瞳収差が GLAO に与える影響についての評価を行い、新光学系が GLAO として十分な性能を持っていることを示した。

目次

第 1 章	広視野補償光学で開拓する再電離期の宇宙	4
1.1	次世代大型望遠鏡に期待されるサイエンス	4
1.1.1	再電離期の解明	4
1.1.2	遠方天体の探査方法	5
1.1.3	広視野観測の必要性	7
1.2	LAE の検出期待数	7
1.2.1	フィルター	8
1.2.2	赤方偏移と距離	8
1.2.3	光度関数	9
1.2.4	$z=8,9,10,12$ の光度関数の推定	10
1.2.5	限界フラックス	12
1.2.6	検出期待数	14
1.2.7	考察	16
第 2 章	地表層補償光学	19
2.1	補償光学とは	19
2.1.1	観測における大気の影響	19
2.1.2	補償光学系の構成	20
2.2	広視野補償光学	21
2.2.1	従来の補償光学の課題	21
2.2.2	広視野補償光学系の種類	22
2.3	次世代超大型望遠鏡に用いられる補償光学	25
2.3.1	次世代超大型望遠鏡と補償光学	25
2.3.2	NFIRAOS	28
2.3.3	TMT の第二期装置にむけて	28
第 3 章	光学設計における前提	30
3.1	Adaptive Secondary Mirror(ASM) の可能性について	30
3.1.1	Adaptive Secondary Mirror(ASM) とは	30
3.1.2	DM の共役位置	31
3.1.3	gray zone	32
3.1.4	TMT で ASM を用いた場合の考察	34
3.2	光学設計における課題点	36
3.2.1	光学設計における課題点	36
3.2.2	瞳収差	37
3.3	過去の光学系 I	39

3.3.1	仕様	39
3.3.2	設計結果	39
3.3.3	評価	40
3.3.4	光学系 I の設計についての考察	47
3.4	過去の光学系 II	47
3.4.1	仕様	47
3.4.2	設計結果	48
3.4.3	評価	48
3.4.4	光学系 II の設計についての考察	54
第 4 章	新しい光学系	55
4.1	光学設計にむけて	55
4.1.1	仕様	55
4.1.2	設計方法	56
4.2	設計結果	56
4.2.1	DM 前の光学系	56
4.2.2	DM 後の光学系のモデル	64
4.2.3	新光学系	65
4.2.4	新光学系の評価	68
4.3	新光学系についての考察	72
第 5 章	瞳収差の再評価	73
5.1	再評価方法	73
5.2	再評価結果	73
5.3	瞳収差量に関する考察	79
第 6 章	結論	80
付録 A	補償光学	82
A.1	補償光学の構成要素	82
A.1.1	波面センサ	82
A.1.2	可変形鏡	83
A.1.3	制御システム	85
A.1.4	ガイドスター	86
付録 B	光学	90
B.1	近軸理論	90
B.1.1	Snell の法則	90
B.1.2	近軸領域と面の表示	91
B.1.3	近軸領域	92
B.1.4	x-y 平面内の近軸追跡	96
B.1.5	主点、焦点	98
B.1.6	Helmholz-Lagrange の不変量	101
B.1.7	ペッツバルの法則	102

B.2	Seidel 収差係数	103
B.2.1	任意の光線の ν 面における近軸定数による座標位置	103
B.2.2	各面における屈折	107
B.2.3	物体変数 (R, ϕ, ω) による表現	111
B.2.4	Seidel 収差	116
B.3	ゼルニケ多項式	121
B.3.1	波面収差	121
B.3.2	Zernike 多項式	122
B.3.3	Zernike 多項式とザイデル収差の対応	123
付録 C 面形状		129
C.1	コーニック面 (標準面)	129
C.2	バイコーニック面	129
C.3	バイコーニック ゼルニケ面	130
C.4	拡張多項式	130
C.5	偶数次非球面	130

第 1 章 広視野補償光学で開拓する再電離期の宇宙

本章では、広視野補償光学に期待されるサイエンスとして、再電離期の解明というテーマについて説明を行う。現在建設が進んでいる 30m 望遠鏡 (Thirty Meter Telescope, TMT) では主鏡が 30m もあることからこれまでより暗い天体の検出が可能であると期待されている。しかし、再電離期中の天体の観測を行うには TMT だけでは不十分である。再電離期中にある多くの天体を探査し、統計的議論を行うには広視野かつ高感度な装置が要求される。そこで TMT に広視野補償光学装置として地表層補償光学 (Ground Layer Adaptive Optics, GLAO) システムを搭載した場合の再電離期中のライマン α 輝線銀河の検出期待数を計算し、議論を行う。

1.1 次世代大型望遠鏡に期待されるサイエンス

1.1.1 再電離期の解明

図 1.1 は宇宙史を表した図である [47]。図 1.1 は左がビッグバンで右が現在を表し、左から右へと時間は進んできた。137 億年前、ビッグバンにより誕生した宇宙は高温のプラズマに満ちていた。このとき、光子は高密度の自由電子とのトムソン散乱が効いており、光子は自由に進むことができない。その後、宇宙膨張に伴い急激に温度が下がり、宇宙のプラズマが再結合して宇宙は中性ガスで満たされた。その際、自由電子によるトムソン散乱により妨げられていた光の進行は、プラズマが中性ガスに変化し自由電子の低密度化したことに伴い進行できるようになった。この宇宙時間 38 万年頃のことを宇宙のはれ上がりと呼ぶ。その後、光を放つ天体が存在するまでの宇宙時間数億年までのこと暗黒時代と呼び、図 1.1 中の黒い部分が暗黒時代を表している。暗黒時代中、宇宙の晴れ上がり時にはほぼ一様であった密度揺らぎは重力不安定性を通じて密度揺らぎが大きくなり、高密度領域で初代天体が形成され、初代天体からの放射により周りの宇宙空間の中性水素ガスは再びイオン化される。この過程が行われている、宇宙空間の再電離が始まってから完了するまでの期間のことを再電離期 (**reionization epoch**) と呼ぶ。図 1.1 中の黒い部分がまだらになっている部分が再電離期を表わしており、紫色が見えている部分は再電離が完了している領域を表している。再電離期後、完全に宇宙の再電離が完了し、光輝く現在の宇宙となった。以上のような流れで宇宙の進化は進んできたと考えられている [24]。

これまでハッブル宇宙望遠鏡 (Hubble Space Telescope, HST) や 10m 級の地上設置望遠鏡の活躍により再電離期中の銀河の探査まで行われるようになってきた。しかし、再電離期についていまだに分かっていないことは主に二つある。

- いつ再電離過程が始まり、いつ完了したのか？
- 再電離過程はどのように進行していったか？

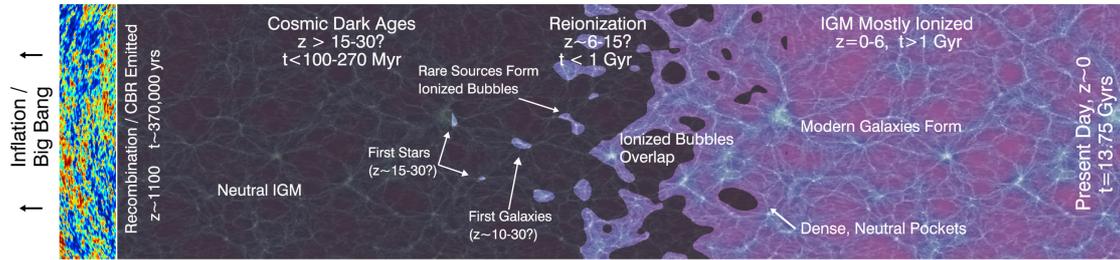


図 1.1: 宇宙史 [47]

最近の研究で、ウィルキンソン・マイクロ波異方性探査機 (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, WMAP) による宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB) の偏光観測から再電離期は $z = 11.0 \pm 1.4$ に始まったと考えられている [11]。また、スローンデジタルスカイサーベイ (Sloan Digital Sky Survey, SDSS) によって得られた高赤方偏移クエーサーのスペクトル上のガン-ピーターソンテスト [17] により再電離期は $z \sim 6$ には完了していたと考えられている [14]。 $z \sim 6$ での銀河間媒質 (InterGalactic Medium, IGM) 中の中性水素ガスの割合 x_{HI} は $x_{\text{HI}}^{z \sim 6.2} \sim 0.01 - 0.04$ と非常に小さいことが分かっている [14]。ただし、 x_{HI} は $x_{\text{HI}} = n_{\text{HI}}/n_{\text{H}}$ で定義され、 n_{HI} と n_{H} はそれぞれ宇宙の全ての中性水素と水素の数密度を表わしている。望遠鏡や観測装置の向上により再電離期の解明が行われてきたのはつい最近のことである。現在、再電離期中の観測天体のサンプル数は少なく、信頼性の高い議論を行うことが難しい。そのため、30m 望遠鏡 (Thirty Meter Telescope, TMT) や ULTIMATE-SUBARU などの今後製作予定の次世代超大型望遠鏡や補償光学装置のメインサイエンスとして再電離期の疑問の解決が期待されている。

1.1.2 遠方天体の探査方法

遠方銀河の探査方法は主に以下の 2 種類がある [55]。

- ライマン α 輝線法

ライマン α ($\text{Ly}\alpha$) とは、若い星からの光によって電離された水素ガスが再結合する際に放射される静止波長 121.6 nm の輝線のことであり、赤方偏移の影響により $z = 3 \sim 7$ の範囲 ($121.6 \text{ nm} \times (1 + z)$) では可視光で観測できる。ライマン α 輝線を持つ銀河のことをライマン α 輝線銀河 (Lyman α emitter, LAE) と呼ぶ。ライマン α 輝線法では、ライマン α 輝線のみを効率良く検出するために狭帯域フィルター (Narrow Band Filter, NBF) という帯域の狭いフィルターを用いて観測を行う。ライマン α 輝線法を用いた観測例は図 1.2 の b) である。図 1.2 から分かるように i) では暗いが、NBF ではライマン α 輝線を検出できている。ただし、地上からライマン α 輝線を観測する場合、可視の長波長側では地球大気原子・分子の輝線が背景光として卓越するため注意が必要である [25]。

- ライマンブレーク法

遠方天体からの光は、光の経路上にある IGM 中の中性水素ガスによりライマン α 遷移に位置する波長より短い波長で吸収を受ける。この経路上の天体は対象天体よりも小さい赤方偏

移であるため、ライマン α 遷移よりも短い波長の光は経路上の天体により吸収される。そのため、ライマン α 線の前後で大きな段差（ブレイク）を持つ。このブレイクのことをライマンブレイクとよび、ライマンブレイク法により発見された銀河のことをライマンブレイク銀河 (**Lyman break galaxy, LBG**) と呼ぶ。ライマンブレイク法を用いた観測例は図 1.2 の a) である。図 1.2 から分かるように i' では明るい、R では暗くなっている。このような明るさの差を検出することで遠方天体を検出する。

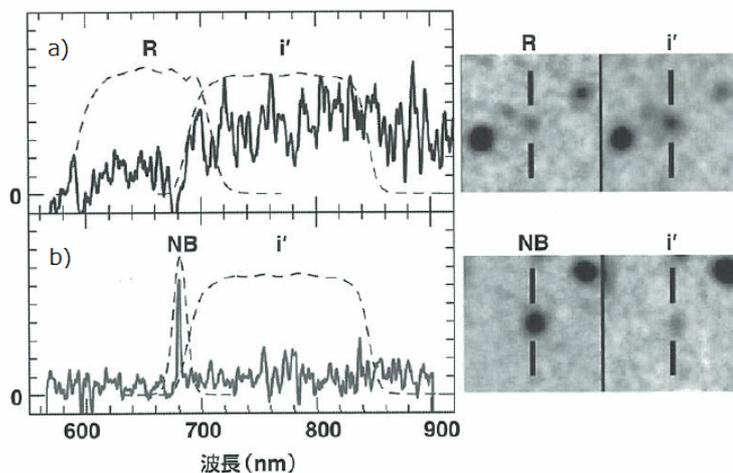


図 1.2: a) ライマンブレイク法と b) ライマン輝線法 [24]

再電離期の銀河探索として遠方の LAE を探索する多くの観測が行われてきた。LAE を観測する理由は、ライマン α は IGM 中の中性水素ガスに吸収、散乱されるからである。そのため、LAE よりも手前に中性水素ガスがあればライマン α の光は弱まり、観測する LAE の数が減る。図 1.3 はライマン α 輝線の観測の様子についてまとめた模式図である。図 1.3 中の再電離期後の LAE（橙色）から出たライマン α 輝線は直接届く。しかし、再電離期中の LAE からのライマン α 輝線のプロファイルは IGM 中の中性水素による吸収の影響を受けて光が減衰され、見えないもしくは減衰されたライマン α 輝線を検出する。この減衰量から、対象の LAE が存在する時期の IGM の中性度を調べることができる。そして、このような観測から再電離期の進化過程について議論を行うことができる [23]。

そのため、LAE の $\text{Ly}\alpha$ の光度関数 (Luminosity Function, LF) に注目し、 $\text{Ly}\alpha$ の LF の再電離期前後における変化から再電離過程の進化をたどる観測が行われてきた。すると、 $z = 3.1 \sim 5.7$ にかけて $\text{Ly}\alpha$ LF は変化せず、 $z = 5.7 \sim 6.6$ にかけて急激に減少したことが分かった [42][22][41][50][52]。さらに、Konno et al. 2014 [26] で $z = 7$ での LF を計算し、 $z = 7$ 以降で加速的に再電離過程の進化が進んでいることを確かめた。

現在、最も遠くで分光的に確認された LAE は $z = 8.7$ [60] に存在するが、 $z = 7$ 以上で分光観測された LAE はまだ少ない [15][38][53]。今後さらに高赤方偏移の $\text{Ly}\alpha$ LF を描いていくためには、より大口径の望遠鏡が必要となってくる。そのため、TMT で高赤方偏移 LAE の探索が重要になる。

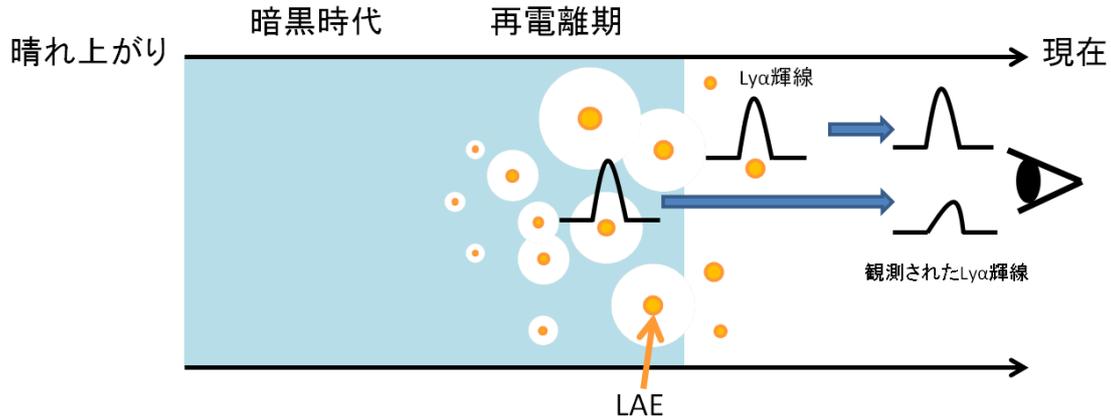


図 1.3: 再電離期中と再電離期後の LAE (橙色) から観測された $\text{Ly}\alpha$ 輝線プロファイルの違い。LAE 周りに電離領域 (白色) があり、それらが重なり合い成長していくことで再電離過程が終わる。再電離の LAE の $\text{Ly}\alpha$ 輝線は IGM 中の中性水素の影響を受け、減衰した $\text{Ly}\alpha$ を観測する。

1.1.3 広視野観測の必要性

再電離期の銀河探査では、統計的議論を行うために広視野での観測が必要となる。 $z = 7$ を越えるような天体は非常に暗く、一視野で観測される天体数は限られてくる。そのため、高赤方偏移の天体の性質を統計的に議論を行うには広視野を確保し、多くの天体を観測する必要がある。

さらに、宇宙再電離期の過程は図 1.4 のように徐々に進行していったと考えられている [57]。最初は 1) 中性水素ガスで満ちた宇宙の中に初期の銀河が誕生する。その後、2) 銀河から放射された電離光子がイオン化バブルを形成する。最後に、3) 星形成密度の増加に伴い進行したバブル同士が重なり合うことで電離領域が拡大し、最終的に宇宙の再電離が完了する。このような進化過程を辿った場合、視野方向によって再電離過程に差があることになる。そのため、再電離期の観測には広視野での観測が必要となってくる。このような、宇宙の大気構造によって本来的に内在する観測視野方向による天体の統計的な性質の違いのことを cosmic variance と呼ぶ [23]。cosmic variance は LF を決定する際の大きな不定性の原因になりうる。

以上のことから、次世代超大型望遠鏡で広視野補償光学を行うことが重要と言える。

1.2 LAE の検出期待数

本節では、TMT に 10 分角という広視野を実現する補償光学装置である地表層補償光学 (Ground Layer Adaptive Optics, GLAO) を用いた場合の LAE の検出期待数の計算を行う。比較としてすばる望遠鏡で GLAO を用いた場合と用いない場合、さらに TMT で AO を用いない場合の LAE の検出期待数も載せる。

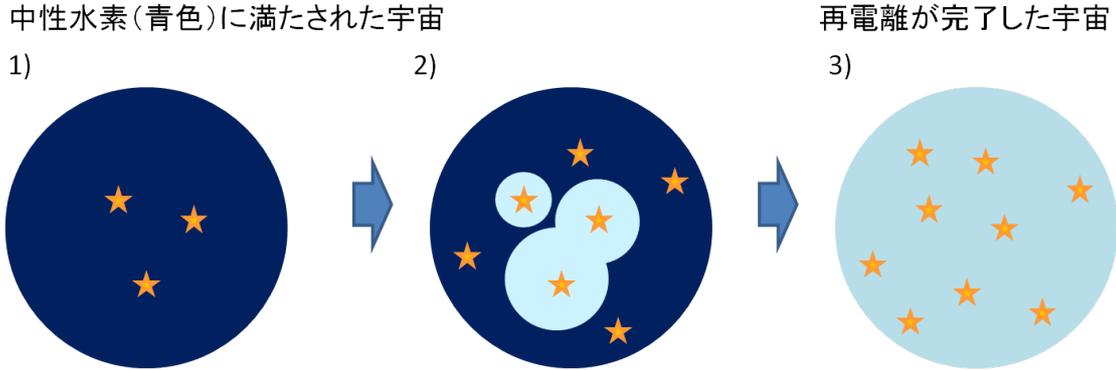


図 1.4: 再電離期の進化過程

1.2.1 フィルター

今回 LAE の検出期待数の計算に用いる狭帯域フィルターは NB816, NB921, NB101, NB111, NB125, NB134, NB158 の 7 つである。NB816, NB921, NB101 はすばる望遠鏡で用いられた実在のフィルターである [42][43][26]。ただし、NB111, NB125 は $z = 8, 9$ の LAE を検出するために用いる私が仮定したフィルターであり、NB134, NB158 のフィルターは ULTIMATE-SUBARU の検討報告書の中で仮定されていたフィルター [69] である。それぞれの狭帯域フィルターの中心波長とバンド幅、中心波長での $\text{Ly}\alpha$ の赤方偏移 $z_{\text{Ly}\alpha}$ とバンド幅内の $z_{\text{Ly}\alpha}$ の最大値 $z_{\text{Ly}\alpha\text{max}}$ と最小値 $z_{\text{Ly}\alpha\text{min}}$ 、さらにそれぞれの狭帯域フィルターのスカイ N_{sky} は表 1.2 のようになる。ただし、スカイの計算は Gemini Observatory の観測結果から計算を行った [37]。

表 1.1: フィルターの中心波長とバンド幅

	NB816	NB921	NB101	NB111	NB125	NB134	NB158
中心波長 [nm]	815	919.6	1009.5	1110	1250	1340	1550
バンド幅 [nm]	12	13.2	9	10	10	19	22
$z_{\text{Ly}\alpha}$	5.7	6.6	7.3	8.1	9.3	10	11.8
$z_{\text{Ly}\alpha\text{max}}$	5.65	6.51	7.26	8.16	9.32	9.94	11.66
$z_{\text{Ly}\alpha\text{min}}$	5.75	6.62	7.34	8.09	9.23	10.10	11.84
$N_{\text{sky}} [10^{-3}\text{photon/s/arcsec}^2/\text{cm}^2]$	0.20	1.61	2.66	2.65	2.66	2.26	70.66

1.2.2 赤方偏移と距離

光度距離 (天体の見かけの明るさから定義される距離) と角径距離 (天体の見かけの大きさから定義される距離) は式 (1.2.2)、式 (1.2.3) で表わされる [44]。また、赤方偏移に対する光度距離と角径距離の関係を図示すると図 1.5 のようになる。ただし、宇宙論パラメータはそれぞれ

$$\begin{cases} \Omega_{M0} &= 0.3 \\ \Omega_{\Lambda 0} &= 0.7 \\ \Omega_{K0} &= 0 \\ h &= 0.7 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

で計算を行った。また、それぞれのフィルタの中心波長における Ly α 輝線赤方偏移での光度距離と角径距離の関係をまとめると表 1.2 のような結果になる。

$$D_A = \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0} \int_{(1+z)^{-1}}^1 \frac{da}{\sqrt{a\Omega_{M0} + a^4\Omega_{\Lambda 0}}} \quad (1.2.2)$$

$$D_L = (1+z)^2 D_A \quad (1.2.3)$$

表 1.2: それぞれのフィルタの中心波長での Ly α 輝線赤方偏移での光度距離と角径距離

	NB816	NB921	NB101	NB111	NB125	NB134	NB158
光度距離 [10 ⁴ Mpc]	5.47	6.46	7.25	8.21	9.60	10.40	12.58
角径距離 [10 ³ Mpc]	1.22	1.12	1.05	0.99	0.90	0.86	0.77

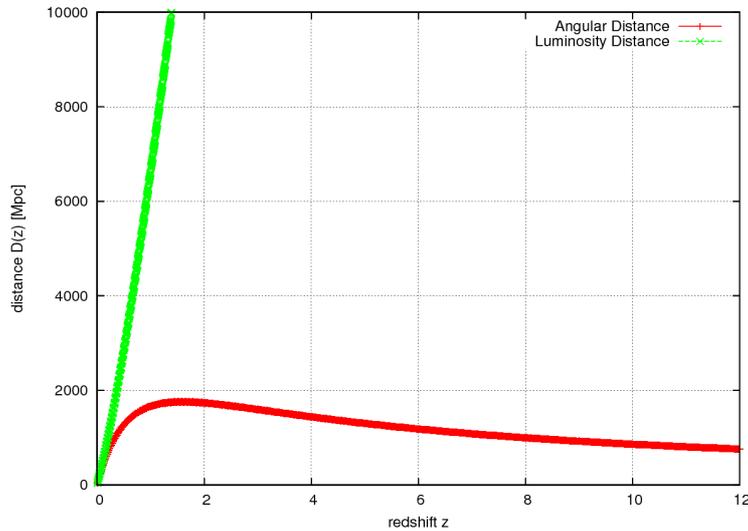


図 1.5: 光度距離と角径距離

1.2.3 光度関数

NB816, NB921, NB101 の狭帯域フィルターを用いた観測結果から求められた $z = 5.7, 6.6, 7.3$ の光度関数をシェヒター関数でフィットする [42][43][26]。

シェヒター関数は、

$$\phi(L)dL = \frac{\phi^*}{L^*} \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) dL \quad (1.2.4)$$

と定義され、それぞれの赤方偏移での最適なシェヒターパラメータは表 1.3 のようになる。

表 1.3: シェヒターパラメータ [26]

赤方偏移	α	$L_{Ly\alpha}^*$ [ergs $^{-1}$]	ϕ^* [Mpc $^{-3}$]
5.7	-1.5	6.8×10^{42}	7.7×10^{-4}
6.6	-1.5	4.4×10^{42}	8.5×10^{-4}
7.3	-1.5	2.7×10^{42}	3.7×10^{-4}

表 1.3 の値を用いてそれぞれの赤方偏移での光度関数を書くと図 1.6 のような結果になる。

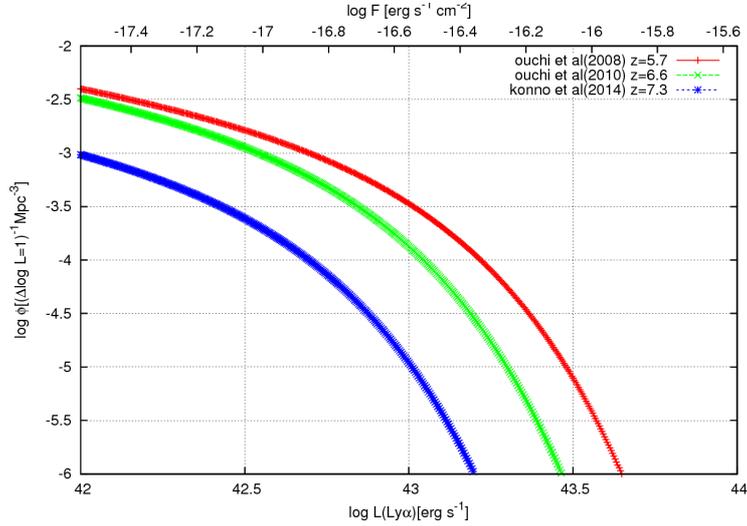


図 1.6: シェヒター関数

1.2.4 $z=8,9,10,12$ の光度関数の推定

1.1 節でも述べたように現在 $z=8$ 以上の LAE の検出は限られており、光度関数を計算した論文はまだ出ていない。そのため、 $z=8$ 以上の光度関数は推定する必要がある。推定方法として、光度密度進化から $z=8$ 以上の LF を見積もった。ただし、光度密度は光度関数を光度について積分したもので、単位体積あたりの銀河光度を意味し、式 (1.2.5) で定義される [55]。まず $z=5,6,7$ での光度密度を求めると図 1.7 のような結果となる。図 1.7 には式 (1.2.5) から計算した $Ly\alpha$ の光度密度だけでなく、UV continuum の光度密度も同時にプロットした [6][12]。

$$\rho^{Ly\alpha} = \int_{L_{lim}}^{\infty} L\phi(L)dL = \phi^* L^* \Gamma(\alpha + 2) \quad (1.2.5)$$

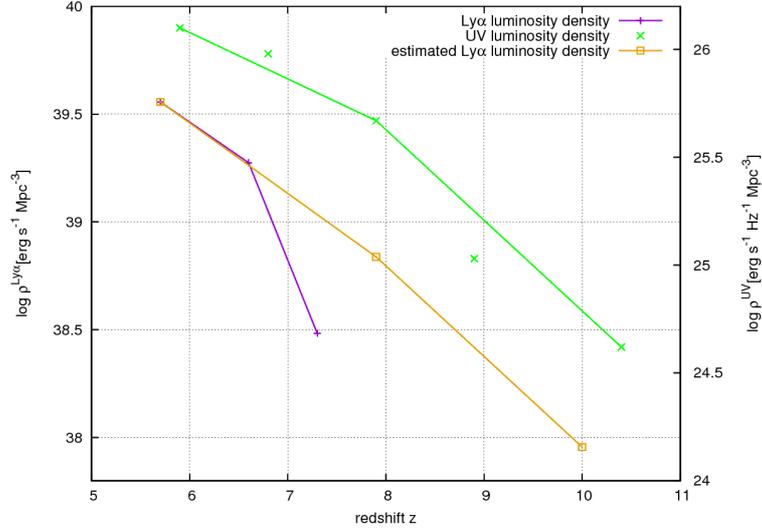


図 1.7: 光度密度進化

図 1.7 の紫線のような $z = 6$ から $z = 7$ へ $\text{Ly}\alpha$ の光度密度進化の傾きがそのまま高赤方偏移まで直線的に進むとして $z = 8$ 以上の光度密度を推定する。そして、式 (1.2.5) のように特徴的光度と特徴的密度の積が光度密度になることから、密度一定で光度のみが進化する場合（光度進化）と光度一定で密度のみが進化する場合（密度進化）した場合のシェヒターパラメータを計算すると表 1.4 のようになる。この光度進化と密度進化は最も極端な進化の例である。表 1.4 をもとに $z = 8$ 以上のシェヒター関数を見積もると図 1.8 のようになる。

表 1.4: 光度密度進化 ($\text{Ly}\alpha$ 光度密度進化の傾きで進化した場合)

redshift z	光度密度 $\rho^{\text{Ly}\alpha}$	光度進化 $\log\phi^*$ L^*		密度進化 ϕ^* L^*	
8.1	37.55	-3.43	41.49	-4.37	42.43
9.3	36.25	-3.43	40.19	-5.67	42.43
10.0	35.43	-3.43	39.28	-6.48	42.43
11.8	33.17	-3.43	37.12	-8.74	42.43

表 1.4 の結果から光度関数を図示すると図 1.8 のようになる。

さらに、図 1.7 の緑線のような UV continuum の光度密度進化の傾きを $\text{Ly}\alpha$ の光度密度進化に適用した場合の光度密度進化を計算する。この場合、konno et al 2014[26] の $z = 7$ での光度密度の値は無視する。UV 光度密度進化の傾きを仮定したときの進化は図 1.7 の橙色線のようなになる。そして、上と同様に光度進化した場合と密度進化した場合のシェヒターパラメータを計算すると表 1.5 のようになる。さらに、表 1.5 の結果をもとに $z = 8$ 以上の光度関数を見積もると図 1.9 のようになる。

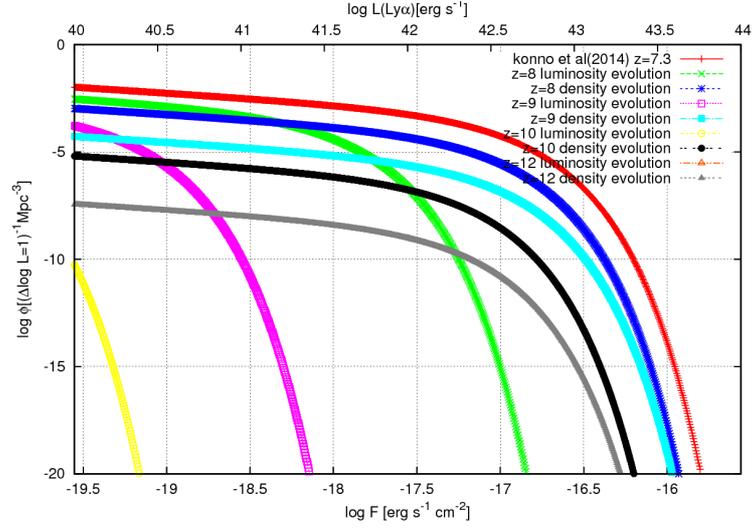
図 1.8: $z=8$ 以上の光度関数の推定 ($\text{Ly}\alpha$ 光度密度進化の傾きで進化した場合)

表 1.5: 光度密度進化 (UV 光度密度進化の傾きで進化した場合)

redshift z	光度密度 $\rho^{\text{Ly}\alpha}$	光度進化		密度進化	
		$\log\phi^*$	L^*	ϕ^*	L^*
7.3	39.12	-3.43	43.08	-2.79	42.43
8.1	38.75	-3.43	42.70	-3.16	42.43
9.3	38.25	-3.43	42.20	-3.67	42.43
10.0	37.96	-3.43	41.90	-3.96	42.43
11.8	37.2	-3.43	41.15	-4.72	42.43

1.2.5 限界フラックス

ここで、TMT とすばる望遠鏡で GLAO 有りと無しの場合の限界フラックスを計算する。まず、点源に対する S/N 比は式 (1.2.6) で与えられる。

$$S/N = \frac{t\sigma\eta AN_{obj}}{\sqrt{t\sigma\eta AN_{obj} + tns\eta AN_{sky} + tnN_{dark} + n^2N_{readout}^2}} \quad (1.2.6)$$

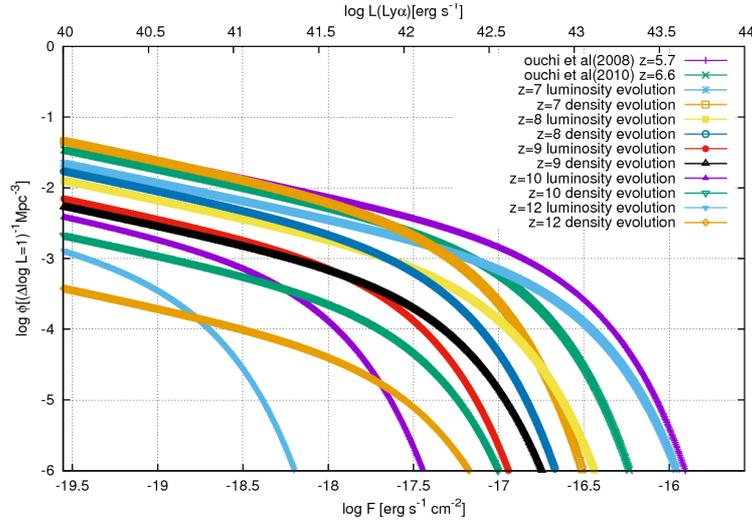


図 1.9: $z=8$ 以上の光度関数の推定 (UV 光度密度進化の傾きで進化した場合)

N_{obj} [photon/s/cm ²]	: 天体からの光子数
N_{sky} [photon/s/arcsec ² /cm ²]	: 背景光
$N_{readout} = 10$ [e ⁻ /pix]	: 読み出しノイズ
$N_{dark} = 0.01$ [e ⁻ /s/pix]	: ダーク
$A = \begin{cases} \pi(420)^2 \text{ [cm}^2\text{]} & \text{すばる望遠鏡} \\ \pi(1500)^2 \text{ [cm}^2\text{]} & \text{TMT} \end{cases}$: 集光面積
$t = 36000$ [s]	: 積分時間
$n = 16$ [pix]	: 天体が広がっている画素数
$s = 0.117^2$ [arcsec ²]	: 画素の面積
σ	: Ensquared Energy
$\eta = 0.6$	効率

AO を用いた場合の EE の σ は ULTIMATE-SUBARU の検討報告書 [69] で示されている図 1.10 のシミュレーション結果の $probability = 0.5$ で EE を測る際の一边の長さ a は $0.48''$ (赤) の場合を用いる。EE の推定では点源として計算を行っている。ただし、図 1.10 では R,J,H,K バンドでの Ensquared Energy しか求められていないため、それぞれのバンドの重心波長でシミュレーション結果の Ensquared Energy の値を持つとしてデータ間は直線的に変化すると仮定して、それぞれの狭帯域フィルターの中心波長での Ensquared Energy の値を内挿して求めた。

また、効率はすばる望遠鏡と TMT のどちらでも同じであると仮定した。しかし、実際にはすばる望遠鏡で GLAO を行う場合には可変副鏡を用いるが、TMT ではナスミス焦点に AO 装置を持ってくる。そのため、TMT の方が光学面が増え効率は下がることに注意が必要である。

式 (1.2.6) から、 $S/N = 10$ の場合の検出限界を求める。まず、 N_{obj} をすばる望遠鏡と TMT の場合で計算すると表 1.6 のような結果になる。

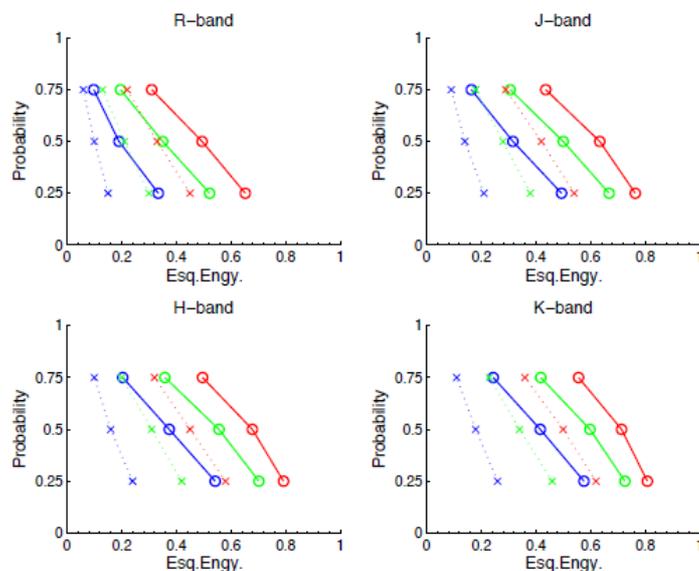


図 1.10: AO無しと GLAO での補正をした場合の Ensquared Energy のシミュレーション結果 [69]。点源を仮定している。それぞれの色は EE の一辺の長さを表わしており、青が $0.24''$ 、緑が $0.36''$ 、赤が $0.48''$ である。さらに点線は補正前、実線は補正後の結果である。

表 1.6: すばる望遠鏡と TMT で $S/N = 10$ となる N_{obj} [10^{-6} photon/s/cm 2]

		NB816	NB921	NB101	NB111	NB125	NB134	NB158
すばる	NOAO	1.8	4.8	5.8	5.5	5.2	4.8	26.5
	GLAO	1.2	3.2	3.9	3.8	3.5	3.2	17.1
TMT	NOAO	4.9	13.0	15.9	15.1	14.0	12.9	72.4
	GLAO	3.2	8.6	10.7	10.3	9.7	8.8	46.8

表 1.6 の結果から、 $F = N_{obj} h\nu$ を用いて限界フラックスを計算すると表 1.7 のようになる。

1.2.6 検出期待数

限界フラックスと各赤方偏移での光度関数が計算できたため、これらの結果から LAE の検出期待数を計算する。表 1.7 の限界フラックスの結果と光度関数の結果を合わせ、限界フラックス以上の光度関数を積分すると単位 Mpc 3 あたりの LAE の検出期待数を計算することができる。Ly α の光度進化の傾きから見積もった $z=8$ 以上の光度関数に対して積分を行った結果をまとめると表 1.8 のようになる。対して、UV の光度進化の傾きから見積もった $z=8$ 以上の光度関数に対して積分を行った結果をまとめると表 1.9 のようになる。

単位体積あたりの検出期待数は求まったため、次にフィルターのバンド幅に対応する赤方偏移の範囲の共同体積を計算する。共同体積の概念図は図 1.11 であり、共同体積 V_c は式 (1.2.7) で表わされる。

表 1.7: 限界フラックス [$\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$]

redshift z	すばる望遠鏡		TMT	
	NOAO	GLAO	NOAO	GLAO
5.7	-17.35	-17.53	-17.93	-18.11
6.6	-16.99	-17.17	-17.55	-17.73
7.3	-16.94	-17.11	-17.51	-17.68
8.1	-17.00	-17.17	-17.57	-17.73
9.3	-17.09	-17.25	-17.65	-17.81
10.0	-17.15	-17.32	-17.72	-17.89
11.8	-16.48	-16.67	-17.04	-17.23

表 1.8: 単位立方 Mpc あたりの LAE 数 ($\text{Ly}\alpha$ 光度進化の計算結果)

redshift z	すばる望遠鏡		TMT	
	NOAO	GLAO	NOAO	GLAO
5.7	1.15×10^{-3}	1.75×10^{-3}	3.79×10^{-3}	5.13×10^{-3}
6.6	1.05×10^{-4}	2.44×10^{-4}	9.07×10^{-4}	1.44×10^{-3}
7.3	3.95×10^{-6}	1.52×10^{-5}	1.19×10^{-4}	2.23×10^{-4}
8.1 (光度進化)	1.68×10^{-17}	9.63×10^{-14}	1.46×10^{-8}	2.32×10^{-7}
8.1 (密度進化)	1.21×10^{-6}	3.02×10^{-7}	1.14×10^{-5}	2.18×10^{-5}
9.3 (光度進化)	0	0	0	0
9.3 (密度進化)	1.06×10^{-7}	3.13×10^{-8}	8.05×10^{-7}	1.41×10^{-6}
10.0 (光度進化)	0	0	0	0
10.0 (密度進化)	6.25×10^{-9}	1.26×10^{-9}	6.89×10^{-8}	1.37×10^{-7}
11.8 (光度進化)	0	0	0	0
11.8 (密度進化)	1.46×10^{-15}	2.86×10^{-18}	1.92×10^{-11}	1.55×10^{-11}

$$dV_c = D_H \frac{(1+z)^2 D_A^2}{E(z)} d\Omega dz \quad (1.2.7)$$

ただし、ハッブル距離 D_H と $E(z)$ は

$$D_H \equiv \frac{c}{H_0} = 3000h^{-1} \text{Mpc} = 9.26 \times 10^{25} h^{-1} \text{m} \quad (1.2.8)$$

$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (1.2.9)$$

と定義される。

共動体積を視野 10 分角の立体角 $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ 、フィルター幅に対応する赤方偏移幅 $z=[z'_{\text{Ly}\alpha}, z''_{\text{Ly}\alpha}]$ として式 (1.2.7) を変形すると、共動体積は式 (1.2.10) で表わされる。

$$V_c = \int_{z'_{\text{Ly}\alpha}}^{z''_{\text{Ly}\alpha}} D_H \frac{(1+z)^2 D_A^2}{E(z)} 2\pi(1 - \cos \alpha) dz \quad (1.2.10)$$

表 1.9: 単位立方 Mpc あたりの LAE 数 (UV 光度進化の計算結果)

redshift z	すばる望遠鏡		TMT	
	NOAO	GLAO	NOAO	GLAO
5.7	1.15×10^{-3}	1.75×10^{-3}	3.79×10^{-3}	5.13×10^{-3}
6.6	1.05×10^{-4}	2.44×10^{-4}	9.07×10^{-4}	1.44×10^{-3}
7.3 (光度進化)	1.62×10^{-4}	2.88×10^{-4}	7.97×10^{-4}	1.14×10^{-3}
7.3 (密度進化)	1.72×10^{-5}	6.64×10^{-5}	5.19×10^{-4}	9.73×10^{-4}
8.1 (光度進化)	2.16×10^{-5}	5.43×10^{-5}	2.65×10^{-4}	4.32×10^{-4}
8.1 (密度進化)	4.87×10^{-6}	1.96×10^{-5}	1.85×10^{-4}	3.52×10^{-4}
9.3 (光度進化)	4.66×10^{-7}	2.85×10^{-6}	4.91×10^{-5}	1.03×10^{-4}
9.3 (密度進化)	3.15×10^{-6}	1.07×10^{-5}	8.11×10^{-5}	1.42×10^{-4}
10.0 (光度進化)	8.32×10^{-11}	6.23×10^{-9}	2.13×10^{-6}	9.26×10^{-6}
10.0 (密度進化)	4.20×10^{-7}	2.08×10^{-6}	2.30×10^{-5}	4.58×10^{-5}
11.8 (光度進化)	0	0	0	0
11.8 (密度進化)	3.05×10^{-14}	1.56×10^{-11}	2.05×10^{-8}	1.64×10^{-7}

表 1.10: 共動体積 [10^4Mpc^3]

	NB816	NB921	NB101	NB111	NB125	NB134	NB158
共動体積	1.97	1.94	1.23	1.26	1.12	1.98	1.99

式 (1.2.10) を用いて、各 NBF での共動体積をまとめると表 1.10 のようになる。

以上の結果より $\text{Ly}\alpha$ と UV の光度密度進化から計算した単位 Mpc^3 あたりの LAE 数に共動体積をかけて各 NBF での検出期待数を求めると、表 1.11 と表 1.12 のようになる。

1.2.7 考察

表 1.11 と表 1.12 の結果をまとめて、検出期待数の最大値と最小値だけをまとめると表 1.13 のようになる。

表 1.13 の結果から、すばる望遠鏡と TMT の視野 10 分角、10 時間積分、10 σ 検出限界での 1 視野あたりの LAE の検出期待数は口径比より非常に多くなる。さらに GLAO を用いることで $z = 10$ で 1 視野で 1 天体が検出できるほどの性能になる。さらに、高赤方偏移になればなるほど GLAO としての性能を発揮しており、 $z = 10$ ではすばる望遠鏡に比べて TMT の検出期待数は 10 倍以上上昇する。表 1.13 の結果から、TMT で GLAO を用いることは再電離期の解明にむけて有意義であると言える。

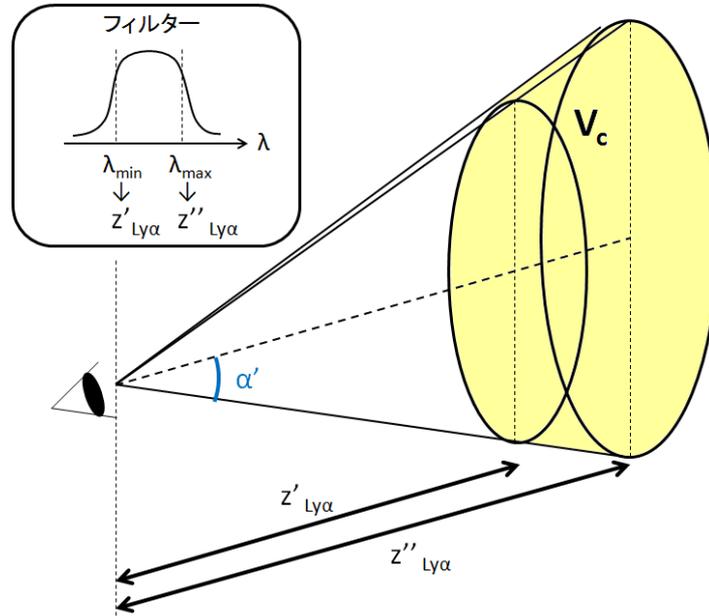


図 1.11: 共動体積

表 1.11: 検出期待数 (Ly α 光度進化の計算結果)

z	すばる望遠鏡		TMT	
	NOAO	GLAO	NOAO	GLAO
5.7	23	34	74	100
6.6	2.0	4.7	17	28
7.3	0.048	0.19	1.5	2.7
8.1 (光度進化)	0	0	0	0
8.1 (密度進化)	0	0	0.14	0.27
9.3 (光度進化)	0	0	0	0
9.3 (密度進化)	0	0	0.009	0.016
10.0 (光度進化)	0	0	0	0
10.0 (密度進化)	0	0	0	0
11.8 (光度進化)	0	0	0	0
11.8 (密度進化)	0	0	0	0

表 1.12: 検出期待数 (UV 光度進化の計算結果)

z	すばる望遠鏡		TMT	
	NOAO	GLAO	NOAO	GLAO
5.7	23	34	74	100
6.6	2.0	4.7	17	28
7.3 (光度進化)	2.0	3.5	9.8	14
7.3 (密度進化)	0.21	0.81	6.4	12
8.1 (光度進化)	0.27	0.68	3.3	5.4
8.1 (密度進化)	0.061	0.25	2.3	4.4
9.3 (光度進化)	0.005	0.032	0.55	1.2
9.3 (密度進化)	0.035	0.12	0.91	1.6
10.0 (光度進化)	0	0	0.042	0.18
10.0 (密度進化)	0.0083	0.041	0.46	0.91
11.8 (光度進化)	0	0	0	0
11.8 (密度進化)	0	0	0	0

表 1.13: 視野 10 分角、10 時間積分、10 σ 検出限界での 1 視野あたりの LAE の検出期待数

z	すばる望遠鏡		TMT	
	NOAO	GLAO	NOAO	GLAO
5.7	23	34	74	100
6.6	2.0	4.7	17	28
7.3	0.048 ~ 2.0	0 ~ 3.5	1.5 ~ 9.8	2.7 ~ 14
8.1	0 ~ 0.27	0 ~ 0.68	0 ~ 3.3	0 ~ 5.4
9.3	0 ~ 0.035	0 ~ 0.12	0 ~ 0.91	0 ~ 1.6
10.0	0 ~ 0.0083	0 ~ 0.041	0 ~ 0.46	0 ~ 0.91
11.8	0	0	0	0

第 2 章 地表層補償光学

本章では補償光学に関する基本説明を行う。従来の補償光学システムである単層共役補償光学 (Single Conjugate Adaptive Optics, SCAO) では視野が狭く、補償できる領域が制限されていた。それを克服するため、多数のレーザーガイドスターを打ち上げることで補償視野を広げる広視野補償光学系という次世代補償光学装置が発達した。その中でも特に広視野での補償を可能とする地表層補償光学 (Ground Layer Adaptive Optics, GLAO) の可能性について述べる。

2.1 補償光学とは

2.1.1 観測における大気の影響

天体からの光は無窮遠にある点光源として考えることができ、地球に光が届く際には平面波として届く。そのため宇宙望遠鏡で観測を行う場合は回折限界のきれいな像を得ることができる。しかし、地上望遠鏡で観測を行う場合、大気中の屈折率が一律でない影響により波面が乱されてしまい、ぼやけた像になってしまう。この大気による影響が地上観測装置の性能を制限する原因となる。回折限界 θ と望遠鏡の開口径 D の関係を書くと図 2.1 のようになる。図 2.1 から分かるように開口径 30m の TMT の回折限界は開口径 8.2m のすばる望遠鏡より約 3 倍も小さくなる。ただし、マウナケア山頂でのシーイングは典型的に 0.5" 程である [64] ため開口径約 20cm より大きい望遠鏡を作っても分解能という点では本来の性を発揮できないことが分かる。

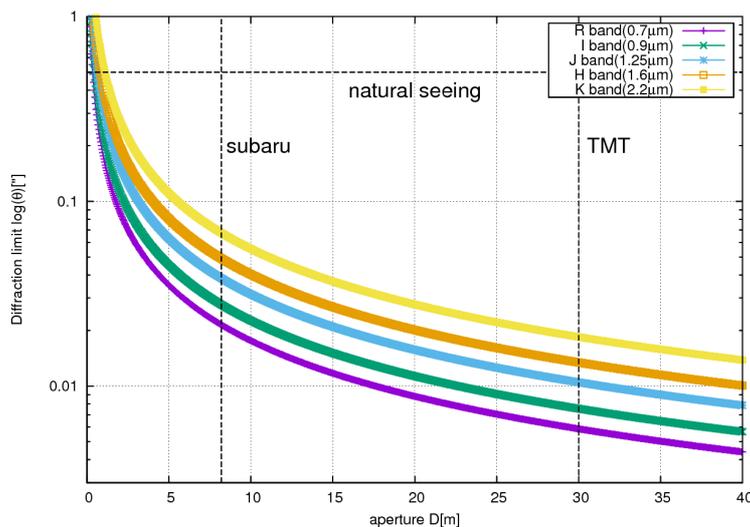


図 2.1: 回折限界

そこで、大気により乱れた波面を元の平面波に戻し、地上観測でも大気による光の位相揺らぎの影響を無くすように開発された技術が補償光学 (Adaptive Optics, AO) である。

2.1.2 補償光学系の構成

補償光学の基本構成は図 2.2 のようになっている。

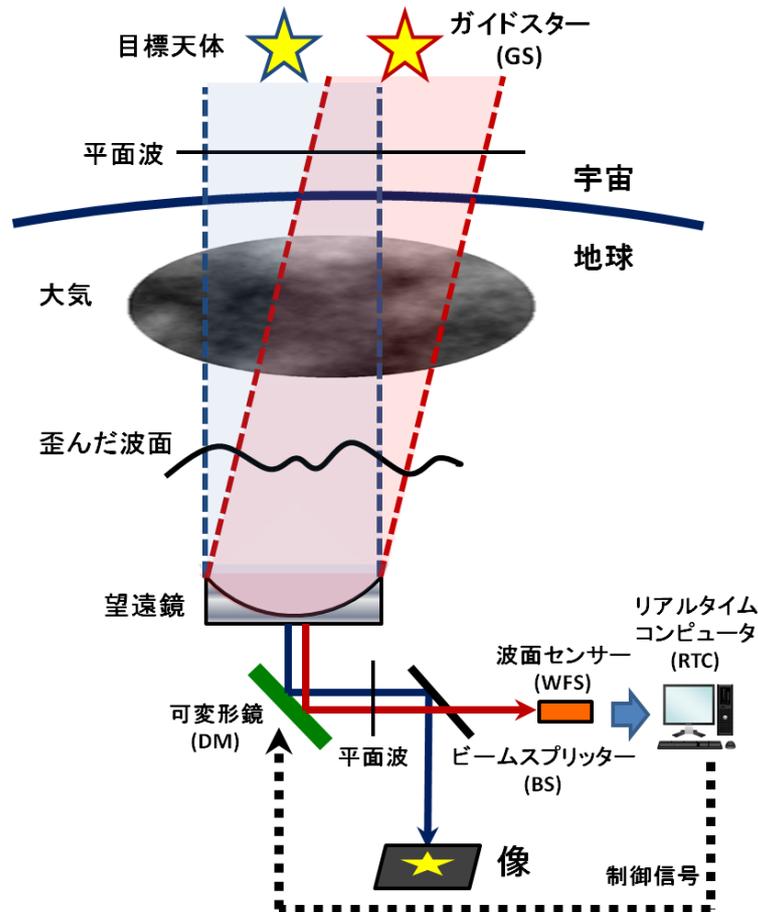


図 2.2: AO の基本構成

補償光学を構成する主な 3 つの要素は、

- 波面の歪みを測定する波面センサ (WaveFront Sensor, WFS)
- 波面センサの情報から波面の歪みを計算するリアルタイムコンピュータ (Real Time Computer, RTC)
- 波面の歪みを打ち消す可変形鏡 (Deformable Mirror, DM)

である。

まず波面センサ (WaveFront Sensor, WFS) で波面の歪み量を測定する。波面センサには、シャック

ハルトマン型波面センサのようなスポットの移動量から波面の傾きを計測するようなものや、ピラミッド型波面センサのような光量の変化から波面の傾きを計測するものなどがある。次に、波面センサで得た情報を波面の歪み量の情報への変換を行うのがリアルタイムコンピュータ (Real Time Computer, RTC) である。RTC からの情報は可変形鏡という鏡面形状が変化する鏡に与えられ、歪んだ波面が可変形鏡 (Deformable Mirror, DM) で反射することで常に平面波となるように制御される。これが、AO の一連の流れである。

また、AO を構成するうえで重要な要素はガイドスター (Guide Star, GS) である。大気による波面の歪みを測定するためには、ある程度明るい星である必要がある。そのため、自然ガイドスター (Natural Guide Star, NGS) という目標天体近くの明るい星を参照星として用いて大気の揺らぎを測定する。しかし、ある明るさ以上の NGS が目標天体の近くに都合よくある確率はとても低い。そのため、開発されたのがレーザーガイドスター (Laser Guide Star, LGS) というシステムである。これは地上からレーザー光を打ち上げ、上空の好きな位置に仮想の星を作ることができる。

以上のように、一つの GS を用いて補償を行う AO のことを単層共役補償光学 (Single Conjugate Adaptive Optics, SCAO) と呼ぶ。また、SCAO は従来型補償光学装置とも呼ばれる。

AO に関する詳しい説明は付録 A を参照。

2.2 広視野補償光学

2.2.1 従来の補償光学の課題

2000 年以降 SCAO は 8~10m 級の望遠鏡に用いられ、さまざまな成果を上げてきた。しかし、SCAO システムには以下のような課題がある。

- 視野の制限
目標天体と GS の位置が離れていると、GS からの光が通ってきた大気と目標天体からの光が通ってきた大気が異なってしまう正しい補正ができなくなってしまう。そのため、目標天体と GS は近くになければならないということから狭視野という制限がついてしまう。一般的に SCAO の補償視野は 1 分角以下程度である。
- 短波長では回折限界を達成できていない
現在の補償光学では回折限界に近い像を得ることができるのは近赤外以上であり、可視では回折限界の像を得ることはできない。可視で補正を行うためにはより多素子のシステム、より明るい GS、より高速の制御が必要になる。
- 次世代大型望遠鏡への対応
望遠鏡の点源の検出感度は口径の大きさの 4 乗に比例して良くなる。しかし、口径の大きさの 2 乗に比例して素子数は増え、さらに素子数の 2 乗に比例して制御演算量が増える。また、大型望遠鏡で広視野を確保しようとした場合、口径の大きさに伴い補償光学系のサイズが巨大化し製作が難しくなる。

以上のような課題を解決するために補償光学の更なる技術開発が必要になる。補償光学系の技術開発の方向としては、「より高精度」もしくは「より広視野」の 2 方向に分けられる。

より高精度な補償光学系のことを極限補償光学 (Extremely Adaptive Optics, ExAO) と呼ぶ。これは惑星観測を行う際、非常に明るい恒星をガイドスターとして用いることで高性能な補正を行う補償光学系のことである。

対して、広視野補償光学 (Wide Field Adaptive Optics, WFAO) には地表層補償光学 (Ground Layer Adaptive Optics, GLAO)、多層共役補償光学 (Multi Conjugate Adaptive Optics, MCAO)、多天体補償光学 (Multi Object Adaptive Optics, MOAO) の 3 種類がある。それぞれの詳しい説明は次節で行う。

以上のような次世代補償光学の関係をまとめると図 2.3 のようになる。

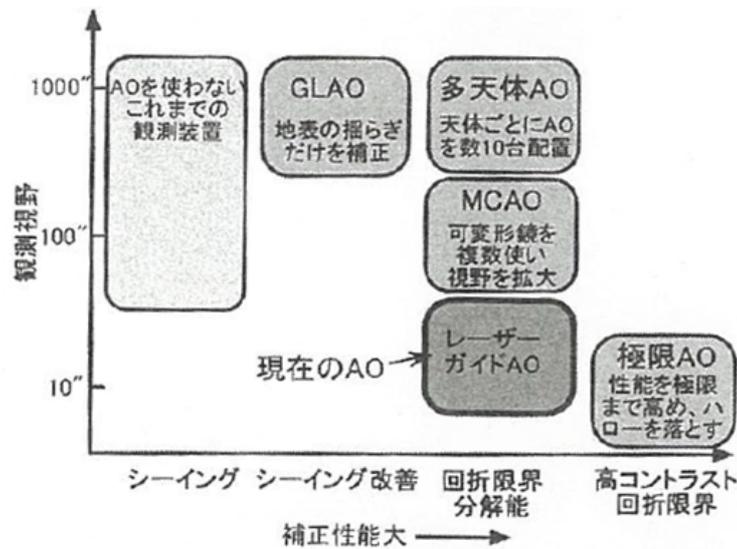


図 2.3: AO の種類 [65]

2.2.2 広視野補償光学系の種類

前節で紹介された広視野補償光学系について説明を加える [67]。

- **地表層補償光学 (Ground Layer Adaptive Optics, GLAO)**

大気を高さ毎の層に分割し、最下層に位置する 0 km の地表層の大気揺らぎのみを補正する補償光学のことを地表層補償光学と呼ぶ。2002 年に Francois Rigaut[46] により初めて提案された。概念図は図 2.4 のようになっている。地表層は 0 km の大気層であるため、どの視野に対しても共通する成分である。また、地表層の大気揺らぎは全体の大気揺らぎの 50-60% を含む [7]。そのため、地表層のみの補償でも広視野に対して有効な補償をかけることができる。しかし、高層の大気揺らぎに対しては補償を行わないため、補償性能は他の補償光学系に比べて低い。

- **多層共役補償光学 (Multi Conjugate Adaptive Optics, MCAO)**

大気を高さ毎の層に分割し、それぞれの高さに対応する DM を用意してそれぞれの高さの大気揺らぎを補償する補償光学のことを多層共役補償光学と呼ぶ。概念図は図 2.5 のようになっ

ている。高層まで補正するため、視野全体に対して高い補償を行うことができる。しかし、複数の大気層を補正するために複数の DM が必要になる。さらに、広視野を確保しようとする高層を補償するための DM の大きさが大きくなってしまいう制限から MCAO は他の広視野補償光学系と比べると狭視野になる。

- 多天体補償光学 (Multi Object Adaptive Optics, MOAO)

各天体に対して DM を用意して補償を行う補償光学系を多天体補償光学と呼ぶ。MOAO では MCAO, GLAO のように視野全体に補償を行うのではなく、目標天体まわりのみに対して補償を行う。MOAO では各天体に対して DM が一つで高性能な補償を行える利点がある。しかし、観測天体分の DM が必要であり、測定方向と観測方向が異なるためオープンループで制御する必要がある。

以上の広視野補償光学系の典型的な特徴をまとめると表 2.1 のようになる。

表 2.1: 広視野補償光学装置の比較 [66]

	GLAO	MCAO	MOAO
典型的な LGS 数	3~5	3~5	3~5
典型的な NGS 数	3	3	3~6
典型的な DM 数	1	2~3	5~20
補正性能 (SR, FWHM)	> 0.05, 0.2" - 0.3"	> 0.4, 回折限界	> 0.4, 回折限界
視野	10'	~2'	5'

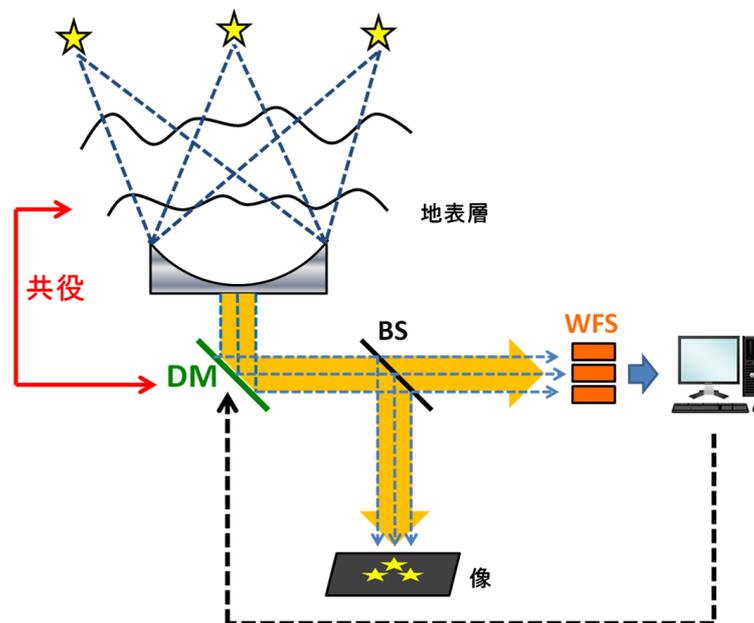


図 2.4: GLAO の概念図

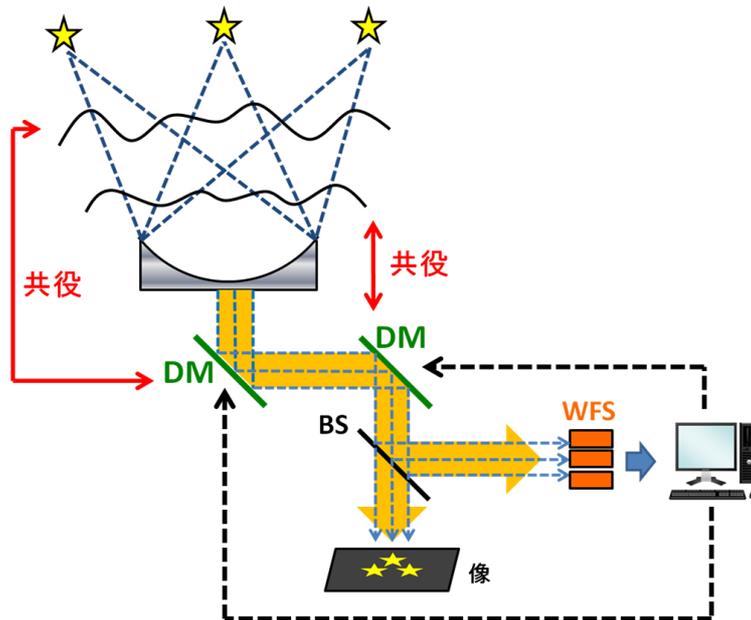


図 2.5: MCAO の概念図

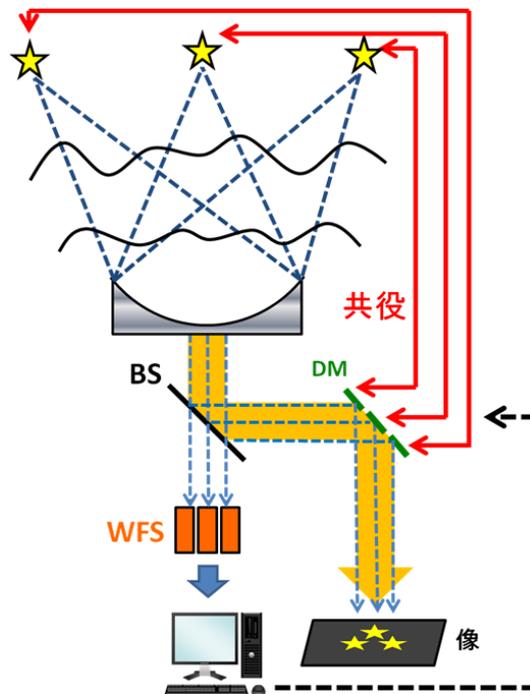


図 2.6: MOAO の概念図

2.3 次世代超大型望遠鏡に用いられる補償光学

2.3.1 次世代超大型望遠鏡と補償光学

2000 年に入り、すばる望遠鏡など口径 10m クラスの望遠鏡が建設され、これらの望遠鏡により天文学の進展は支えられてきた。2020 年以降、さらに口径の大きい地上設置の望遠鏡を建設しようとする計画が 3 つある。それは 30m 望遠鏡 (Thirty Meter Telescope, TMT)、欧州超大型望遠鏡 (European Extremely Large Telescope, E-ELT)、巨大マゼラン望遠鏡 (Giant Magellan Telescope, GMT) である。

- **30m 望遠鏡 (Thirty Meter Telescope, TMT)**

TMT はハワイのマウナ・ケアに建設予定の望遠鏡で、日本、アメリカ・カリフォルニア大学連合、カナダ、中国、インドなどの国際協力のもとで進んでいる。口径はその名の通り 30m あり、対角 1.4m の六角形鏡を 492 枚並べて構成される。ファーストライトは 2024 年を目指しており、現在建設が進んでいる。光学系はリッチー・クレティエン式で、ナスミス焦点に装置を置く。完成予想図は図 2.7 である。第一期補償光学装置は NFIRAOS(The Narrow Field Infrared Adaptive Optics System) という MCAO の補償光学系を予定している [21]。

- **欧州超大型望遠鏡 (European Extremely Large Telescope, E-ELT)**

標高 3060m のチリのセロ・アルマゾネスに建設予定している。これらの次世代超大型望遠鏡の中で最大の口径となる 39m を持ち、1.4m の六角形鏡を 798 枚組み合わせて構成される。ファーストライトは 2024 年を予定している。完成予想図は図 2.8 である。E-ELT の第一期補償光学装置は MAORY という MCAO システムを用いた補償光学装置である [10][9]。さらに、E-ELT の光学系は第 5 鏡まであり、直径 2.4m の第 4 鏡を可変形鏡として用いて GLAO を行う計画もある [3][59]。

- **巨大マゼラン望遠鏡 (Giant Magellan Telescope, GMT)**

GMT はアメリカ、オーストラリア、韓国、ブラジルの国際協力により開発が進んでいる次世代超大型望遠鏡である。チリのラス・カンパナスに建設予定である。直径 8.4m のミラーを 7 枚並べて構成される 25m 望遠鏡である。ファーストライトは 2021 年を予定している。完成予想図は図 2.9 である。第一期補償光学装置は LTAO だが、副鏡を可変形鏡として補償光学を行えるように設計しているため、将来的には GLAO と ExAO システムも加わる計画である [31]。

これら次世代超大型望遠鏡について表 2.2 まとめるのようになる。

表 2.2: 次世代超大型望遠鏡の比較

	TMT	E-ELT	GMT
口径	30 m	39 m	25 m
場所	ハワイのマウナ・ケア	チリのセロ・アルマソネス	チリのラス・カンパナス
完成予定	2024 年	2024 年	2021 年
国際協力	日・米・加・中・印	欧州南天天文台	米・豪・韓・伯
補償光学	名前	NFIRAOS	MAORY
	種類	MCAO	MCAO
			- LTAO



図 2.7: TMT の完成予想図 [61]

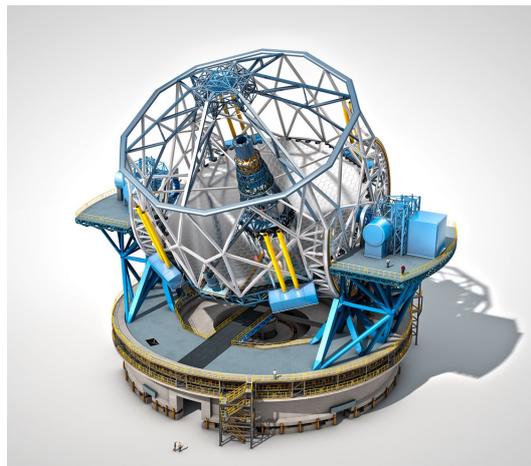


図 2.8: E-ELT の完成予想図 [36]

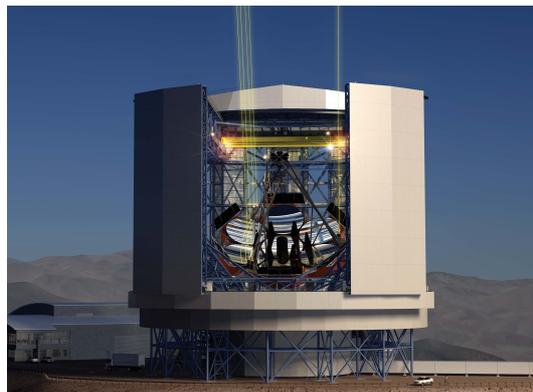


図 2.9: GMT の完成予想図 [40]

2.3.2 NFIRAOS

TMT の第一期の補償光学装置である NFIRAOS(The Narrow Field Infrared Adaptive Optics System) についてまとめる。

NFIRAOS の設計図は図 2.10 である [20]。図 2.10 の赤い部分は光線を表している。

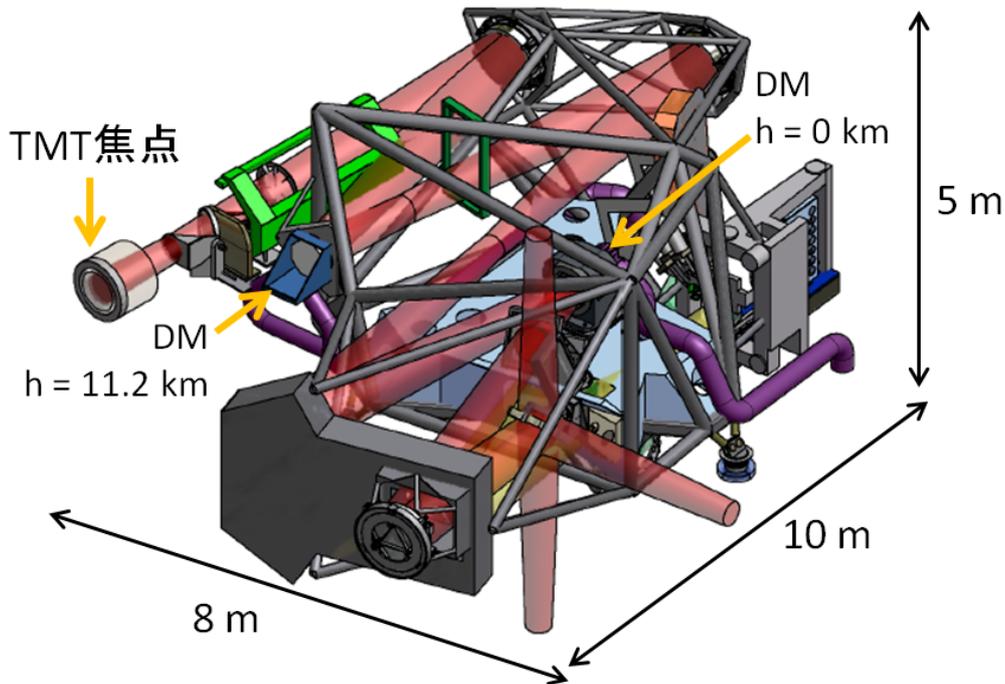


図 2.10: NFIRAOS の設計

NFIRAOS は MCAO システムを採用した補償光学系である。補償する大気層は高度 $h = 0, 11.2\text{km}$ の 2 層のため、DM は 2 枚である。DM0 は 63×63 、DM11 は 76×76 のアクチュエーター数である。6 つの LGS を打ち上げることができ、 60×60 素子の Shack-Hartmann 型 WFS を 6 つ持つ。装置全体の大きさは $10.35 \times 7.93 \times 4.41\text{ m}$ である。NFIRAS に関する詳しい説明は Herriot et al. (2011)[20]、Herriot et al. (2014)[21] を参考にされたい。ここで、NFIRAOS で期待されている補償性能をまとめると表 2.3 のようになる。

表 2.3 から分かるように、NFIRAOS は MCAO のため補償性能が達成される視野が $30''$ 程度と非常に狭い。そこで今後、TMT には広視野を実現する補償光学が必要であると言える。

2.3.3 TMT の第二期装置にむけて

NFIRAOS の補償視野は前節で述べたように非常に狭い。NFIRAOS では、1 章で述べたように再電離期の銀河探索では広視野が必要となり、NFIRAOS では難しくなることが予想される。そのため、TMT の第二期装置としては広視野補償光学系が必要である。以上のことから、TMT に

表 2.3: NFIRAOS の性能

	NFIRAOS
波長域	0.8 - 2.5 μm
大きさ	10.35 \times 7.93 \times 4.41m
LGS 数	6
温度	-30 °C
最大視野	2 分角
補正性能 (波面誤差 RMS)	191/208 nm RMS (10"/30" 視野)

GLAO システムを取り付けることを提案する。

TMT で広視野を実現するうえで「装置の巨大化」が大きな問題となる。すばる望遠鏡で 10 分角を実現するのと、TMT で同視野を実現するのでは単純に考えても口径に比例した約 4 倍も装置が大きくなってしまふ。それだけ大きな装置を作ることは技術的に難しい。TMT でも装置の大きさを抑えつつ、広視野を確保することができるかを検証するために、本研究では広視野補償光学系のための光学設計を進めた。

第 3 章 光学設計における前提

本章では TMT に GLAO を設置する場合の光学設計に関する前提について説明を行う。まず、GLAO ではシーイング共役と瞳共役の二つのタイプで光学設計が大きく異なってくる。今回の設計は瞳共役で設計を行い、その場合の光学設計での課題について説明を行う。さらに、過去に光学設計を光学設計メーカーに依頼しており、それらの検討結果と問題点を説明する。これらをふまえて本研究での課題について説明する。

3.1 Adaptive Secondary Mirror(ASM) の可能性について

3.1.1 Adaptive Secondary Mirror(ASM) とは

望遠鏡に GLAO を取り付けようとするとき、図 3.1 のような二つのシステムが考えられる [30]。a) シーイング共役とは高度 H にある大気層に対して共役にある位置に DM を置き、高度 H の大気揺らぎを補正するようなシステムになっている。シーイング共役の場合、DM を副鏡の位置に置くこともできる。この場合、副鏡のことを Adaptive Secondary Mirror (ASM) と呼ぶ。ASM は 1989 年 Beckers, J.M. により提案され、補償光学系の構成は図 3.2 のようになっている [4]。b) 瞳共役とは入射瞳である主鏡と共役な位置に DM を置くことで高度 0 km の大気揺らぎを補正するシステムである。

シーイング共役の場合は次のようなメリットがある。

- 効率の向上
ASM システムでは副鏡に AO システムを取り込むため、余分なミラーを用いる必要がなくなる。そのため、光学効率が瞳共役システムと比べて良くなる。瞳共役システムでは光のロスが多い分、より明るい GS を選択する必要が生じる。
- 赤外放射を少なくできる
ミラー枚数が増えると、ミラー表面からの放射が効いてくる。ASM システムではミラー枚数を少なくすることができるため、ミラー表面からの赤外放射を小さくすることができる。

以上のメリットより、GLAO で ASM を用いることは有益であると言える。2008 年には 6.5 m MMT 望遠鏡にて世界で初めて多数の LGS・ASM を用いた GLAO システムの検証が行われ、GLAO で視野 2 分角に対して十分な補正ができたことを実証した [18][2][33]。また、すばる望遠鏡では ULTIMATE-SUBARU という視野 15 分角の ASM を用いた GLAO を予定しており、ASM を用いた GLAO システムは今後さらに発展していくであろう [69]。

今回、TMT で GLAO を行うにあたり、シーイング共役と瞳共役のどちらの方式を用いる必要があるかについて以下で議論する。ただし、ASM には主に図 3.3 のようなカセグレン式とグレゴリアン式の二つのタイプがあるが今回は TMT で想定されるカセグレン式で ASM を行う場合について考えた。グレゴリアン式はカセグレン式と比べると望遠鏡と ASM の間の距離を長く取る必要

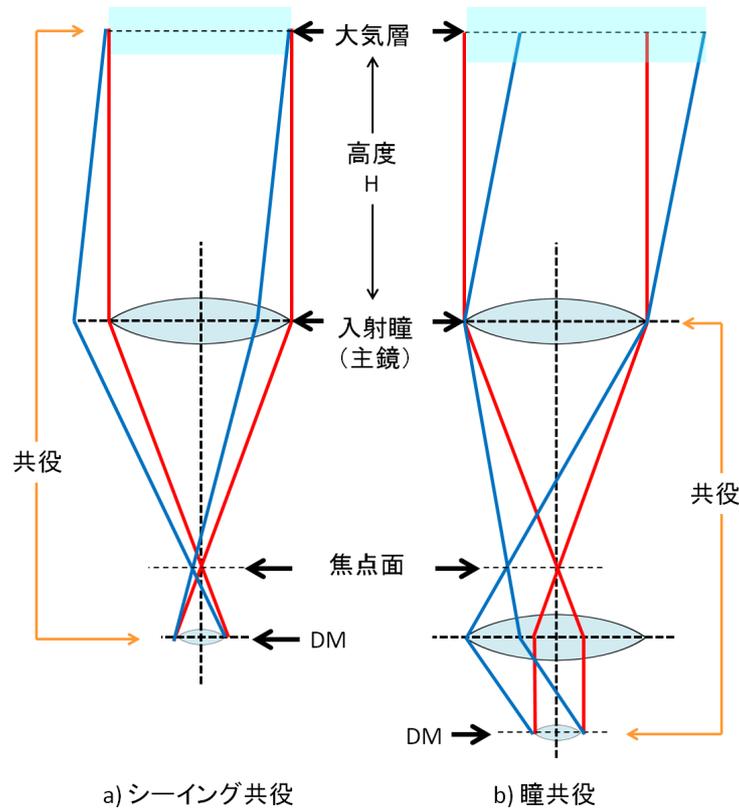


図 3.1: a) シーイング共役と b) 瞳共役の概念図。赤線は On-axis 光線、青線は Off-axis 光線を表わしている。

があり、ドームのサイズにも影響を与えてしまう。また、グレゴリアン式の ASM の直径はカセグレン式の ASM の直径より一般的に大きく、あまりに大きい DM は製作が難しくなるからである。

3.1.2 DM の共役位置

前節で述べたように瞳共役の場合、図 3.1 から分かるように共役な位置は主鏡となるため、高さ 0 km の大気層を補正することになる。しかし、シーイング共役の場合は高さ 0 km 以外の大気層と共役になる。そのため、何 km の大気層と共役になるかを計算する。シーイング共役の光学系の関係図を書くと図 3.4 のようになる。

図 3.4 の f は主鏡の焦点距離、 h と l は共役な大気層の主鏡からの距離と大気層と共役な DM の主鏡からの距離である。ただし、 $f, h, l > 0$ である。レンズの公式より次式が成り立つ。

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \quad (3.1.1)$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{fl}{l-f} \quad (3.1.2)$$

ここで、 $l = \alpha f$ とすると、式 (3.1.2) は次のように変形できる。

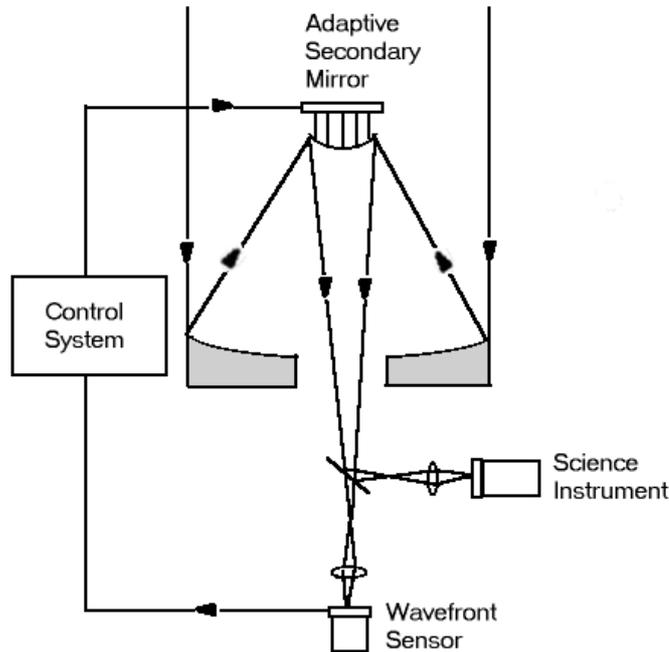


図 3.2: ASM システムの概念図 [30]

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{\alpha f^2}{\alpha f - f} \\
 &= \frac{f}{1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.3}$$

式 (3.1.3) より、グレゴリアン式の場合は $f < l$ であるため $\alpha > 1$ となり、常に $l > 0$ となる。対してカセグレン式の場合は $f > l$ であるため $\alpha < 1$ となり、常に $l < 0$ となる。つまり、カセグレン式の場合は副鏡の共役位置は常に地下にくることになる。

ここで、TMT のパラメータとして $f = 30$ m、 $l = 27.09375$ m を用いて、共役な大気層の高さ h を計算すると $h = -279.677$ m となる。ちなみに、すばる望遠鏡で同様に計算を行うと共役な大気層の高さ $h = -80.8344$ m となる。つまり、TMT はすばる望遠鏡に比べて約 3 倍も遠い位置の仮想的な地下の大気層と共役になる。共役位置が 0 km から離れている場合、GLAO では”gray zone”という概念に注意しなければならない。

3.1.3 gray zone

”gray zone”は 2004 年 A.TOKOVININ により定義され、GLAO の補正性能が悪くなり始める共役な大気層の高さと補正が全く効かなくなる共役な大気層の高さの間の高さのことを言う [56]。gray zone を模式的に表わすと図 3.5 のようになる。gray zone の高度範囲 H_{max}, H_{min} は式 (3.1.4)、式 (3.1.5) で表わされる。ただし、 λ は観測波長、 d は DM の主鏡面に投影した素子間隔、 θ_0 は視野半径、 β は GLAO で補正後のシーイングサイズである。

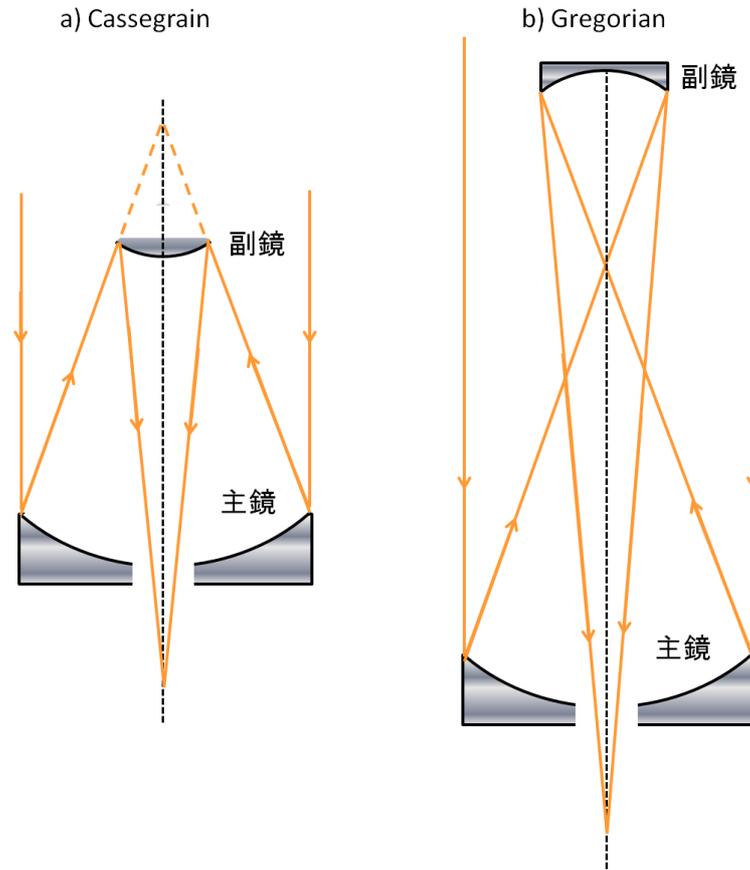


図 3.3: a) カセグレン式と b) グレゴリアン式望遠鏡

$$H_{max} = \frac{\lambda}{\beta\theta_0} \quad (3.1.4)$$

$$H_{min} = \frac{d}{2\theta_0} \quad (3.1.5)$$

図 3.5 より H_{max}, H_{min} を定性的に説明すると、 H_{min} は DM1 素子分のずれが生じない限界高度のことであり、 H_{min} 以下なら 1 素子分のずれが生じないため GLAO の補正を行えるが、 H_{min} 以上では 1 素子分のずれが生じ徐々に補正性能が劣化していく。Roddier 1981[48] より $\beta \approx \lambda/r_0$ となるため、 H_{max} についての式 (3.1.4) は、 $H_{max} \approx r_0/\theta_0$ と書くことができる。そのため、 H_{max} とはフリード長 r_0 分ずれが生じてしまう高度のことであり、 H_{max} 以上の高度ではフリード長分のずれがあるため、アイソプラナチックな領域から外れるため補正が行えなくなる。gray zone は $H_{min} \leq \text{gray zone} \leq H_{max}$ の範囲のことであり、GLAO の補正性能が悪化しはじめる範囲である。gray zone の存在により、GLAO を行う場合は DM と共役な大気層の高度がどこにあるかを気にする必要がある。

今回用いる DM は NFIRAOS と同じく 60×60 素子の DM とした場合、 $d = 30/60 = 0.5$ m であり、視野半径 $\theta_0 = 5'$ とすると、 $H_{min} = 172$ m となる。また、波長 $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$ (R バンド)、 $1.25 \mu\text{m}$ (J バンド)、 $1.6 \mu\text{m}$ (H バンド)、 $2.2 \mu\text{m}$ (K バンド) のとき、補正後のシーイングサイズ β

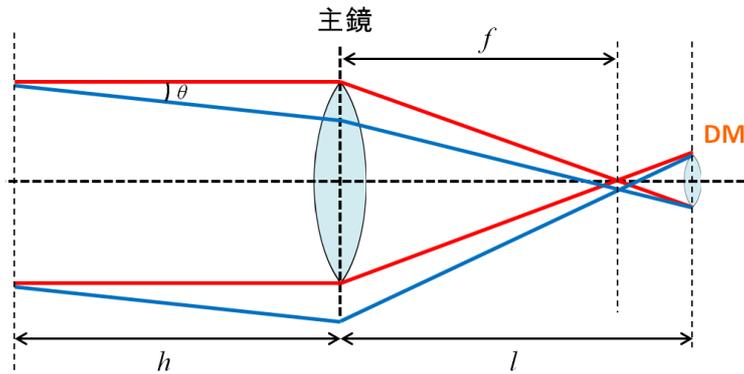


図 3.4: シーイング共役の光学系の関係

はずばる望遠鏡次世代広視野補償光学システム検討報告書 [69] の結果を用いると H_{max} は表 3.1 のようになる。

表 3.1: 各波長での H_{max} , H_{min}

	波長 λ [μm]			
	0.8	1.25	1.6	2.2
β ["]	0.35	0.24	0.2	0.18
H_{max} [m]	324	739	1135	1733
H_{min} [m]	172			

3.1.4 TMT で ASM を用いた場合の考察

TMT で副鏡共役の大気層の高度は -280m と、地上から 280m も離れている。表 3.1 より、TMT で副鏡共役の大気層高度は地下方向に gray zone の高度ほど離れていることになる。図 3.6 は DM と共役な大気層の高度と FWHM の関係を表わした図である。図 3.6 から分かるように、共役高度が 0 km 付近では FWHM は最も良いが、共役高度が地表から離れれば離れるほど FWHM の値が悪くなるのが分かる。図 3.6 の結果は Gemini South でのシミュレーション結果であるため、TMT やはずばる望遠鏡が設置されているマウナケアでは異なったシミュレーション結果になるが、共役高度が高くなればなるほど補償性能が悪くなるという傾向自体は場所に依存せずマウナケアでも同じ結果が得られるはずである。この結果から TMT で ASM を用いると、DM と共役な大気層の高度が地表層から離れすぎてしまい、GLAO 本来の補正性能をだすことができなくなることが分かる。また、TMT で ASM を用いた場合、ASM の直径は 3 m となる。現在、世界で最も大きい DM は VLT 望遠鏡の ASM の 1.12 m である [16]。そのため、 3 m の DM を製作するという事は技術的な観点からも難しいと言える。

以上の結果より、本研究では TMT に ASM を取り付けることは考えず、TMT のナスミス焦点の位置に GLAO の装置を置くという前提で設計を行う。

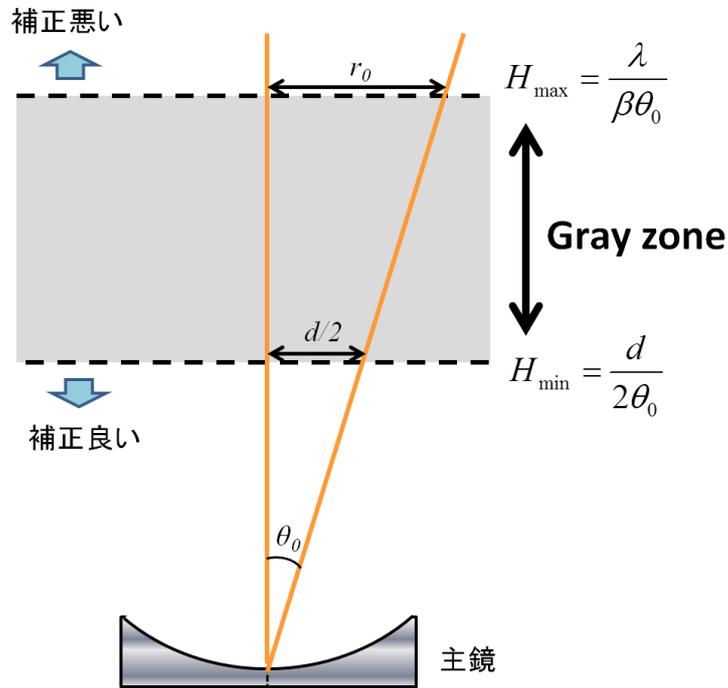


図 3.5: gray zone の概念図

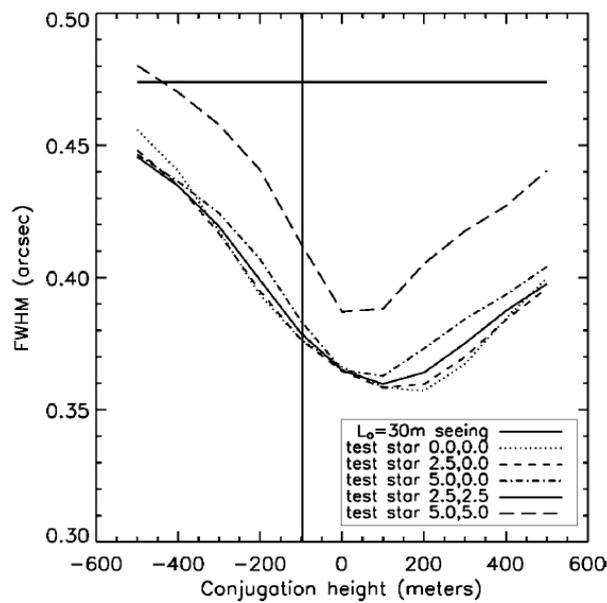


図 3.6: DM と共役な高度と FWHM の関係。横実線はシーイングを、それぞれの線は視野方向を表わしている。縦実線は Gemini South で ASM を用いた場合の DM と共役な高度を表わしている。[1]

3.2 光学設計における課題点

3.2.1 光学設計における課題点

設計すべき光学系をレンズ系で書くと図 3.7 のようになる。

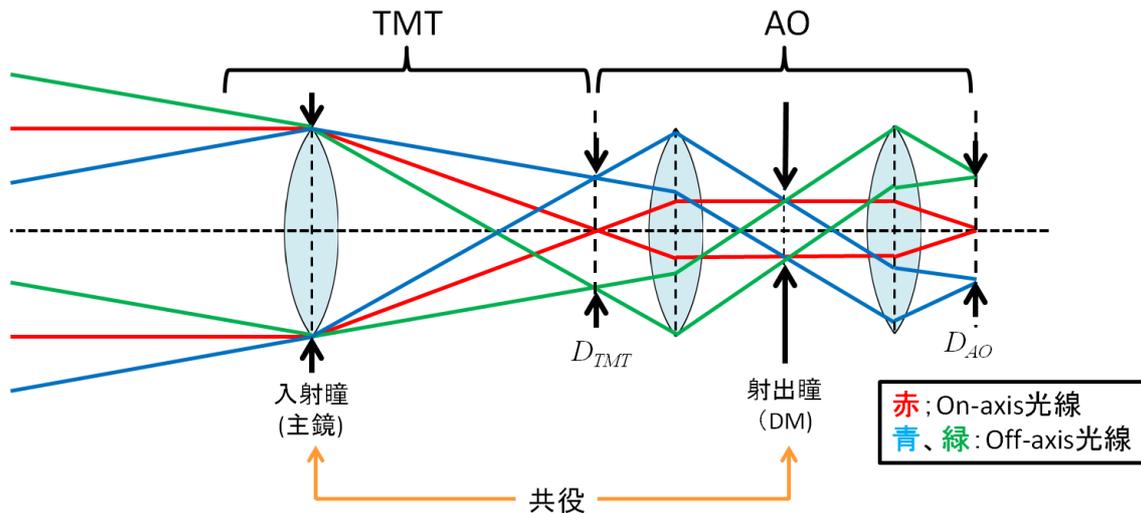


図 3.7: 設計のレンズ系の概念図

前節でも述べたように、今回の設計は瞳共役の設計を行うため、瞳共役の場合は入射瞳の位置にある主鏡と共役位置になる射出瞳の位置に DM を置き GLAO の設計を行う。TMT という超巨大望遠鏡に取り付ける広視野な GLAO の光学系の光学設計を行う場合、以下の項目に注意しなければならない。

- 装置の巨大化
- 縮小率
- 瞳収差

まず、装置の巨大化について説明をする。図 3.7 を見ると分かるように、すばる望遠鏡と TMT で同じ視野を確保しようとした場合、主鏡の大きさに比例して補償光学装置の大きさが大きくなってしまう。すばる望遠鏡に比べると TMT では約 4 倍も大きい光学系になってしまう。しかし、DM や非球面ミラーなどの光学素子の大きさには技術的限界があり、大きくなればなるほど製作は困難になる。たとえ製作可能だとしても費用が莫大にかかってしまう。この理由により TMT では広視野補償光学系を実現することは難しいとされ、すばる望遠鏡で ASM を用いて広視野を実現しようとする ULTIMATE-SUBARU の計画が行われている。

次に縮小率に注意する必要がある。縮小率 γ とは TMT 焦点面の像の大きさ D_{TMT} に対する補償光学系を通過後の像の大きさ D_{AO} の比を表わしており、式 (3.2.6) で定義する。

$$\gamma = \frac{D_{AO}}{D_{TMT}} \times 100\% \quad (3.2.6)$$

縮小率は補償光学装置の後に続く光学系の大きさを決める重要な項目となる。TMT は主鏡と副鏡の合成焦点距離が長いため、TMT に広視野の光が入射してきた場合、焦点面での像の大きさ D_{TMT} もこれまでの望遠鏡と比べると非常に大きくなる。そのため、GLAO の光学系で出来る限り縮小率を良くし、後ろに続く撮像装置や分光装置の光学系を小さくすることが重要である。瞳収差については次節で説明を行う。

3.2.2 瞳収差

理想的には図 3.7 の射出瞳上でそれぞれの視野方向の光線は同じ場所で交わる。しかし、実際にはそうはいかず、射出瞳より物体側にある光学系の収差の影響により射出瞳上で各視野方向の光線の交わる位置にズレが生じてしまう。この瞳上でのズレのことを瞳収差と呼ぶ。射出瞳上での光線の交わり方を模式的に表わすと図 3.8 ようになる。

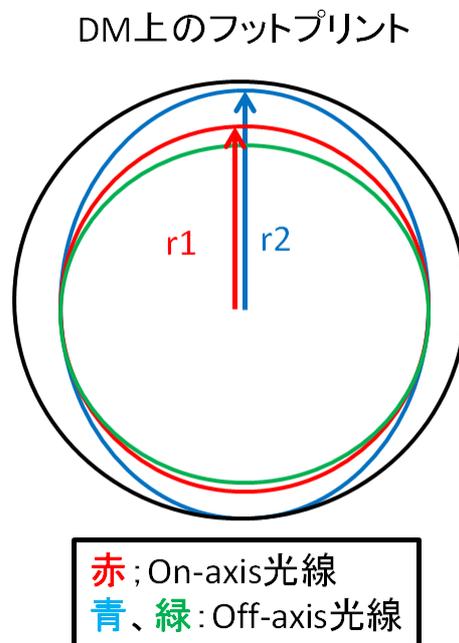


図 3.8: 瞳収差

図 3.8 のように中心視野（赤色）ではコリメート光は DM に円形で当たっていたが、瞳収差があると視野が大きくなる（青色、緑色）につれて徐々に形が変形して楕円のような形になってしまう。本研究では、瞳収差 σ を視野中心光束の DM 上での半径 r_1 に対して最も瞳収差によるズレが大きい位置のズレ量 $r_2 - r_1$ の比として定義し、式 (3.2.7) で表わす。

$$\sigma = \frac{r_2 - r_1}{r_1} \times 100\% \quad (3.2.7)$$

瞳収差があるということは DM 上で視野方向によって光が当たる位置が異なるということになる。GLAO の場合、補正するものは主鏡位置にある高さ 0 km の大気揺らぎであり、これはどの視野方向の光でも共通する大気揺らぎ成分である。しかし、瞳収差があることで DM 上に各視野方向

の光が当たる位置が異なると DM 1 枚で全ての視野に対して共通の補正を行えなくなってしまう。大きな瞳収差が存在することは補償光学を行ううえで致命的であり、十分に注意する必要がある。

ここで瞳収差の目標値を決定しておく。本研究では DM は TMT の第一期装置である NFIRAOS と同じく 60×60 素子の DM を用いることを仮定する。この場合、瞳収差によって DM1 素子分ずれないようにするためには式 (3.2.8) のように最大瞳収差ズレを 3.3% 以下に抑えればよい。

$$\text{最大瞳収差ズレの目標値} = \frac{1}{30 \text{ 素子}} \times 100 = 3.3\% \quad (3.2.8)$$

式 (3.2.8) を達成するような光学系を作成することを目標とする。

ちなみに光学設計を行う際、瞳収差を小さくするように最適化を行う方法としては瞳光学系を用いる方法がある。図 3.9 のように灰色の部分で隠して考えると、入射瞳上にある点光源から視野角に対応する拡がりを出た光が射出瞳上で結像するような光学系として考えることができる。この入射瞳から射出瞳までを取り出した光学系のことを瞳光学系と呼ぶ。瞳光学系で像面でのスポットサイズが最小になるように最適化を行えば、それは瞳収差を抑える光学系を作成しているのと同義である。

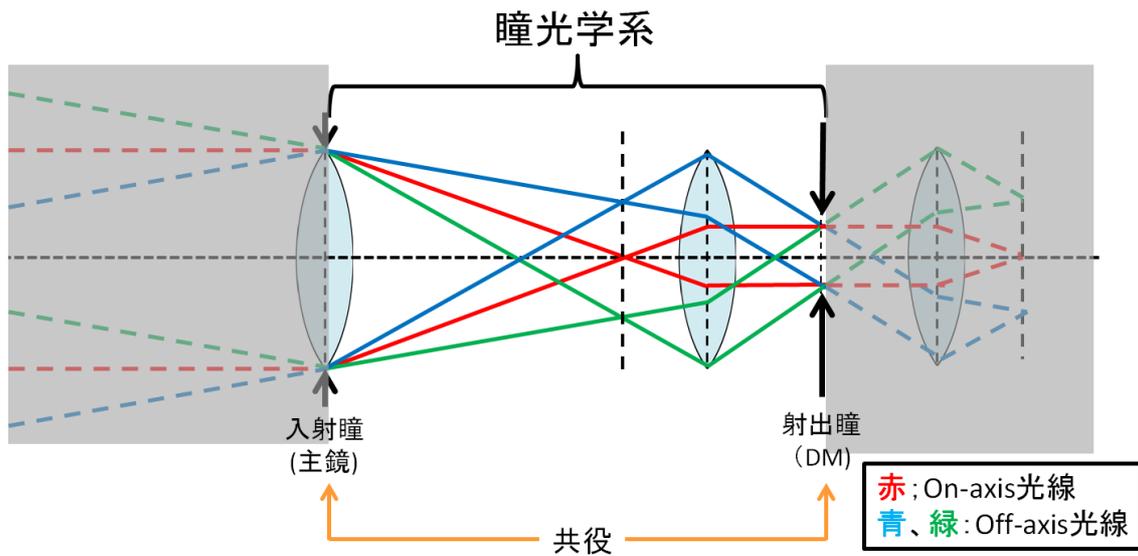


図 3.9: 瞳光学系

3.3 過去の光学系 I

3.3.1 仕様

まず、オプトクラフト社設計の広視野補償光学系の設計について説明する。この設計を光学系 I と名付ける。光学系の目標仕様は表 3.2 となっている。

表 3.2: 光学系 I の目標仕様

	目標仕様
波長域	0.8 ~ 2.5 μm
視野	$\phi 10$ 分角
光学系基本構成	オフナー改良型光学系
物体距離	無限遠
ミラー枚数	2 枚
DM サイズ	$\phi 400$ mm 以下
光学系温度	0°C

光学系 I の設計の最大の特徴はオフナー光学系をベースにしているということである。オフナー光学系とは、A. Offner[39] が考案した光学系のことで図 3.10 のような光学系である。オフナー光学系は同じ曲率中心を持つ球面鏡 2 枚を用いた共軸光学系であり、コリメータ側の光路とカメラ側の光路が共軸に対して対称になっており、コリメータ側で発生した収差をカメラ側で打ち消すようになっている。そのため、コマ収差・歪曲収差が無い光学系となる。さらに 2 枚の光学系が凸面と凹面となり、ペッツバル和が 0 となる場合像面湾曲も無くなる。オフナー光学系の最大の特徴は球面鏡 2 枚で作れるため、安価かつ光学系のアライメントが行いやすいことである。

本研究で設計する TMT 用広視野光学装置は光学系サイズが大きくなることが予想されるため、球面鏡 2 枚で構成可能なオフナー光学系で光学設計を実現できれば非常に安価で済む。そのため、まず光学設計案としてオフナー光学系を基点とした光学設計案について検討を行った。

3.3.2 設計結果

前節の仕様を基に設計を行った結果完成した光学系 I の光学設計図は図 3.12 と図 3.13 である。図 3.12 と図 3.13 は TMT まで含めた光学系の全体図と GLAO の部分だけを拡大した図である。グローバル座標軸は図 3.12 に表示されているように光線の進行を z 軸とし、 z 軸と垂直で紙面に沿った方向を y 軸、 z 軸に垂直で紙面奥向きに向かう方向を x 方向とする。光学設計図中の光線の色は視野方向を表わしており、図 3.11 のように半径 5 分角円形視野の 12 視野を表わす。 x 方向に対しては光学系は対称であるため、視野方向の x 方向は $x > 0$ の方向だけを検討する。

図 3.12 のように右向きに進んできた平行光は TMT の 30 m の主鏡、3 m の副鏡の順に当たり、その後第三鏡で反射されナスミス焦点で結像する。TMT の焦点からの光は広視野補償光学系へと進む。図 3.13 のように、TMT の焦点からの光はまず M1 という直径 $\phi 4700$ mm の凹面鏡で反射され、主鏡の瞳位置にある $\phi 400$ mm の凸球面鏡である DM で反射され、もう一度 M1 にあたり

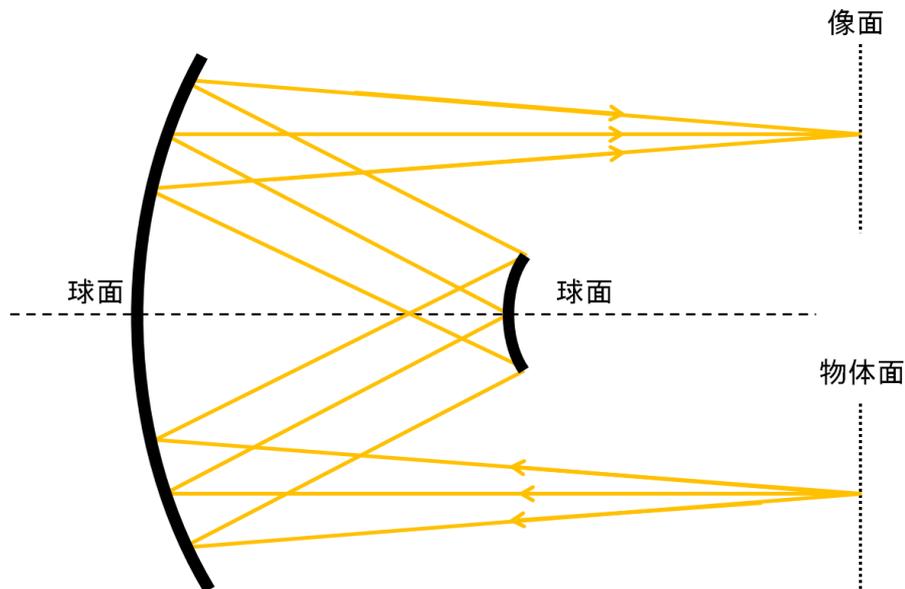


図 3.10: オフナー光学系

最終像面で結像している。最終像面前には各視野ごとに非点収差補正用プレートが配置されており、このプレートで最終像面の収差補正を行っている。光学系全体の大きさは $8.5 \times 4.7 \times 4.7$ m である。

3.3.3 評価

図 3.13 の光学系の性能について評価する。まず、視野 10 分角に対する最終像面でのスポットダイアグラムと波面マップを見ると図 3.14 と図 3.15 のようになる。まず、図 3.14 について、どの視野、どの波長でも回折限界に近い像を得られているため、スポットは十分に良い。さらに図 3.15 では視野 5 分角の波面マップを表しているが、波面の形状を見るとどの視野でも複雑な波面形状の高次収差成分を持っておらず、波面の PTV 値すべての視野で $< 0.4\lambda$ を達成している。そのため、これらの結果から最終像面の結像性能は十分に良いことがわかる。

ただし、光学系 I の問題点は中心視野光束に対する最大瞳収差ずれである。瞳収差ずれを評価するために DM 上でのフットプリント見た結果が図 3.16 である。前述の通り、今回の設計は DM は NFIRAOS と同じ 60×60 素子の DM を想定して設計を行っており、瞳収差は 3.3% 以下でなければならない。しかし、図 3.16 より視野 10 分角での中心視野光束に対する最大瞳収差ズレは 6.80% も存在している。今回のズレ量では 2 素子分も瞳収差ズレが生じてしまうため、GLAO として正しく機能しない。そのため、光学系 I の最終像面の結像性能は 10 分角にわたって良好だが、中心視野光束に対する最大瞳収差ずれが悪いため 10 分角という広視野での補償光学を実現できる光学系ではない。ただし、光学系 I の最大瞳収差ズレが目標値を達成する視野角は 5 分角であり、5 分角の広視野補償光学装置としてなら光学系 I は利用可能である。

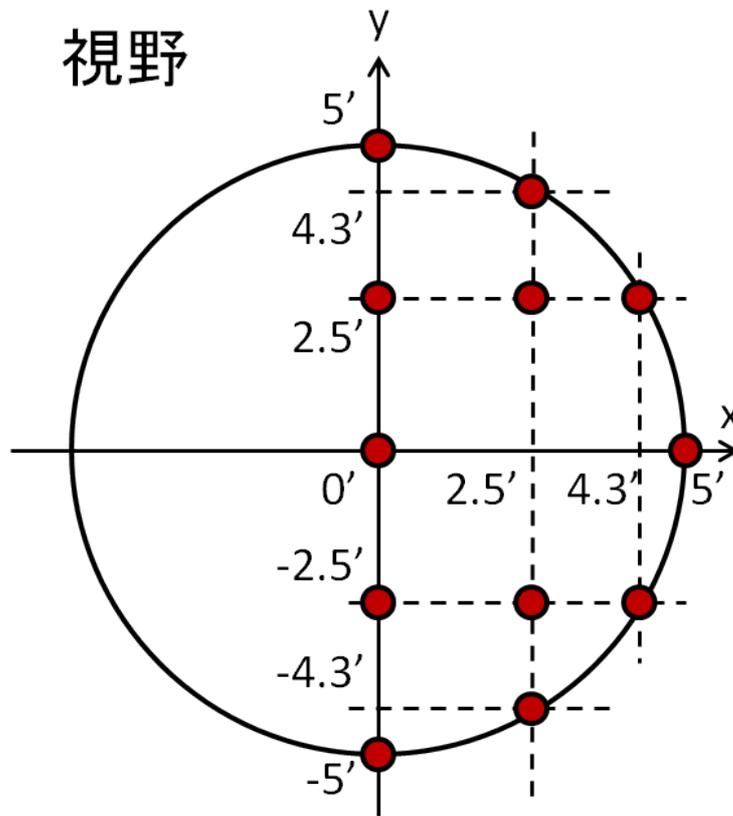


図 3.11: 円形視野

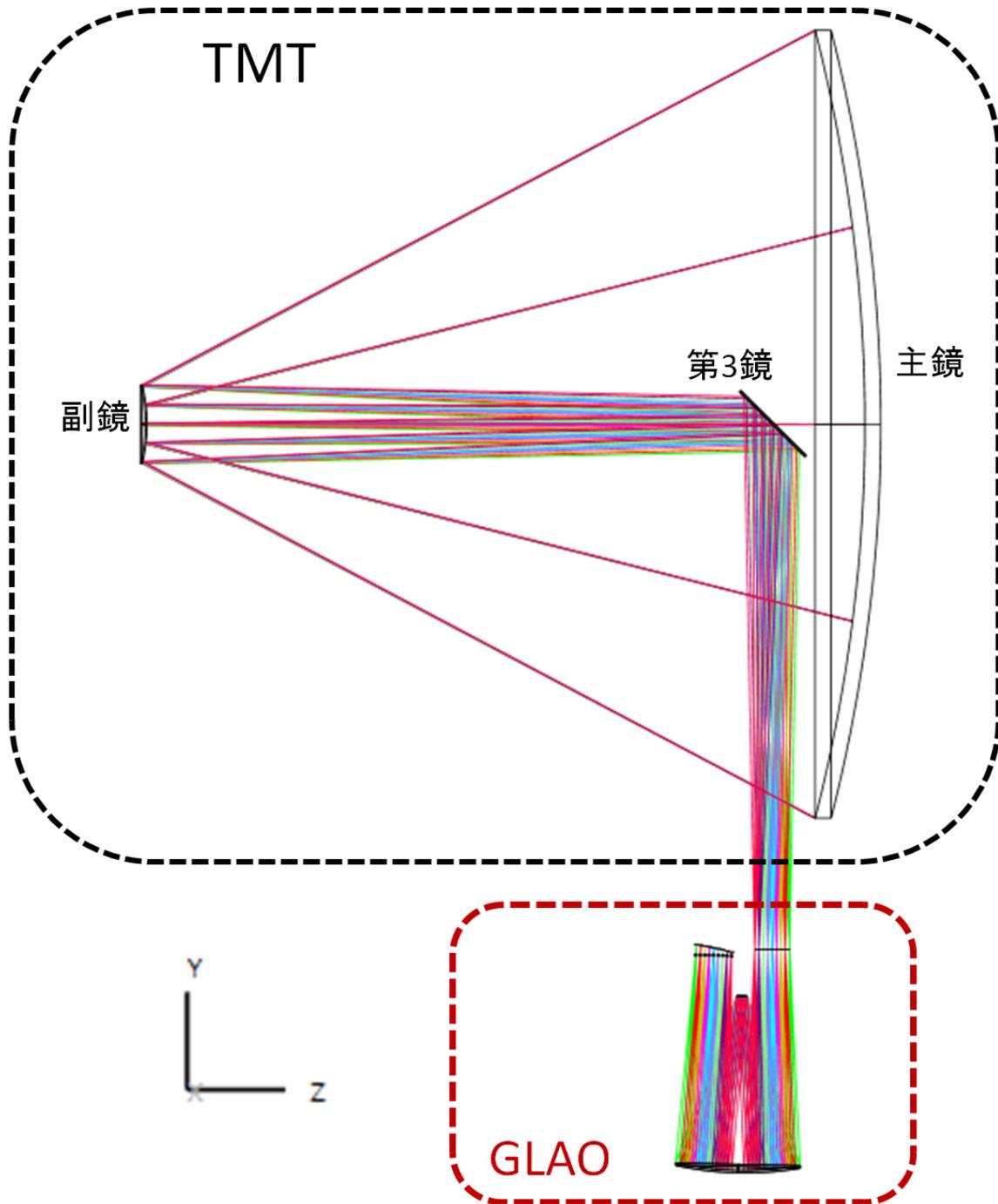


図 3.12: 光学系 I の光学設計 (全体図)

光学系 I : オフナー改良型光学系

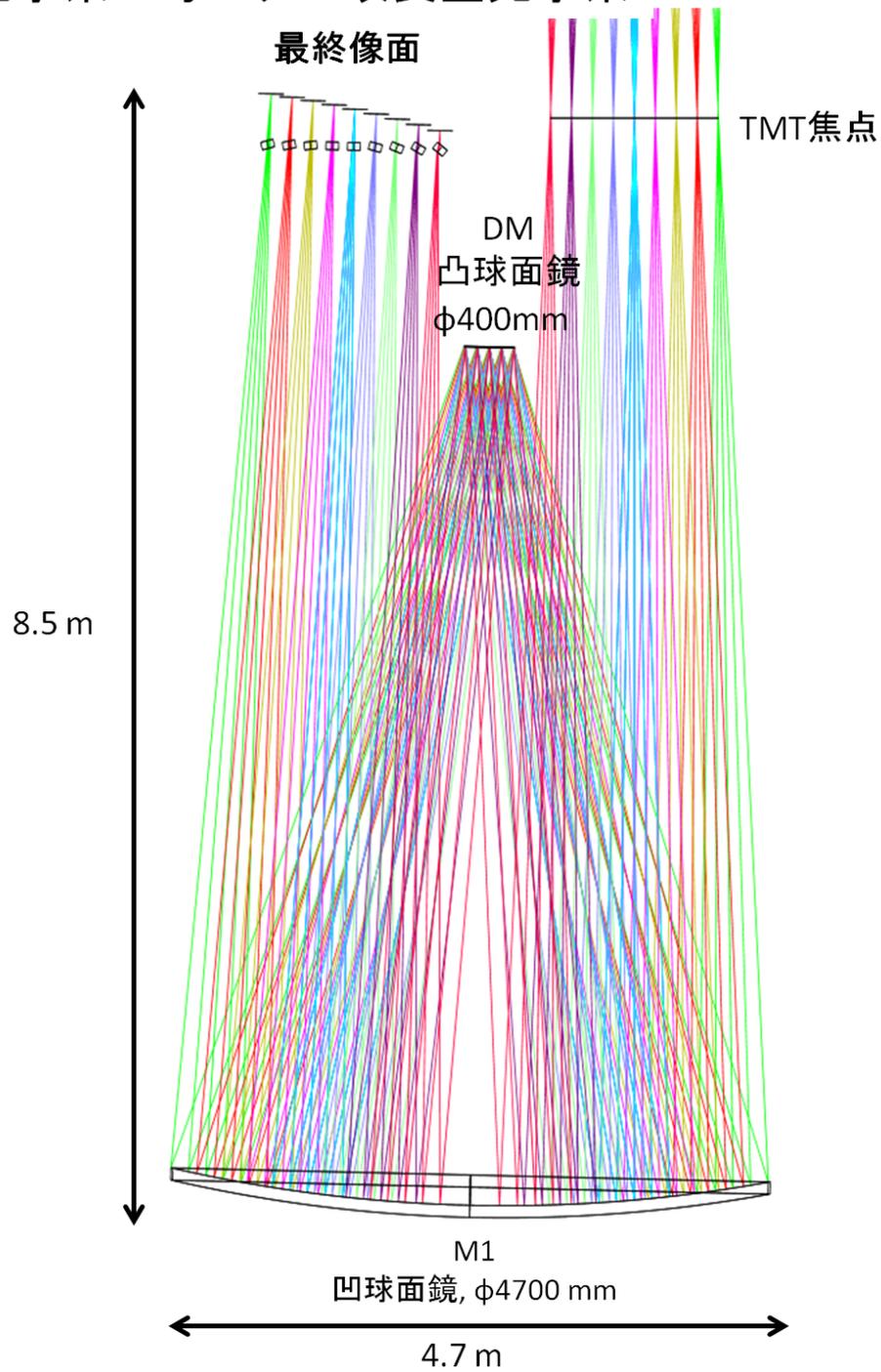


図 3.13: 光学系 I の光学設計 (GLAO 拡大図)

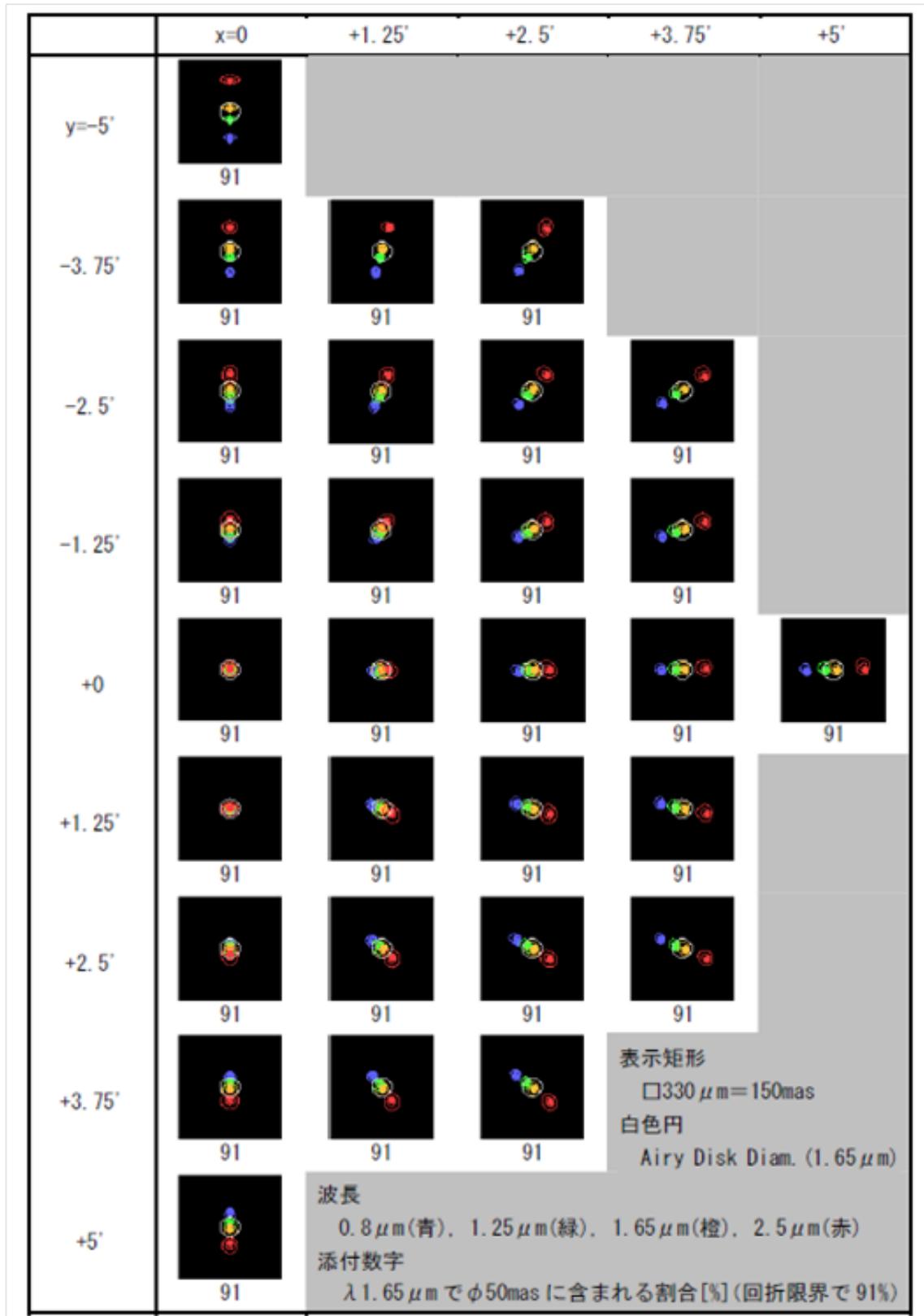


図 3.14: 光学系 I の最終像面のスポットダイアグラム [70]

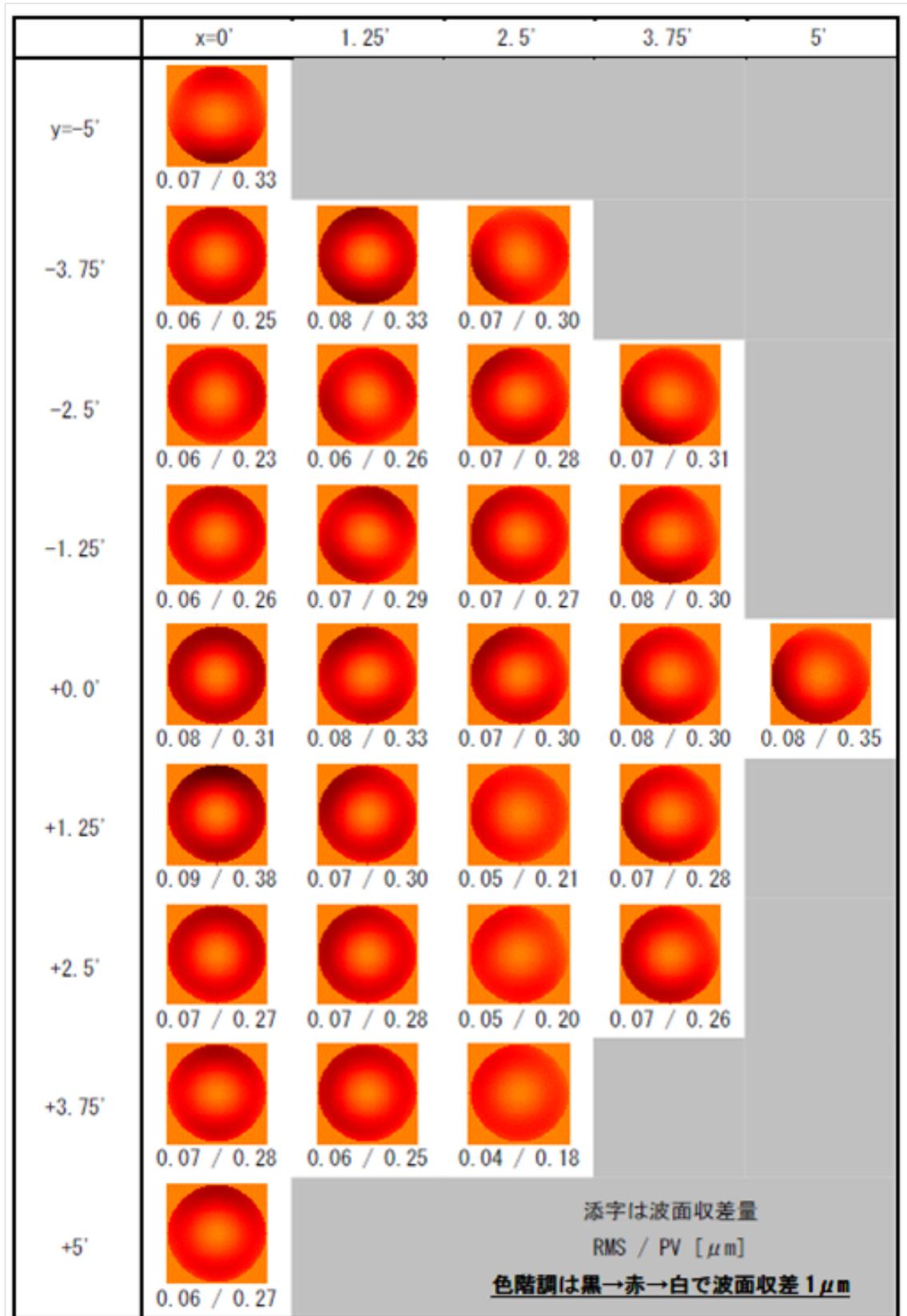


図 3.15: 光学系 I の最終像面の波面収差マップ [70]

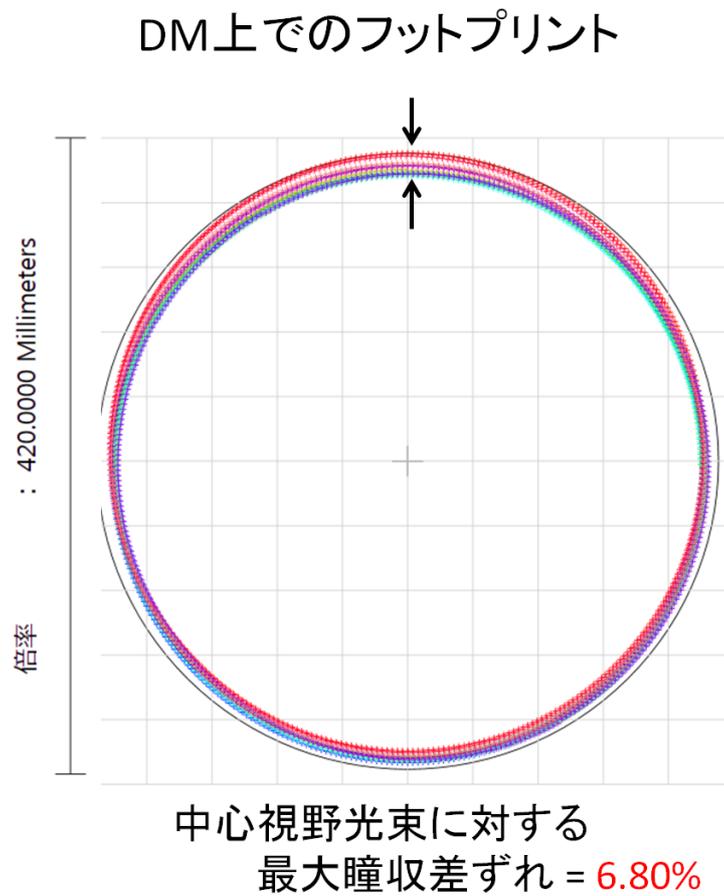


図 3.16: 光学系 I の中心視野光束の最大瞳収差ずれ

3.3.4 光学系 I の設計についての考察

目標仕様と設計結果を比較すると、表 3.3 のような結果になる。

表 3.3: 光学系 I の目標仕様と設計結果の比較

	目標仕様	設計結果
波長域	0.8 ~ 2.5 μm	0.8 ~ 2.5 μm
視野	$\phi 10$ 分角	$\phi 5$ 分角
光学系基本構成	オフナー改良型光学系	オフナー改良型光学系
物体距離	無限遠	無限遠
ミラー枚数	2 枚	2 枚
DM サイズ	$\phi 400$ mm 以下	$\phi 400$ mm
光学系温度	0°C	0°C

設計結果より、光学系 I はオフナー改良型光学系は球面ミラーを 2 枚しか用いず、安価で作れるというメリットがある。しかし、オフナー改良型では光学系全体のサイズが $8.5 \times 4.7 \times 4.7$ m と NFIRAOS と同じくらい大きい。NFIRAOS と同程度の大きさなら製作は可能だが、光学系 I は縮小率が良くない。そのため、光学系 I の後にくる撮像系や分光系の装置の大きさが NFIRAOS と比べると単純計算で 5 倍以上大きくなってしまふ。さらに、オフナー改良型では瞳収差が非常に悪く 10 分角という広視野を確保できない。5 分角までなら非常に良い結像性能だが、今回の設計仕様は 10 分角を確保することが絶対条件のため、光学系 I はそれを満たす光学系ではない。以上の結果から、光学系 I は TMT 用の補償光学系としては不十分である。

3.4 過去の光学系 II

3.4.1 仕様

光学系 I の設計を受け、次の設計を行った。この設計はフォトコーティング社設計のもので、本研究では光学系 II と名付ける。光学系 II の目標仕様は表 3.4 のようになっている。

表 3.4: 光学系 II の目標仕様

	目標仕様
波長域	0.8 ~ 2.5 μm
視野	$\phi 10$ 分角
物体距離	無限遠
ミラー枚数	4 ~ 6 枚
DM サイズ	$\phi 400$ mm 以下
瞳収差	$\leq 3.3\%$
光学系サイズ	6 m 立方
縮小率	0.5
光学系温度	0°C

光学系 II の特徴は光学系サイズである。光学系 I の大きさは非常に大きいため、光学系 II では装置全体の大きさを 6 m 以下という制限をかけて設計を行った。光学系 II では光学系の基本構成に制限を与えず、4 ~ 6 枚で構成するように設計した。さらに、光学系 II は縮小率を 50% 以下になることを目標とし、GLAO の後に続く光学系を気にしつつ設計を行った。

3.4.2 設計結果

表 3.4 を基に設計を行った結果が図 3.17 である。図 3.17 では、前節の結果のように TMT の望遠鏡光学系の部分は同じであるため、TMT 部分は省略し、ナスミス焦点から補償光学系部分の光学設計を拡大して表示している。

TMT の焦点からの光は直径 $\phi 1700$ mm のコーニック面である M1 に当たる。M1 はオフセットしており、直径として表示している値は光が当たっている部分の径である。また、M1 のコーニック定数は $k = -0.8$ であり、楕円面である。M1 で反射後、 $\phi 300$ mm の DM に当たる。DM 反射後、M2 ~ M4 の拡張多項式面で反射され、最終像面で結像する。最も大きいミラーは M4 の $\phi = 2100$ mm である。光学系 II の光学系全体の大きさは $4.5 \times 4.3 \times 2$ m である。

3.4.3 評価

図 3.17 の性能について評価を行う。波長 $0.8 \mu\text{m}$ における最終像面でのスポットダイアグラムは図 3.18 となり、それぞれの視野方向のスポットの二乗平均平方根 (RMS) 半径と最大の半径を表わす幾何学的 (GEO) 半径は表 3.5 となる。また、同じく波長 $0.8 \mu\text{m}$ における最終像面での波面マップは図 3.19 のようになり、それぞれの視野方向の波面の RMS 値と PTV (Peak To Valley) 値は表 3.6 のようになる。図 3.18 のスポットダイアグラムの結果を見ると、回折限界よりは大きく、図 3.19 の結果をみても $\text{PTV} \leq 3.4\lambda$ と結像性能は光学系 I と比べると悪い。

ここで、中心視野光束に対する最大瞳収差ずれを評価すると図 3.20 のような結果になる。図 3.20 より、光学系 II の場合、中心視野光束に対する最大瞳収差ずれは 8.76% も存在する。この瞳収差ずれでは約 3 素子分ものズレが生じてしまう。

表 3.5: 光学系 II のスポットダイアグラムの RMS 半径と GEO 半径

視野	RMS 半径 [μm]	GMS 半径 [μm]
①	24.8	51.0
②	38.3	70.2
③	24.7	50.5
④	29.4	48.5
⑤	52.9	129.7
⑥	36.2	100.0
⑦	25.7	52.0
⑧	39.7	84.2
⑨	57.0	169.1
⑩	24.0	59.8
⑪	44.0	127.0
⑫	32.1	87.0

表 3.6: 光学系 II の波面マップの RMS 値と PTV 値

視野	RMS 値 [λ]	PTV 値 [λ]
①	0.23	1.2
②	0.28	1.2
③	0.23	1.2
④	0.29	1.3
⑤	0.40	2.2
⑥	0.28	1.5
⑦	0.19	0.9
⑧	0.38	2.3
⑨	0.49	3.4
⑩	0.22	1.3
⑪	0.34	2.5
⑫	0.23	1.3

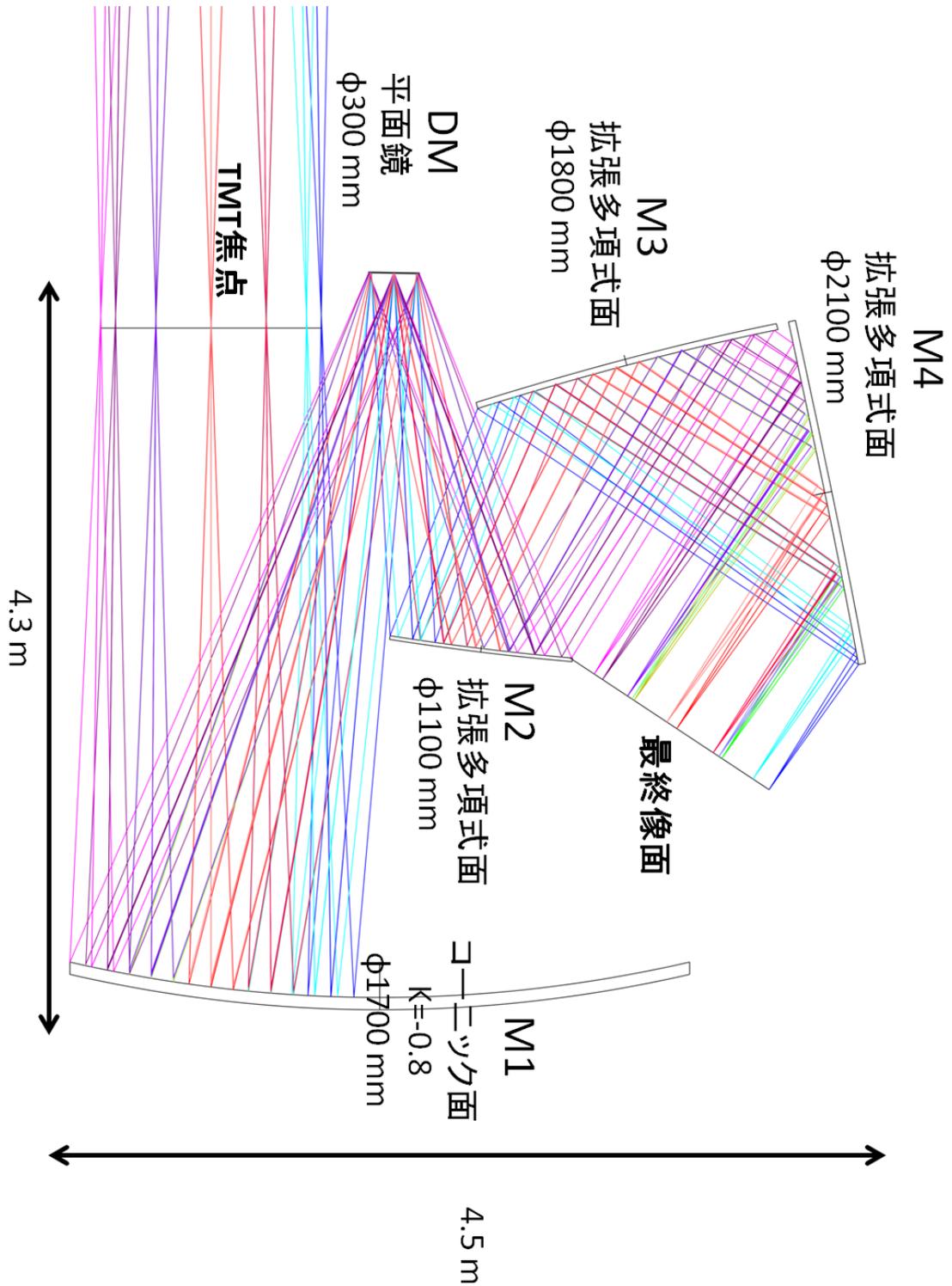


図 3.17: 光学系 II の光学設計 (GLAO 拡大図)

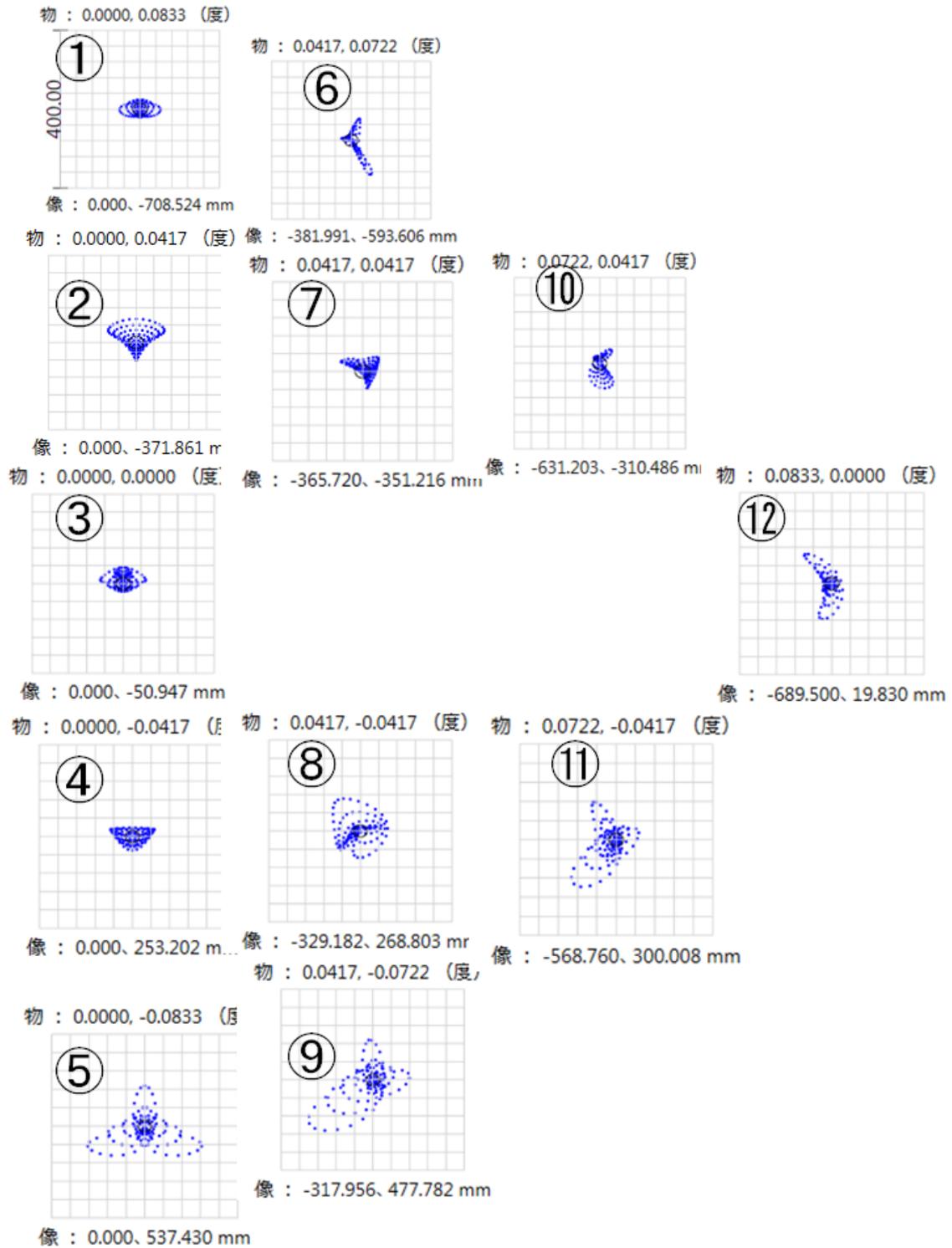


図 3.18: 光学系 II の最終像面のスポットダイ I アグラム

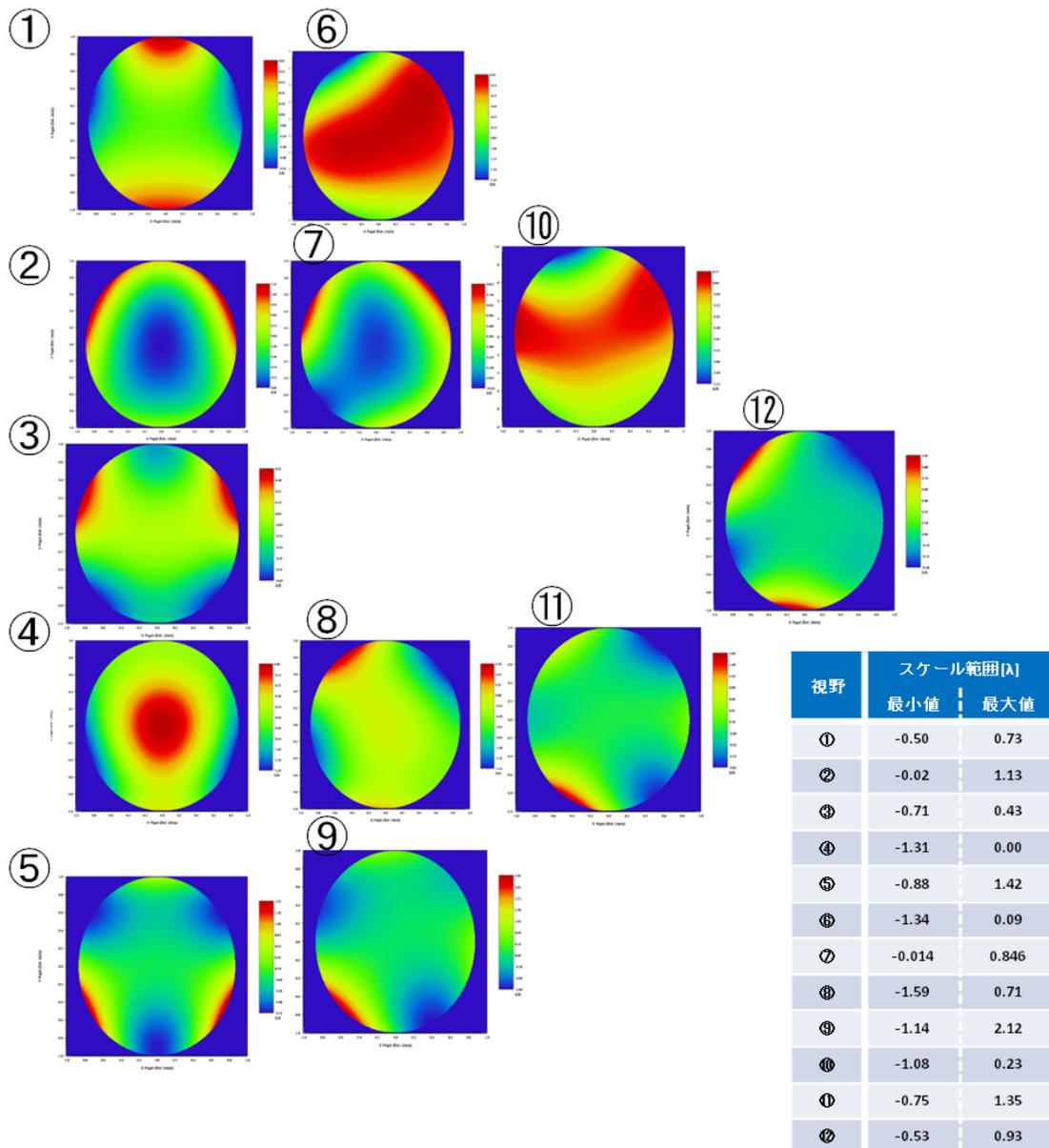


図 3.19: 光学系 II の最終像面の波面収差マップ

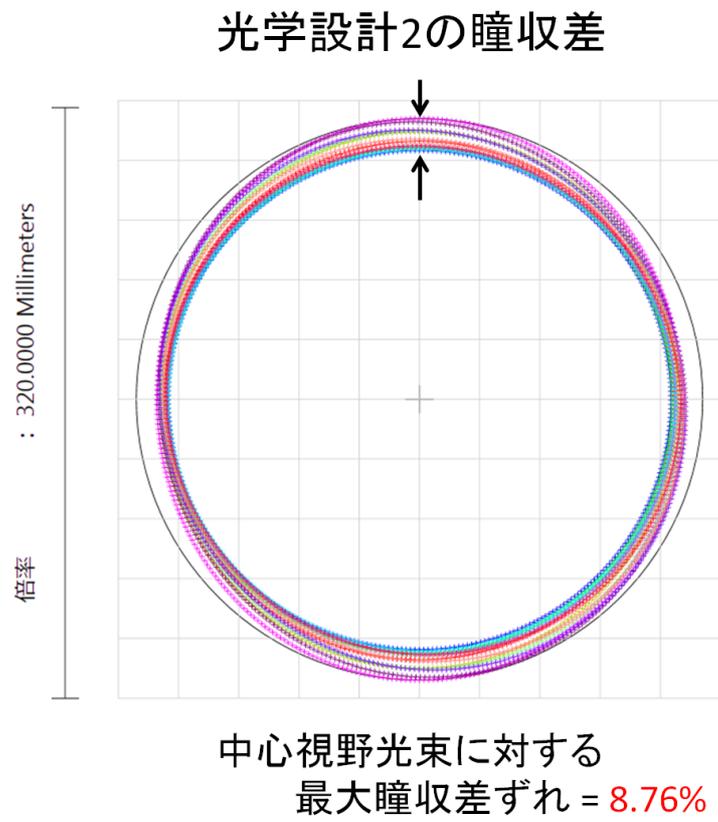


図 3.20: 光学系 II の中心視野光束に対する最大瞳収差ずれ

3.4.4 光学系 II の設計についての考察

光学系 II の光学系の目標仕様と設計結果をまとめると表 3.7 のような結果になる。

表 3.7: 光学系 II の目標仕様と設計結果の比較

	目標仕様	設計結果
波長域	0.8 ~ 2.5 μm	0.8 ~ 2.5 μm
視野	$\phi 10$ 分角	$\phi 10$ 分角
物体距離	無限遠	無限遠
ミラー枚数	4 ~ 6 枚	5 枚
DM サイズ	$\phi 400$ mm 以下	300 mm
瞳収差	$\leq 3.3\%$	8.76%
光学系サイズ	6 m 立方	4.5 \times 4.2 \times 2.0 m
縮小率	0.5	0.95
光学系温度	0°C	0

表 3.7 の結果、光学系の大きさが 6 m 立方以内に収まり、DM の径も小さくなったことが光学系 II の改善点である。これにより製作可能性は上がった。ただし、縮小率は良くないため、後ろに続く撮像装置や分光装置の光学系サイズが大きくなってしまふことは依然として課題である。光学系 II の設計で最も問題になる点が、最大瞳収差ずれ = 8.76% である。光学系 I と同じく、これだけ瞳収差があると GLAO として正しく機能しない。そのため、光学系 II でも 10 分角という広視野を補正することはできない。

以上の設計から、TMT 用広視野補償光学系の光学設計を行ううえで課題となる点は瞳収差を目標値以下に抑えつつ広視野を確保することである。本研究では過去の光学系をふまえてこの課題に注意しつつ新しい光学系の設計を行う。

第 4 章 新しい光学系

本章では私が設計した広視野補償光学系の新しい光学設計について説明する。前章の過去の光学系の評価から、瞳収差を抑えつつ 10 分視野を確保することが課題である。そのため、本章では基本的な設計方法と、どのように瞳収差に注意しながら設計を行ったかについてまず述べる。さらに全体の光学系の性能を考慮しながらの設計方法について述べる。そして、新しい光学系に対する性能評価を行う。

4.1 光学設計にむけて

4.1.1 仕様

新たな光学設計の設計仕様は表 4.1 とした。今回の仕様は光学系 II の仕様とほとんど変更は行わずに設計を行った。変更した点は DM のサイズを大きくし、瞳収差の影響を小さくしようとしたことである。また、主光線傾角にも仕様を与えた。主光線傾角とはそれぞれの視野方向の主光線と像面のなす角を表している。主光線傾角が大きいと GLAO の後に続く光学設計が難しくなるため、目標値を設定した。

これらの設計の中で特に守るべき仕様は視野 10 分角と瞳収差 $\leq 3.3\%$ である。過去の光学系ではこの仕様を満たすことが出来なかったことが問題であった。そのため、これらの仕様を満たす光学系を探すことが絶対条件である。

表 4.1: 新たな設計のための設計仕様

	仕様
波長域	0.8 ~ 2.5 μm
視野	$\phi 10$ 分角
物体距離	無限遠
ミラー枚数	4 ~ 6 枚
DM サイズ	$\phi 500$ mm 以下
瞳収差	$\leq 3.3\%$
光学系サイズ	6 m 立方
縮小率	0.5
主光線傾角	0.1°
光学系温度	0°C

4.1.2 設計方法

光学設計方法についてまとめる。

今回のような Off-axial 光学系を設計する際の設計は次のような手順で行っていくのが一般的である [62]。まず、1) 光学系の骨組み決定する。この過程では、光学系全体の目標とする大きさ以内に何枚のレンズを配置するか、どこに配置するかを決定する。次に、2) パワー配置を決定する。パワーとは焦点距離の逆数のことで、反射系ではミラーのパワー Φ は曲率半径 R を用いて表すと式 (4.1.1) のような式で表される。

$$\Phi = -\frac{2}{R} \quad (4.1.1)$$

最終像面の像面湾曲収差をなくすためにはベッツバール条件よりすべてのミラーのパワーの合計が 0 になる必要がある。そのため、合計パワーが 0 になるようにそれぞれのミラーにパワーを配置し、像面までの光線の進み方を決定していく。次に、3) 低次収差補正である。低次収差は 1 次収差と 3 次収差のことである。低次収差補正は像面の波面形状と Zernike の波面マップとの比較を行い、スポットの形状を見ながらどの収差が効いているかを判断しながら収差補正を行う。最後に 4) 高次収差補正を行う。高次収差とは、5 次以上の収差成分である。5 次収差の判断は波面の形状を見ながら行い、面の形状に高次まで含めた面を用いて補正を行った。

近年、光学設計ソフトの ZEMAX や Code V などの高性能化が進み、昔のように光線追跡を自らの手計算で行うことが少なくなってきた。そのため、上記手順の中で紙面上で行うことは 1) と 2) だけとなり、残りは光学設計ソフトで計算を行えば良い。本研究では、どの面に凸面もしくは凹面を置くかを決めてモデルを作り、収差補正を ZEMAX の最適化を用いて光学設計を行った。

4.2 設計結果

4.2.1 DM 前の光学系

DM 前の光学系の設計を行う。今回の設計も過去の光学系である光学系 I、光学系 II を参考に DM 前にはコーニック面 1 枚のみで設計を行った。DM 前の設計で瞳収差量が決定するため、この設計は広視野補償光学にとって非常に重要である。

まず、光学系 I と光学系 II の DM 前のミラー M1 の面形状と DM 上でのフットプリントを見て比較を行う。その結果を模式図で書いたものが図 4.1 である。図 4.1 中の赤線と青線は各視野からの光線を表わしている。TMT の焦点から出た各視野からの光線は光学系 I では $k = 0$ の M1 のミラーで反射され、反射された光（実線）は DM に当たる。DM 上のフットプリントの形状を見ると、下部分では瞳収差はほとんどないが上部分では瞳収差が出ていることから、図中の DM1 の位置に DM が置かれていることが予想される。次に、光学系 II について検討する。同様に TMT 焦点から出た光は $k = -0.8$ の M1 で反射され、反射した光（点線）は DM に当たる。ここで注意しておくべきことはコーニック定数と面形状の開き方の違いについてである。 $k \leq 0$ では $k = 0$ よりも広がった面形状、 $k \geq 0$ では $k = 0$ よりもすぼんだ面形状となるため、 $k = -0.8$ の M1 と $k = 0$ の M1 のそれぞれの面での反射の仕方は図 4.1 のように異なってくる。光学系 II の DM 上でのフットプリントを見ると上部分と下部分の両方ともに大きくズレが生じており、DM の位置は図 4.1 の DM2 の位置にあることが予想される。このように DM 前をコーニック面のミラー 1 枚で設計する

場合、コーニック定数による面形状の変化の仕方と瞳収差が発生しない DM 位置と DM の傾き方を少しずつ手動で変化させて、ある程度瞳収差量が小さくなる位置まで設計を行う。ただし、DM の傾き角については DM で反射した光線が DM に入射した方向に戻らないように注意をしながら設計を行わなければならない。図 4.1 より、光が DM へ入射する方向へと DM を傾ければ瞳収差は小さくできる。これは DM に対する入射角を小さくすればなるほど、視野端から来た光の DM 上での歪みが無くなるからである。しかし、DM を傾けすぎると反射光が M1 に干渉してしまうため、DM の傾き角には制限がつく。その対策としてとられる方法が DM と M1 の間を可能な限り離すことである。すると、DM を傾けずに DM に対する入射角を小さくすることができる。しかし、これには光学系の大きさの制限がついてくる。なるべく設計仕様の光学系の大きさ内に収めつつ設計していく必要がある。

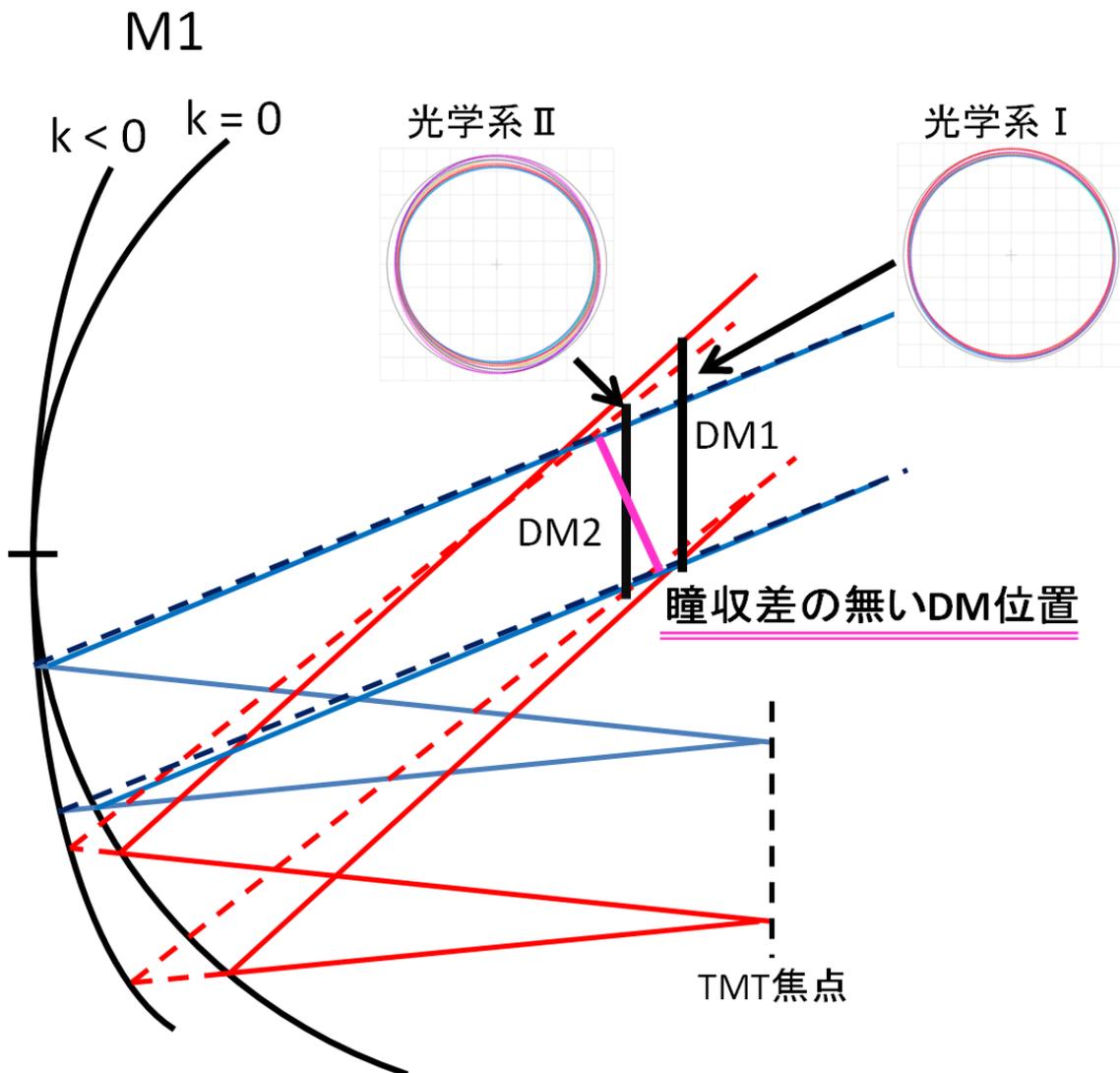


図 4.1: M1 の面形状と瞳収差の関係 (付録 C.1 参照)

瞳収差の小さいところまで手動で設計を行ったあと、ZEMAX の最適化を行う。DM 前の光学系の最適化は 3 章でも述べたように瞳光学系を用いて最適化を行う。今回の設計の瞳光学系は図 4.2 である。図 4.2 のように TMT の主鏡面上の点光源から視野 10 分角に対応する光線が射出し、DM 上で結像するような光学系が瞳光学系である。ZEMAX 上ではマルチコンフィグ機能を用いて瞳光学系を作ると、最適化を両方の光学系に行えるため便利である。瞳光学系の最終像面（DM 位置）でのスポットが最小になるようにパラメータを選択し、最適化を行った。その結果、完成した光学系は図 4.3 である。

図 4.3 より DM の大きさは $\phi 500$ mm となった。幾何光学の横倍率に関する式から DM の大きさが大きくなればなるほど DM に入射する光線の傾きが緩くなる。また、DM に入射する光線の傾きが緩くなれば瞳収差は小さくなる。そのため、DM 径を過去の光学系よりも大きくすることで瞳収差を低減するように光学系を設計した。

ここで、図 4.3 の DM 上でのフットプリントを見ると図 4.4 のようになる。結果、新しい光学系の中心視野光束に対する最大瞳収差ずれは 3.06% となった。

中心視野光束に対する最大瞳収差ずれ = 3.06%

さらに、フットプリント上部が最も瞳収差が大きかったが、それ以外の左、右、下部分の最大瞳収差ずれも測定すると以下ようになる。

- 上 = 3.06%
- 右 = 0.91%
- 左 = 0.88%
- 下 = 0.65%

これより、全体的に瞳収差ずれは小さいことが分かる。

ただし、図 4.3 の設計では DM と M1 の間の距離を 8.5 m 離さなければ瞳収差 3.3% 以下を満たすことができなかった。仕様では 6 m 立方の光学系を目指していたが、その条件は緩めなければならなかった。しかし、8.5 m は NFIRAOS と同程度の装置になることが予想されるため、製作可能として設計を進めた。

ここで、DM 前までの波面形状を見て、発生している収差について調べる。その方法としては DM を反射後に理想レンズを入れて像面での波面マップを見ることで行う。DM 後に理想レンズを入れた光学系とそのときの波面マップは図 4.5 と図 4.6 のようになる。また、各視野に対する波面の RMS 値と PTV 値をまとめると表 4.2 のようになる。図 4.6 の結果から、波面の形状を見るとどの視野でも似た波面形状をしており、さらに波面の形状と Zernike 多項式を比較する（付録 C 参照）と、コマ収差が支配的になっていることが分かる。波面形状の Zernike 多項式との比較は ZEMAX の「ゼルニケ フリンジ係数」の機能を使うと分かりやすい。よって、図 4.6 では視野毎に異なった収差成分を持っていたり、高次収差成分を含んでいるわけではないため DM 後のミラーで十分に補正できると考え設計を進めていく。

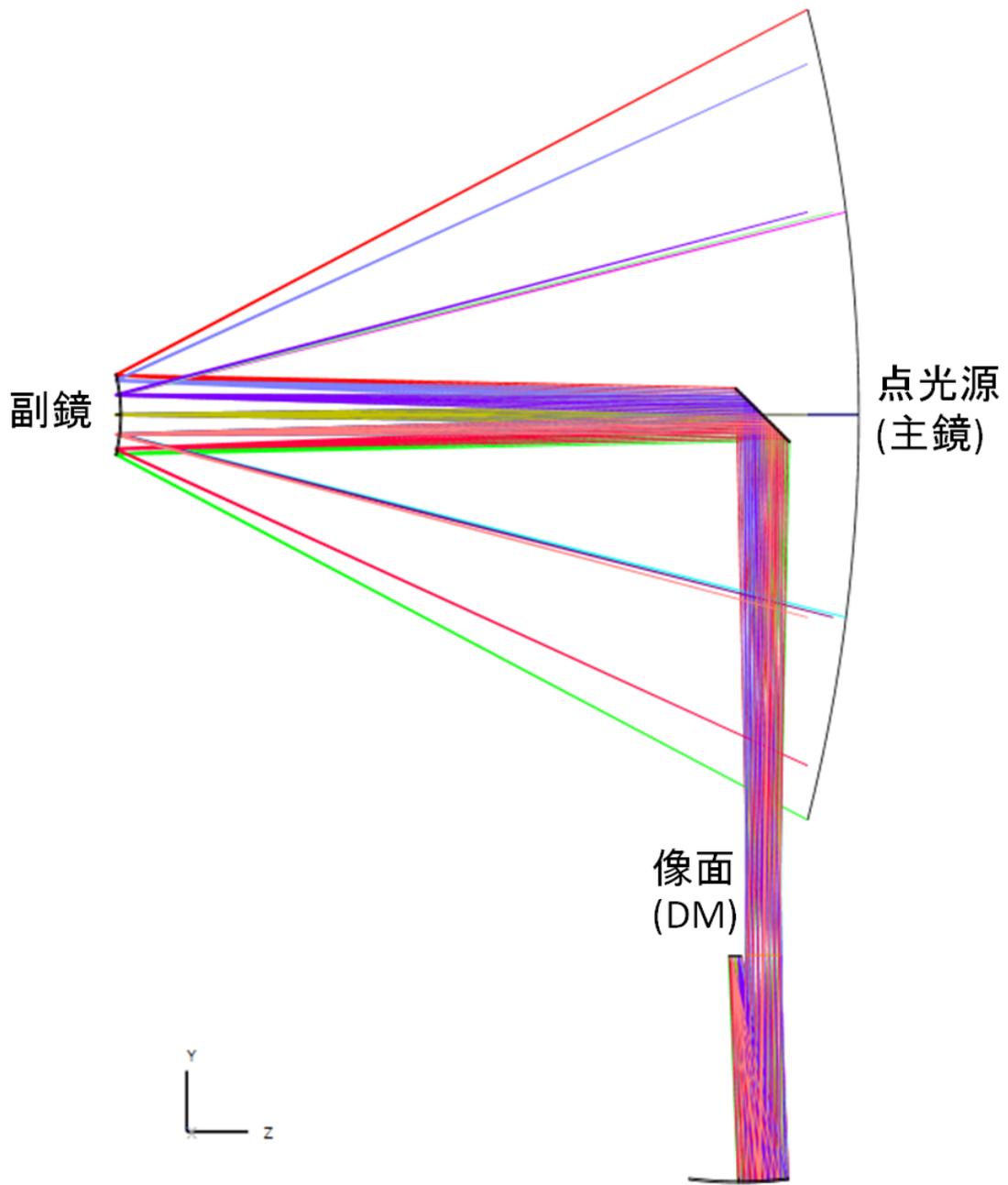


図 4.2: 瞳光学系

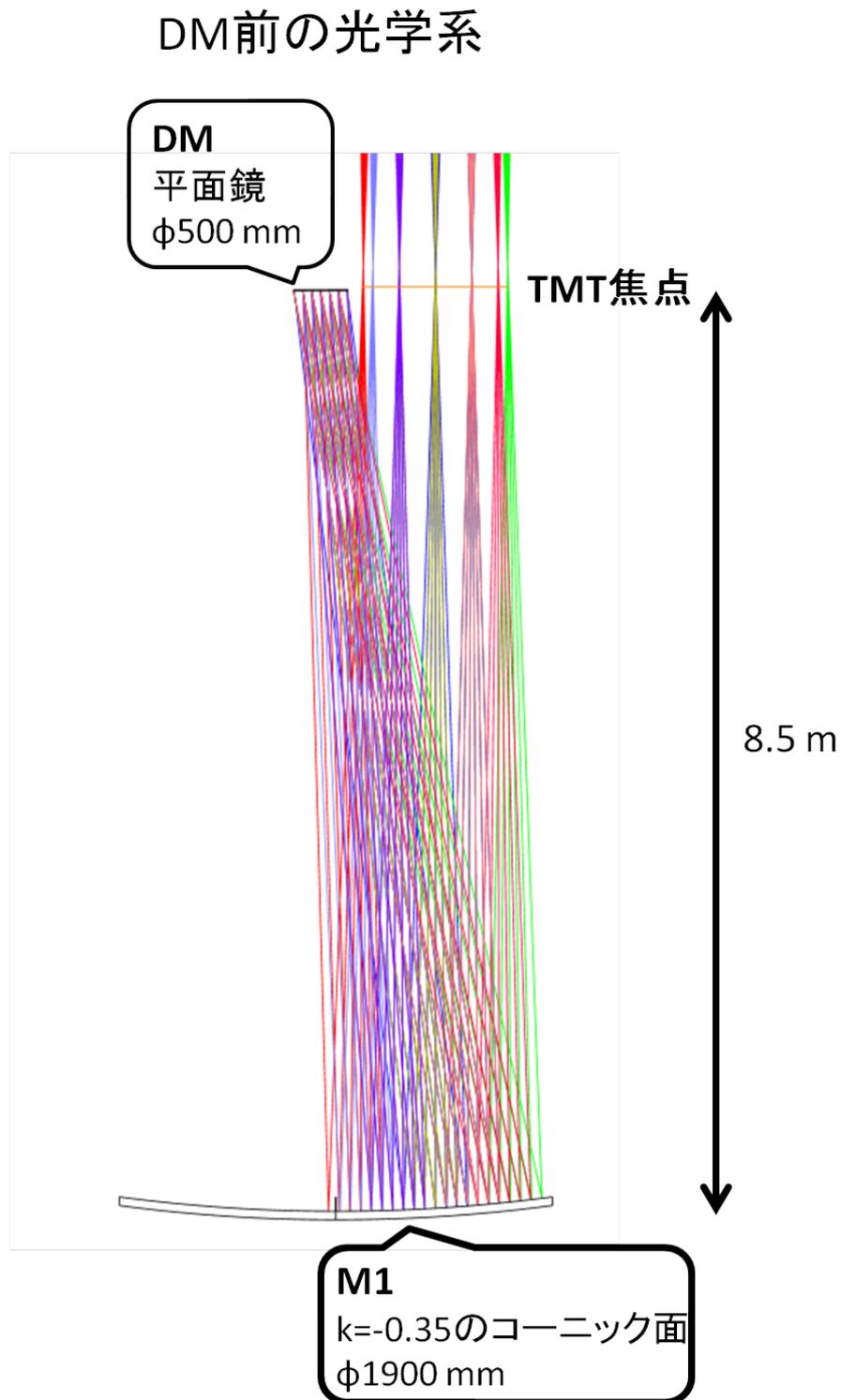
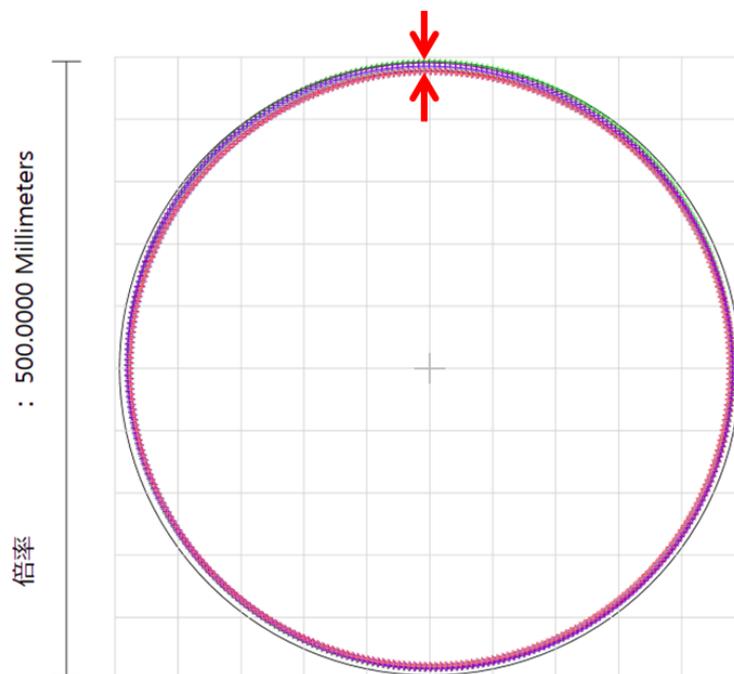


図 4.3: DM 前までの光学系 (GLAO 部分拡大図)

DM上でのフットプリント



視野中心光束に対する
最大瞳収差ズレ = 3.06%

図 4.4: DM 上のフットプリント

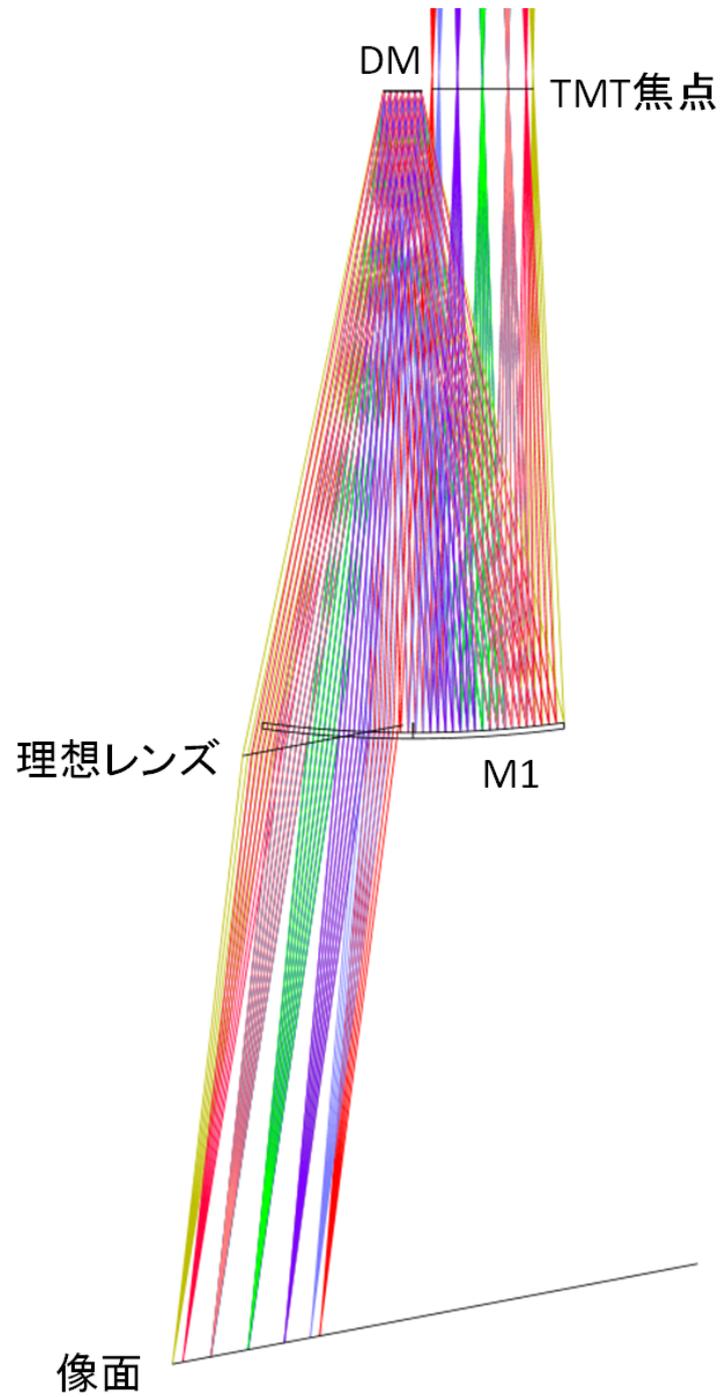


図 4.5: DM 後に理想レンズを入れた光学系

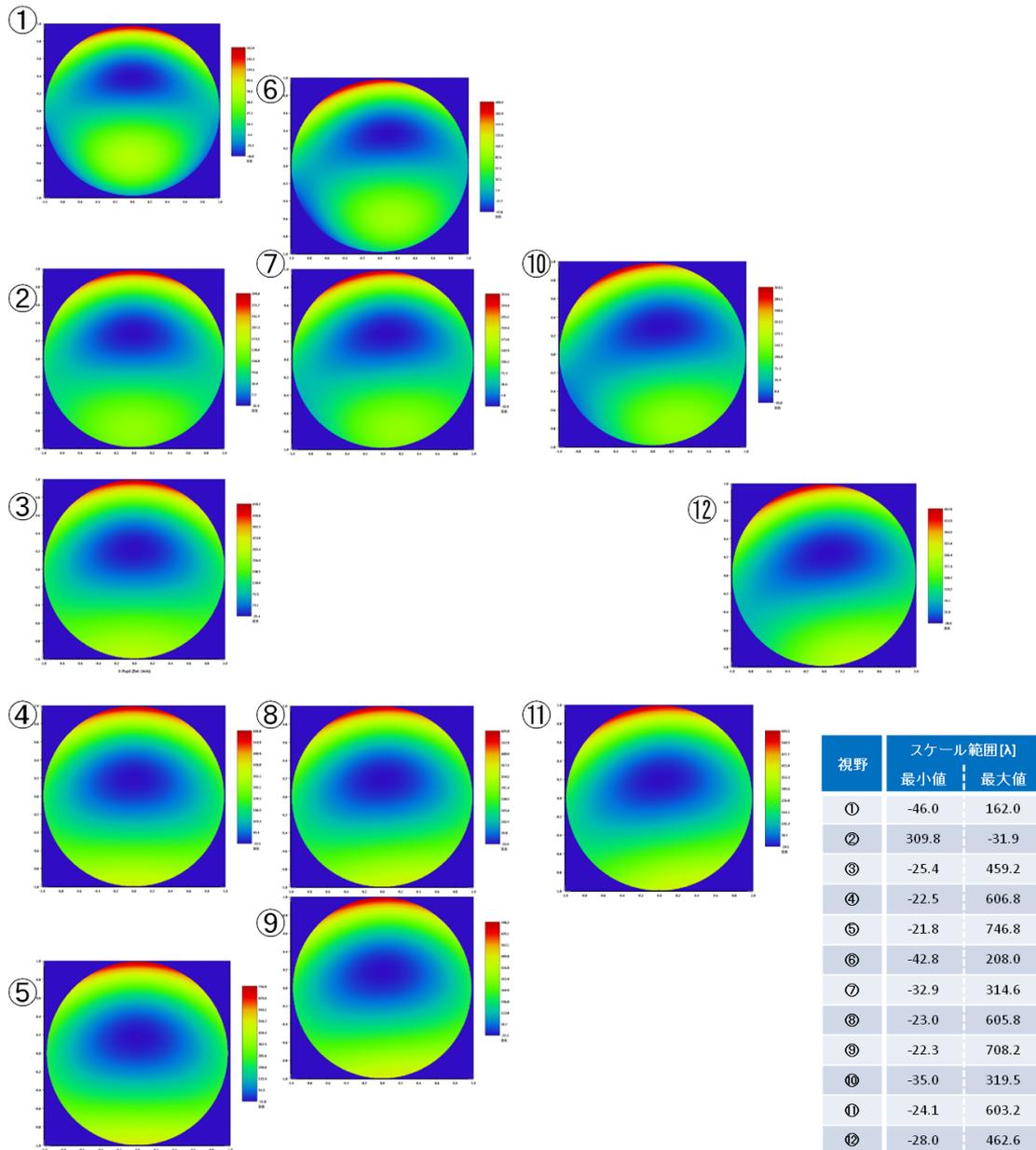


図 4.6: 理想レンズ後の像面の波面マップ

表 4.2: 理想レンズ後像面の波面マップの RMS 値と PTV 値

視野	RMS 値 [λ]	PTV 値 [λ]
①	37.1	207.9
②	61.6	341.7
③	92.7	484.6
④	124.5	629.3
⑤	154.8	768.6
⑥	44.4	250.8
⑦	62.7	347.5
⑧	124.2	628.7
⑨	146.3	730.4
⑩	64.8	354.5
⑪	123.5	627.2
⑫	93.6	490.6

4.2.2 DM 後の光学系のモデル

前節で DM 前までの光学系は完成した。この節では DM 後のミラー配置について考える。

まず、DM 後のミラーの枚数について決定する。3 章でも述べたように最終像面で像面湾曲を無くすためにはベッツバール条件を満たさなければならない。(ベッツバール条件については付録 B.1.7 参照) DM 前の光学系が凹面で設計されているため、ベッツバール条件を満たすためには DM 後のミラーは最低 1 枚は凸面を入れる必要がある。

DM 後の光学系をミラー 1 枚で設計しようとした場合、DM の後のミラー M2 は凸面でなければならない。しかし、M2 が凸面であると、最終像面の縮小率を小さくすることがむずかしくなるうえ、像面位置を光が干渉しない位置に配置することが難しい。さらに DM 前で発生しているコマ収差をミラー 1 枚で直しつつ像面の性能を良くすることも難しい。そのため、DM 後にミラーを 1 枚しか置かない設計は考えないことにした。

次に、DM 後の光学系のミラー枚数を 2 枚で構成した場合について考える。DM 後のミラーが 2 枚になった場合、DM の直後のミラー M2 か 2 番目のミラー M3 のどちらかが凸面にならなければならない。M2 を凸面とした場合、M3 の配置が難しくなる。M2 が凸面のため、光束は広がりながら進む。すると、M3 のミラー径が大きくなるうえ、M3 を M2 に入射する光線とかぶらない位置に配置することが難しくなる。そのため、M2 を凸面とすることは難しいと判断した。次に M3 を凸面とした場合、像面の前のミラーが凸面となってしまい縮小率が悪くなる。DM 前の光学系で 8.5 m 以上の光学系になることが決まっているため、なるべく縮小率を良くして GLAO 後の撮像系や分光系の光学系を小さくすべきである。そのためには像面前のミラーを凸面にするのは得策ではない。以上のことから DM 後の光学系をミラー枚数 2 枚で構成することも難しいと判断した。

最後に DM 後の光学系のミラー枚数を 3 枚で構成した場合について考える。ミラー 2 枚で構成するときの考察のように、DM 直後と像面前のミラーは凸面にしにくい。そのため、中間にある

M3 を凸面として構成することにする。次に、M2,M4 を凹面、M3 を凸面にした場合、光学系の初期値としてどのような配置で M2,M3,M4 を配置していくかが重要になる。今回設計しているような光学系は従来の光学理論では説明できず、考えうる全てのモデルを試し、シミュレーション実験のように解を探していく必要がある。そこで、M2,M3,M4 をオフナー光学系のようなモデルで試すことを考えた。前述のようにオフナー光学系はミラーの軸が共軸であり、その軸に対してミラーが対称に配置されているためバランスの良い光学系となっている。今回は M3 をオフナーの瞳位置となる第二鏡として考え、M3 と同じ軸上に曲率中心がくるように M2、M4 を配置したモデルを考えた。実際に考えうるモデルは図 4.7 である。

図 4.7 について説明する。まず、TMT 焦点から出た光は M1(赤色ミラー)で反射し、DM(黒色ミラー)に当たる。これはどのモデルでも同じである。その後、DM で反射した光は M2,M3,M4 (青色ミラー)の順に反射し、結像する。その際、M2,M3,M4 の軸は共軸(青点線)になるように配置する。このように配置していった場合、モデルは大きく分けて DM の左側に像面を持ってくる形と DM の右側に像面を持ってくる形の二つに分けられる。この二つの違いは M2 で反射した光が M1 から DM までの光線位置をクロスして通過するかしないかの違いである。モデルはさらに M2,M3,M4 の共軸を縦に入れるか横に入れるかの二つに分けられる。その後、モデルを変化させていく過程で、曲率中心を固定点として M3 を傾けた形が考えられる。そのモデルが図 4.7 中の DM の左に像面があり軸を縦に入れた場合と DM の右側に像面があり軸を縦に入れた場合の二つのモデルである。軸を横に入れた場合で M3 を回転させたモデルが描かれていない理由は、軸を横に入れた場合のモデルで M3 を傾けると像面が内側に入ってきてしまい、像面が配置しにくく、GLAO 後の光学系の配置が難しくなるためである。図 4.7 中に書かれているモデルを初期値として入れて最適化を行い、光学系の解を探った。

4.2.3 新光学系

図 4.7 のモデルを全て設計し、最適化をかけて光学設計を行ったところ、完成した光学系は図 4.8 である。新しい光学系は図 4.7 の中の像面が右側、軸を横に入れた光学系を発展させた光学系である。

新しい光学系は DM 後に 3 枚のバイコーニックゼルニケ面を通過し結像する光学系である。M2,M3,M4 とともにバイコーニックゼルニケ面の高次項は 4 次までしか入れていない。図 4.8 中のバイコーニックゼルニケ面中に書かれている k_x, k_y はそれぞれ面の x 方向、y 方向のコーニック定数である。新光学系で用いられている最も大きいミラーは M4 のバイコーニックゼルニケ面で直径 $\phi 2300$ mm である。新光学系全体の大きさは $8.5 \times 6.1 \times 2.5$ m と NFIRAOS 同程度の大きさとなった。新光学系の特徴は縮小率の小ささにある。新光学系の縮小率は 23% と非常に小さい。GLAO の光学系自体の大きさは大きいですが、GLAO の後に続く光学系は小さくすることができる。

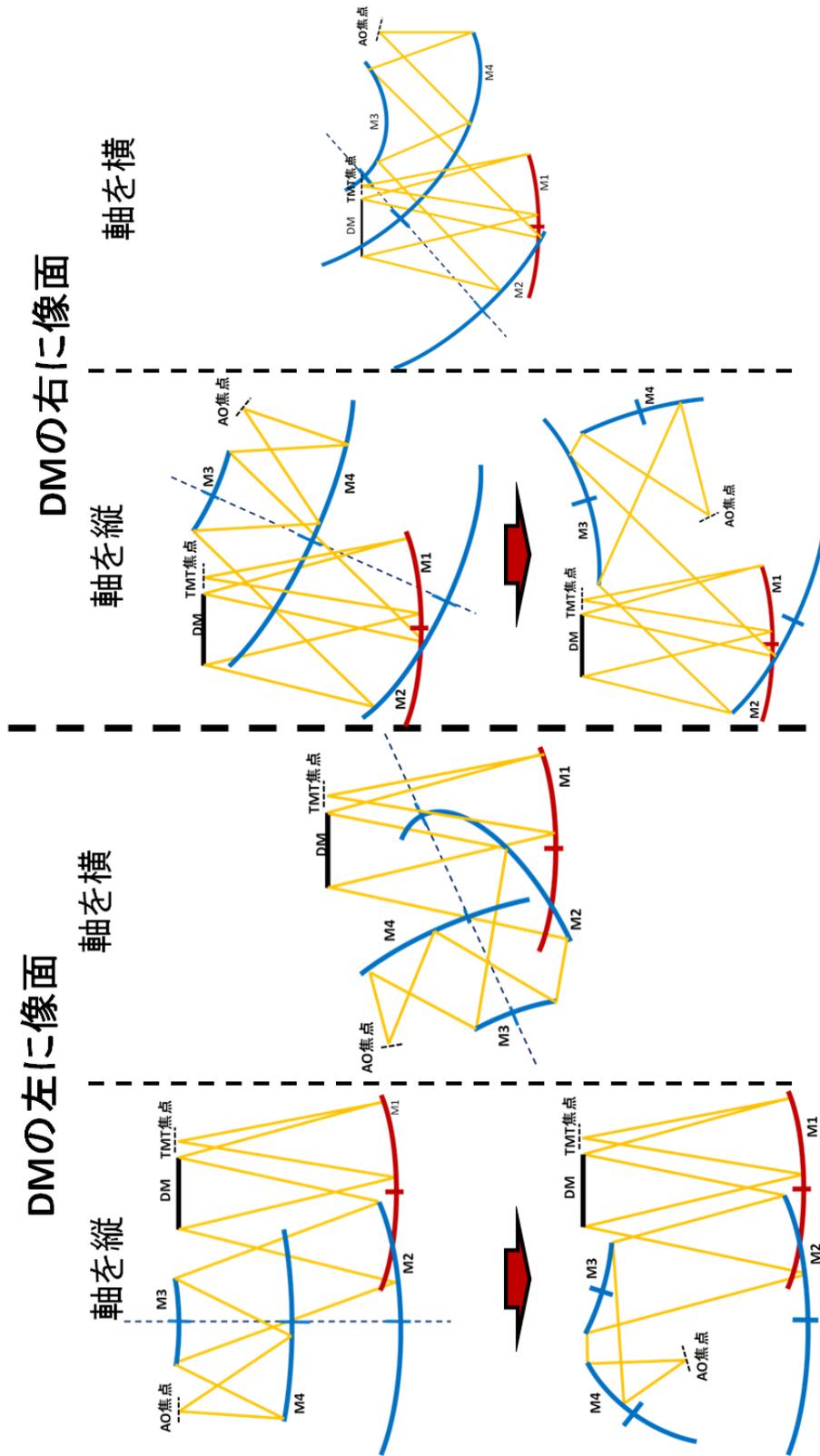


図 4.7: ミラー 3 枚での設計モデル

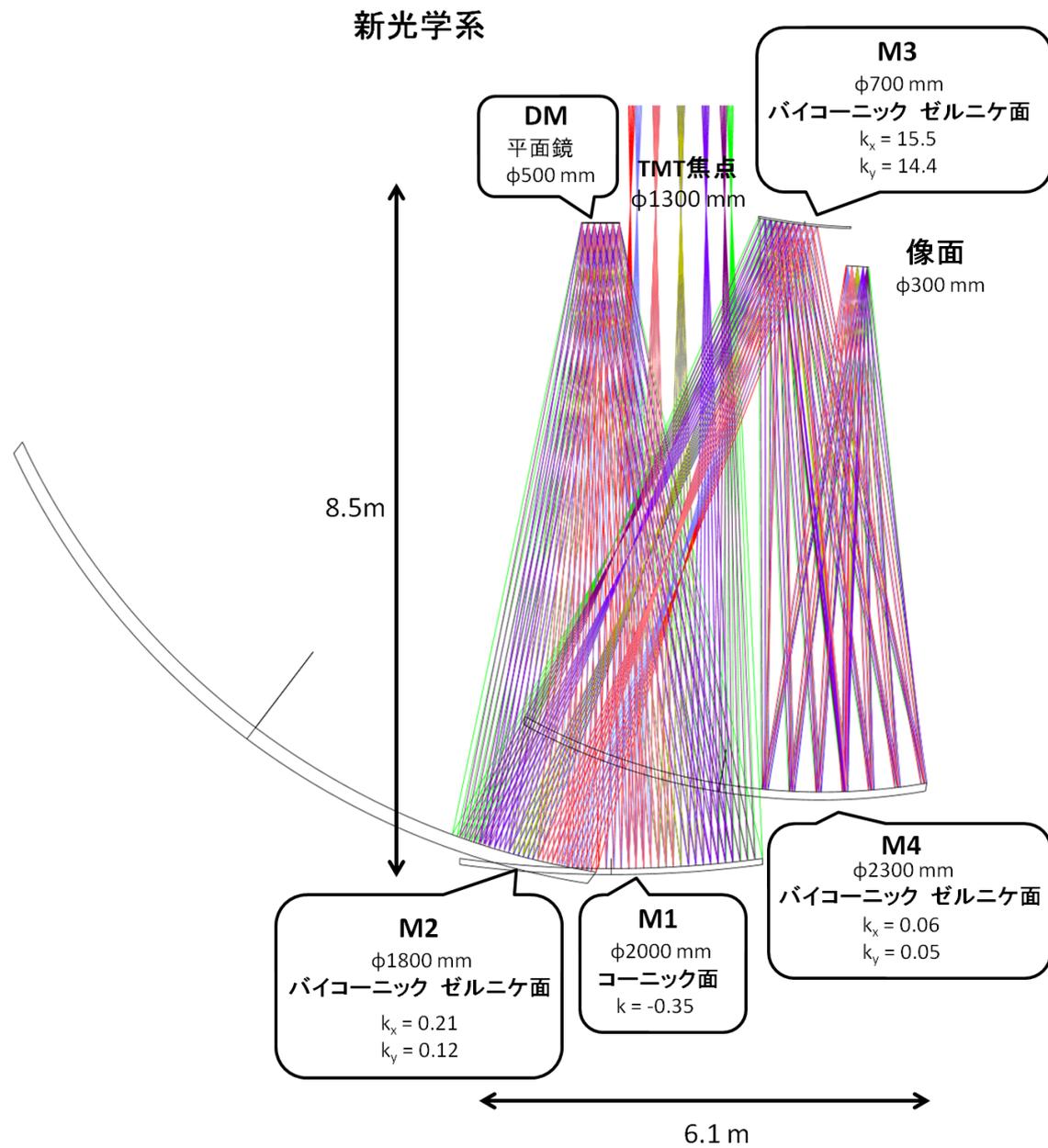


図 4.8: 新しい GLAO の光学設計

4.2.4 新光学系の評価

新光学系の最終像面の評価を行う。最終像面でのスポットダイアグラムと波面マップを評価すると、図 4.9 と図 4.10 のようになる。また、スポットサイズの各視野ごとの RMS 半径と GEO 半径をまとめると表 4.3 のように、波面マップの各視野ごとの RMS 値と PTV 値をまとめると表 4.4 のような結果になる。

表 4.3: 波長 $0.8 \mu\text{m}$ における新光学系の最終像面でのスポットダイアグラムの RMS 半径と GEO 半径

視野	RMS 半径 [μm]	GEO 半径 [μm]
①	5.83	13.2
②	7.90	20.1
③	8.32	21.1
④	4.52	6.8
⑤	9.40	17.5
⑥	6.00	13.5
⑦	8.00	17.4
⑧	7.30	13.6
⑨	8.94	16.1
⑩	9.35	16.9
⑪	9.87	18.3
⑫	11.4	21.0

まず、スポットダイアグラムを見る。波長 $0.8 \mu\text{m}$ での新光学系の回折限界は

$$\text{エアリー半径} = 3.209 \mu\text{m} = 0.0067'' \quad (4.2.2)$$

であり、図 4.9 中には黒丸で表示されている。回折限界の値と表 4.3 の結果を比較すると、どの視野においても回折限界近くのスポット径になっていることが分かる。そのため、スポットダイアグラム上では結像性能が良いことが分かる。また、図 4.10 より波面マップを見ると、どの視野においても波面 PTV 値は 2.65λ 以下になっていることが分かる。波面の PTV 値をどこまで下げるべきかという問題は GLAO の後ろにくる光学系で決まってくる。現段階ではそこについて決まっていないが、今回の設計では十分に波面の PTV 値は小さいため問題はないとした。

以上の結果から結像性能は良いことが分かった。

表 4.4: 波長 $0.8 \mu\text{m}$ における新光学系の最終像面での波面マップの RMS 値と PTV 値

視野	RMS 値 [λ]	PTV 値 [λ]
①	0.24	1.44
②	0.15	0.63
③	0.15	0.93
④	0.13	0.94
⑤	0.41	2.58
⑥	0.29	2.26
⑦	0.23	1.37
⑧	0.22	1.35
⑨	0.31	2.49
⑩	0.40	2.65
⑪	0.32	2.40
⑫	0.40	2.38

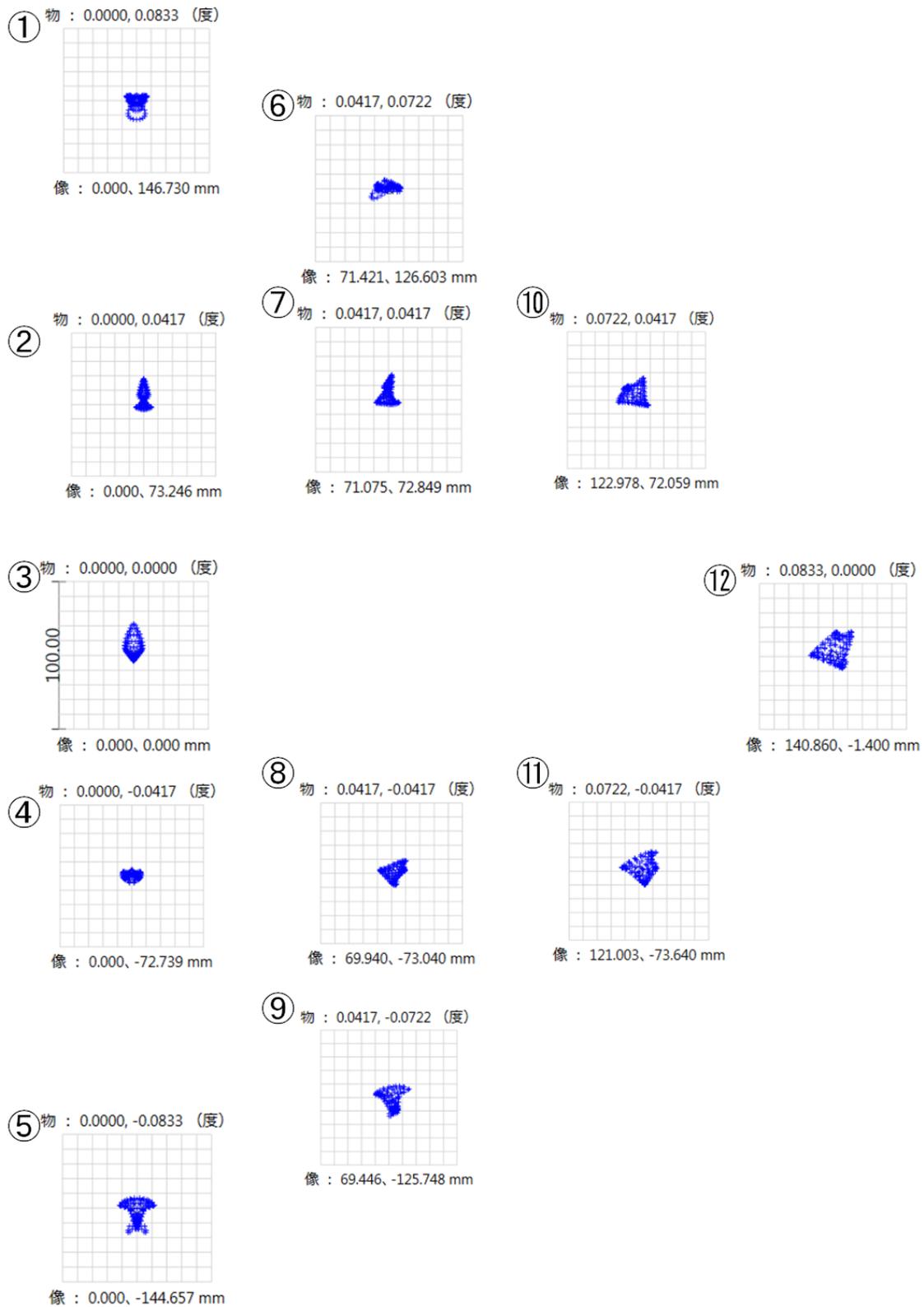


図 4.9: 新光学系の像面のスポットダイアグラム

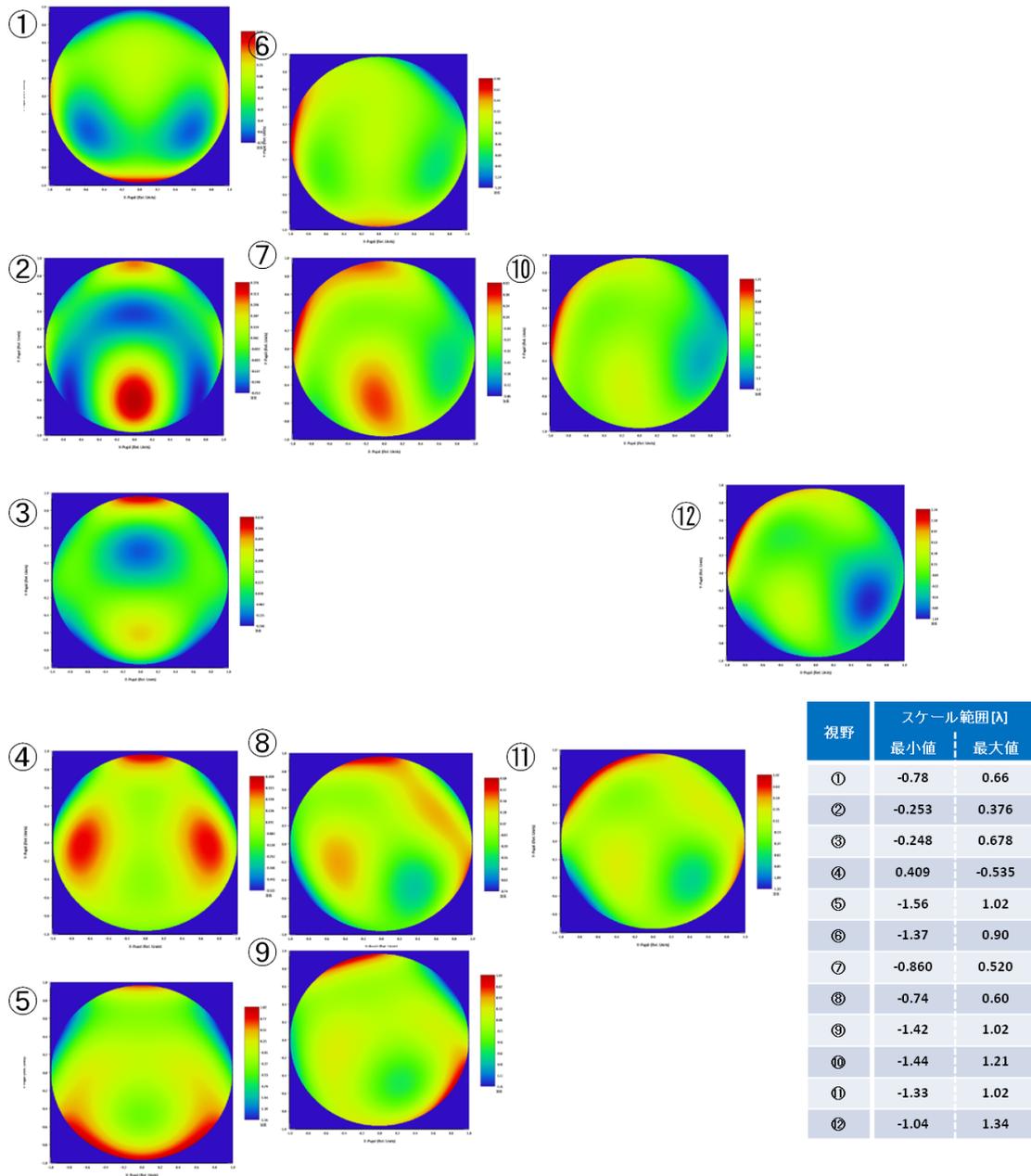


図 4.10: 新光学系の像面の波面マップ

4.3 新光学系についての考察

新光学系の設計仕様と設計結果を比較すると、表 4.5 のようになる。

表 4.5: 新光学系の設計仕様と設計結果の比較

	仕様	設計結果
波長域	0.8 ~ 2.5 μm	0.8 ~ 2.5 μm
視野	$\phi 10$ 分角	$\phi 10$ 分角
物体距離	無限遠	無限遠
ミラー枚数	4 ~ 6 枚	5 枚
DM サイズ	$\phi 500$ mm 以下	$\phi 500$ mm
瞳収差	$\leq 3.3\%$	3.06%
光学系サイズ	6 m 立方	8.5 \times 6.1 \times 2.5 m
縮小率	0.5	0.23
主光線傾角	0.1°	3.5°
光学系温度	0°C	0°C

新光学系の最大の特徴は瞳収差を目標値である 3.3%以下に抑えた広視野光学系が設計できたことである。過去の光学系では瞳収差が目標値以下の光学系が作れていなかったため、今回の設計で光学解があることが分かった。また、前節で述べたように回折限界程度までスポットサイズが小さいため、光学系の性能としては非常に良い。さらに縮小率が良くなったことがこの光学系の利点である。縮小率が小さくなることで GLAO の後にくる光学系を小さくすることができ、さらに安価にすることができる。

それに対し、新光学系の課題の一つは光学系の大きさを仕様程度まで抑えることである。しかし、新光学系の大きさは DM 前までの大きさでほぼ決まっており、DM 前にミラー 1 枚の配置で設計を行う場合にはこれ以上の光学系サイズの縮小は見込めない。光学系サイズを仕様程度まで小さくするには DM 前のミラー枚数を増やして光線をたたみこむような形にして光学系サイズを小さくするしか方法はないと考えられる。ただし、このときに注意すべきことは DM 前にミラーが増えれば増えるほど、DM 前で高次収差が発生してしまう恐れがあり、その収差を DM 後のミラーで補正しようとするとう DM 後のミラー枚数まで増えてしまうことになる。また、ミラー枚数が増えれば増えるほど光学系の効率にも注意をする必要がある。

また、主光線傾角も良くすべきである。主光線傾角が悪いと GLAO の後の光学系の設計が難しくなり、それが収差の原因となりうる。新光学系では M4 上で再び瞳のようになってしまっているため、像面の主光線傾角を良くできる光学要素は M4 のみである。M4 の面形状を変更し、主光線傾角が良くなるように光学系の最適化を行ったが、結果は上手くいかなかった。そのため、像面の前にフィールドレンズを入れる必要がある。フィールドレンズとは像付近に配置し、光の進行方向を変えるレンズのことである [68]。本研究では、フィールドレンズを入れた光学系の設計も試したが、まだ上手くいっていない。

第 5 章 瞳収差の再評価

これまで瞳収差の目標値は DM1 素子分のズレが生じない 3.3%以下になるように設計を行ってきた。しかし、GLAO としての性能を評価する上では実際に大気の位相パターンから瞳収差の影響を評価する必要がある。瞳収差量が 3.3%以下であっても、GLAO の補正性能に影響を与える瞳ずれが存在していたら GLAO として正しく機能しない。そのため、改めて新光学系の瞳収差ズレ量が GLAO の補正性能に与える影響について再評価する。

5.1 再評価方法

再評価方法を模式的に表わした図が図 5.1 である。再評価方法はまず各視野毎にどのように DM 上でフットプリントが歪むかを計算する。図 5.1 のように ZEMAX プログラミング言語を用いて、主鏡に 60×60 の光線を入射させ光線追跡を行い、DM 上でこれらの光線の座標位置を計測することで DM 上でのフットプリントの歪み方を計算した。次に、主鏡位置に地表層大気ゆらぎモデルを入れたことを考える。大気ゆらぎモデルはアウトースケール 30 m、フリード長 0.156 m、天頂角 0 の一層の大気モデルである。地表層大気モデルを通過した光線は主鏡像のできる DM 上で先ほど計算した歪み方で歪む。よって、各視野の瞳収差により歪んだ DM 上の大気モデル像を計算することができる。そして、ここでは全視野で重なっている部分だけを取り出し、DM 上の平均波面を計算し、それが GLAO の DM で補正されると考える。最後に各視野ごとに歪んだ大気モデル像と平均波面の引き算を行うと、GLAO で補正しきれない波面残差が計算可能である。瞳収差が大きければ波面残差は大きくなり、その波面残差の値から GLAO の補正性能に関する議論を行うことができる。各視野ごとに歪んだ大気モデル像と平均波面の引き算を行った結果の例を表わした図が図 5.2 である。図 5.2 では視野 x の平均波面と瞳収差が大きく縦長に歪んだ大気モデル像との引き算を行った結果を表わしている。瞳収差が大きいと波面残差は外側に向かうに従い大きくなることが分かる。この波面残差の画像に対して高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT) を行い PSF を計算する。各視野ごとの波面残差の PSF と回折限界の PSF を比較することで瞳収差による補正性能の悪化を定量的に評価できる。以上の計算を行い、瞳収差による GLAO の補正性能への影響を考察する。

5.2 再評価結果

前節で述べたように波面残差を計算すると、図 5.3 のような結果になった。図 5.3 をみると、視野⑤や⑨で多少の構造は見られるものの、全体的にどの視野方向でも波面残差に目立った構造が無いことが分かる。よって、瞳収差は十分に小さいことが分かる。また、各視野の波面残差の RMS 値を計算すると表 5.1 のようになる。

表 5.1 より、全視野で波面残差の RMS 値は 300 nm 以下で、視野⑤と⑨を除けば 200 nm 以下と非常に小さいことが分かる。DM 上の平均波面の波面誤差の RMS 値は 3374 nm もあったのに

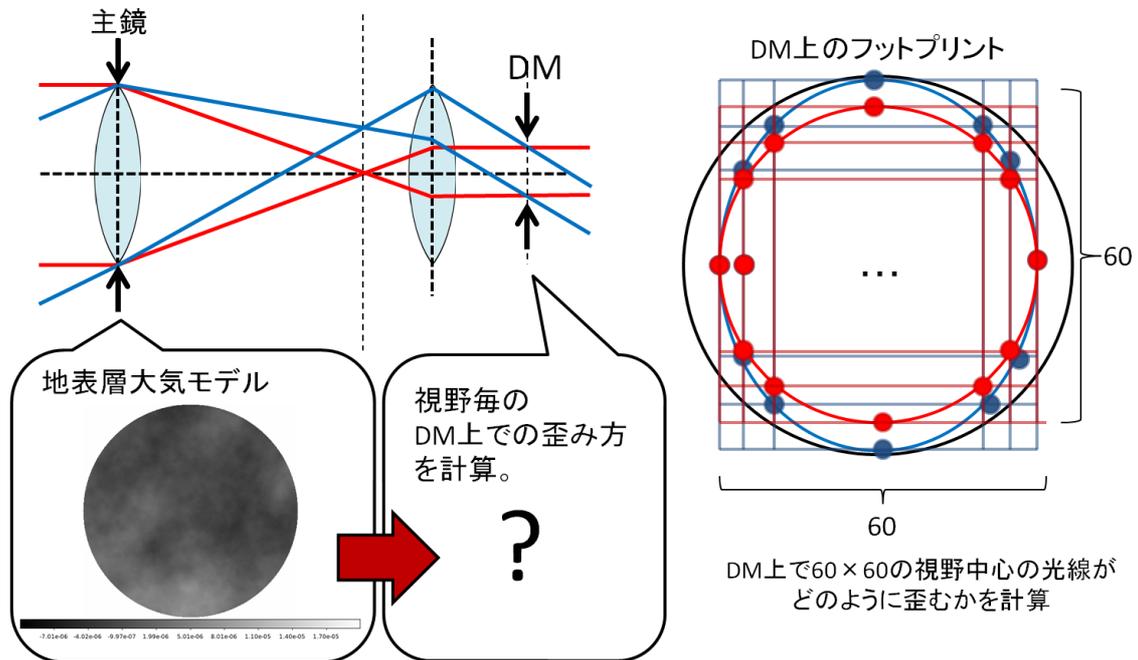


図 5.1: 瞳収差の再評価方法

対して、補正後の波面残差は十分に小さくなった。

図 5.3 の画像を 2 次元 FFT を行い、PSF を計算した結果が図 5.4 である。また、PSF の FWHM の値を計算すると表 5.2 のようになる。ただし、回折限界は $0.0067''$ である。表 5.2 の結果をみると、瞳収差量が最も存在する視野⑤でも FWHM は $0.0023''$ 悪くなるだけであり、瞳収差量の影響は小さいと言える。

さらに、図 5.4 の結果を用いてストレーラ比を計算すると、表 5.3 のようになる。GLAO では SR の劇的な向上は望めないため参考程度に載せた。表 5.3 より、視野⑤と⑨では比較的ストレーラ比は悪いものの、全視野で十分に良いことが分かる。

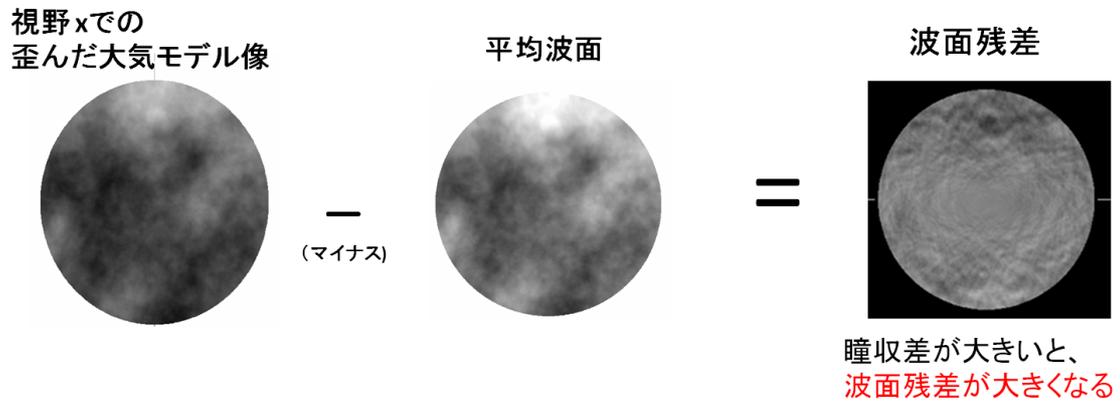


図 5.2: 歪んだ大気モデル像と平均波面の引き算を行った結果の例

表 5.1: 各視野方向の波面残差の RMS 値

視野	波面残差の RMS 値 [nm]
①	175
②	166
③	125
④	111
⑤	289
⑥	161
⑦	147
⑧	107
⑨	243
⑩	157
⑪	146
⑫	117

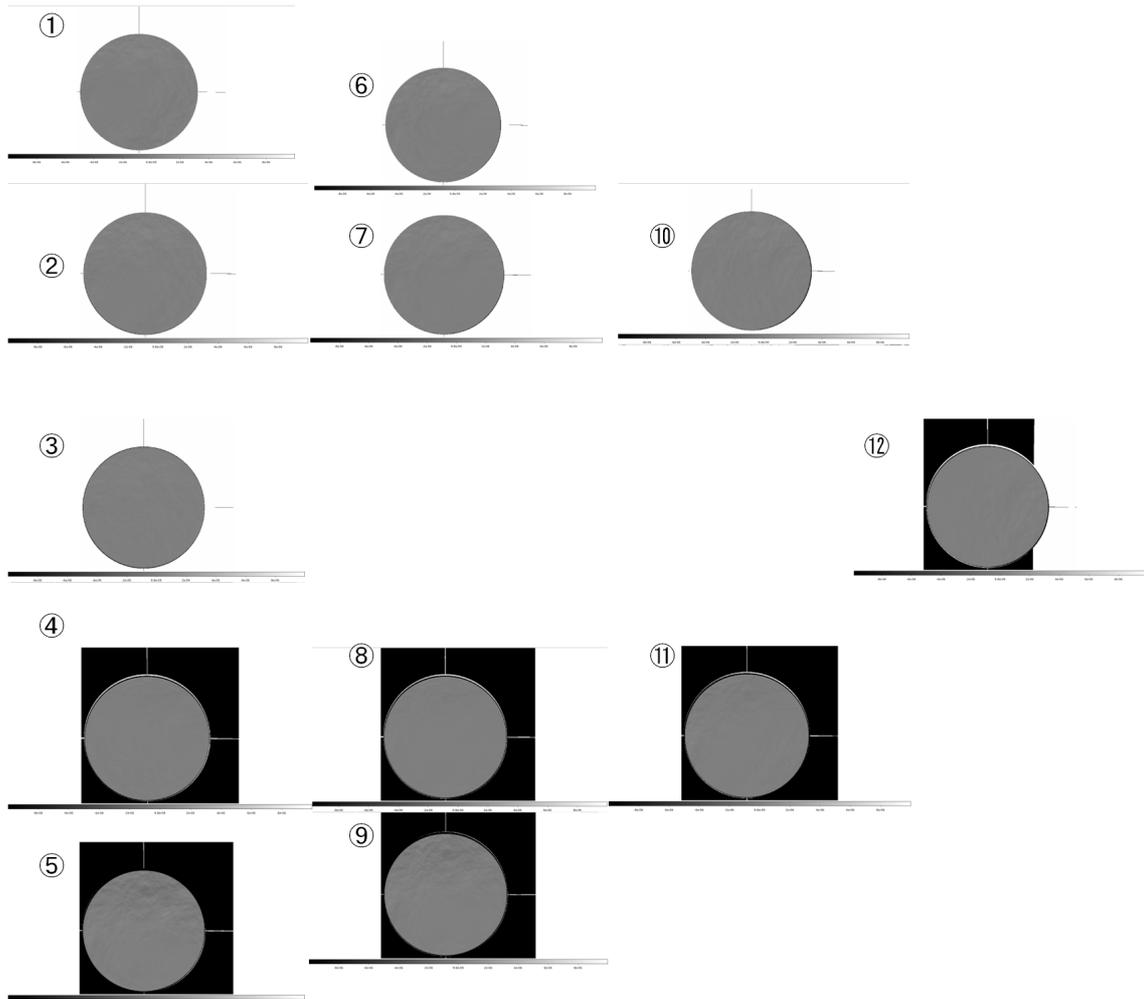


図 5.3: 各視野方向の波面残差

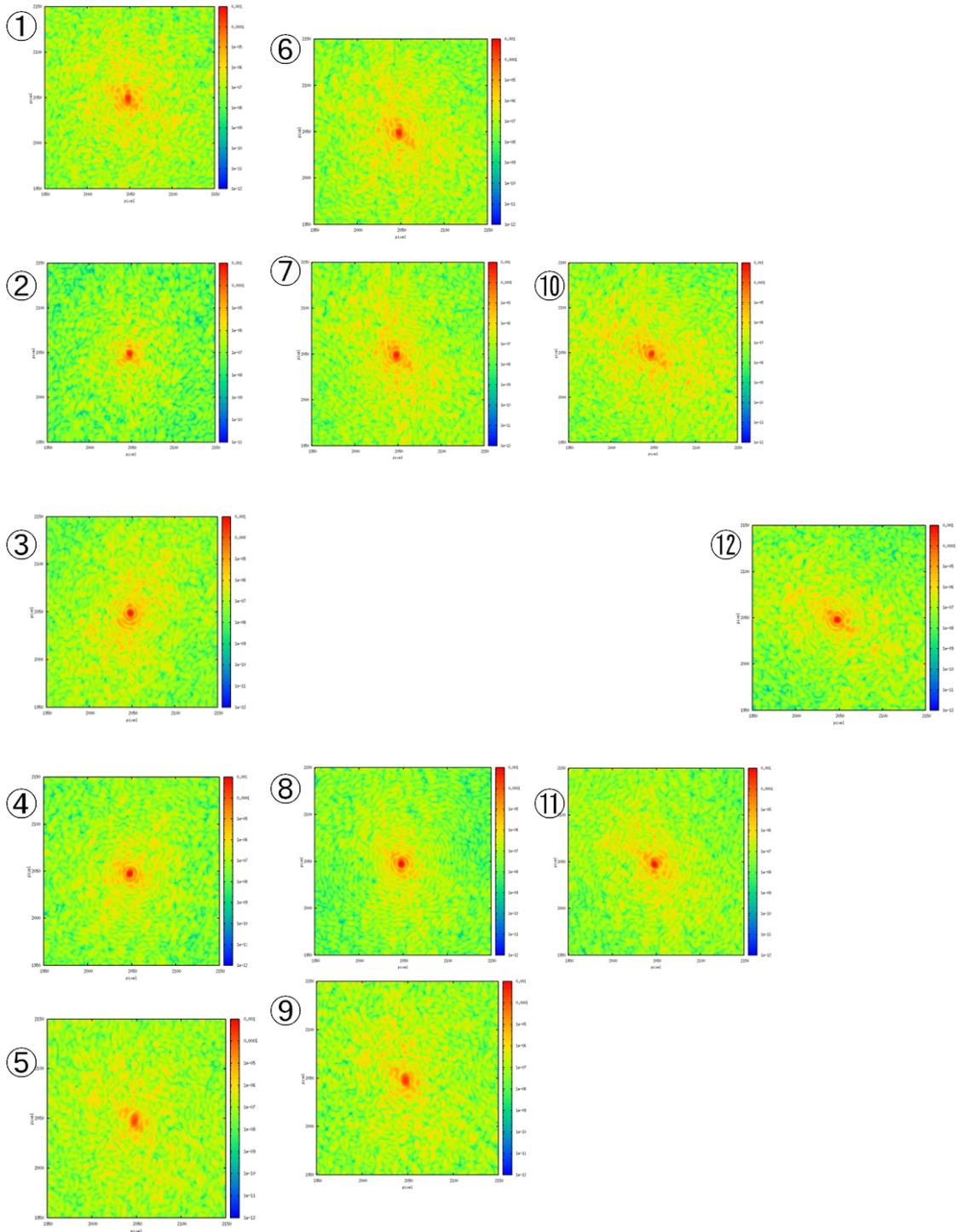


図 5.4: PSF

表 5.2: PSF の FWHM

視野	FWHM[秒角]
①	0.0075
②	0.0074
③	0.0069
④	0.0070
⑤	0.0090
⑥	0.0074
⑦	0.0073
⑧	0.0071
⑨	0.0086
⑩	0.0070
⑪	0.0074
⑫	0.0069

表 5.3: ストレール比

視野	ストレール比%			
	$\lambda = 0.8 \mu\text{m}$	$\lambda = 1.25 \mu\text{m}$	$\lambda = 1.6 \mu\text{m}$	$\lambda = 2.5 \mu\text{m}$
①	15.1	46.1	62.3	82.4
②	18.3	49.8	65.4	84.0
③	38.1	67.4	78.6	90.6
④	46.8	73.2	82.7	92.5
⑤	0.58	12.1	27.6	59.0
⑥	20.2	51.9	67.0	84.9
⑦	26.4	57.9	71.7	87.2
⑧	49.4	74.9	83.8	93.0
⑨	2.62	22.5	40.2	68.9
⑩	21.9	53.6	68.4	85.6
⑪	26.9	58.4	72.0	87.4
⑫	43.0	70.8	81.0	91.7

5.3 瞳収差量に関する考察

前節の結果から、全視野で瞳収差の影響が GLAO に与える影響が少ないことが分かった。このため、現在の瞳収差量 3.06% は DM1 素子分ズレ内だけでなく、GLAO の補正性能としても許容できる。瞳収差の図で見たように、新光学系の DM 上のフットプリントを見ると最大瞳収差は 3.06% 存在したが、全体としては瞳収差ズレは少なかった。そのため、前節のように良い結果がでたのではないかと考えられる。

ただし、今回の計算はあくまで瞳収差のみの影響でどれだけ GLAO の性能の悪化が見られるかを評価しただけである。実際には、高層の大気揺らぎモデルを入れ、フィッティングエラーも考慮した結果が GLAO の性能として現れる。

第 6 章 結論

再電離期にある遠く暗い天体を観測するためには TMT で広視野補償光学装置を用いる必要がある。しかし、TMT の第一期装置として搭載予定の NFIRAOS は MCAO システムを採用し補償視野が 30" しかなく、広視野に対する補償を行うことができない。そのため、本研究では再電離期探査にむけた TMT 用広視野補償光学装置として GLAO システムの補償光学装置に関する検討を行った。

TMT で GLAO を用いた場合の $S/N=10$ 、10 時間積分、1 視野での LAE の検出期待数に関して計算を行った。結果は表 1.13 である。表 1.13 の結果より TMT で GLAO を用いた場合 $z=10$ でも 1 天体を検出できることが分かった。この結果から TMT で広視野補償光学を行うことは再電離期の解明にとって有意義であると言える。

光学設計を行っていくうえで、本研究ではまず過去に検討されていた広視野補償光学系の光学設計についての評価を行った。すると、過去の光学系では瞳収差が大きいことが分かった。瞳収差が大きいと全視野に対して共通の補正を行うことができなくなり、GLAO として正しく機能しない。TMT で広視野補償光学系を実現する場合、瞳収差を目標値以下に抑えつつ光学系サイズを実現可能なサイズに収めることが課題であることが分かった。瞳収差の目標値は DM 1 素子分のズレが生じないために、瞳収差 $\leq 3.3\%$ とした。

瞳収差の問題を受け、新しい光学系の設計を行った。新光学系は図 4.8 のような結果となった。新光学系では視野 10 分角に対して瞳収差を 3.06% と目標値以下の瞳収差で設計を行うことができた。新光学系の光学系サイズは $8.5 \times 6.1 \times 2.5$ m と NFIRAOS と同程度のサイズとなった。最終増面でのスポットと波面の評価を行ったが十分な性能を出しており、TMT の GLAO として利用するうえで問題はない結果となった。

最後に、瞳収差 3.06% が GLAO の補正性能に与える影響の計算も行った。GLAO による FWHM の悪化は最大で 0.002" となった。そのため、瞳収差量は DM1 素子分のズレがないだけでなく、GLAO の補正性能に与える影響も少ないという結果になる。

しかし、新光学系にはまだ改善点は残っている。たとえば、主光線傾角である。現在、主光線傾角は 3.5° もある。そのため、GLAO の続く光学系の光学設計が難しい。主光線傾角を何度まで許容するかは、GLAO の後に続く光学系の仕様に依存するため、本研究では TMT 用広視野補償光学系の基本構成までを作ったことで終わらせた。

謝辞

まず本研究を行うにあたり2年間ご指導いただいた担当教授の秋山正幸准教授に感謝申し上げます。東北大学で研究を行う機会を与えてくださり、多くの出張や発表などの貴重な経験をさせていただきました。大学院生活で得た経験を今後に活かしていきたいです。

また、国立天文台の大屋真様は毎週ゼミでご教授いただき感謝申し上げます。ハワイで観測の際ではお忙しい中大変お世話になりました。

フォトコーティング社の池田優二様には本研究を行ううえで何度もご教授いただき感謝申し上げます。ご多忙の中、京都産業大学でご相談に乗っていただいたおかげで本研究の結果があります。

秋山研の大野さんには本研究を進めるうえで何度も相談に乗っていただき感謝申し上げます。また、大学院2年間、天文学教室のスタッフの皆さまと先輩、同期、後輩の皆さまなど多くの方にお世話になり、感謝申し上げます。

最後に私の大学6年間の学生生活を支援してくださった両親に深く感謝申し上げます。

付 録 A 補償光学

A.1 補償光学の構成要素

補償光学を構成する要素について詳しく説明を加える。

A.1.1 波面センサ

波面の歪み具合を見る波面センサとして「シャックハルトマン型波面センサ」と「ピラミッド型波面センサ」と「曲率波面センサ」の 3 つを紹介する。

- シャックハルトマン型波面センサ

シャックハルトマン型波面センサの模式図は図 A.1 である [19]。シャックハルトマン型波面センサは 2 次元レンズアレイを用いた波面センサである。平面波がレンズアレイに入射した場合、それぞれのレンズの中心軸上に結像する。それに対して、歪んだ波面がレンズアレイに入射してくるとレンズを通過後のスポット位置は中心位置からずれる。このズレ量から波面の傾きを計算する波面センサをシャックハルトマン型波面センサと呼ぶ。

- 曲率波面センサ

曲率波面センサの模式図は図 A.2 である [49]。図 A.2 のようにスポットから等距離 d だけ離れた位置に強度検出器を二つ置く。平面波 (橙色) が入射してきた場合は二つの強度検出器上では同じ強度を検出する。しかし、歪んだ波面 (赤色) が入射した場合、スポット位置が移動するため二つの強度検出器上での強度は異なる。この二つの強度検出器上の強度差を検出することで、波面の歪み具合を測定する方法が曲率波面センサである。

- ピラミッド型波面センサ

ピラミッド型波面センサの模式図は図 A.3 である [45]。ピラミッド型波面センサの特徴はピラミッド型プリズムを用いて、光を 4 つに分け、再瞳面での瞳像の濃淡から位相差を検出する方式の波面センサである。平面波が入射してきた場合は 4 分割された再瞳面上での瞳像は同じになる。しかし、例として図 A.3 のように波面が歪むと、瞳面の $y > 0$ からの光はピラミッド型波面センサの $y < 0$ に入るため、再瞳面上の $y < 0$ の像の上部は濃くなる。同様に、再瞳面上の $y > 0$ の像の下部は濃くなる。このように、再瞳面での 4 つの瞳像はそれぞれ異なった光の濃淡を検出する。この濃淡を光の位相差の情報に変換をして波面の歪み具合を測る方法がピラミッド型波面センサである。

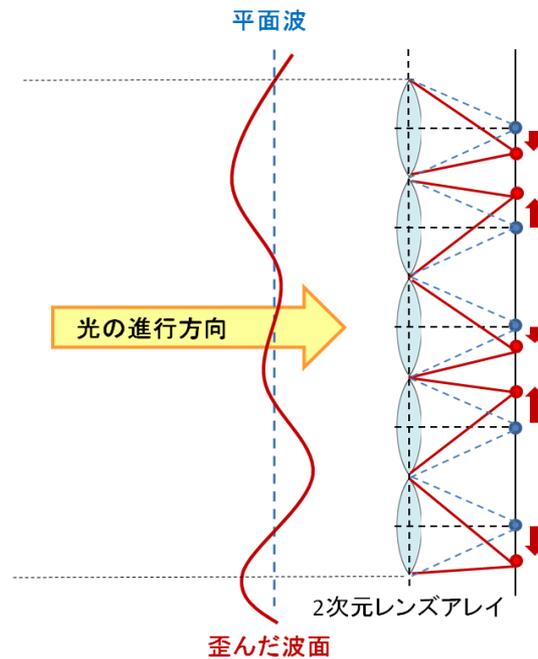


図 A.1: シャックハルトマン型波面センサ

A.1.2 可変形鏡

補償光学の性能や金額を決めるうえで重要になる要素が DM である。ここでは従来型の可変形鏡である積層アクチュエーター型 DM とバイモルフ型 DM[58]、さらに今後発展が期待されている MEMS 型 DM について紹介する。[5]

- 積層ピエゾアクチュエーター型

図 A.4 のように、積層ピエゾアクチュエーター型 DM とは鏡面の裏にある積層ピエゾアクチュエーターで機械的に押ししたり、引いたりすることで鏡の形状を変化させる DM のことである。ピエゾとは電圧を加えると長さが変化する素子であり、それをいくつも積み重ねてアクチュエーターとしている。このアクチュエーターに電圧を加えることでアクチュエーターの長さを変化させ、それに伴い鏡面の変化を生み出している。積層することによりピエゾの変位量を大きくしている。

- バイモルフ型

バイモルフ型 DM の模式図は図 A.5 である。図 A.5 のように電極の両側にピエゾ基板がついており、ピエゾ基板の外側に鏡面がついている形の DM のことをバイモルフ型 DM と呼ぶ。ピエゾに電圧を加え、一方のピエゾを伸ばし、もう一方を縮めると 2 枚のピエゾは曲がる。それに伴い、鏡面の曲率半径が変化する仕組みになっている。

- MEMS 型

MEMS とは Micro Electro Mechanical Systems(微小電気機械システム) の略で、電気や光

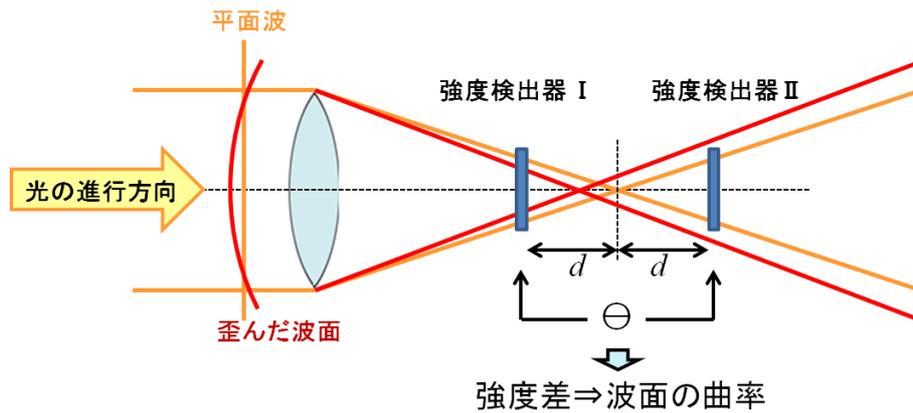


図 A.2: 曲率波面センサ

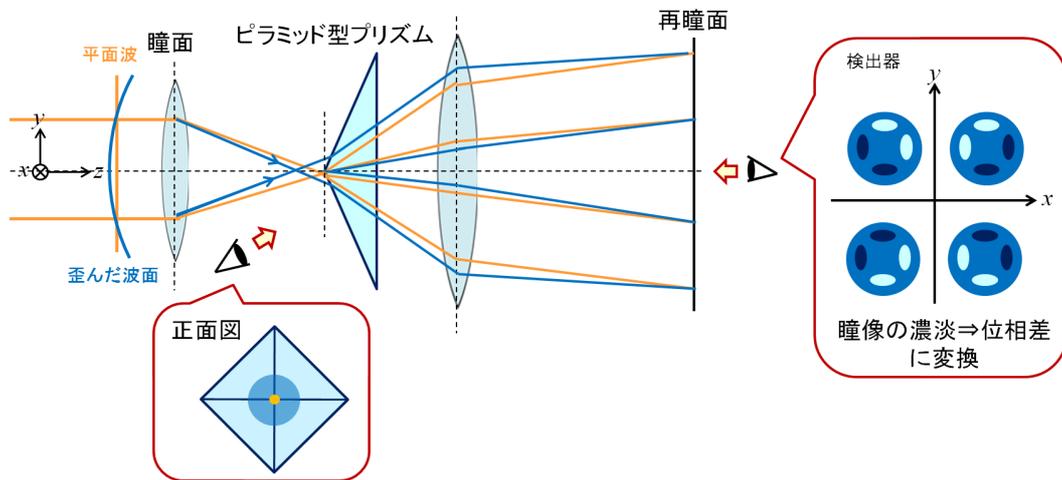


図 A.3: ピラミッド型波面センサ

などの多様な要素を集積したデバイスのことである。MEMS 技術を用いた DM の模式図は図 A.6 である。図 A.6 の MEMS 型は二段メンブレン式という方式の DM であり、他にも単一メンブレン式や分割三脚式などの方式も存在する。方式は違えど、基本原理は静電引力により鏡面を引き、バネの力や膜の張力で元に戻す仕組みである。ここでは一例として二段ブレン式 MEMS 型 DM について紹介する。図 A.6 のように、電極に電圧を与えてアクチュエーターを引くと、アクチュエーターについている鏡面を引っ張ることができる。電圧を切るとバネの力で元の平面形状に戻される。この仕組みを用いて理想の面形状を表現することができる。

MEMS 型 DM の最大の特徴は素子数が多くても価格が安く、小型軽量であることである。価格は従来のピエゾを用いた DM よりも 1/10 程安く、全体サイズもかなり小さい。しかし、MEMS 型 DM は静電引力による力のみでの面形状を変化させるため、DM のストローク量が小さく、表現できる面形状に制限がある。

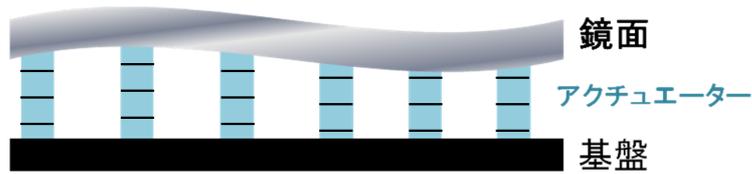


図 A.4: 積層アクチュエーター型 DM

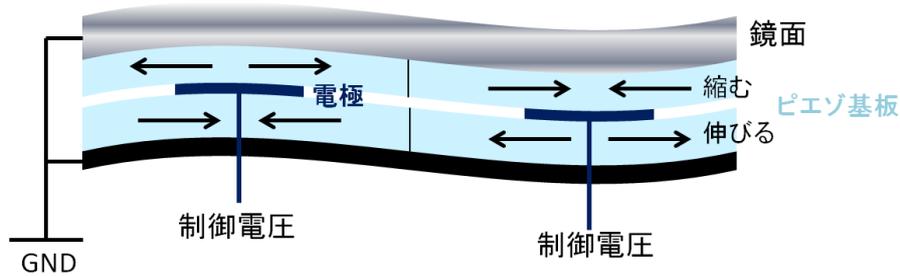


図 A.5: バイモルフ型 DM

A.1.3 制御システム

大気揺らぎは高速に変化するものであるため、1秒間に約1000回もの制御を行わなければならない。そのため、補償光学では高速に動く制御システムが要求される。近年、PCの性能の向上により、計算速度の改善は進んできた。しかし、計算量は素子数の二乗に比例し増えていくため、次世代大型望遠鏡に用いられる数千素子のDMを高速で制御しようとすることは大変難しい。これに伴うアルゴリズムの改善や計算機の性能向上が求められていく [65]。

ここで、補償光学の二つの制御方式について紹介する [63]。

- 閉ループ

閉ループとは名前の通り制御ループが閉じている制御方式である。図 A.7 は制御方式のブロック図を表している。波面センサから得た波面の情報は制御装置へと伝わり、制御装置から DM へと制御を伝える。その後、DM で補正された情報を波面センサで受け取り、補正しきれいでいなかった波面残差の補正を行う。このように制御ループが閉じられている制御方式を閉ループ制御と呼ぶ。閉ループ制御では波面センサが DM の後にある必要がある。そのため、閉ループ制御を行える広視野補償光学系は GLAO と MCAO である。閉ループ制御では波面残差が無くなるように制御を行うため、較正エラーの影響を抑えることができる。

- 開ループ

開ループとは閉ループとは逆に制御ループが閉じていない制御方式のことである。図 A.7 のように波面センサが受け取った情報を制御装置へ伝え、制御装置から DM へ情報を伝える。このように波面の歪みを一度のみの補正で直す方式を開ループ制御と呼ぶ。開ループでは DM の前に波面センサが設置してある。開ループではシステム構成と制御は単純化する。し

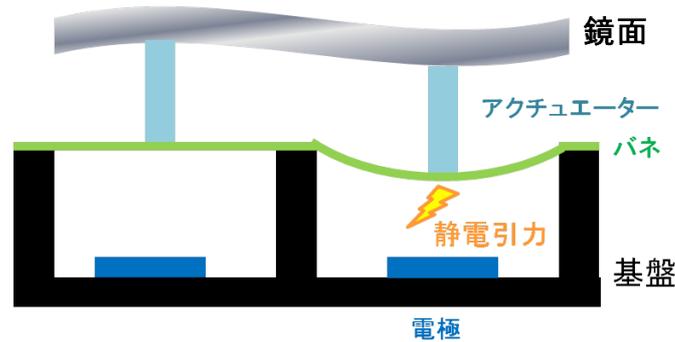


図 A.6: MEMS 型 DM

しかし、補正性能はシステムの絶対的な校正に強く依存し、閉ループと同程度の性能を出すには精密なシステム構成が必要である。MOAO では開ループ制御になる。その理由は、MOAO は DM で補正しているものとは波面センサで見ているものが異なるため閉ループを行えないからである。

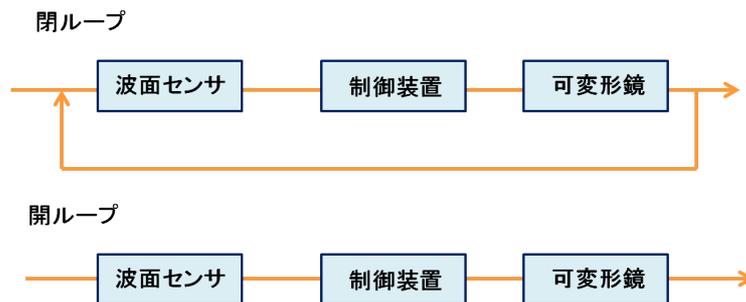


図 A.7: 閉ループ制御と開ループ制御

A.1.4 ガイドスター

補償光学を行う際、位相ゆらぎを精度良く検出するためには十分な明るさを持つ点光源が必要である。そのため観測対象天体が暗いあるいは点光源とみなせない場合、目標天体近くの位相ゆらぎを測定するための参照星が必要となる。この参照星のことをガイドスター (Guide Star, GS) と呼ぶ。自然にある天体を GS とした場合、それを自然ガイドスター (Natural Guide Star, NGS) と呼ぶ。しかし、自然ガイドスターが目標天体近くにいる確率は非常に低い。そこで考え出されたのが、レーザーガイドスター (Laser Guide Star, LGS) である。これは目標天体近くにレーザーを打ち上げ仮想の星を作り、それを GS として用いることで位相ゆらぎを計測する方法である。

ただし、LGS では大気の変動成分を測定することができないことに注意が必要である。大気の変動とは位相揺らぎの最低次成分であり、全体的なスポットの移動を導く。図 A.8 は大気の変動に伴うターゲット天体と LGS のスポットの移動について表した図である。図 A.8 のように大気の変動が青色から赤色へと変化すると、ターゲット天体からの光のスポット位置は移動する。し

かし、LGS の場合、地上から光を打ち上げているため、大気の変傾きの変化に伴うスポットの移動を検出することができない。そのため、大気の変傾き成分を測定するためには NGS が必要となる。ただし、傾きを検出するだけであれば暗い NGS まで使うことができるため、LGS では高次の位相揺らぎを補正し、NGS で低次の大気の変傾き成分を補正することで AO を行うことが可能となる。この場合、NGS で補正するのは傾き成分のみのため、NGS のみで AO を行う場合よりも暗い天体を NGS として選択することができる。これが LGS を用いることのメリットである。

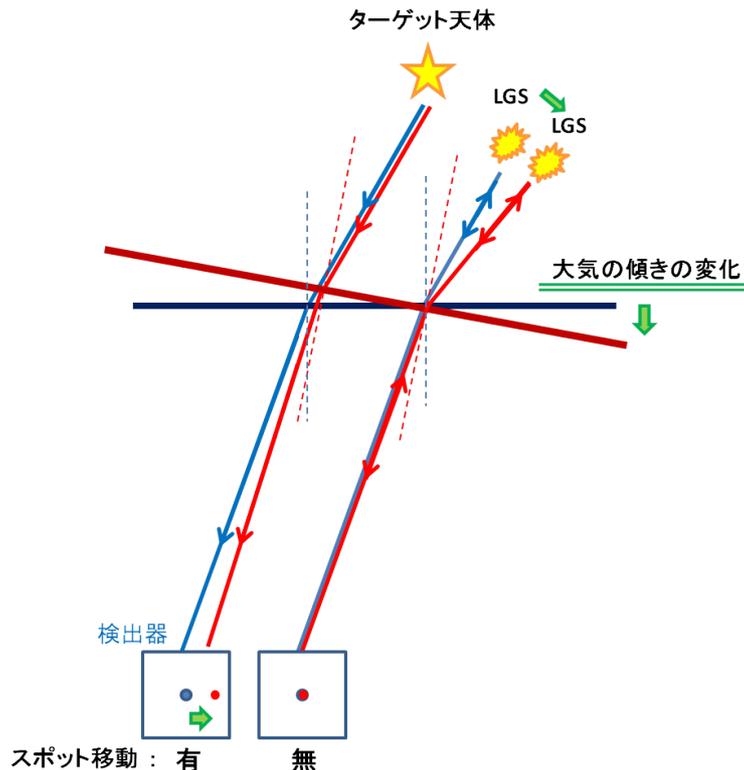


図 A.8: 大気の変傾き成分の変化に伴うスポットの移動量

LGS には主に図 A.9 に示されるようにナトリウムレーザーガイドスターとレーリー散乱ガイドスターという二つの方法がある。[58]

- レーリー散乱ガイドスター

図 A.9 に示されるようにパルスレーザーを地上から打ち上げると、大気中の微粒子によるレーリー後方散乱が起こる。レーリー後方散乱により戻ってきた光を検出して、GS として用いる方法をレーリー散乱ガイドスターと呼ぶ。パルス光を打ち上げるため、レーリー後方散乱により光る点が徐々に上っていき、目標の高度の位置で光った光だけを検出するように検出器の制御を行う必要がある。レーリー散乱ガイドスターは大気が十分にある高度に位置しなければ有効な戻り光が得られない。そのため、高度 20 km 程度が限界となる。ここで発生する問題がコーン効果である。コーン効果とは図 A.10 のように有限距離の点光源からの光を検出するため、コーン内の大気揺らぎは検出できるが、コーンの外側の大気揺らぎは検出できない問題のことである。LGS の高度が低くなればなるほどコーン効果の問題は顕著になる。

レーリー散乱ガイドスターは特定の波長である必要はないためナトリウムガイドスターより費用が安い。そのため、高層の大気揺らぎまで補償する必要がない GLAO ではレーリー散乱ガイドスターが現実的である。

- ナトリウムレーザーガイドスター

高度 90 km の位置には Na の層が存在する。Na の D 線の励起波長 ($\lambda = 589 \text{ nm}$) のレーザーを打ち上げ、Na 層を光らせてそれを GS として用いる方法をナトリウムガイドスターと呼ぶ。ナトリウムガイドスターは大気よりも高層に GS を作るため、高層の大気揺らぎの補正も可能である。ただし、強力なレーザーを必要とするため高価となる。ナトリウムガイドスターを用いる場合気をつけたいといけなことはレーリー後方散乱により高層 20 km 以下が光ってしまうことである。このレーリー後方散乱により、検出器上の一部が光りすぎて使えなくなってしまう。これを fratricide effect (兄弟殺し効果) と呼ぶ [35]。その対策として、副鏡の後ろからレーザーを打ち上げることで、レーリー後方散乱を隠してレーリー後方散乱による影響を低減させる方法が用いられる。すばる望遠鏡ではレーザーを副鏡裏に配置しているため、レーリー後方散乱の影響はない。



図 A.9: レーザーガイドスターの種類

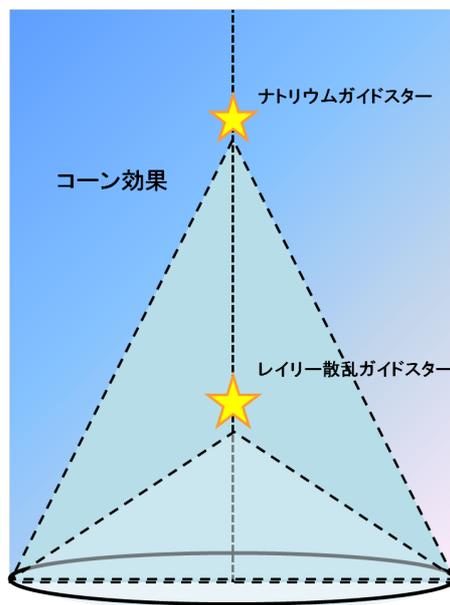


図 A.10: コーン効果

付録 B 光学

この章では、本章で用いる光学に関する基礎について説明を行う。まず、本研究で出てくる幾何光学の知識についてまとめた。ただし、付録 B.1 と付録 B.2 については、[27]、[28]、[32]、[34]、[54] を参考にして説明を行う。さらに光学系の評価の部分で用いる Zernike 波面マップについてもまとめる。

B.1 近軸理論

B.1.1 Snell の法則

図 B.1 のように入射光線、屈折もしくは反射光線、境界面の法線が同一平面上にあり、媒質の屈折率をそれぞれ N, N' とすると、入射角 i と屈折角 i' に関して次式が成り立つ。

$$N \sin i = N' \sin i' \quad (\text{B.1.1})$$

式 (B.1.1) を Snell の法則と呼ぶ。反射の場合では $i' = -i$ となるが、これは $N' = -N$ と形式的に記述することで式 (B.1.1) の中に含めることができる。反射、屈折のどちらの場合でも式 (B.1.1) は成り立つ。

Snell の法則は一般的には入射、屈折光線の方向余弦を \mathbf{Q}, \mathbf{Q}' (単位ベクトル) とし、境界面の法線ベクトルを \mathbf{E} (単位ベクトルでなくても良い) とすれば、式 (B.1.1) は

$$|N|(\mathbf{E} \times \mathbf{Q}) = |N'|(\mathbf{E} \times \mathbf{Q}') \quad (\text{B.1.2})$$

と変形することができる。

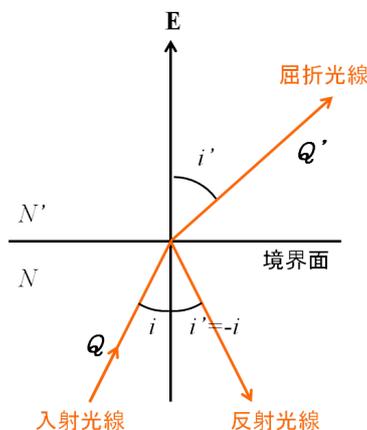


図 B.1: 光線の屈折

B.1.2 近軸領域と面の表示

sin 関数を級数展開すると、

$$\sin i = i - \frac{i^3}{3!} + \frac{i^5}{5!} + \dots \quad (\text{B.1.3})$$

となる。角度 i が微小と仮定し、途中の次数で打ち切って近似したときの、角度 i の大きさと級数展開した式の精度をまとめると表 B.1 のようになる。

表 B.1: sin 関数とその級数展開の誤差

i°	$\sin i$	$ \sin i - i $	$\left \sin i - \left(i - \frac{i^3}{3!} \right) \right $	$\left \sin i - \left(i - \frac{i^3}{3!} + \frac{i^5}{5!} \right) \right $
10	0.1736	0.00089	0.0000014	0.0000000009
20	0.3420	0.0070	0.000043	0.00000012
30	0.5000	0.023	0.00033	0.0000021
40	0.6428	0.056	0.0013	0.000016
50	0.7660	0.10	0.041	0.000075

式 (B.1.3) に関して 1 次の項まで考えたものが近軸領域、3 次の領域まで考えたものが 3 次収差 (Seidel) 領域、5 次まで考えたものが 5 次収差領域と呼ぶ。

面の表示について、今後の議論の中では図 B.2 のようなレンズ表面が 2 次円錐面であることを基準として考える。

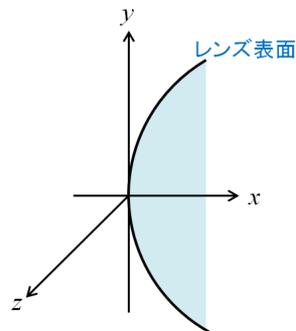


図 B.2: レンズ表面

すると、レンズの表面形状は

$$x - \frac{kx^2 + y^2 + z^2}{2r} = 0 \quad (\text{B.1.4})$$

と表わすことができ、 r は曲率半径、 k はコーニック定数と呼ばれる。 $k < 0$ が楕円、 $k = 0$ が円、 $k < -1$ が双曲線、 $k = -1$ が放物線を表わしている。

近軸領域では式 (B.1.4) は

$$x = \frac{y^2 + z^2}{2r} \quad (\text{B.1.5})$$

と近似することができる。これより面の法線 \mathbf{E} は

$$\mathbf{E} = \left(1, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}\right) \quad (\text{B.1.6})$$

となる。また、近軸領域で方向余弦を $Q_x = 1, Q'_x = 1$ ととると、

$$\mathbf{Q} = (1, Q_y, Q_z), \quad \mathbf{Q}' = (1, Q'_y, Q'_z) \quad (\text{B.1.7})$$

となる。

B.1.3 近軸領域

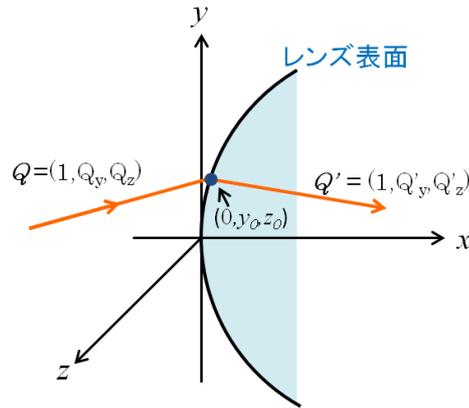


図 B.3: レンズ表面における光線の屈折

図 B.3 のような、点 $(0, y_0, z_0)$ に入射する光線は Snell の公式により

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{Q} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -\frac{y_0}{r} & -\frac{z_0}{r} \\ 1 & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(-\frac{y_0}{r} Q_z + \frac{z_0}{r} Q_y\right) + \mathbf{j} \left(-\frac{z_0}{r} - Q_z\right) + \mathbf{k} \left(Q_y + \frac{y_0}{r}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

となる。よって、式 (B.1.2) の各成分は

$$N \left(-\frac{y_0}{r} \cdot Q_z + \frac{y_0}{r} \cdot Q_y\right) = N' \left(-\frac{y_0}{r} \cdot Q'_z + \frac{z_0}{r} \cdot Q'_y\right) \quad (\text{B.1.9})$$

$$N \left(-\frac{z_0}{r} - Q_z\right) = N' \left(-\frac{z_0}{r} - Q'_z\right) \quad (\text{B.1.10})$$

$$N \left(Q_y + \frac{y_0}{r}\right) = N' \left(Q'_y + \frac{y_0}{r}\right) \quad (\text{B.1.11})$$

となる。さらに式 (B.1.10) $\times \frac{y_0}{r}$ + 式 (B.1.11) $\times \frac{z_0}{r}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} N \left\{ \frac{y_0}{r} \left(-\frac{z_0}{r} - Q_z \right) + \frac{z_0}{r} \left(Q_y + \frac{y_0}{r} \right) \right\} &= N' \left\{ \frac{y_0}{r} \left(-\frac{z_0}{r} - Q'_z \right) + \frac{z_0}{r} \left(Q'_y + \frac{y_0}{r} \right) \right\} \\ \Leftrightarrow N \left(-\frac{y_0}{r} \cdot Q_z + \frac{z_0}{r} \cdot Q_y \right) &= N' \left(-\frac{y_0}{r} \cdot Q'_z + \frac{z_0}{r} \cdot Q'_y \right) \end{aligned} \quad (\text{B.1.12})$$

となり、これは式 (B.1.9) となる。よって、式 (B.1.10) と式 (B.1.11) が満足するならば自動的に式 (B.1.9) は満足される。

式 (B.1.10) と式 (B.1.11) は

$$N'Q'_z = NQ_z - z_0 \cdot \frac{N' - N}{r} \quad (\text{B.1.13})$$

$$N'Q'_y = NQ_y - y_0 \cdot \frac{N' - N}{r} \quad (\text{B.1.14})$$

と変形できる。式 (B.1.10) と式 (B.1.11) は $(y, Q_y), (z, Q_z)$ は独立に計算できることを意味している。

ここで、

$$\phi = \frac{N' - N}{r} \quad (\text{B.1.15})$$

として、

$$S_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.16})$$

という行列を用意すると、式 (B.1.13) と式 (B.1.14) は

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ -N'Q'_z \end{pmatrix} = S_R \begin{pmatrix} z_0 \\ -NQ_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.17})$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ -N'Q'_y \end{pmatrix} = S_R \begin{pmatrix} y_0 \\ -NQ_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.18})$$

と書くことができる。スネルの法則から導かれた屈折前後の関係を示す S_R という行列を屈折行列と呼ぶ。

次に、図 B.4 のような x-y 平面内の点 $P(s, l, 0)$ から出た光線が点 $(0, y_0, z_0)$ に当たる場合について考える。ただし、 $s < 0$ であることに注意が必要である。

まず、方向余弦は

$$Q_y = \frac{y_0 - l}{-s} = \frac{l - y_0}{s}, \quad Q_z = \frac{z_0}{-s} = -\frac{z_0}{s} \quad (\text{B.1.19})$$

となるため、式 (B.1.13) と式 (B.1.14) に代入すると、

$$N'Q'_z = N \cdot \left(-\frac{z_0}{s} \right) - z_0 \phi \quad (\text{B.1.20})$$

$$N'Q'_y = N \cdot \frac{l - y_0}{s} - y_0 \phi \quad (\text{B.1.21})$$

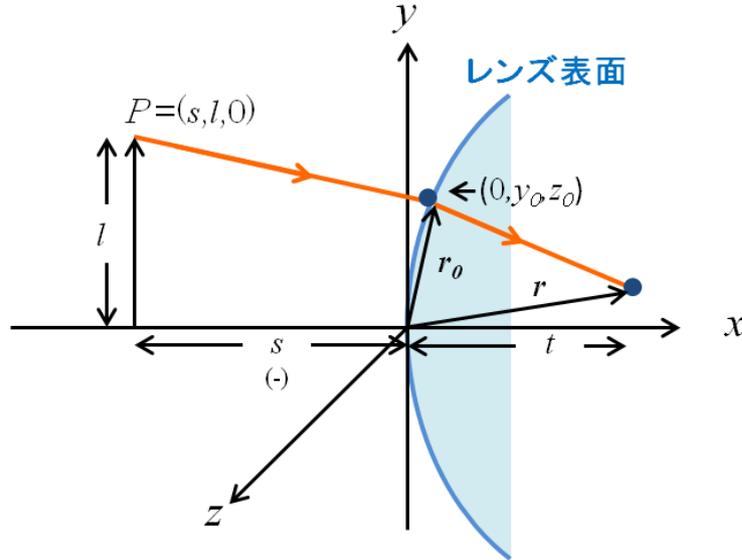


図 B.4: 物点から第一面上の点 $(0, y_0, z_0)$ を通過する光線

となる。次に図 B.4 のように $\mathbf{r}_0 = (0, y_0, z_0)$ を通り方向余弦 \mathbf{Q}' を持つ直線が t だけ進む方程式は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{Q}' \tag{B.1.22}$$

となるため、式 (B.1.20)、式 (B.1.21)、式 (B.1.22) より、

$$x = t \tag{B.1.23}$$

$$\begin{aligned} y &= y_0 + tQ'_y \\ &= y_0 + t \left(\frac{N}{N'} \cdot \frac{l - y_0}{s} - \frac{y_0\phi}{N'} \right) \\ &= y_0 \left\{ 1 - \frac{t}{N'} \left(\frac{N}{s} + \phi \right) \right\} + t \cdot \frac{N}{N'} \cdot \frac{l}{s} \end{aligned} \tag{B.1.24}$$

$$\begin{aligned} z &= z_0 + t \left\{ \frac{z_0}{N'} \left(-\frac{N}{s} - \phi \right) \right\} \\ &= z_0 \left\{ 1 - \frac{t}{N'} \left(\frac{N}{s} + \phi \right) \right\} \end{aligned} \tag{B.1.25}$$

と書くことができる。しかし、ここで

$$1 - \frac{t}{N'} \left(\frac{N}{s} + \phi \right) = 0 \quad (\text{B.1.26})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{N'}{\phi + \frac{N}{s}} \quad (\text{B.1.27})$$

となる t を考えると、 $x = t$, $y = -t \cdot N/N' \cdot l/s$, $z = 0$ となり、 y_0, z_0 に関わらず一定の点を通ることを意味している。その時の x 座標を s' とすれば

$$\begin{aligned} s' &\equiv \frac{N'}{\phi + \frac{N}{s}} \\ \Leftrightarrow \frac{N'}{s'} &= \frac{N}{s} + \phi \end{aligned} \quad (\text{B.1.28})$$

また、 y 座標は

$$\begin{aligned} y &= s' \cdot \frac{N}{N'} \cdot \frac{l}{s} \\ \Leftrightarrow \frac{y}{l} &= \frac{Ns'}{N's} \end{aligned} \quad (\text{B.1.29})$$

となり、 z 座標は $z = 0$ となる。式 (B.1.29) は $y/l = \beta$ と書いて、 β を横倍率と呼ぶ。

最後に、図 B.5 のような ν 面から $(\nu+1)$ 面への移行について考える。

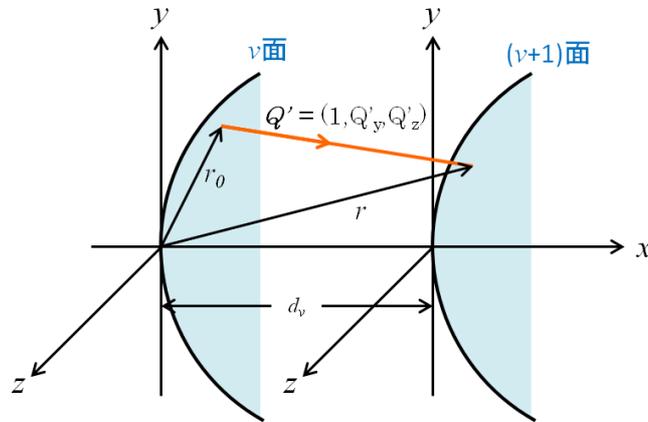


図 B.5: ν 面から $(\nu+1)$ 面への移行

r_0 を通り、 Q' の方向ベクトルは式 (B.1.22) で表わされ、面の間隔を d_ν とすると式 (B.1.22) の各成分は、

$$\begin{cases} x &= t \\ y_{\nu+1} &= y_\nu + tQ'_y \\ z_{\nu+1} &= z_\nu + tQ'_z \end{cases} \quad (\text{B.1.30})$$

であり、 $t = d_\nu$ のため、

$$\begin{cases} x &= d_\nu \\ y_{\nu+1} &= y_\nu + d_\nu Q'_y \\ z_{\nu+1} &= z_\nu + d_\nu Q'_z \end{cases} \quad (\text{B.1.31})$$

となる。ここで、

$$S_T = \begin{pmatrix} 1 & -d_\nu/N' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.32})$$

と置くと、

$$\begin{pmatrix} z_{\nu+1} \\ -N'Q'_z \end{pmatrix} = S_T \begin{pmatrix} z_\nu \\ -N'Q'_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.33})$$

$$\begin{pmatrix} y_{\nu+1} \\ -N'Q'_y \end{pmatrix} = S_T \begin{pmatrix} y_\nu \\ -N'Q'_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.34})$$

となる。光線の移行についてを表すと S_T を移行行列と呼ぶ。

以上より、式 (B.1.17)、式 (B.1.18)、式 (B.1.33)、式 (B.1.34) を合わせると、

$$\begin{pmatrix} z_{\nu+1} \\ -N'Q'_z \end{pmatrix} = S_T S_R \begin{pmatrix} z_\nu \\ -NQ_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.35})$$

$$\begin{pmatrix} y_{\nu+1} \\ -N'Q'_y \end{pmatrix} = S_T S_R \begin{pmatrix} y_\nu \\ -NQ_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.36})$$

となる。ただし、 $|S_R| = |S_T| = 1$ である。 S_T, S_R を合わせて **Gauss** 行列またはシステム行列と呼ぶ。以上より、近軸領域では任意の方向に出た光線は必ず一点に収束し、 y, z 成分もどちらもユニモジュラー行列 (unimodular matrix: 行列式が 1 となる行列) S_R, S_T によって追跡することが出来ることが分かった。

B.1.4 x-y 平面内の近軸追跡

図 B.6 のように KP 方向に進む光線が曲率中心 C のレンズ表面で屈折して KP' 方向に進む場合、1 次近似におけるスネルの法則は

$$\begin{aligned} Ni &= N'i' \\ \Leftrightarrow N(\theta - u) &= N'(\theta - u') \end{aligned} \quad (\text{B.1.37})$$

と書くことができる。ここで、図 B.6 より

$$\theta = \frac{h}{r}, \quad u = \frac{h}{s}, \quad u' = \frac{h}{s'} \quad (\text{B.1.38})$$

となるため、スネルの法則は

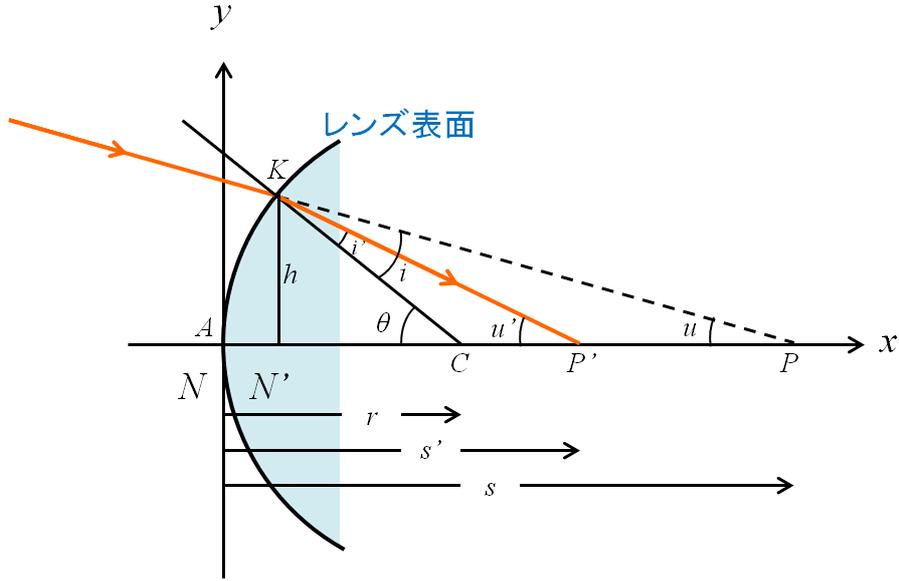


図 B.6: 屈折における物理量

$$Q = N \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = N' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) \quad (\text{B.1.39})$$

となる。この Q を Abbe の不変量と呼ぶ。Abbe の不変量は屈折前後で式の形が変化しないことから、どんなに面の屈折が続いても不変のままである。

一方、式 (B.1.37) と式 (B.1.38) より

$$N' u' = N u + h \cdot \frac{N' - N}{r} \quad (\text{B.1.40})$$

$$\Leftrightarrow \alpha' = \alpha + h \phi \quad (\text{B.1.41})$$

ただし

$$\alpha \equiv N u, \quad \alpha' \equiv N' u' \quad (\text{B.1.42})$$

とおく。 α のことを換算傾角と呼ぶ。光線追跡では入射角 u ではなく、屈折率をかけた換算傾角を用いて議論を行うのが一般的である。

この式 (B.1.40) は式 (B.1.13) と式 (B.1.14) の $y \rightarrow h$ 、 $Q_y \rightarrow -u$ と置換した式と同じである。さらに ν 面から $(\nu + 1)$ 面への移行は式 (B.1.31) より、

$$h_{\nu+1} = h_{\nu} - d_{\nu} u'_{\nu} \quad (\text{B.1.43})$$

となり、

$$\alpha_{\nu} = N_{\nu} u_{\nu}, \quad \alpha'_{\nu} = N'_{\nu} u'_{\nu}, \quad h'_{\nu+1} = h_{\nu+1} \quad (\text{B.1.44})$$

とすると、前節と同じくガウス行列は

$$\begin{pmatrix} h'_{\nu+1} \\ \alpha'_{\nu+1} \end{pmatrix} = S_T S_R \begin{pmatrix} h_\nu \\ \alpha_\nu \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.45})$$

と書くことができる。ただし、

$$S_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi & 1 \end{pmatrix}, S_T = \begin{pmatrix} 1 & -(d/N') \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.46})$$

である。

ここで、ミラー 1 面から k 面までのガウス行列を合わせると、

$$\begin{pmatrix} h'_k \\ \alpha'_k \end{pmatrix} = (S_R)_k (S_T)_{k-1} (S_R)_{k-1} \cdots (S_T)_1 (S_R)_1 \begin{pmatrix} h'_1 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} h_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.47})$$

と書くことができる。ただし、S は

$$S = \begin{pmatrix} g_\alpha & g_\beta \\ g_\gamma & g_\delta \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.48})$$

と表示する。|S| = 1 より

$$g_\alpha g_\delta - g_\beta g_\gamma = 1 \quad (\text{B.1.49})$$

となる。このことより S の逆行列は

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} g_\delta & -g_\beta \\ -g_\gamma & g_\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.50})$$

となる。

一方、横倍率 β は

$$\beta = \frac{Ns'}{N's} = \frac{N(h/s)}{N'(h/s')} = \frac{Nu}{N'u'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \quad (\text{B.1.51})$$

となり、ミラー 1 面から k 面までの倍率 $\beta_{1,k}$ を合わせると

$$\beta_{1,k} = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k = \frac{\alpha_1}{\alpha'_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha'_2} \cdots \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} = \frac{\alpha_1}{\alpha'_k} \quad (\text{B.1.52})$$

と書くことができる。

B.1.5 主点、焦点

式 (B.1.47) より、図 B.7 のようなレンズから t だけ離れた $h = 1, \alpha = N \frac{1}{t}$ の物点から光が出た場合、

$$h' = g_\alpha + g_\beta \cdot \frac{N}{t} \quad (\text{B.1.53})$$

$$\alpha' = g_\gamma + g_\delta \cdot \frac{N}{t} \quad (\text{B.1.54})$$

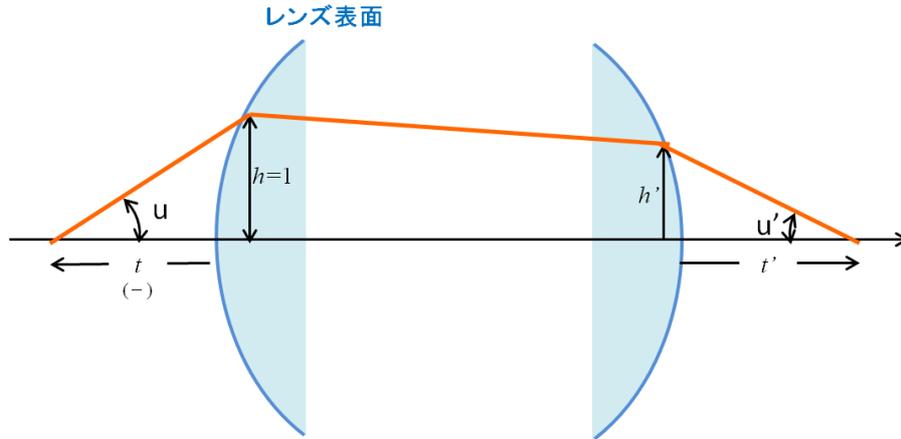


図 B.7: 共役関係

となる。ここで、横倍率 $\beta = \alpha'/\alpha = 1$ となる点を探す。式 (B.1.54) より、

$$\begin{aligned} \frac{N}{t} &= g_\gamma + g_\delta \cdot \frac{N}{t} \\ t &= N \cdot \frac{1 - g_\delta}{g_\gamma} \equiv \Delta \end{aligned} \quad (\text{B.1.55})$$

となる。またそれに対応する像点は、

$$\begin{aligned} t' &= N' \cdot \frac{h'}{\alpha'} = N' \cdot \frac{h'}{\alpha} = N' \cdot \frac{g_\alpha + g_\beta \frac{N}{t}}{\frac{N}{t}} \\ &= \frac{N'}{N} \cdot (tg_\alpha + Ng_\beta) \\ &= \frac{N'}{N} \cdot \left(N \frac{1 - g_\delta}{g_\gamma} g_\alpha + Ng_\beta \right) \\ &= N' \cdot \frac{g_\alpha - g_\alpha g_\delta + g_\beta g_\gamma}{g_\gamma} \\ &= N' \cdot \frac{g_\alpha - 1}{g_\gamma} \equiv \Delta' \end{aligned} \quad (\text{B.1.56})$$

となる。 t, t' のような横倍率 1 となる軸上の共役点のことを主点と呼び、 H, H' として記述する。また、主点のある面のことを主平面と呼ぶ。さらに物点の軸上共役点を第一主点、その面を前側主平面と呼び、像点の軸上共役主点を第二主点、その面を後側主平面と呼ぶ。

次に、 $h = h_0, \alpha = 0, t \rightarrow \infty$ の平行光が入射する場合、像点 F' の位置 t' は、

$$t' = N' \frac{h'}{\alpha'} = N' \frac{g_\alpha}{g_\gamma} \quad (\text{B.1.57})$$

となる。さらに、式 (B.1.47) を変形すると、

$$\begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_\delta & -g_\beta \\ -g_\gamma & g_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{B.1.58}$$

となり、レンズ通過後平行光となる $h' = h'_0, \alpha = 0$ のとき物点 F のレンズからの距離 t は

$$t = N \frac{h}{\alpha} = -N \frac{g_\delta}{g_\gamma} \tag{B.1.59}$$

となる。F と H の位置関係を図示すると図 B.8 のようになる。

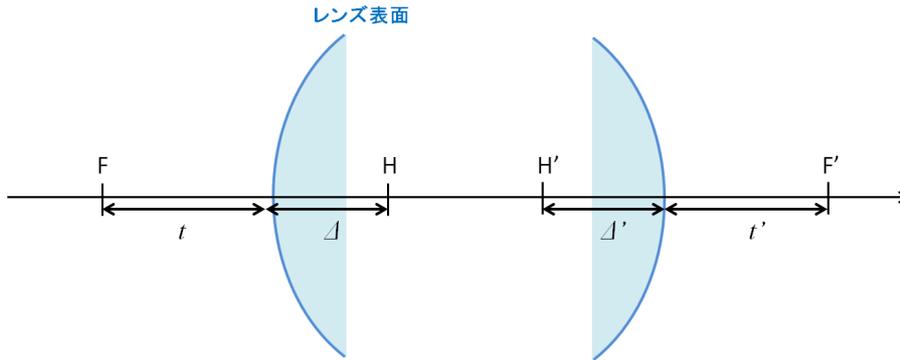


図 B.8: 主点と焦点

図 B.8 より、

$$\overline{H'F'} = N' \frac{g_\alpha}{g_\gamma} - N' \frac{g_\alpha - 1}{g_\gamma} = N' \frac{1}{g_\gamma} \tag{B.1.60}$$

$$\overline{FH} = N \frac{1 - g_\delta}{g_\gamma} + N \frac{g_\delta}{g_\gamma} = N \frac{1}{g_\gamma} \tag{B.1.61}$$

となる。

次に図 B.9 のように物体 \overline{OP} から出た光が像 $\overline{O'P'}$ に結像する場合を考える。図 B.9 の相似関係より、

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{\overline{HB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{OF}} = \frac{Nf}{x} \tag{B.1.62}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{\overline{O'P'}}{\overline{H'A'}} = \frac{\overline{F'O'}}{\overline{F'H'}} = -\frac{x'}{N'f'} \tag{B.1.63}$$

となる。この二式をあわせると式 (B.1.64) が導かれる。

$$xx' = -NN'f^2 \tag{B.1.64}$$

式 (B.1.64) を Newton の式と呼ぶ。

ここで縦倍率について説明する。横倍率が y 方向の変化率だったのに対して縦倍率は x 方向の変化率を表している。そのため、縦倍率を δ とすると、

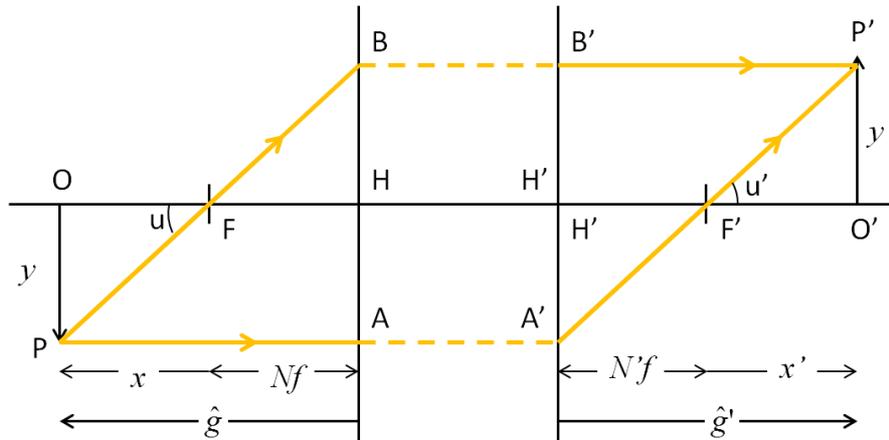


図 B.9: 結像関係

$$\delta = \frac{\partial x'}{\partial x} \tag{B.1.65}$$

となり、ニュートンの式より

$$\delta = \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{NN'}{x^2} f^2 \tag{B.1.66}$$

となり、横倍率の式と合わせると、

$$\delta = \frac{NN'}{x^2} f^2 = \frac{N'}{N} \beta^2 \tag{B.1.67}$$

となる。

B.1.6 Helmholtz-Lagrange の不変量

一般光学系中の任意の ν 面前後の結像に関する横倍率の式

$$\beta_\nu = \frac{y'_\nu}{y_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu} \tag{B.1.68}$$

より、

$$\alpha_\nu y_\nu = \alpha'_\nu y'_\nu \tag{B.1.69}$$

$$N u y = N' u' y' \tag{B.1.70}$$

となる。よって、光学系全体で

$$\alpha_1 y_1 = \alpha'_1 y'_1 = \dots = \alpha_\nu y_\nu = \alpha'_\nu y'_\nu = \dots = \alpha'_k y'_k \tag{B.1.71}$$

が成り立つ。この式の各項は Helmholtz-Lagrange の不変量である。 $N'y'u'$ が一定であるため、光の集中度を上げようとして u' を大きくすると、 y' が小さくなり倍率が下がる。逆に、倍率を上げようとするすると光の集中度が下がる。

B.1.7 ペッツパールの法則

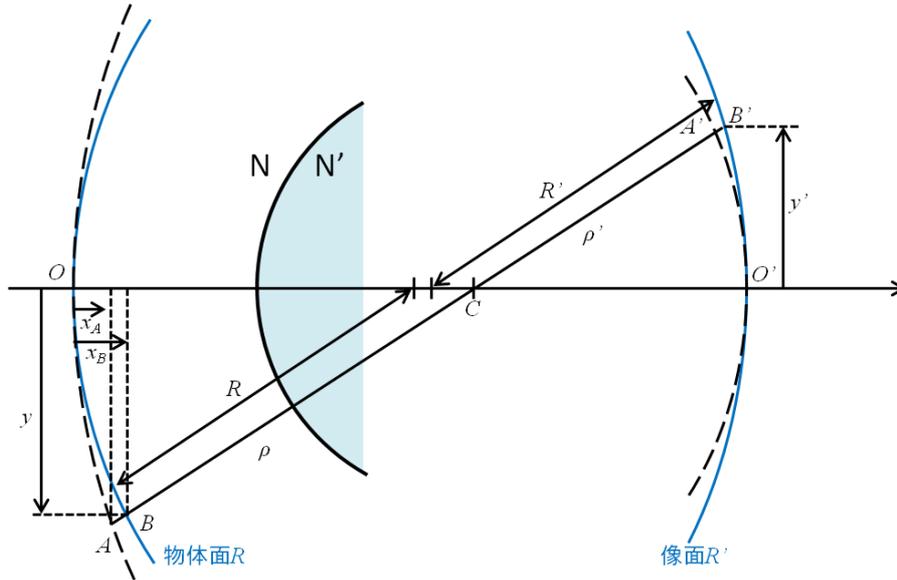


図 B.10: ペッツパールの法則

図 B.10 は半径 R の円の一部 OB が物体で、半径 R' の円の一部 $O'B'$ が像とする。また、 $OA, O'A'$ を屈折面の曲率半径 C から半径 ρ, ρ' の円弧とする。この場合、 $A'B'$ は AB の像となり、図 B.10 より

$$AB \approx x_B - x_A \approx \frac{y^2}{2R} - \frac{y^2}{2\rho} \quad (\text{B.1.72})$$

$$A'B' \approx x'_B - x'_A \approx \frac{y'^2}{2R'} - \frac{y'^2}{2\rho'} \quad (\text{B.1.73})$$

となる。そのため、

$$\frac{A'B'}{AB} \approx \frac{y'^2 \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{\rho'} \right)}{y^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right)} \quad (\text{B.1.74})$$

となる。さらに、 $A'B'/AB$ は縦倍率であり、式 (B.1.67) で表わされるため

$$\frac{A'B'}{AB} = \left(\frac{N'}{N} \right) \left(\frac{y'}{y} \right)^2 \quad (\text{B.1.75})$$

となる。よって、

$$N' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right) = N \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{\rho'} \right) \quad (\text{B.1.76})$$

となる。式 (B.1.76) とアッペの式より

$$\left(\frac{N'}{R} - \frac{N}{R'} \right) = \left(\frac{N'}{\rho} - \frac{N}{\rho'} \right) = \frac{N' - N}{r} = \phi \quad (\text{B.1.77})$$

となる。さらに両辺を NN' で割ると、

$$\left(\frac{N'}{RNN'} - \frac{N}{R'NN'} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N'} \right) = \frac{\phi}{NN'} \quad (\text{B.1.78})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{RN} - \frac{1}{R'N'} \right) = \frac{\phi}{NN'} = p \quad (\text{B.1.79})$$

となる。これは、右辺のレンズのパワーと屈折率が決定すれば、物体と像の曲率を表わす左辺が一定になることを表わしている。このような法則をペッツパールの法則と呼ぶ。そして、その一定値 p をペッツパール値と呼ぶ。

もし、物体の曲率半径 $R \rightarrow \infty$ として物体面は平面であるとするならば、式 (B.1.79) は次式のように変形できる。

$$R' = -\frac{1}{N'p} \quad (\text{B.1.80})$$

よって、像面の曲率はペッツパール値によって決まることが分かる。このような像面のことをペッツパール像面と呼ぶ。つまり、いったん光学系の形が決定すると、そのペッツパール像面は物体や像の位置には関わらず一定の形になる。

以上のことは面が複数の場合でも成り立つ。まず、 j 面については

$$\left(\frac{1}{(RN)_j} - \frac{1}{(R'N')_j} \right) = \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{N_j} - \frac{1}{N'_j} \right) = p_j \quad (\text{B.1.81})$$

となり、 $1 \sim k$ 面まで足し合わせれば、左辺の中間項が全て消えるため、

$$\left(\frac{1}{(rN)_1} - \frac{1}{(r'N)_k} \right) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{r_j} \left(\frac{1}{N_j} - \frac{1}{N'_j} \right) = \sum_{j=1}^k p_j = P \quad (\text{B.1.82})$$

となる。このように物体と像面の曲率を表わす左辺は全体系のペッツパール値の総和からなる右辺により決まることが分かる。この右辺のことをペッツパール和と呼ぶ。反射系の場合のペッツパール和は、スネルの法則の節に書いてあるよう $N' = -N$ とすれば成立する。

今、特別な場合として物体面を平面 $r \rightarrow \infty$ の場合で、像面が平面になる場合を考えると、 $1/r'_k \rightarrow 0$ となるから、ペッツパール和は 0 になる。

$$P = \sum_{j=1}^k k \frac{\phi_j}{N_j} = 0 \quad (\text{B.1.83})$$

これをペッツパール条件と呼び、像面湾曲を 0 とするとき用いる。

B.2 Seidel 収差係数

B.2.1 任意の光線の ν 面における近軸定数による座標位置

以下で追跡を行う 2 本の近軸光線は

- 近軸マージナル光線 (paraxial marginal ray)
- 近軸主光線 (paraxial principle ray)

と呼ばれる。

近軸マージナル光線は図 B.11 のように軸上物点を出て、主平面上で高さ 1 を持つ光線のことである。注意として、今後の議論の中では図 B.11 のようにレンズの表面を通過した光線は主平面に到達するまで屈折しないように描く。これは図 B.9 のように主平面を基準に描かれていると思えば良い。図 B.12 のように、レンズを通った光は実際には 2 度屈折するが、仮想的に一度の屈折で考えたときの屈折面が主平面であるため、光線追跡を行う際は主平面を基準に屈折を考えると便利である。

主平面に対する初期値を (h_p, α_p) 、第一面に対する初期値を (h_1, α_1) とすれば、

$$\begin{cases} h_p = 1, & h_1 = s_1/\hat{g}_1 \\ \alpha_p = \alpha_1 = N_1 u_1 = N_1/\hat{g}_1 \end{cases} \quad (\text{B.2.84})$$

となる。

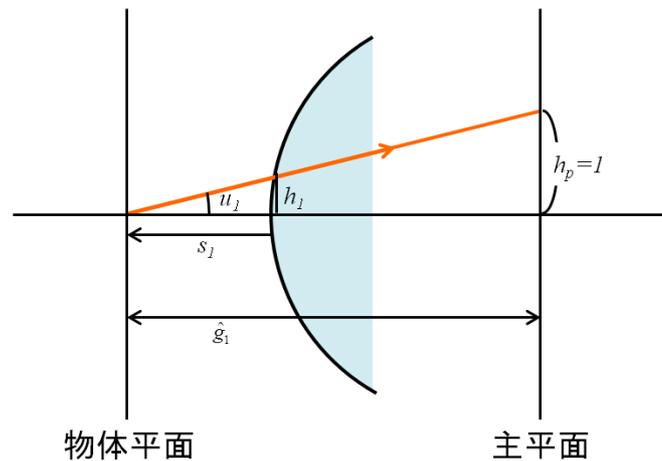


図 B.11: 近軸マージナル光線

次に近軸主光線とは、主平面から物体を見込む角 ω のとき $N_1 \tan \omega = 1$ を満たす物点から光線が出て、入射瞳の中心を通る近軸光線のことである。その初期値は図 B.13 と $N_1 \tan \omega = 1$ を用いて、

$$Y_1 = \hat{g}_1 \tan \omega = \frac{\hat{g}_1}{N_1} \quad (\text{B.2.85})$$

となり、図 B.13 の \bar{u}_1 は

$$\bar{u}_1 = -\frac{Y_1}{g_1} = -\frac{1}{N_1} \cdot \frac{\hat{g}_1}{g_1} \quad (\text{B.2.86})$$

となる。よって、主平面に対する初期値を $(\bar{h}_p, \bar{\alpha}_p)$ 、第 1 面に対する初期値を $(\bar{h}_1, \bar{\alpha}_1)$ とすれば、

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_p = \bar{\alpha}_1 = N_1 \bar{u}_1 = -\frac{\hat{g}_1}{g_1} \\ \bar{h}_p = (\hat{g}_1 - g_1) \tan \bar{u}_1 = \frac{\bar{\alpha}_1}{N_1} (\hat{g}_1 - g_1), \quad \bar{h}_1 = \bar{\alpha}_1 \cdot \frac{t_1}{N_1} \end{cases} \quad (\text{B.2.87})$$

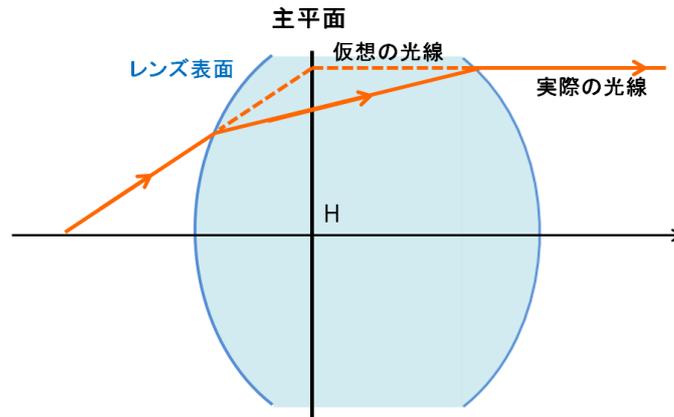


図 B.12: 主平面基準の屈折

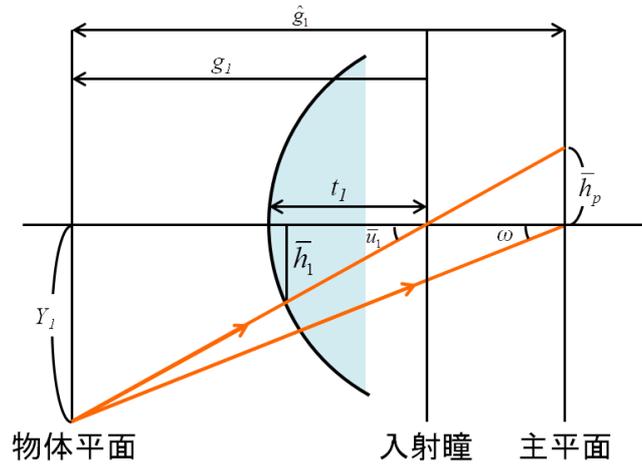


図 B.13: 近軸主光線

となる。ただし、主光線に関する量には「-」をつけて表現する。

ここで、任意の光線の座標を図 B.14 のように、近軸主光線が主平面と交わる点を原点とする極座標 \$(R, \phi)\$ で表現すると、

$$\begin{cases} y_0 = R \cos \phi + (g_1 - \hat{g}_1) \cdot \frac{\hat{g}_1}{g_1} \tan \omega \\ z_0 = R \sin \phi \end{cases} \quad (\text{B.2.88})$$

となる。

次に、主平面から \$\nu\$ 面までの Gauss 行列を考える。すると、近軸主光線と近軸マージナル光線の主平面に対する初期値である式 (B.2.84) と式 (B.2.87) を用いれば、

$$\begin{pmatrix} h_\nu \\ \alpha_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_\alpha & g_\beta \\ g_\gamma & g_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2.89})$$

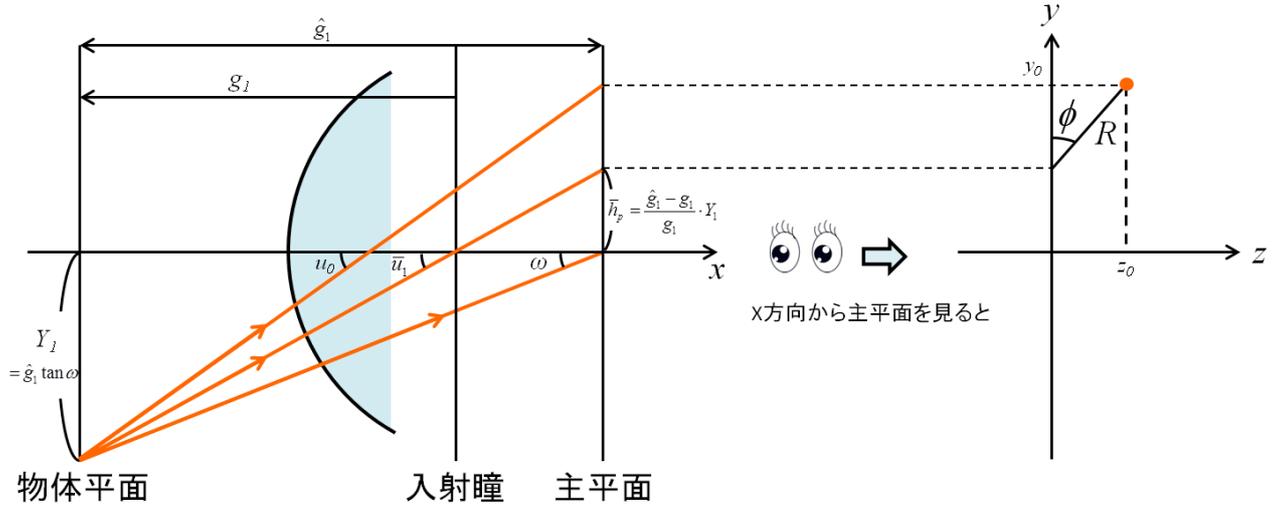


図 B.14: 主平面上における光線座標 (R, ϕ)

$$\begin{pmatrix} \bar{h}_\nu \\ \bar{\alpha}_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_\alpha & g_\beta \\ g_\gamma & g_\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{\alpha}_1}{N_1} (\hat{g}_1 - g_1) \\ \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} \tag{B.2.90}$$

と表現できる。また、 g_α, g_β に関する式を抽出すると、

$$\begin{cases} g_\alpha + \alpha_1 g_\beta & = h_\nu \\ \frac{\bar{\alpha}_1}{N_1} (\hat{g}_1 - g_1) g_\alpha + \bar{\alpha}_1 g_\beta & = \bar{h}_\nu \end{cases} \tag{B.2.91}$$

となり、 $\alpha_1, \bar{\alpha}_1$ の値を代入すると

$$\begin{cases} g_\alpha & = h_\nu \frac{\hat{g}_1}{g_1} + \bar{h}_\nu \frac{N_1}{\hat{g}_1} \\ g_\beta & = h_\nu \frac{g_1 \hat{g}_1 - \hat{g}_1^2}{N_1 g_1} - \bar{h}_\nu \end{cases} \tag{B.2.92}$$

となる。

以上より、式 (B.2.88) の光線に対して Gauss 行列を適用する。ただし、近軸スキュー光線（メリディオナル面に含まれない光線のこと）の y, z 成分は独立して伝搬する。（メリジナル面または子午面は主光線と光軸を含む平面のことであり、サジタル面または球欠面は主光線を含みメリディオナル面に垂直な平面のことである。）そのため、まず $z_0 = 0$ のメリディオナル光束に関して考えると換算傾角 α_{0y} は

$$\alpha_{0y} = N_1 u_0 = N_1 \frac{y_0 - \hat{g}_1 \tan \omega}{\hat{g}_1} \tag{B.2.93}$$

と書けるため、 ν 面上の高さ y_ν は

$$y_\nu = g_\alpha y_0 + g_\beta \alpha_{0y} \quad (\text{B.2.94})$$

$$\begin{aligned} &= \left(h_\nu \frac{\hat{g}_1}{g_1} + \bar{h}_\nu \frac{N_1}{\hat{g}_1} \right) y_0 + \left(h_\nu \frac{g_1 \hat{g}_1 - \hat{g}_1^2}{N_1 g_1} - \bar{h}_\nu \right) \left(N_1 \frac{y_0 - \hat{g}_1 \tan \omega}{\hat{g}_1} \right) \\ &= h_\nu y_0 - h_\nu \hat{g}_1 \tan \omega + \frac{h_\nu \hat{g}_1^2 N_1}{g_1} \tan \omega + \bar{h}_\nu N_1 \tan \omega \\ &= h_\nu \left\{ R \cos \phi + (g_1 - \hat{g}_1) \frac{\hat{g}_1}{g_1} \tan \omega \right\} - h_\nu \hat{g}_1 \tan \omega + \frac{h_\nu \hat{g}_1^2 N_1}{g_1} \tan \omega + \bar{h}_\nu N_1 \tan \omega \\ &= h_\nu R \cos \phi + \bar{h}_\nu (N_1 \tan \omega) \end{aligned} \quad (\text{B.2.95})$$

となる。次に $y_0 = 0$ としてサジタル方向を考えると換算傾角は

$$\alpha_{0z} = N_1 u_{0z} = N_1 \frac{z_0}{g_1} \quad (\text{B.2.96})$$

と書けるため、 ν 面上の高さ z_ν は

$$z_\nu = g_\alpha z_0 + g_\beta \alpha_{0z} \quad (\text{B.2.97})$$

$$\begin{aligned} &= \left(h_\nu \frac{\hat{g}_1}{g_1} + \bar{h}_\nu \frac{N_1}{\hat{g}_1} \right) z_0 + \left(h_\nu \frac{g_1 \hat{g}_1 - \hat{g}_1^2}{N_1 g_1} - \bar{h}_\nu \right) N_1 \frac{z_0}{g_1} \\ &= h_\nu \frac{\hat{g}_1}{g_1} z_0 + \bar{h}_\nu \frac{N_1}{\hat{g}_1} z_0 + h_\nu z_0 - \frac{h_\nu \hat{g}_1 z_0}{g_1} - N_1 \bar{h}_\nu \frac{z_0}{g_1} \\ &= h_\nu R \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{B.2.98})$$

となる。

B.2.2 各面における屈折

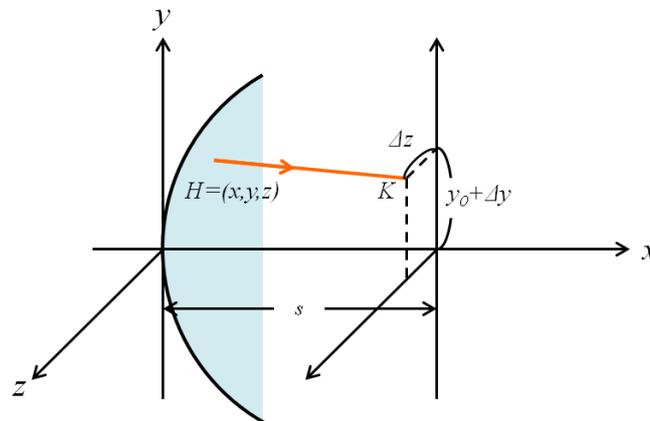


図 B.15: レンズ表面上の点 H と像平面上の点 K を通る光線

図 B.15 のように ν 面上の点 $H(x, y, z)$ を通り、 ν 面から s だけ離れた近軸像と K で交わる光線考える。このとき、物点は子午面内にあるとし、 $\Delta y, \Delta z$ は 3 次収差、 y_0 は近軸像高とする。そのとき、

$$K = (s, y_0 + \Delta y, \Delta z) \quad (\text{B.2.99})$$

であり、方向ベクトルは

$$\overrightarrow{HK} = (s - x, y_0 + \Delta y - y, \Delta z - z) \quad (\text{B.2.100})$$

$$\propto \left(1, \frac{y_0 + \Delta y - y}{s - x}, \frac{\Delta z - z}{s - x} \right) \quad (\text{B.2.101})$$

となる。分母が r, s の 3 次までの精度を持つとして、曲面の方程式の 1 次近似までの解は

$$x = \frac{y^2 + z^2}{2r} = \frac{\rho^2}{2r} \quad (\text{B.2.102})$$

である。ただし、 $\rho^2 = y^2 + z^2$ とする。そのため、

$$\begin{aligned} \frac{y_0 + \Delta y - y}{s - x} &= \frac{y_0 + \Delta y - y}{s} \left(1 - \frac{x}{s} \right)^{-1} \\ &\approx \frac{y_0 + \Delta y - y}{s} \left(1 + \frac{x}{s} \right) \\ &\approx \frac{\Delta y}{s} - \frac{y - y_0}{s} - \frac{y - y_0}{2rs^2} \cdot \rho^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2.103})$$

$$(\text{B.2.104})$$

z 成分も同様に、

$$\frac{\Delta z - z}{s - x} = \frac{\Delta z}{s} - \frac{z}{s} - \frac{z}{2rs^2} \cdot \rho^2 \quad (\text{B.2.105})$$

となる。ここで、方向ベクトル \overrightarrow{HK} を正規化し、単位ベクトルを Q とすると、

$$\left\{ \begin{aligned} Q_x &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_0 + \Delta y - y}{s - x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z - z}{s - x} \right)^2}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{y_0 + \Delta y - y}{s - x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z - z}{s - x} \right)^2 \right\} \\ &\approx 1 - \frac{\rho^2 - 2yy_0 + y_0^2}{(s - x)^2} \\ &\approx 1 - \frac{\rho^2 - 2yy_0 + y_0^2}{s^2} \left(1 + \frac{x}{s} \right) \\ &= 1 - \frac{\rho^2 - 2yy_0 + y_0^2}{s^2} \left(1 + \frac{\rho^2}{4sr} \right) \\ &\approx 1 - \frac{\rho^2 - 2yy_0 + y_0^2}{2s^2} \\ Q_y &= \left(\frac{\Delta y}{s} - \frac{y - y_0}{s} - \frac{y - y_0}{2rs^2} \cdot \rho^2 \right) \left(1 - \frac{\rho^2 - 2yy_0 + y_0^2}{2s^2} \right) \\ &\approx \frac{\Delta y}{s} - \frac{y - y_0}{s} - \frac{(y - y_0)\rho^2}{2rs^2} + \frac{(y - y_0)(\rho^2 - 2yy_0 + y_0^2)}{2s^3} \\ Q_z &\approx \frac{\Delta z}{s} - \frac{z}{s} - \frac{z\rho^2}{2rs^2} + \frac{z(\rho^2 - 2yy_0 + y_0^2)}{2s^3} \end{aligned} \right. \quad (\text{B.2.106})$$

となる。

次に曲面の方程式の 3 次近似までの式として

$$x = \frac{\rho^2}{2r} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{r^3} + b \right) \rho^4 \quad (\text{B.2.107})$$

と近似すると、点 H における法線の方向を \mathbf{E} とすると、

$$\begin{cases} E_x = 1 \\ E_y = -\frac{y}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^3} + b \right) y \rho^2 \\ E_z = -\frac{z}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^3} + b \right) z \rho^2 \end{cases} \quad (\text{B.2.108})$$

となる。

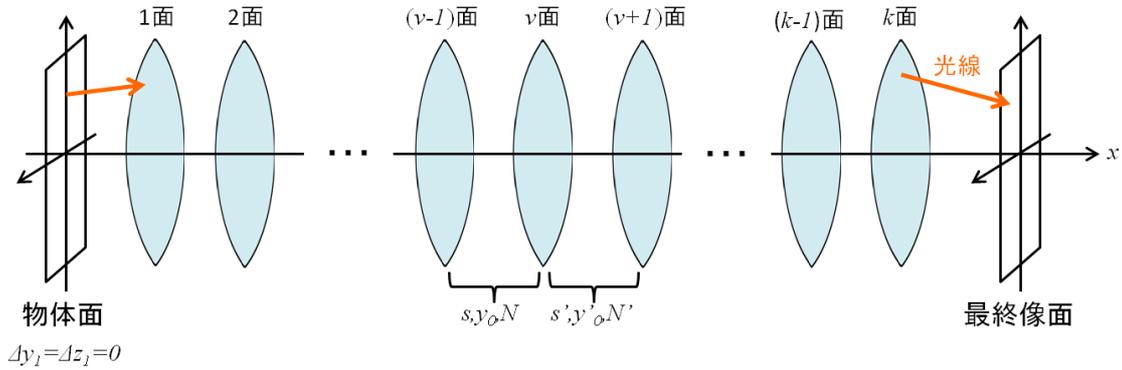


図 B.16: 面 1 ~ k に対して屈折の法則を適用するイメージ図

以上より、屈折の法則

$$N(\mathbf{E} \times \mathbf{Q}) = N'(\mathbf{E} \times \mathbf{Q}') \quad (\text{B.2.109})$$

に式 (B.2.106) と式 (B.2.108) を代入する。まず、 x 成分に関して左辺は

$$E_y Q_z - E_z Q_y = \frac{y_0 z}{sr} \quad (\text{B.2.110})$$

となる。ただし、分母が r, s の 3 次までの精度を持つことに注意。また、右辺はプライム記号を付ければ良いため式 (B.2.109) の x 成分は

$$N \cdot \frac{y_0}{s} = N' \cdot \frac{y'_0}{s'} \quad (\text{B.2.111})$$

となる。次に式 (B.2.109) の左辺の z 成分について計算すると、

$$\begin{aligned} E_x Q_y - E_y Q_x &= y \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) + \frac{\Delta y}{s} + \frac{y_0}{s} \\ &+ y \rho^2 \left(-\frac{1}{2rs^2} + \frac{1}{2s^3} + \frac{1}{2r^3} + \frac{b}{2} - \frac{1}{2rs^2} \right) \\ &+ y_0 \rho^2 \left(\frac{1}{2rs^2} - \frac{1}{2s^3} \right) + y^2 y_0 \left(-\frac{1}{s^3} + \frac{1}{rs^2} \right) \\ &+ y y_0^2 \left(\frac{1}{2s^3} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{2rs^2} \right) - \frac{y_0^3}{2s^3} \end{aligned} \quad (\text{B.2.112})$$

であり、式 (B.2.112) に対して以下の式

$$Q = N \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = N' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) \quad (\text{B.2.113})$$

$$\eta = \frac{Ny_0}{s} = \frac{N'y'_0}{s'} \quad (\text{B.2.114})$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} N(E_x Q_y - E_y Q_x) &= yQ + \frac{N}{s} \cdot \Delta y + \eta + y\rho^2 \left(\frac{Q}{2r^2} + \frac{Q^2}{2Ns} + \frac{N}{2}b \right) \\ &+ \frac{\eta\rho^2 Q}{2Ns} + \frac{\eta y^2 Q}{Ns} + y\eta^2 \left(\frac{3}{2Ns} - \frac{1}{2rN} \right) - \frac{\eta^3}{2N^2} \end{aligned} \quad (\text{B.2.115})$$

となる。右辺に関しては左辺にプライム記号を付けたものなので、結果として屈折の法則の z 成分の式は

$$\begin{aligned} \frac{N'}{s'} \cdot \Delta y' - \frac{N}{s} \cdot \Delta y &= -\frac{1}{2} \left[\left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + b\Delta(N) \right\} y\rho^2 + \eta\rho^2 Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + 2\eta y^2 Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) \right. \\ &\left. + y\eta^2 \left\{ 3\Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) - \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{N} \right) \right\} - \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) \eta^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2.116})$$

となる。そして、式 (B.2.116) の両辺に h_ν を乗じて $1 \sim k$ 面までの和をとる。ここで、物体に収差はないという $\Delta y_1 = 0$ の条件と、

$$\begin{aligned} \frac{N_\nu h_\nu}{s_\nu} \cdot \Delta y_\nu &= N_\nu u_\nu \Delta y_\nu = N'_\nu u'_\nu \Delta y_\nu \\ &= N_{\nu+1} u_{\nu+1} \Delta y_{\nu+1} = \frac{N_{\nu+1} h_{\nu+1}}{s_{\nu+1}} \cdot \Delta y_{\nu+1} \end{aligned} \quad (\text{B.2.117})$$

を用いれば、最終的に

$$\begin{aligned} (-2\alpha'_k) \Delta y'_k &= \sum \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} h y \rho^2 + \sum Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) h \eta \rho^2 + 2 \sum Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) h \eta y^2 \\ &+ \sum \left\{ 3\Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + P \right\} h y \eta^2 - \sum \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) h \eta^3 \end{aligned} \quad (\text{B.2.118})$$

となる。添え字の ν は省略している。ただし、

$$\Psi = b\Delta(N), \quad P = -\frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{N} \right) \quad (\text{B.2.119})$$

である。

以上のことを y 成分にも同様にして計算を行うと、まず

$$\begin{aligned} N(E_z Q_x - E_x Q_z) &= -zQ - sQ - \frac{N}{s} \Delta z - z\rho^2 \left(\frac{Q}{2r^2} + \frac{Q}{2Ns} + \frac{N}{2}b \right) \\ &= -\frac{Q}{Ns} \cdot zy\eta + \frac{Q}{2N^2} \cdot z\eta^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2.120})$$

となり、最終的に

$$(-2\alpha'_k)\Delta z'_k = \sum \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi \right\} h z \rho^2 + 2 \sum Q \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) h \eta y z - \sum \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) h Q z \eta^2 \quad (\text{B.2.121})$$

となる。ただし、途中で用いている記号は

$$\Delta \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{1}{N'} - \frac{1}{N} \quad (\text{B.2.122})$$

$$\Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) = \frac{1}{N'_s} - \frac{1}{N_s} \quad (\text{B.2.123})$$

である。

B.2.3 物体変数 (R, ϕ, ω) による表現

前節の結果より、式 (B.2.118) と式 (B.2.121) は k 個の面を通過した後の収差量を各面の高さ y 、 z と各面での η で表現したものである。これを物体側の変数 (R, ϕ, ω) に変換を行う。まず、Lagrange-Helmholz の不変量は、

$$h\eta = hN \cdot \frac{y_0}{s} = Nu y_0 \quad (\text{B.2.124})$$

で表わされ、全系を通して不変であり、近軸マージナル光線の初期値は式 (B.2.84) であることより、

$$h_\nu \eta_\nu = \frac{N_1}{\hat{g}_1} Y_1 = N_1 \tan \omega \quad (\text{B.2.125})$$

となる。また、式 (B.2.95) と式 (B.2.98) より

$$\begin{aligned} \rho^2 &= y^2 + z^2 \\ &= h^2 R^2 + 2h\bar{h} \cos \phi \cdot R(N_1 \tan \omega) + \bar{h}^2 (N_1 \tan \omega)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2.126})$$

となるため、式 (B.2.95)、式 (B.2.98)、式 (B.2.125)、式 (B.2.126) を式 (B.2.118) 式 (B.2.121) に代入して整理すれば、

$$\begin{aligned} \Delta y'_k &= -\frac{1}{2\alpha'_k} \left[\text{I} R^3 \cos \phi + \text{II} (N_1 \tan \omega) R^2 (2 + \cos 2\phi) \right. \\ &\quad \left. + (3\text{III} + P) (N_1 \tan \omega)^2 R \cos \phi + \text{V} (N_1 \tan \omega)^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2.127})$$

$$\Delta z'_k = -\frac{1}{2\alpha'_k} \left[\text{I} R^3 \sin \phi + \text{II} (N_1 \tan \omega) R^2 \sin 2\phi + \text{IV} (N_1 \tan \omega)^2 R \sin \phi \right] \quad (\text{B.2.128})$$

となる。ただし、I ~ V は

- I : 球面収差係数
- II : コマ収差係数
- III : 非点収差係数
- IV : 球欠像面湾曲収差係数
- V : 歪曲収差係数

と呼ばれ、それぞれ

$$I \equiv \sum h_\nu^4 \left\{ Q_\nu^2 \Delta_\nu \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi_\nu \right\} \quad (\text{B.2.129})$$

$$II \equiv \sum h_\nu^3 \bar{h}_\nu \left\{ Q_\nu \bar{Q}_\nu^2 \Delta_\nu \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi_\nu \right\} \quad (\text{B.2.130})$$

$$III \equiv \sum h_\nu^2 \bar{h}_\nu^2 \left\{ \bar{Q}_\nu^2 \Delta_\nu \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi_\nu \right\} \quad (\text{B.2.131})$$

$$IV \equiv III + \sum P_\nu \quad (\text{B.2.132})$$

$$V \equiv \sum h_\nu^2 \bar{h}_\nu^2 \left\{ Q_\nu^2 \Delta_\nu \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi_\nu \right\} + \sum \bar{h}_\nu^2 \bar{Q}_\nu \Delta \left(\frac{1}{N_t} \right) \quad (\text{B.2.133})$$

である。ここで、I ~ V が上式の通りになることを示す。そのための途中過程で

$$h\bar{h}(\bar{Q} - Q) = 1 \quad (\text{B.2.134})$$

を用いる。これは式 (B.2.125) が任意の物体高に対して計算されるのに対して、初期値が式 (B.2.87) の物点に対する Lagrange の不変量を表わしている。まず、図 B.17 のように物体側で $N_1 \tan \omega = 1$ となる物点に対する Lagrange の不変量は式 (B.2.125) のように

$$N u y_p = N_1 u_1 y_{1p} = \frac{N_1}{\hat{g}_1} \cdot Y_1 = N_1 \tan \omega = 1 \quad (\text{B.2.135})$$

となり、 y_p を s, t で表わすと

$$y_p = \frac{t-s}{t} \cdot \bar{h} \quad (\text{B.2.136})$$

となるため、 $u = h/s_0$ と式 (B.2.135) より

$$\begin{aligned} N \cdot \frac{h}{s} \cdot \frac{t-s}{t} \cdot \bar{h} &= 1 \\ \Leftrightarrow N \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) h\bar{h} &= 1 \\ \Leftrightarrow \left\{ N \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t} \right) - N \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) \right\} h\bar{h} &= 1 \\ \Leftrightarrow h\bar{h}(\bar{Q} - Q) &= 1 \end{aligned}$$

となり、式 (B.2.134) が求まる。

これで準備が整ったため、I ~ V について検証を行う。まず、

$$N_1 \tan \omega = T \quad (\text{B.2.137})$$

とにおいて式 (B.2.118) に式 (B.2.95), 式 (B.2.98), 式 (B.2.125) を代入する。すると、

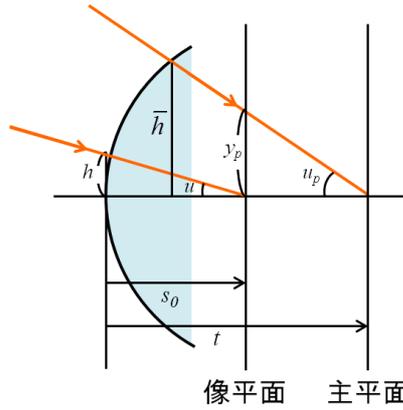


図 B.17: 2本の近軸光線

$$\begin{aligned}
(-2\alpha'_k)\Delta y'_k &= \sum \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi \right\} \left\{ h^4 R^3 \cos \phi + h^3 \bar{h} (1 + 2 \cos^2 \phi) R^2 T \right. \\
&\quad \left. + h^2 \bar{h}^2 (3 \cos \phi) R T^2 + h \bar{h}^3 T^3 \right\} \\
&+ \sum Q \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) \left\{ h^2 R^2 T + 2 h \bar{h} \cos \phi R T^2 + \bar{h}^2 T^3 \right\} \\
&+ 2 \sum Q \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) \left\{ h^2 \cos^2 \phi R^2 T + 2 h \bar{h} \cos \phi R T^2 + \bar{h}^2 T^3 \right\} \\
&+ \sum \left\{ 3 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + P \right\} \left\{ \cos \phi \cdot R T^2 + \frac{\bar{h}}{h} \cdot T^3 \right\} \\
&- \sum \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) \cdot \frac{1}{h^2} \cdot T^3
\end{aligned} \tag{B.2.138}$$

となる。この式を用いてそれぞれの係数について計算する。まず、

$$(R^3 \text{ の係数}) = \sum \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi \right\} h^4 \cos \phi \tag{B.2.139}$$

となり、 I が求まる。また、式 (B.2.134) を用いれば

$$Q h^2 = Q (\bar{Q} - Q) h^3 \bar{h} = Q \bar{Q} h^3 \bar{h} - Q^2 h^3 \bar{h} \tag{B.2.140}$$

が成立し、また

$$1 + 2 \cos^2 \phi = 2 + \cos 2\phi \tag{B.2.141}$$

を用いれば、

$$(R^2T \text{ の係数}) = \left[\left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} h^3 \bar{h} + Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) h^2 \right] (1 + 2 \cos^2 \phi) \quad (\text{B.2.142})$$

$$\begin{aligned} &= \left[\left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} h^3 \bar{h} + \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) (Q \bar{Q} h^3 \bar{h} - Q^2 h^3 \bar{h}) \right] (2 + \cos 2\phi) \\ &= h^3 \bar{h} \left\{ Q \bar{Q} \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} (2 + \cos 2\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.2.143})$$

となり、II と一致する。次に、式 (B.2.134) は

$$\begin{aligned} 1 + Qh\bar{h} &= \bar{Q}h\bar{h} \\ \Leftrightarrow (Qh\bar{h})^2 + 2Qh\bar{h} + 1 &= \bar{Q}^2 h^2 \bar{h}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2.144})$$

であることを用いれば、

$$\begin{aligned} (RT^2 \text{ の係数}) &= \left[3 \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} h^2 \bar{h}^2 + 6Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) h\bar{h} + 3 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + P \right] \cos \phi \\ &= \left[3 \left\{ (Q^2 h^2 \bar{h}^2 + 2Qh\bar{h} + 1) \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi h^2 \bar{h}^2 \right\} + P \right] \cos \phi \\ &= \left[3h^2 \bar{h}^2 \left\{ \bar{Q}^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} + P \right] \cos \phi \end{aligned} \quad (\text{B.2.145})$$

となり、III が求まる。次に、 T^3 の係数を調べると、

$$\begin{aligned} (T^3 \text{ の係数}) &= \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} h \bar{h}^3 + 3Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) \bar{h}^2 \\ &\quad + \left\{ 3 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + P \right\} \frac{\bar{h}}{h} - \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) \frac{1}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{B.2.146})$$

となり、この式に式 (B.2.134) を変形した

$$Q = \bar{Q} - \frac{1}{h\bar{h}} \quad (\text{B.2.147})$$

$$\frac{1}{h} = \bar{h}(\bar{Q} - Q) \quad (\text{B.2.148})$$

を代入すると、

$$(T^3 \text{ の係数}) = \left\{ \bar{Q}^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} h \bar{h}^3 + K \bar{h}^2 \quad (\text{B.2.149})$$

となる。ただし、

$$K = (2\bar{Q} - Q) \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + P(\bar{Q} - Q) - \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) (\bar{Q} - Q)^2 \quad (\text{B.2.150})$$

である。ここで、 K を整理するために Abbe の不変量を用いると、

$$\begin{aligned}
Q &= N \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{N^2} = \frac{1}{NQ} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) \\
&\Leftrightarrow \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) = \frac{1}{rQ} \Delta \left(\frac{1}{N} \right) - \frac{1}{Q} \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) \\
&= -\frac{P}{Q} - \frac{1}{Q} \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right)
\end{aligned} \tag{B.2.151}$$

となり、近軸主光線に対しても同様に

$$\Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) = -\frac{P}{Q} - \frac{1}{Q} \Delta \left(\frac{1}{Nt} \right) \tag{B.2.152}$$

が成り立つ。これを用いて、

$$\begin{aligned}
\Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) (\bar{Q} - Q)^2 &= \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) (\bar{Q}^2 - 2Q\bar{Q} + Q^2) \\
&= -\bar{Q} \left\{ -P + \Delta \left(\frac{1}{Nt} \right) - 2\Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) \right\} - Q \left\{ P + \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{B.2.153}$$

となるため、

$$K = \bar{Q} \Delta \left(\frac{1}{Nt} \right) \tag{B.2.154}$$

となり、式 (B.2.149) に入れば収差係数 V が導かれる。以上の結果から y 成分に関する Seidel 収差係数が求まった。次に、z 成分に関して同様に計算する。まず、式 (B.2.121) に式 (B.2.95), 式 (B.2.98), 式 (B.2.125), 式 (B.2.126), 式 (B.2.137) を代入すると、

$$\begin{aligned}
(-2\alpha'_k) \Delta z'_k &= \sum \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} \{ h^4 R^3 \sin \phi + 2h^3 \bar{h} R^2 T \sin \phi \cos \phi + h^2 \bar{h}^2 R T^2 \sin \phi \} \\
&\quad + 2 \sum Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) \{ h^2 R^2 T \sin \phi \cos \phi + h \bar{h} R T^2 \sin \phi \} \\
&\quad - \sum \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) Q R T^2 \sin \phi
\end{aligned} \tag{B.2.155}$$

となる。式 (B.2.155) の R^3 の係数を確認すると収差係数 I になっていることが分かる。また、 $R^2 T \sin \phi$ の係数を抽出すると、

$$\left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} h^3 \bar{h} + Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) h^2 \tag{B.2.156}$$

となり、これは式 (B.2.142) の $(1 + 2 \cos^2 \phi)$ を除いた形と同じであるため、収差係数 II が導かれることが分かる。最後に $R T^2 \sin 2\phi$ の係数を抽出すると、

$$\left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) + \Psi \right\} h^2 \bar{h} + 2Q \Delta \left(\frac{1}{Ns} \right) h \bar{h} - \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) Q \tag{B.2.157}$$

となり、この式に式 (B.2.144) と式 (B.2.151) を代入すると、

$$\begin{aligned}
(RT^2 \text{ の係数}) &= \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi \right\} h^2 \bar{h} + 2Q \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) h \bar{h} - \Delta \left(\frac{1}{N^2} \right) Q \\
&= \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi \right\} h^2 \bar{h} + 2Q \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) h \bar{h} - Q \left\{ -\frac{P}{Q} - \frac{1}{Q} \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) \right\} \\
&= \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi \right\} h^2 \bar{h} + \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) (2Qh\bar{h} + 1) + P \\
&= \left\{ Q^2 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi \right\} h^2 \bar{h} + \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) \{ (\bar{Q}h\bar{h})^2 - (Qh\bar{h})^2 \} + P \\
&= h^2 \bar{h}^2 \left\{ \bar{Q}^2 \Delta \left(\frac{1}{N_s} \right) + \Psi \right\} + P \tag{B.2.158}
\end{aligned}$$

となり、収差係数 IV が導かれた。以上の計算から 3 次収差係数はすべて確認できた。

B.2.4 Seidel 収差

式 (B.2.127)、式 (B.2.128) を用いてそれぞれの収差と収差図について説明をする。その前に、式 (B.2.127)、式 (B.2.128) の物体側変数 (R, ϕ, ω) 以外の係数をまとめて簡単化すると、

$$\delta y = m_1 R^3 \cos \phi + m_2 \omega R^2 (2 + \cos 2\phi) + (2m_3 + m_4) \omega^2 R \cos \phi + m_5 \omega^3 \tag{B.2.159}$$

$$\delta z = m_1 R^3 \sin \phi + m_2 \omega R^2 \sin 2\phi + m_4 \omega^2 R \sin \phi \tag{B.2.160}$$

ただし、

$$\begin{cases} m_1 = -\frac{I}{2\alpha'_k} \\ m_2 = -\frac{II N_1}{2\alpha'_k} \\ m_3 = -\frac{III N_1^2}{2\alpha'_k} \\ m_4 = -\frac{IV N_1^2}{2\alpha'_k} \\ m_5 = -\frac{V N_1^3}{2\alpha'_k} \end{cases} \tag{B.2.161}$$

である。

球面収差

式 (B.2.159) 式 (B.2.160) の球面収差係数 I 以外つまり m_1 以外の項を全て 0 とした場合、

$$\Delta y'_k = m_1 R^3 \cos \phi \tag{B.2.162}$$

$$\Delta z'_k = m_1 R^3 \sin \phi \tag{B.2.163}$$

となり、両式を 2 乗して足し合わせると

$$\Delta y_k'^2 + \Delta z_k'^2 = (m_1 R^3)^2 \tag{B.2.164}$$

となる。式 (B.2.164) の結果より、係数 I の収差では光線は理想の結像点ではなく、理想の結像点を中心とした半径 $m_1 R^3$ の大きさの円を描いた収差を持つ。この収差は

$$\text{球面収差} \propto R^3 \quad (\text{B.2.165})$$

より、レンズの射出瞳の極座標系の R の 3 乗に比例し、画角の変数 ω に依存しないことから画角に関係なく平行光でも発生することが分かる。よって、図 B.18 のように平行光であってもレンズが球面であることから発生する収差であるために球面収差と呼ばれる。つまり、球面収差があると、像面をどこにおいて物点の像はぼやけた回転対象な円形状になる。

このように、球面収差は光線の入射高の関数となるが、縦軸に光線の入射高 h をとり、横軸に縦の球面収差量 $s(h)$ をとったものを球面収差図とする。

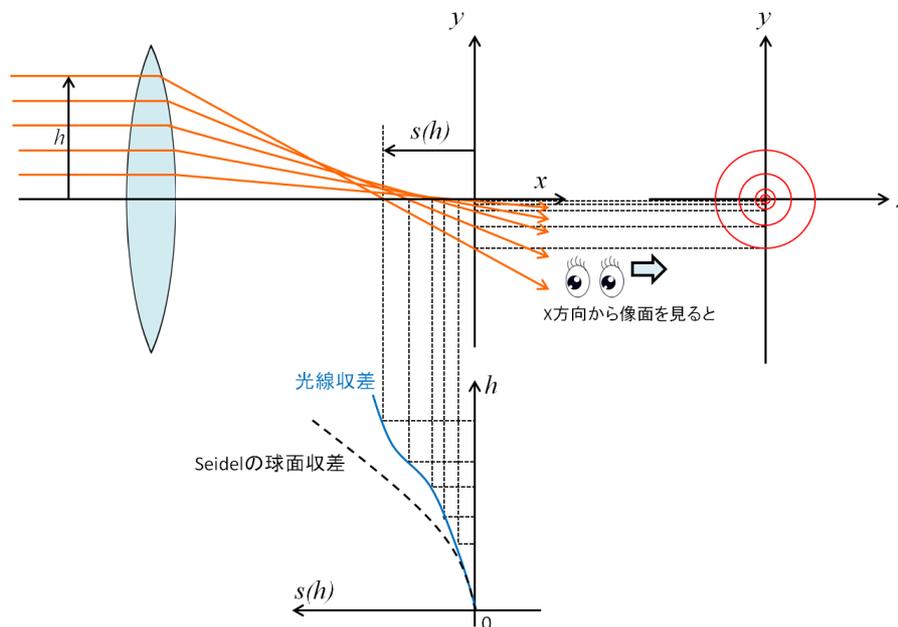


図 B.18: 球面収差

コマ収差

続いて、式 (B.2.127)、式 (B.2.128) のコマ収差係数 II 以外を全て 0 とすると、

$$\Delta y'_k = m_2 \omega R^2 (2 + \cos 2\phi) \quad (\text{B.2.166})$$

$$\Delta z'_k = m_2 \omega R^2 \sin 2\phi \quad (\text{B.2.167})$$

となり、両式を 2 乗して足し合わせる。すると、

$$\begin{aligned}
 \Delta y_k'^2 + \Delta z_k'^2 &= m_2^2 \omega^2 R^4 (4 + 4 \cos 2\phi + \cos^2 2\phi + \sin^2 2\phi) \\
 &= m_2^2 \omega^2 R^4 (5 + 4 \cos 2\phi) \\
 &= m_2^2 \omega^2 R^4 \{4(2 + \cos 2\phi) - 3\} \\
 &= m_2 \omega R^2 \{4\Delta y_k' - 3m_2 \omega R^2\} \\
 \Delta y_k'^2 - 4m_2 \omega R^2 \Delta y_k' + \Delta z_k'^2 &= -3(m_2 \omega R^2)^2 \\
 (\Delta y_k' - 2m_2 \omega R^2)^2 + \Delta z_k'^2 &= (m_2 \omega R^2)^2 \tag{B.2.168}
 \end{aligned}$$

この結果からコマ収差係数 II が残っている場合、理想の結像点から y 軸方向に $2m_2 \omega R^2$ だけ離れたところが中心となる半径 $m_2 \omega R^2$ の円を描く収差を持つことになる。これを図示すると図 B.19 のようになる。式 (B.2.168) より円中心の理想結像点からのズレと円の半径の比は 2 : 1 となるため、円群の包絡線は交角 60° の二直線となる。像が尾を引いた彗星のようなボケの形になることから、この収差のことをコマ収差と呼ぶ。コマ収差は画角 ω に比例するため、画角が大きくなるにしたがってコマ収差も大きくなる。図 (B.2.168) は光軸の外側に向かって尾を引いた形になり、これを正のコマと呼ぶ。逆に、光軸の内側に向かって尾を引いた形になるのは負のコマと呼ぶ。

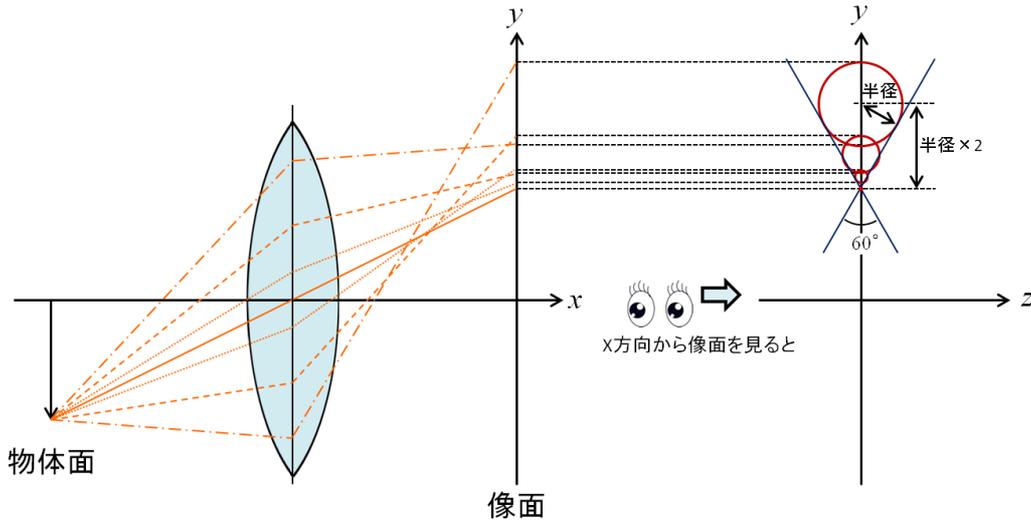


図 B.19: コマ収差

実際の光線収差の場合、コマ収差は像面上の横収差を示し、コマ収差図は図 B.20 のようになる。入射瞳のメリジオナル座標を横軸に、像面上の横収差を縦軸に表示する。これを正式にはメリジオナルコマ曲線と呼ぶ。それに対して、入射瞳のサジタルの横収差を示す場合はサジタルコマ曲線と呼ぶ。

非点収差と像面湾曲

式 (B.2.132) から分かるように非点収差係数と湾曲収差係数は互いに関係のある係数である。そのため、収差係数 III, IV 以外の係数を 0 とした場合、式 (B.2.159), 式 (B.2.160) は

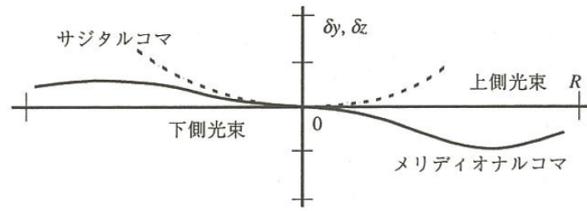


図 B.20: コマ収差の収差図 [54]

$$\Delta y'_k = (2m_3 + m_4)\omega^2 R \cos \phi \tag{B.2.169}$$

$$\Delta z'_k = m_4\omega^2 R \sin \phi \tag{B.2.170}$$

となる。ここで係数ごとに整理し、図 B.21 を用いてそれぞれの収差について説明する。

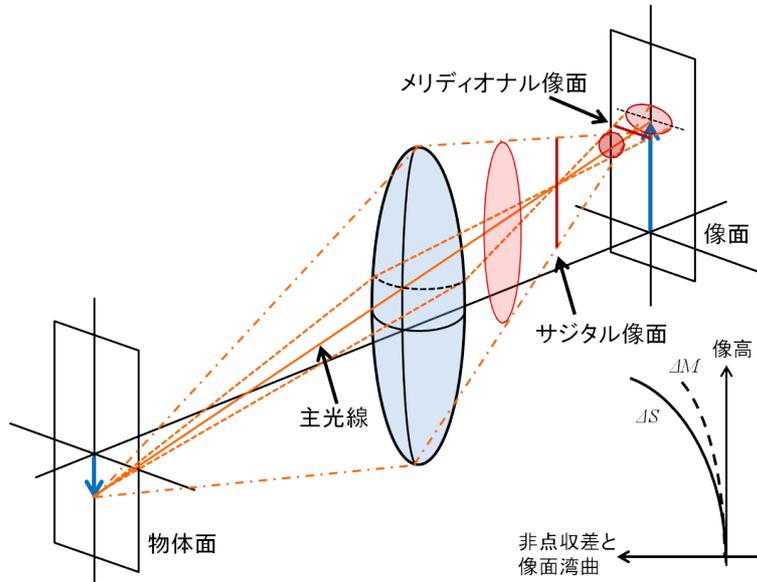


図 B.21: 非点収差と像面湾曲

係数 $m_3 = 0$ の場合

$$\begin{cases} \Delta y'_k = m_4\omega^2 R \cos \phi \\ \Delta z'_k = m_4\omega^2 R \sin \phi \end{cases} \tag{B.2.171}$$

両辺を二乗して足し合わせれば、

$$\Delta y'_k{}^2 + \Delta z'_k{}^2 = (m_4\omega^2 R)^2 \tag{B.2.172}$$

となる。これは図 B.21 の赤線の円の部分を表わしており、主光線を中心として輪帯に入射した

光束は、主平面上の瞳半径 R に比例し画角の 2 乗に比例する円の形になる。これをより詳細に描いた図は図 B.22 である。

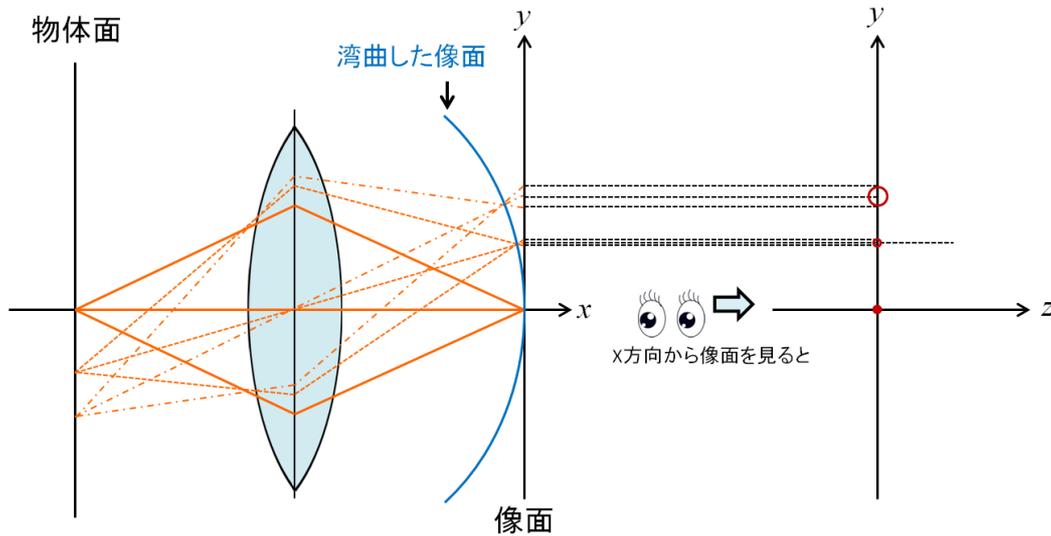


図 B.22: 像面湾曲

図 B.22 のように平面物体の像が湾曲してしまう収差のことを像面湾曲と呼ぶ。

次に、係数 $m_4 = 0$ の場合

$$\begin{cases} \Delta y'_k = 2m_3\omega^2 R \cos \phi \\ \Delta z'_k = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2.173})$$

係数 $2m_3 + m_4 = 0$ の場合

$$\begin{cases} \Delta y'_k = 0 \\ \Delta z'_k = m_4\omega^2 R \sin \phi \end{cases} \quad (\text{B.2.174})$$

式 (B.2.173) と式 (B.2.174) はそれぞれ図 B.21 中のサジタル像面とメリディオナル像面を表わしている。このようにメリディオナル面内の光線とサジタル面内の光線の像の位置が異なることにより像が点に収束しない収差のことを非点収差と呼ぶ。

歪曲収差

収差係数 V 以外の係数を 0 とした場合、式 (B.2.159), 式 (B.2.160) は

$$\begin{cases} \Delta y'_k = m_5\omega^3 \\ \Delta z'_k = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2.175})$$

となる。画角の変数しかないため、主平面上のどの位置を通過してもこの収差には関係しない。したがって、1点から出る光線は1点に収束することになる。しかし、画角の3乗に比例して理想的な結像点から結像点がずれることになり、結果として図 B.23 に示される樽型や糸巻き型のように画像が歪む収差を持つことになる。このような収差のことを歪曲収差と呼ぶ。

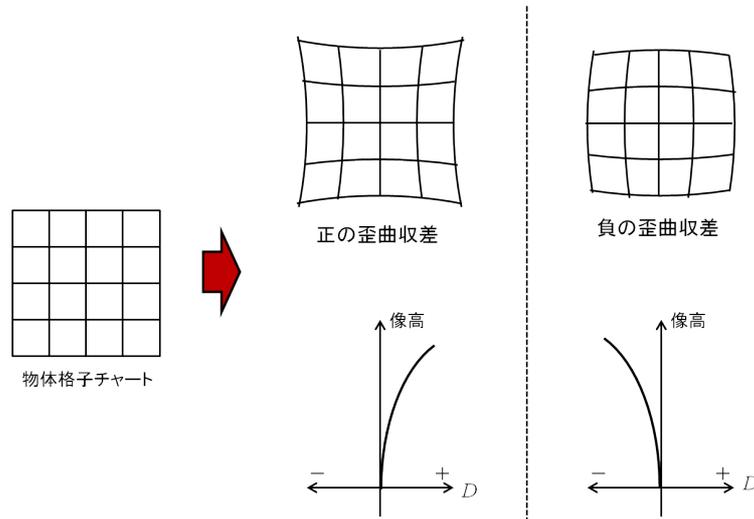


図 B.23: 歪曲収差

歪曲収差図は図 B.23 のように縦軸に像高もしくは画角をとり、横軸に歪曲収差による歪みの程度を表わす D

$$D = \frac{100(Y - Y_0)}{Y_0} [\%] \quad (\text{B.2.176})$$

を用いる。ただし、 Y は実際の像点の像高 Y 、 Y_0 は理想像点の像高である。

B.3 ゼルニケ多項式

本節の説明は [29], [51] をもとに説明を行う。

B.3.1 波面収差

図 B.24 は波面収差の概念図である。図 B.24 中の W_0 は入射球面波の等位相面を表しており、これを波面と呼ぶ。無収差の場合は P から出た波面は P' を中心とする完全な球面波 W_0' として P' に結像する。しかし、実際には波面が歪み、 W_i のような歪んだ波面の形状となる。この理想波面と歪んだ波面の差のことを波面収差 $\Delta W = W_0' - W_i$ と呼ぶ。波面収差は瞳座標 (ξ, η) の関数で表わすことができ、 $\Delta W = W(\xi, \eta)$ と書くことができる。 ΔW の符号は理想波面よりも実波面の方が遅れている場合を正、進んでいる場合を負とする。

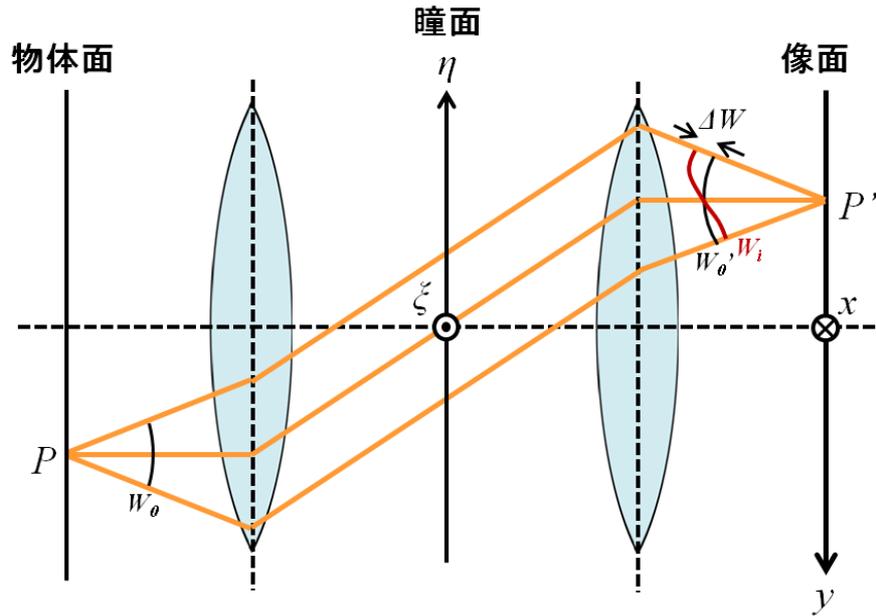


図 B.24: 波面収差の概念図

B.3.2 Zernike 多項式

波面収差は Zernike 多項式で表現することができる。Zernike 多項式の表記方法の一つではない。Zernike 多項式の表記方法には、FRINGE Zernike 多項式、規格化 FRINGE Zernike 多項式、標準 Zernike 多項式の 3 つがある。これらの式の構造は同じだが、規格化条件や並びが異なる。どの場合においても Zernike 多項式は極座標 (ρ, θ) で表わす。ただし、 ρ の範囲は $0 \sim 1$ で、瞳半径は 1 と規格化している。

FRINGE Zernike 多項式

FRINGE Zernike 多項式はよく用いられる Zernike 多項式である。FRINGE Zernike 多項式は表 B.2 で表わされる。FRINGE Zernike 多項式では各多項式の単位円内部での最大値と最小値が ± 1 となるため、Zernike 係数は各項が表す収差の振幅に対応する。

規格化 FRINGE Zernike 多項式

FRINGE Zernike 多項式に、Zernike 係数の二乗和が波面収差の二乗平均に一致するように規格化係数をかけたものが規格化 FRINGE Zernike 多項式である。規格化 FRINGE Zernike 多項式は表 B.3 のように表せる。

標準 Zernike 多項式

標準 Zernike 多項式は表 B.4 で表わされる。標準 Zernike 多項式の係数は FRINGE Zernike 多項式と同じであるが、並びが異なる。一般的にはあまり用いられない。

光学設計ソフト ZEMAX では FRINGE Zernike 多項式と標準 Zernike 多項式の二つで表示する

表 B.2: FRINGE Zernike 多項式

項	Equation	収差
1	1	ピストン
2	$\rho \cos \theta$	tilt x 成分
3	$\rho \sin \theta$	tilt y 成分
4	$2\rho^2 - 1$	デフォーカス + ピストン
5	$\rho^2 \cos 2\theta$	非点収差 (0,90 度)
6	$\rho^2 \sin 2\theta$	非点収差 (± 45 度)
7	$(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	3 次のコマ収差 x 方向 + tilt x 方向
8	$(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$	3 次のコマ収差 y 方向 + tilt y 方向
9	$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$	3 次の球面収差 + デフォーカス + ピストン
10	$\rho^3 \cos 3\theta$	
11	$\rho^3 \sin 3\theta$	
12	$(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$	
13	$(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$	
14	$(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos \theta$	
15	$(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \sin \theta$	
16	$20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$	

ことが可能である。

B.3.3 Zernike 多項式とザイデル収差の対応

Zernike 多項式の極座標 (ρ, θ) と瞳座標 (ξ, η) の関係は、

$$\xi = \rho \cos \theta \quad (\text{B.3.177})$$

$$\eta = \rho \sin \theta \quad (\text{B.3.178})$$

となる。このとき、波面収差 $W(\xi, \eta)$ は Zernike 多項式 $Z_j(\rho, \theta)$ の和として

$$W(\xi, \eta) = \sum_i c_j Z_j(\rho, \theta) \quad (\text{B.3.179})$$

と表わされる。 c_j は各多項式の係数であり、Zernike 係数と呼ぶ。

ここで Zernike 多項式とザイデル収差の対応を示す。

球面収差

まず、FRINGE zernike 多項式の 9 項の ρ^4 が 3 次の球面収差を表しているため、

表 B.3: 規格化 FRINGE Zernike 多項式

項	Equation	収差
1	1	ピストン
2	$2\rho \cos \theta$	tilt x 成分
3	$2\rho \sin \theta$	tilt y 成分
4	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	デフォーカス + ピストン
5	$\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$	非点収差 (0,90 度)
6	$\sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$	非点収差 (± 45 度)
7	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	3 次のコマ収差 x 方向 + tilt x 方向
8	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$	3 次のコマ収差 y 方向 + tilt y 方向
9	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	3 次の球面収差 + デフォーカス + ピストン
10	$\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$	
11	$\sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$	
12	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$	
13	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$	
14	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos \theta$	
15	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \sin \theta$	
16	$\sqrt{7}(20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$	

$$W(x, y) = \rho^4 = \rho^4 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 \\ = (x^2 + y^2)^2$$

となる。瞳面での位相差の傾き成分は瞳内の各領域から出た光がどれだけずれて像面に届くかに対応する。この原理を用いているのがシャックハルトマン型波面センサである。そのため、偏微分した Zernike 多項式はザイデル収差となる。つまり、Zernike 多項式の偏微分は

$$\Delta y = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \\ = 4x(x^2 + y^2) \\ = 4\rho^3 \cos \theta \quad (\text{B.3.180})$$

$$\Delta z = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \\ = 4y(x^2 + y^2) \\ = 4\rho^3 \sin \theta \quad (\text{B.3.181})$$

となる。これは Zernike 多項式の (ρ, θ) とザイデル収差の (R, ϕ) が対応していることから、式 (B.2.162)、式 (B.2.163) と同じ形をしていることが分かる。ただし、Zernike 多項式とザイデル収差では軸の定義が異なっていることに注意が必要である。以上より、Zernike 多項式の球面収差がザイデル収差の球面収差と対応していることが分かる。

表 B.4: 標準ゼルニケ多項式

項	Equation	収差
1	1	ピストン
2	$\rho \cos \theta$	tilt x 成分
3	$\rho \sin \theta$	tilt y 成分
4	$\rho^2 \cos 2\theta$	非点収差 (0,90 度)
5	$2\rho^2 - 1$	デフォーカス + ピストン
6	$\rho^2 \sin 2\theta$	非点収差 (± 45 度)
7	$\rho^3 \cos 3\theta$	
8	$(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	3 次のコマ収差 x 方向 + tilt x 方向
9	$(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$	3 次のコマ収差 y 方向 + tilt y 方向
10	$\rho^3 \sin 3\theta$	
11	$\rho^4 \cos 4\theta$	
12	$(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$	
13	$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$	3 次の球面収差 + デフォーカス + ピストン
14	$(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$	
15	$\rho^4 \sin 4\theta$	

コマ収差

同様にコマ収差についても考える。コマ収差は FRINGE Zernike 多項式の 7 項目の 3 次の項で表わされるため、

$$\begin{aligned} W(x, y) &= 3\rho^3 \cos \theta \\ &= 3x^3 + 3xy^2 \end{aligned}$$

となる。球面収差と同様にコマ収差も偏微分を行えば、

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \\ &= 9x^2 + 3y^2 \\ &= 9\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta \\ &= 9\rho^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 3\rho^2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= 3\rho^2 (\cos 2\theta + 2) \end{aligned} \tag{B.3.182}$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \\ &= 6xy \\ &= 6\rho^2 \cos \theta \sin \theta \\ &= 3\rho^2 \sin 2\theta \end{aligned} \tag{B.3.183}$$

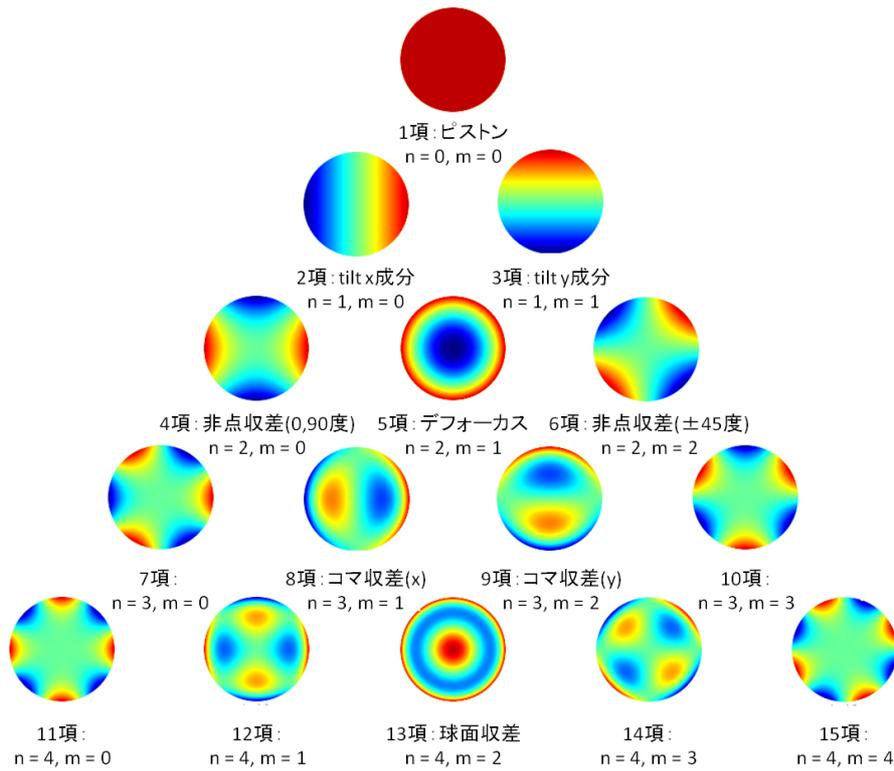


図 B.25: ゼルニケ多項式 [13]

となり、式 (B.2.166)、式 (B.2.167) と同じ形をしていることが分かる。これにより Zernike 多項式のコマ収差がザイデル収差のコマ収差と対応していることが分かる。

非点収差

非点収差は FRINGE Zernike 多項式の 5 次の項で表わすことができるため、

$$\begin{aligned}
 W(x, y) &= \rho^2 \cos 2\theta \\
 &= \rho^2 (2 \cos^2 \theta - 1) \\
 &= 2x^2 - 1
 \end{aligned}$$

と書くことができる。偏微分を行えば、

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \\
 &= 4x \\
 &= 4\rho \cos \theta
 \end{aligned} \tag{B.3.184}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta z &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.3.185}$$

となり、式 (B.2.173) と同じ形になっていることが分かる。よって、Zernike 多項式の非点収差がザイデル収差の非点収差と対応していることが分かる。

像面湾曲

FRINGE Zernike 多項式の第 4 項はデフォーカスであり、光軸方向へのずれを表している。視野内の各点の結像についてこの項の係数が異なる場合、視野内での光軸方向の像面は一定ではない。つまり、これはザイデル収差の像面湾曲に対応している。そのため、第 4 項は

$$\begin{aligned} W(x, y) &= 2\rho^2 \\ &= 2\rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

となる。偏微分を行うと、

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \\ &= 4x \\ &= 4\rho \cos \theta \end{aligned} \tag{B.3.186}$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \\ &= 4y \\ &= 4\rho \sin \theta \end{aligned} \tag{B.3.187}$$

となり、式 (B.2.171) と同じ形となる。そのため、Zernike 多項式の像面湾曲がザイデル収差の像面湾曲と対応していることが分かる。

歪曲収差

FRINGE Zernike 多項式の第 2, 第 3 項は像の横ずれを表しており、これはザイデル収差の歪曲収差に対応している。そのため、第 2 項は

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \rho \cos \theta \\ &= x \end{aligned}$$

となる。偏微分を行うと、

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{B.3.188}$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{B.3.189}$$

となるため、式 (B.2.175) と同じ形となる。そのため、Zernike 多項式の歪曲収差がザイデル収差の歪曲収差と対応していることが分かる。

付録 C 面形状

本研究で光学設計を行う際に用いた面形状についてまとめる [8]

C.1 コーニック面 (標準面)

コーニック面は最も標準的な非球面を表わす面表示である。図 C.1 のような座標系をとった場合、面形状 (サグ) は式 (C.1.1) で表わされる。ただし、 $r^2 = x^2 + y^2$ である。また、 c は曲率であり、曲率半径 R の逆数である。式 (C.1.1) 中の k はコーニック定数と呼ばれ、非球面の度合いを表わす。 k の変化に伴う面形状の変化を表 C.1 にまとめる。これを座標軸上で表わすと図 C.2 のようになる。図 C.2 より、 $k \leq 0$ では $k = 0$ よりも広がった面形状、 $k \geq 0$ では $k = 0$ よりもすぼんだ面形状となる。

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} \quad (\text{C.1.1})$$

表 C.1: コーニック定数と面形状

コーニック定数	面形状
$k > 0$	扁平楕円面
$k = 0$	球面
$-1 < k < 0$	楕円面
$k = -1$	放物面
$k < -1$	双曲面

C.2 バイコーニック面

バイコーニック面とは、曲率半径とコーニック定数が x 方向と y 方向で異なる面のことである。バイコーニック面のサグは式 (C.2.2) で表わされる。 c_x と c_y はそれぞれ x 方向と y 方向の曲率を表しており、 x 方向と y 方向の曲率半径 R_x と R_y の逆数である。 k_x と k_y はそれぞれ x 方向と y 方向のコーニック定数を表している。

$$z = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k_x)c_x^2 x^2 - (1+k_y)c_y^2 y^2}} \quad (\text{C.2.2})$$

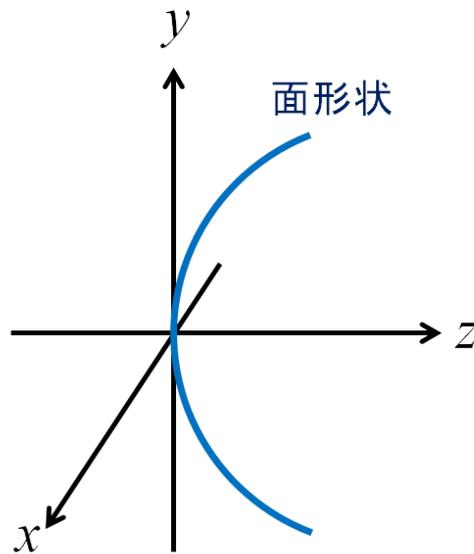


図 C.1: 面表示の座標系

C.3 バイコーニック ゼルニケ面

バイコーニック ゼルニケ面は x 方向、y 方向、ゼルニケ多項式による面形状の変化を受けた面形状のことである。バイコーニック ゼルニケ面のサグは式 (C.3.3) で表わされる。 α_i と β_i は x 方向と y 方向に対する高次非球面係数である。式 (C.3.3) の第 4 項がゼルニケ多項式を表している。ZEMAX では、バイコーニックゼルニケ面がバイコーニック面の高次成分まで含んだ唯一の式である。

$$z = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_x)c_x^2 x^2 - (1 + k_y)c_y^2 y^2}} + \sum_{i=1}^{16} \alpha_i x^i + \sum_{i=1}^{16} \beta_i y^i + \sum_{i=1}^N A_i Z_i(\rho, \phi) \quad (\text{C.3.3})$$

C.4 拡張多項式

拡張多項式面はコーニック面に多項式面を足し合わせた面であり、高次まで含めたコーニック面のことである。拡張多項式のサグは式 (C.4.4) で表わされる。N は多項式係数の数であり、 A_i は i 番目の多項式係数である。式 (C.4.4) の第二項の多項式は x と y のべき級数である。

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k)c^2 r^2}} + \sum_{i=1}^N A_i E_i(x, y) \quad (\text{C.4.4})$$

C.5 偶数次非球面

偶数次非球面は動径方向の偶数次項のみを用いた非球面である。偶数次非球面のサグは式 (C.5.5) で表わされる。偶数次非球面は拡張多項式の偶数次項だけを用いたものと同じである。

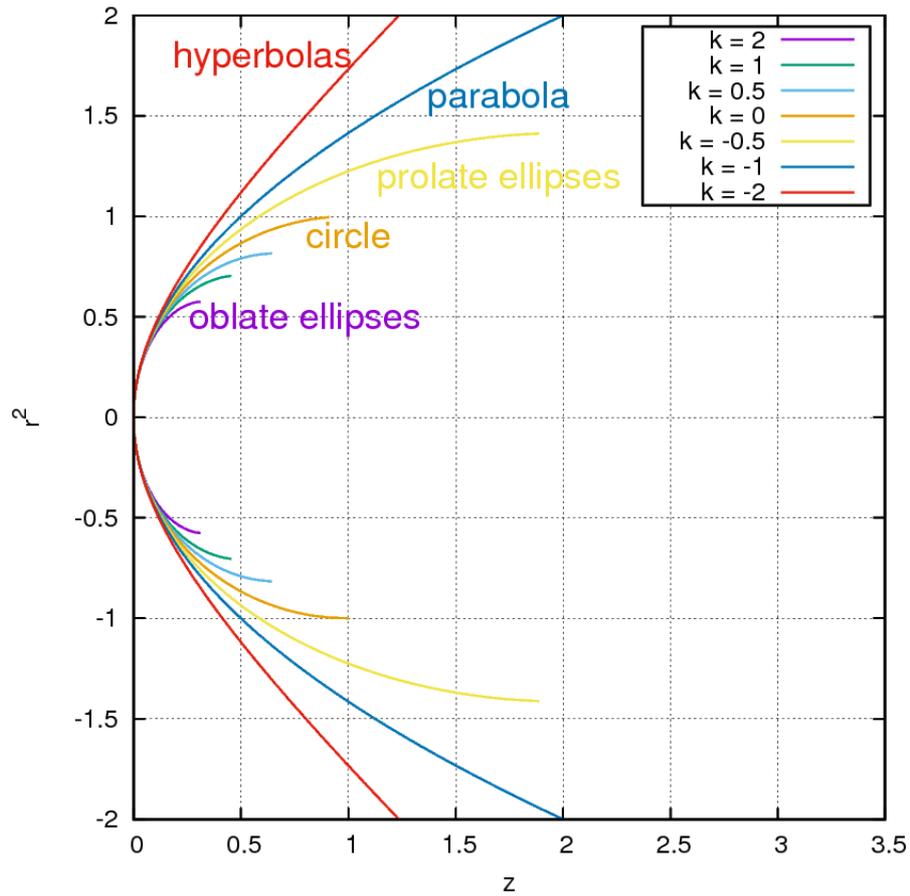


図 C.2: 面形状とコーニック定数

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 r^4 + \alpha_3 r^6 + \alpha_4 r^8 + \alpha_5 r^{10} + \alpha_6 r^{12} + \alpha_7 r^{14} + \alpha_8 r^{16} \quad (\text{C.5.5})$$

参考文献

- [1] D. R. Andersen, J. Stoesz, S. Morris, M. Lloyd-Hart, D. Crampton, T. Butterley, B. Ellerbroek, L. Jolissaint, N. M. Milton, R. Myers, K. Szeto, A. Tokovinin, J.-P. Véran, and R. Wilson. Performance Modeling of a Wide-Field Ground-Layer Adaptive Optics System. *PASP*, Vol. 118, pp. 1574–1590, November 2006.
- [2] C. Baranec, M. Hart, N. M. Milton, T. Stalcup, K. Powell, M. Snyder, V. Vaitheeswaran, D. McCarthy, and C. Kulesa. On-Sky Wide-Field Adaptive Optics Correction Using Multiple Laser Guide Stars at the MMT. *APJ*, Vol. 693, pp. 1814–1820, March 2009.
- [3] A. G. Basden, C. J. Evans, and T. J. Morris. Wide-field adaptive optics performance in cosmological deep fields for multi-object spectroscopy with the European Extremely Large Telescope. *MNRAS*, Vol. 445, pp. 4008–4014, December 2014.
- [4] J.M. Beckers. A proposal to the National Science Foundation. *The NOAO 8-M Telescope Technical Description*, Vol. 2, , 1989.
- [5] Paul Bierden. Mems deformable mirrors for space imaging applications. <https://www.nasa.gov/sites/default/files/files>, 2015.
- [6] R. J. Bouwens, G. D. Illingworth, P. A. Oesch, M. Trenti, I. Labbé, L. Bradley, M. Carollo, P. G. van Dokkum, V. Gonzalez, B. Holwerda, M. Franx, L. Spitler, R. Smit, and D. Magee. UV Luminosity Functions at Redshifts $z = 4$ to $z = 10$: 10,000 Galaxies from HST Legacy Fields. *APJ*, Vol. 803, p. 34, April 2015.
- [7] M. Chun, R. Wilson, R. Avila, T. Butterley, J.-L. Aviles, D. Wier, and S. Benigni. Mauna Kea ground-layer characterization campaign. *MNRAS*, Vol. 394, pp. 1121–1130, April 2009.
- [8] ZEMAX Development Corporation. *ZEMAX Optical Design Program User's Guide*, September 2006.
- [9] E. Diolaiti. MAORY: A Multi-conjugate Adaptive Optics Relay for the E-ELT, June 2010.
- [10] E. Diolaiti, J.-M. Conan, I. Foppiani, et al. Towards the phase A review of MAORY, the multi-conjugate adaptive optics module for the E-ELT, 2010.
- [11] J. Dunkley, E. Komatsu, M. R.olta, et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Likelihoods and Parameters from the WMAP Data. *APJS*, Vol. 180, pp. 306–329, February 2009.
- [12] Richard S. Ellis, et al. The Abundance of Star-forming Galaxies in the Redshift Range 8.5-12: New Results from the 2012 Hubble Ultra Deep Field Campaign. *APJL*, Vol. 763, p. L7, January 2013.

- [13] Lambda Factory. ツエルニケモードと光学. <http://www.lambda-factory.co.jp>.
- [14] X. Fan, M. A. Strauss, R. H. Becker, R. L. White, J. E. Gunn, G. R. Knapp, G. T. Richards, D. P. Schneider, J. Brinkmann, and M. Fukugita. Constraining the Evolution of the Ionizing Background and the Epoch of Reionization with $z \sim 6$ Quasars. II. A Sample of 19 Quasars. *AJ*, Vol. 132, pp. 117–136, July 2006.
- [15] S. L. Finkelstein, C. Papovich, M. Dickinson, M. Song, V. Tilvi, A. M. Koekemoer, K. D. Finkelstein, B. Mobasher, H. C. Ferguson, M. Giavalisco, N. Reddy, M. L. N. Ashby, A. Dekel, G. G. Fazio, A. Fontana, N. A. Grogin, J.-S. Huang, D. Kocevski, M. Rafelski, B. J. Weiner, and S. P. Willner. A galaxy rapidly forming stars 700 million years after the Big Bang at redshift 7.51. *Nature*, Vol. 502, pp. 524–527, October 2013.
- [16] D. Gallieni and R. Biasi. The new VLT-DSM M2 unit: construction and electromechanical testing. In S. Esposito and L. Fini, editors, *Proceedings of the Third AO4ELT Conference*, p. 122, December 2013.
- [17] J. E. Gunn and B. A. Peterson. On the Density of Neutral Hydrogen in Intergalactic Space. *APJ*, Vol. 142, pp. 1633–1641, November 1965.
- [18] M. Hart, et al. A ground-layer adaptive optics system with multiple laser guide stars. *Nature*, Vol. 466, pp. 727–729, August 2010.
- [19] Eugene Hecht. ヘクト光学 I -基礎と幾何光学-. 丸善株式会社, February 2004.
- [20] Glen Herriot, et al. NFIRAOS TMT Early Light Adaptive Optics System. In *Imaging and Applied Optics*, p. AWA4. Optical Society of America, 2011.
- [21] Glen Herriot, et al. NFIRAOS: first facility AO system for the Thirty Meter Telescope. *SPIE*, Vol. 9148, p. 10, July 2014.
- [22] N. Kashikawa, K. Shimasaku, Y. Matsuda, E. Egami, L. Jiang, T. Nagao, M. Ouchi, M. A. Malkan, T. Hattori, K. Ota, Y. Taniguchi, S. Okamura, C. Ly, M. Iye, H. Furusawa, Y. Shioya, T. Shibuya, Y. Ishizaki, and J. Toshikawa. Completing the Census of Ly α Emitters at the Reionization Epoch. *APJ*, Vol. 734, p. 119, June 2011.
- [23] 柏川伸成. すばるでとらえた宇宙ルネッサンスの黎明. 天文月報, Vol. 99, No. 10, October 2006.
- [24] 柏川伸成. 宇宙の果てを越えて. パルティ, Vol. 21, No. 11, November 2006.
- [25] 柏川伸成, 嶋作一大. すばるで探る遠方宇宙/初期宇宙. 日本物理学会誌, Vol. 63, No. 2, 2008.
- [26] Akira Konno, et al. Accelerated Evolution of the Ly α Luminosity Function at $z \sim 7$ Revealed by the Subaru Ultra-deep Survey for Ly α Emitters at $z = 7.3$. *APJ*, Vol. 797, p. 16, December 2014.
- [27] 草川徹. レンズ光学 理論と実用プログラム. 東海大出版会, 1988.
- [28] 草川徹. 基礎光学. 東海大出版会, 1997.

- [29] 草川徹. 光学の原理 II. 東海大出版会, 2006.
- [30] J. H. Lee, B. C. Bigelow, D. D. Walker, A. P. Doel, and R. G. Bingham. Why Adaptive Secondaries? *PASP*, Vol. 112, pp. 97–107, January 2000.
- [31] M. Lloyd-Hart, et al. Design of the adaptive optics systems for GMT, June 2006.
- [32] 松居吉哉. レンズ設計法. 東海大出版会, 1997.
- [33] N. M. Milton, M. Lloyd-Hart, C. Baranec, T. Stalcup, Jr., K. Powell, D. McCarthy, C. Kulesa, and K. Hege. Commissioning the MMT ground-layer and laser tomography adaptive optics systems, July 2008.
- [34] 中川治平. レンズ設計工学. 東海大出版会, 1986.
- [35] B. Neichel, F. Rigaut, F. Vidal, M. A. van Dam, V. Garrel, E. R. Carrasco, P. Pessev, C. Winge, M. Boccas, C. d’Orgeville, G. Arriagada, A. Serio, V. Fesquet, W. N. Rambold, J. Lührs, C. Moreno, G. Gausachs, R. L. Galvez, V. Montes, T. B. Vucina, E. Marin, C. Urrutia, A. Lopez, S. J. Diggs, C. Marchant, A. W. Ebberts, C. Trujillo, M. Bec, G. Trancho, P. McGregor, P. J. Young, F. Colazo, and M. L. Edwards. Gemini multiconjugate adaptive optics system review - II. Commissioning, operation and overall performance. *MNRAS*, Vol. 440, pp. 1002–1019, May 2014.
- [36] European Southern Observatory. The european extremely large telescope. <http://www.eso.org/public/teles-instr/e-elt/>.
- [37] Gemini Observatory. Optical sky background. <https://www.gemini.edu/sciops/telescopes-and-sites/observing-condition-constraints/optical-sky-background>.
- [38] P. A. Oesch, P. G. van Dokkum, G. D. Illingworth, R. J. Bouwens, I. Momcheva, B. Holden, G. W. Roberts-Borsani, R. Smit, M. Franx, I. Labbé, V. González, and D. Magee. A Spectroscopic Redshift Measurement for a Luminous Lyman Break Galaxy at $z = 7.730$ Using Keck/MOSFIRE. *APJL*, Vol. 804, p. L30, May 2015.
- [39] A. Offner. New concept in projection mask aligners. *OPTICAL ENGINEERING*, Vol. 14, No. 2, 1975.
- [40] The Giant Magellan Telescope Organization. Giant magellan telescope. <http://www.gmto.org/>.
- [41] K. Ota, M. Iye, N. Kashikawa, K. Shimasaku, M. Kobayashi, T. Totani, M. Nagashima, T. Morokuma, H. Furusawa, T. Hattori, Y. Matsuda, T. Hashimoto, and M. Ouchi. Reionization and Galaxy Evolution Probed by $z = 7$ Ly α Emitters. *APJ*, Vol. 677, pp. 12–26, April 2008.
- [42] Masami Ouchi, et al. The Subaru/XMM-Newton Deep Survey (SXDS). IV. Evolution of Ly α Emitters from $z=3.1$ to 5.7 in the 1 deg^2 Field: Luminosity Functions and AGN. *APJS*, Vol. 176, pp. 301–330, June 2008.

- [43] Masami Ouchi, et al. Statistics of 207 Ly α Emitters at a Redshift Near 7: Constraints on Reionization and Galaxy Formation Models. *APJ*, Vol. 723, pp. 869–894, November 2010.
- [44] Schneider Peter. *Extragalactic Astronomy and Cosmology*. Springer, 2010.
- [45] R. Ragazzoni and J. Farinato. Sensitivity of a pyramidal Wave Front sensor in closed loop Adaptive Optics. *AAP*, Vol. 350, pp. L23–L26, October 1999.
- [46] F. Rigaut. Ground Conjugate Wide Field Adaptive Optics for the ELTs, 2002.
- [47] B. E. Robertson, R. S. Ellis, J. S. Dunlop, R. J. McLure, and D. P. Stark. Early star-forming galaxies and the reionization of the Universe. *Nature*, Vol. 468, pp. 49–55, November 2010.
- [48] F. Roddier. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. *Progress in optics*, Vol. 19, pp. 281–376, 1981.
- [49] F. Roddier and C. Roddier. Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics., October 1988.
- [50] T. Shibuya, N. Kashikawa, K. Ota, M. Iye, M. Ouchi, H. Furusawa, K. Shimasaku, and T. Hattori. The First Systematic Survey for Ly α Emitters at $z = 7.3$ with Red-sensitive Subaru/Suprime-Cam. *APJ*, Vol. 752, p. 114, June 2012.
- [51] 大木 裕史 渋谷 眞人. 回折と結像の光学. 朝倉書店, 2005.
- [52] K. Shimasaku, N. Kashikawa, M. Doi, C. Ly, M. A. Malkan, Y. Matsuda, M. Ouchi, T. Hayashino, M. Iye, K. Motohara, T. Murayama, T. Nagao, K. Ohta, S. Okamura, T. Sasaki, Y. Shioya, and Y. Taniguchi. Ly α Emitters at $z = 5.7$ in the Subaru Deep Field. *PASJ*, Vol. 58, pp. 313–334, April 2006.
- [53] D. P. Stark, G. Walth, S. Charlot, B. Clément, A. Feltre, J. Gutkin, J. Richard, R. Mainali, B. Robertson, B. Siana, M. Tang, and M. Schenker. Spectroscopic detection of C IV $\lambda 1548$ in a galaxy at $z = 7.045$: implications for the ionizing spectra of reionization-era galaxies. *MNRAS*, Vol. 454, pp. 1393–1403, December 2015.
- [54] 高橋友刀. レンズ設計 収差係数から自動設計まで. 東海大出版会, 1994.
- [55] 谷口義明, 岡村定矩, 祖父江義明. 銀河 I-銀河と宇宙の階層構造. 現代の天文学. 日本評論社, 2007.
- [56] A. Tokovinin. Seeing Improvement with Ground-Layer Adaptive Optics. *PASP*, Vol. 116, pp. 941–951, October 2004.
- [57] H. Trac and R. Cen. Radiative Transfer Simulations of Cosmic Reionization. I. Methodology and Initial Results. *APJ*, Vol. 671, pp. 1–13, December 2007.
- [58] Robert K. Tyson. *Introduction to Adaptive Optics*. Society of Photo Optical, March 2000.
- [59] E. Vernet, et al. Specifications and design of the E-ELT M4 adaptive unit, July 2012.

- [60] A. Zitrin, I. Labbé, S. Belli, R. Bouwens, R. S. Ellis, G. Roberts-Borsani, D. P. Stark, P. A. Oesch, and R. Smit. Lyman α Emission from a Luminous $z = 8.68$ Galaxy: Implications for Galaxies as Tracers of Cosmic Reionization. *APJL*, Vol. 810, p. L12, September 2015.
- [61] 国立天文台 TMT 推進室. Thirty meter telescope. <http://tmt.mtk.nao.ac.jp/intro-j.html>.
- [62] 小幡朋和. Off-axial 光学系の近軸理論を応用した南極 2.5m 望遠鏡用三色赤外線カメラの光学設計, 2014.
- [63] 白井智宏. 補償光学. 映像情報メディア学会誌, Vol. 65, No. 5, pp. 648–653, 2007.
- [64] 高見英樹. 補償光学でシャープな星像を. <http://www.phys.chuo-u.ac.jp/public/tag/kougi/2003/buttoku2/parity.pdf>.
- [65] 高見英樹. 波面収差補正の限界-天体観測用補償光学の進展-. 光技術コンタクト, Vol. 47, No. 5, pp. 245–249, 2009.
- [66] 大屋真, 渡邊誠. すばる望遠鏡レーザーガイド補償光学システムの開発. 光技術コンタクト, Vol. 45, No. 5, pp. 227–235, May 2007.
- [67] 大野良人. 次世代超大型望遠鏡の広視野多天体補償光学のためのトモグラフィック波面再構成の精度および計算速度に関する研究. Master's thesis, 東北大学大学院, 2012.
- [68] ウシオ電機. フィールドレンズ. <http://www.ushio.co.jp>.
- [69] 国立天文台. すばる望遠鏡次世代広視野補償光学システム検討報告書, aug 2012.
- [70] 山室智康. TMT 多天体補償光学装置共通前置リレー光学系検討報告書, August 2013.