理想気体の状態方程式
—量子統計、非相対論的、相対論的、光子気体—

状態方程式は物質の熱力学的な性質を記述するものであり、星の構造進化を決める重要な要素である。状態方程式としては気体の圧力を密度と温度の関数として表したものをよく使う。理想気体の場合について、気体を熱運動している多数の粒子の集まりと考え、その圧力（やその内部エネルギー）を運動論的な考え方を用いて計算する。ここで、理想気体とは、粒子間の相互作用が弱く、それを無視しても良い気体のことであり、この場合、気体全体としてのエネルギー準位を決める問題は、個々の粒子エネルギ準位を決める問題に置き換えることができる。また、気体粒子のエネルギーは、今の場合、運動エネルギーを考えればよいことになる。

1 分布関数

熱平衡にある体積 V の容器の中に N 個の気体粒子があるとする。位相空間の単位体積当たりの粒子数を $\overline{n}(\vec{r},\vec{p})$ と書けば、位相空間内の微小体積中 $d^3\vec{x}d^3\vec{p}$ に存在する粒子数は、$\overline{n}(\vec{x},\vec{p})\ d^3\vec{x}d^3\vec{p}$ で与えられることになる。$\overline{n}(\vec{x},\vec{p})$ は**分布関数**などと呼ばれる。

分布関数 $\overline{n}(\vec{x},\vec{p})$ が空間的に一様であるとすれば $\overline{n}(\vec{x},\vec{p})=\overline{n}(\vec{p})$ と書くことができるから、位相空間について積分して

$$N=\int d^3\vec{p}\int_V d^3\vec{x}\ \ \overline{n}(\vec{x},\vec{p})=V\int d^3\vec{p}\ \ \overline{n}(\vec{p}) \tag{1}$$

を得る。$\overline{n}(\vec{p})$ が運動量空間について等方的であるとすれば、$\overline{n}(\vec{p})$ は運動量の絶対値 $p=|\vec{p}|$ のみに依存し、

$$n_0\equiv\frac{N}{V}=\int d^3\vec{p}\ \ \overline{n}(\vec{p})=\int p^2\ dpd\Omega\ \ \overline{n}(\vec{p})=\int_0^\infty \overline{n}(p)4\pi p^2\ dp$$

となる。ここで $d\Omega=\sin\theta d\theta d\phi$ は微小立体角である。このとき運動量の絶対値 p が p と $p+dp$ との間にある粒子の数密度を $n(p)$ と書けば、$n(p)=4\pi p^2\overline{n}(p)$ で与えられる。分布関数 $n(p)$ は一般に、粒子の運動量 p だけに依存するだけでなく、温度 T や化学ポテンシャル μ にも依存するので、上の式は

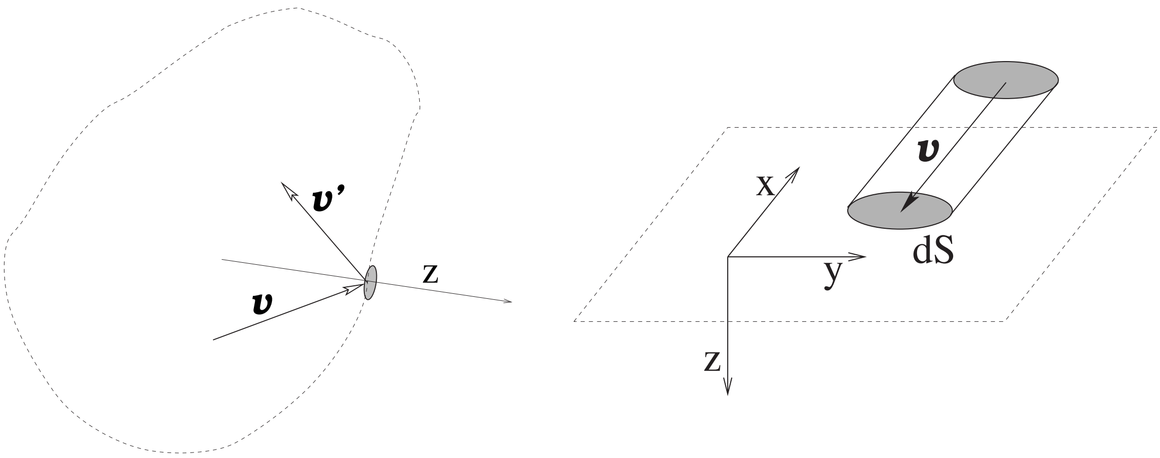
$$n_0(\mu,T)=\int_0^\infty n(p)dp \tag{2}$$

と書くことができる。上の分布関数 $n(p)$ は全立体角について積分したものになっているので、運動量の絶対値 p が $p+dp$ との間にある単位立体角当たりの粒子数密度は、$n(p)/4\pi$ で与えられる。

2 気体の圧力と内部エネルギー

さて以上の定義を踏まえて、熱運動している気体粒子が気体中の仮想的な面に衝突することで、単位時間当たり単位面積に与える運動量として気体の圧力を計算する。仮想面の法線の方向を z 軸にとる球座標を考える。z 軸から θ だけ傾いた方向から面に衝突して、z 軸の反対側に同じ θ だけ傾いた方向に跳ね返されるとき、

一個の粒子が面に与える運動量は $2p\cos\theta$ であり、単位時間当たり単位面積に衝突する粒子は、体積 $v_p\cos\theta$ 中に含まれる。



運動量空間の微小体積中にある粒子で、単位時間当たり単位面積に衝突する粒子の数は

$$\overline{n}\,(\vec{p})\,p^2\,dpd\Omega = \frac{1}{4\pi}n(p)dpd\Omega$$

に体積 $v_p\cos\theta$ を掛けたものである。従って気体中の仮想的な面に働く圧力の大きさは

$$P = \int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\infty}dp\,\frac{1}{4\pi}2p\cos\theta\,v_p\cos\theta\,n(p)$$

で計算されることになる。ここで v_p は 気体粒子の運動量 p に対する運動速度である。

■非相対論的な場合　例えば**非相対論的**な場合は $v_p = p/m$ で与えられる。粒子の熱運動が等方的であると仮定して、角度 θ と ϕ について独立に積分できると仮定すれば

$$P\,(\mu,T) = \frac{1}{3}\int_0^{\infty}dp\,pv_pn(p) \tag{3}$$

が得られる。同じように気体の単位体積の内部エネルギーを、その気体の単位体積中に含まれる気体粒子の運動エネルギー $K = p^2/m$ の和（積分）をとって

$$u\,(\mu,T) = \int_0^{\infty}dp\,Kn(p) \tag{4}$$

で**定義**することができる。

3　Maxwell 分布 [非相対論的な場合]

温度 T の**非相対論的**な気体を考え、その気体粒子の運動量分布が **Maxwell 分布**

$$n(p) = n_0\frac{4\pi p^2}{(2\pi mkT)^{3/2}}\exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) \tag{5}$$

で与えらるとする。ここで n_0 は気体の粒子数密度であり、m は気体粒子の質量、 k は Boltzmann 定数である。このとき、積分 $\int_0^\infty dp\, n(p)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dp\, n(p) &= \int_0^\infty n_0 \frac{4\pi p^2}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dp = n_0 \frac{4\pi}{(2\pi mkT)^{3/2}} \int_0^\infty p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dp \\ &= n_0 \frac{4\pi}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2mkT}\right)^3}} = n_0\end{aligned}$$

となるので、

$$n_0 = \int_0^\infty dp\, n(p) \tag{6}$$

であることが分かる。ここでガウス積分の公式

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp\left(-\lambda x^2\right) dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^{2n+1}}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

を用いている（以後もこの式は使用する）。

また、圧力を (3) に従って計算すると

$$\begin{aligned}P = P(\mu, T) &= \frac{1}{3} \int_0^\infty dp\, pv_p n(p) = \frac{1}{3m} \int_0^\infty n_0 \frac{4\pi p^4}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dp = n_0 \frac{4\pi}{3m(2\pi mkT)^{3/2}} \int_0^\infty p^4 \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dp \\ &= n_0 \frac{4\pi}{3m(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2mkT}\right)^5}} = n_0 \frac{1}{2m} 2mkT = n_0 kT\end{aligned}$$

であるから

$$P = n_0 kT \tag{7}$$

が得られる。同様に内部エネルギーを (4) に従って計算すると

$$\begin{aligned}u = u(\mu, T) &= \int_0^\infty dp\, Kn(p) = u(\mu, T) = \frac{1}{2m} \int_0^\infty dp\, p^2 n(p) = \frac{1}{2m} \int_0^\infty n_0 \frac{4\pi p^4}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dp \\ &= n_0 \frac{2\pi}{m(2\pi mkT)^{3/2}} \int_0^\infty p^4 \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dp = n_0 \frac{2\pi}{m(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2mkT}\right)^5}} = n_0 \frac{3}{4}(2mkT) = \frac{3}{2} n_0 kT = \frac{3}{2} P\end{aligned}$$

であるから

$$u = \frac{3}{2} n_0 kT = \frac{3}{2} P \tag{8}$$

となることが分かる。この式は、粒子一個当たりのエネルギーが $3kT/2$ であることを示している。

4 量子統計

気体や流体を多数の同種粒子の集合と考え、それを**量子力学的な多体問題**として取り扱うとき、粒子のもつ**スピン**によって、粒子の従う統計が異なることが知られている。電子や陽子のようにスピンが 1/2 であるような半整数スピン粒子は、**Fermi-Dirac 統計**に従い、ヘリウム原子核や光子のように、0 や 1 と整数スピンを持つ粒子は **Bose-Einstein 統計**に従うことが知られている。Fermi-Dirac 統計に従う粒子（フェルミ粒子）については、**パウリの排他原理より、ある量子状態 j を同時に占めることができる粒子数は 0 か 1 に限られる。Bose-Einstein 統計に従う粒子（ボーズ粒子）については、量子状態 j を同時に占めることができる粒**

子数は $0, 1, 2, 3, \ldots$ **と制限がない。**今、絶対温度 T の熱浴と熱平衡状態にある体積 V の気体の系を考える。熱浴と系との間には粒子の行き来もあるものとして、粒子の化学ポテンシャルを μ と書く。このとき n 個の同種粒子が量子状態 j を占める確率は、**Gibbs 因子**

$$P_j(n) = A \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)n\right] \tag{9}$$

で与えられることが知られている。ここで、A は規格化定数であり、ϵ_j は量子状態 j のエネルギーレベル、そして $\beta = 1/kT$ である。

5 平均粒子数 [Fermi-Dirac 統計]

Gibbs 因子を用いて、ある量子状態 j を粒子が占める平均粒子数 $\overline{n}\left(\epsilon_j\right)$ を求める。$\overline{n}\left(\epsilon_j\right)$ は

$$\overline{n}\left(\epsilon_j\right) = \frac{\sum_n nP_j(n)}{\sum_n P_j(n)} = -\frac{\partial}{\partial\beta(\epsilon_j - \mu)}\left\{\ln\sum_n P_j(n)\right\} = -\frac{\partial}{\partial\beta(\epsilon_j - \mu)}\left\{\ln\sum_n \exp\left[-\beta(\epsilon_j - \mu)n\right]\right\}$$

と書くことができるので、フェルミ粒子の場合条件 $n = 0$ or 1 より

$$\sum_n \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)n\right] = 1 + \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)\right]$$

であるから結局、

$$\overline{n}_F\left(\epsilon_j\right) = \frac{\exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)\right]}{1 + \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)\right]} = \frac{1}{e^{\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)} + 1} \tag{10}$$

となる。同様にボーズ粒子の場合 $n = 0, 1, 2, \ldots$ であるから、$\epsilon_j - \mu > 0$ とすると $\exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)\right] < 1$ であるから

$$\sum_n \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)n\right] = 1 + \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)\right] + \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)2\right] + \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)3\right] + \cdots = \frac{1}{1 - \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)\right]}$$

となり、結局

$$\overline{n}_B\left(\epsilon_j\right) = \frac{\exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)\right]}{1 - \exp\left[-\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)\right]} = \frac{1}{e^{\beta\left(\epsilon_j - \mu\right)} - 1} \tag{11}$$

が得られる。これを使えば、系に含まれる粒子数の平均値 $\bar{N}$ は、(1) に対応して

$$\bar{N} = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{n}\left(\epsilon_j\right) \tag{12}$$

で与えられ、系のエネルギーの平均値は、(4) に対応して

$$\bar{E} = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j \, \overline{n}\left(\epsilon_j\right) \tag{13}$$

で与えられることになる。ここでは量子状態が離散的であると考えている。

さて、量子力学によれば、自由粒子の場合、位相空間中の微小体積 $d^3\vec{x}d^3\vec{p} = dV\,4\pi p^2\,dp$ に含まれる状態数は

$$g\frac{d^3\vec{x}d^3\vec{p}}{h^3} = g\frac{dV\,4\pi p^2\,dp}{h^3} \tag{14}$$

で与えられる。ここで h は **Planck 定数** であり、g は**内部自由度などに起因する統計的重み、または縮退度**である。これを使えば、量子状態 j の分布が十分稠密であるとして（従って、離散的量子状態を連続的であ

るとして良いとして)、(12) や (13) の和を積分で置き換えることができる。以下では、エネルギー $\epsilon_j \to \epsilon$ を持つ状態を占める平均粒子数を Fermi 粒子の場合

$$\bar{n}_F(E) = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta\epsilon) + 1} \tag{15}$$

と書くことにする。ここで、パラメータ α は化学ポテンシャル μ と $\alpha = -\beta\mu$ で関係している。(15) は、相対論的な自由粒子のエネルギー ϵ の代わりに

$$\epsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2} = mc^2 + \epsilon'$$

で定義される ϵ' を使えば

$$\bar{n}_F(\epsilon') = \frac{1}{\exp(\alpha' + \beta\epsilon') + 1} \tag{16}$$

と書くこともできる。ここで、非相対論の極限で $\epsilon' = \epsilon - mc^2 \to \vec{p}^2/2m$ となるから、ϵ' は**静止エネルギーを差し引いた粒子の運動エネルギー**と解釈できる。また、$\alpha' = \alpha + \beta mc^2$ であり、$\alpha' = -\beta\mu'$ とすれば、$\mu = \mu' + mc^2$ であるから、μ' は**静止エネルギーを除いた化学ポテンシャル**と考えることができる。要するに、(ϵ, μ) を用いても (ϵ', μ') を用いても、$\bar{n}_F$ は同じ形に書ける。

運動量が p と $p + dp$ との間にある粒子の数密度 $n(p)$ は

$$n(p)\,dV dp = \bar{n}_F(\epsilon)\,\frac{g\,dV\,4\pi p^2}{h^3}$$

であるから

$$n(p) = \bar{n}_F(\epsilon)\,g\,\frac{4\pi p^2}{h^3} \tag{17}$$

で定義される。一般に化学ポテンシャル μ は、粒子数密度 n_0 と温度を与えれば形式的には (2) から

$$n_0 = n_0(\mu, T) \tag{18}$$

を μ について解いて、粒子数密度 n_0 と温度 T の関数として求められる。

6 非相対論的な理想気体

非相対論的な**理想電子気体**を考えるとき、$g = 2$(スピン 1/2) である。このとき $n_0(\alpha', T)$ は

$$n_0(\alpha', T) = \int_0^\infty n(p)\,dp = \int_0^\infty \bar{n}_F(\epsilon')\,g\,\frac{4\pi p^2}{h^3}\,dp = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2}{\exp(\alpha' + \beta\epsilon') + 1}\,dp$$

非相対論の極限で $\epsilon' = p^2/2m \to p^2 = 2m\epsilon', pdp = md\epsilon'$、また $\beta\epsilon' = w \to d\epsilon' = \dfrac{1}{\beta}dw$

$$= \frac{8\pi}{h^3}\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{(2m\epsilon')^{1/2}}{\exp(\alpha' + \beta\epsilon') + 1}\,md\epsilon' = \frac{8\pi m}{h^3}\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{(2mkT)^{1/2}w^{1/2}}{\exp(\alpha' + w) + 1}\,dw = \frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{w^{1/2}}{\exp(\alpha' + w) + 1}\,dw$$

$$= \frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}F_{1/2}(\alpha')$$

であるから

$$n_0(\alpha', T) = \frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}F_{1/2}(\alpha') \tag{19}$$

となる。ここで

$$F_\beta(\alpha') = \int_0^\infty \frac{w^\beta}{\exp(\alpha' + w) + 1}\,dw \tag{20}$$

である。同様に $P(\alpha', T)$ も計算すると

$$
\begin{aligned}
P(\alpha', T) &= \frac{1}{3}\int_0^\infty dp\, pv_p\, n(p), \qquad \text{非相対論の場合}\ v_p = \frac{p}{m} \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty p\frac{p}{m}\bar{n}_F(\alpha')\, g\,\frac{4\pi p^2}{h^3}\,dp = \frac{4\pi}{3mh^3}\int_0^\infty \frac{g}{\exp(\alpha'+\beta\epsilon')+1}p^4\,dp \qquad (21)\\
&= \frac{8\pi}{3mh^3}\int_0^\infty \frac{(2mkT)^{3/2}}{\exp(\alpha'+\beta\epsilon')+1}m\,d\epsilon' = \frac{8\pi}{3h^3}\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{(2mkT)^{3/2}w^{3/2}}{\exp(\alpha'+w)+1}dw = \frac{8\pi kT}{3h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{w^{3/2}}{\exp(\alpha'+w)+1}dw \\
&= \frac{8\pi kT}{3h^3}(2mkT)^{3/2}F_{3/2}(\alpha') = \frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}F_{1/2}(\alpha')\frac{2kT}{3}\frac{F_{3/2}(\alpha')}{F_{1/2}(\alpha')} = n_0(\alpha', T)\,kT\left[\frac{2}{3}\frac{F_{3/2}(\alpha')}{F_{1/2}(\alpha')}\right]
\end{aligned}
$$

であるから

$$
P(\alpha', T) = \frac{8\pi kT}{3h^3}(2mkT)^{3/2}F_{3/2}(\alpha') = n_0(\alpha', T)\,kT\left[\frac{2}{3}\frac{F_{3/2}(\alpha')}{F_{1/2}(\alpha')}\right] \qquad (22)
$$

となることが示せた。また、気体単位体積の内部エネルギー（粒子の運動エネルギーの積分） $u(\alpha', T)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
u = u(\alpha', T) &= \int_0^\infty dp\, K\, n(p) = \int_0^\infty dp\,\frac{p^2}{2m}\bar{n}_F(\alpha')\, g\,\frac{4\pi p^2}{h^3} = \frac{3}{2}\frac{4\pi}{3mh^3}\int_0^\infty \frac{g}{\exp(\alpha'+\beta\epsilon')+1}\,p^4\,dp \\
&= \frac{3}{2}P \qquad \because (21)
\end{aligned}
$$

より

$$
u = \frac{3}{2}P \qquad (23)
$$

で与えられることが分かる。

6.1 気体が縮退していない場合

気体が縮退していない（α' が正で十分大きい、従って $-\mu' \gg kT$ ）のとき

$$
F_\beta(\alpha') = \int_0^\infty \frac{w^\beta}{\exp(\alpha'+w)+1}\,dw \cong \int_0^\infty w^\beta e^{-(\alpha'+w)}dw = e^{-\alpha'}\int_0^\infty w^\beta e^{-w}dw \qquad (24)
$$

として良いとする。このとき P は前問の結果より

$$
P = n_0(\alpha', T)\,kT\left[\frac{2}{3}\frac{F_{3/2}(\alpha')}{F_{1/2}(\alpha')}\right] = n_0\frac{2}{3}\,kT\,\frac{e^{-\alpha'}\int_0^\infty w^{3/2}e^{-w}dw}{e^{-\alpha'}\int_0^\infty w^{1/2}e^{-w}dw} = n_0\frac{2}{3}\,kT\,\frac{-\left[w^{3/2}e^{-w}\right]_0^\infty + \frac{3}{2}\int_0^\infty w^{1/2}e^{-w}dw}{\int_0^\infty w^{1/2}e^{-w}dw} = n_0kT
$$

であるから

$$
P = n_0kT \qquad (25)
$$

であることが分かる。非縮退の極限で化学ポテンシャル μ は (19) より、これまでの近似の許で

$$
\begin{aligned}
n_0 = n_0(\alpha', T) &= \frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}F_{1/2}(\alpha') = \frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}e^{-\alpha'}\int_0^\infty w^{1/2}e^{-w}dw, \qquad w^{1/2} = s,\ \frac{ds}{dw} = \frac{1}{2}w^{-1/2} \\
&= g\,\frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}e^{-\alpha'}\int_0^\infty s^2e^{-s^2}ds = g\,\frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}e^{-\alpha'}\frac{1}{4}\sqrt{\pi} = g\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\ e^{-\alpha} \\
&\Longrightarrow \quad e^{-\alpha'} = \frac{n_0}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}
\end{aligned}
$$

となるので、$-\alpha' = \beta\mu', \mu = \mu' + mc^2$ より

$$
\mu' = kT\ln\left[\frac{n_0}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right], \qquad \mu = mc^2 + kT\ln\left[\frac{n_0}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right] \qquad (26)
$$

と計算することができる。今 g は $g=2$ であった。このとき (17) は

$$
\begin{aligned}
n(p) &= \bar{n}_F(\epsilon)\,g\,\frac{4\pi p^2}{h^3} = \frac{8\pi p^2}{h^3}\frac{1}{\exp(\alpha'+\beta\epsilon')+1} \cong \frac{8\pi p^2}{h^3}\frac{1}{\exp(\alpha'+\beta\epsilon')} = \frac{8\pi p^2}{h^3}e^{-\alpha'}\,e^{-\beta p^2/2m} \\
&= \frac{8\pi p^2}{h^3}\frac{n_0}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) = n_0\frac{4\pi p^2}{(2\pi mkT)^{3/2}}\exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) = (5)
\end{aligned}
$$

となるから、Maxwell 分布に一致することが分かる。

(1)〜(8) の結果は、この近似のもとで得られたものである。

6.2 気体が縮退している場合

縮退している非相対論的な理想気体を考える。P は n_0 と T との関数であると考えているが、(19) と (22) で表される n_0 と P とは α' と T との関数であるので

$$
\left(\frac{\partial n_0}{\partial T}\right)_{n_0} = 0 = \left(\frac{\partial n_0}{\partial \alpha'}\right)_T\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial T}\right)_{n_0} + \left(\frac{\partial n_0}{\partial T}\right)_{\alpha'} \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial T}\right)_{n_0} = -\frac{\left(\frac{\partial n_0}{\partial T}\right)_{\alpha'}}{\left(\frac{\partial n_0}{\partial \alpha'}\right)_T} = -\frac{\frac{3}{2}T^{1/2}F_{1/2}}{T^{3/2}\frac{dF_{1/2}}{d\alpha'}} = -\frac{3}{2T}\frac{F_{1/2}}{\frac{dF_{1/2}}{d\alpha'}} \tag{27}
$$

が成り立ち、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{n_0} &= \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha'}\right)_T\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial T}\right)_{n_0} + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\alpha'} = -\frac{8\pi kT}{3h^3}(2mkT)^{3/2}\frac{dF_{3/2}}{d\alpha'}\frac{3}{2T}\frac{F_{1/2}}{\frac{dF_{1/2}}{d\alpha'}} + \frac{8\pi k}{3h^3}(2mkT)^{3/2}\frac{5}{2}F_{3/2} \\
&= \frac{8\pi kT}{3h^3}(2mkT)^{3/2}F_{3/2}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\frac{F_{1/2}}{F_{3/2}}\frac{dF_{3/2}/d\alpha'}{dF_{1/2}/d\alpha'}\right)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{n_0} = \frac{P}{T}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\frac{F_{1/2}}{F_{3/2}}\frac{dF_{3/2}/d\alpha'}{dF_{1/2}/d\alpha'}\right) \tag{28}
$$

であることが分かる。これより弱い縮退の極限で $(\partial P_e/\partial T)_{n_0} = P_e/T$ 、強い縮退での極限で $(\partial P_e/\partial T)_{n_0} = 0$ となるこえお示すことができる。**縮退が強いときその圧力は温度に依存せず、密度のみに依存するようになる。**

6.3 気体が「完全」縮退している場合

$\alpha = -\mu/kT \to -\infty$ **の極限は、気体が縮退している状態に対応する。**実際、粒子一個当たりの熱エネルギー kT が化学ポテンシャル $\mu > 0$ に比べて小さいとき、$\alpha + \beta\epsilon = -\beta(\mu-\epsilon)$ であるから $\epsilon = \mu$ の極近傍を除いては、 $\epsilon > \mu$ **のとき** $\exp[-\beta(\mu-\epsilon)] \gg 1$、そして $\epsilon < \mu$ **のとき** $\exp[-\beta(\mu-\epsilon)] \ll 1$ として良いであろう。従って $\epsilon_{\mathrm{Fermi}} = \epsilon_f = \mu$ とすれば (10) に於いて

$$
\epsilon \le \epsilon_f \text{ のとき } \bar{n}(\epsilon) = 1、\epsilon > \epsilon_f \text{ のとき } \bar{n}(\epsilon) = 0 \tag{29}
$$

が成り立つ。このような縮退の状態を**完全縮退**という。ϵ_f は **Fermi エネルギー**と呼ばれる。非相対論的気体の場合、Fermi 運動量 p_f と Fermi エネルギーとの関係が $\epsilon_f = p_f^2/2m$ で与えられるとすれば、(29) は

$$
p \le p_f \text{ のとき } \bar{n}(\epsilon(p)) = 1、\epsilon > p_f \text{ のとき } \bar{n}(\epsilon(p)) = 0 \tag{30}
$$

が成立する。

P を計算すると

$$
P = P(\alpha, T) = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\frac{p}{m}\bar{n}_F(\alpha')\,g\,\frac{4\pi p^2}{h^3}\,dp = \frac{8\pi}{3mh^3}\int_0^{p_f} p^4\,dp = \frac{8\pi}{15mh^3}p_f^5
$$

であり、このとき (2) より

$$n_0 = \int_0^\infty \overline{n}_F(\alpha')\, g\, \frac{4\pi p^2}{h^3}\, dp = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_f} p^2\, dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_f^3 \qquad \therefore\ p_f = \left(\frac{3h^3}{8\pi} n_0\right)^{1/3}$$

となるので

$$P = \frac{8\pi}{15mh^3} p_f^5 = \frac{8\pi}{15mh^3}\left(\frac{3h^3}{8\pi} n_0\right)^{5/3} \tag{31}$$

となり、先に完全縮退非相対論的場合を考察した通り、圧力は粒子密度だけで決まり、式中に温度 T が入っていないことが分かる。

7 相対論的な理想気体

相対論的な理想気体については

$$\epsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}, \qquad v_p = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \frac{p/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} \tag{32}$$

などとする必要がある。このとき、気体の圧力や単位体積当たりのエネルギーは、(3) や (4) から

$$P(\alpha, T) = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{p^2/m}{\sqrt{1+(p/mc)^2}}\, \overline{n}_F(\epsilon)\, g\, \frac{4pip^2}{h^3}\, dp \tag{33}$$

$$u(\alpha, T) = \int_0^\infty K\overline{n}_F(\epsilon)\, g\, \frac{4\pi p^2}{h^3}\, dp \tag{34}$$

で与えられることが分かる。ここで m は静止質量であり、

$$K = \epsilon - mc^2 = mc^2\sqrt{1+(p/mc)^2} - mc^2 = mc^2\left[1 - \left(\frac{v_p}{c}\right)^2\right]^{-1/2} - mc^2 \tag{35}$$

は粒子の静止エネルギーを除いた運動エネルギーである。化学ポテンシャル α は非相対論的な場合と同様にして、(2) から

$$n_0\,(\alpha, T) = \int_0^\infty \overline{n}_F(\epsilon)\, g\, \frac{4\pi p^2}{h^3}\, dp \tag{36}$$

を用いて、n_0 と T の関数として与えられる。

7.1 非縮退の極限の場合

$\alpha \gg 1$ **であるような非縮退の極限**では $\exp(\alpha + \beta\epsilon) \gg 1$ として

$$n_0\,(\alpha, T) = \frac{4\pi g}{h^3} e^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-\beta\epsilon} p^2\, dp \tag{37}$$

$$P\,(\alpha, T) = \frac{4\pi g}{3mh^3} e^{-\alpha}\int_0^\infty \frac{p^4 e^{-\beta\epsilon}}{\sqrt{1+(p/mc)^2}}\, dp \tag{38}$$

$$u\,(\alpha, T) = \frac{4\pi g mc^2}{h^3} e^{-\alpha}\int_0^\infty \left(\sqrt{1+(p/mc)^2} - 1\right) e^{-\beta\epsilon} p^2\, dp \tag{39}$$

などと書くことができる。

また、 P は

$$P = P(\alpha, T) = \frac{4\pi g}{3mh^3} e^{-\alpha} \int_0^\infty \frac{p^4 e^{-\beta\epsilon}}{\sqrt{1+(p/mc)^2}}\, dp = -\frac{4\pi g}{3h^3\beta} e^{-\alpha} \int_0^\infty p^3 \frac{d}{dp} e^{-\beta\epsilon}\, dp$$

$$\because \left[\frac{d}{dp} e^{-\beta\epsilon} = -\beta e^{-\beta\epsilon} \frac{d\epsilon}{dp} = -\beta e^{-\beta\epsilon} \frac{d}{dp} \left[\left(mc^2\right)^2 + (pc)^2 \right]^{1/2} = -\frac{\beta e^{-\beta\epsilon} p}{m\sqrt{1+(p/mc)^2}} \right]$$

$$= -\frac{4\pi g}{3h^3\beta} e^{-\alpha} \left(\left[e^{-\beta\epsilon} p^3 \right]_0^\infty - 3 \int_0^\infty e^{-\beta\epsilon} p^2\, dp \right) = \frac{1}{\beta} \frac{4\pi g}{h^3} e^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-\beta\epsilon} p^2\, dp = n_0 kT$$

より

$$P = n_0 kT \tag{40}$$

が成り立つことが分かる。

7.2 完全縮退している場合

完全縮退している相対論的な電子気体の圧力は

$$P = \frac{8\pi}{3mh^3} \int_0^{p_f} dp\, \frac{p^4}{\sqrt{1+(p/mc)^2}} \tag{41}$$

で得られるであろう。これ積分すると

$$\begin{aligned} P &= \frac{8\pi}{3mh^3} \int_0^{p_f} dp\, \frac{p^4}{\sqrt{1+(p/mc)^2}}, \qquad \frac{p}{mc} = s,\ \frac{ds}{dp} = \frac{1}{mc} \\ &= \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} \int_0^x \frac{s^4}{\sqrt{1+s^2}}\, ds \end{aligned}$$

となる。この積分を計算するのはなかなか酷である。今、賢い方法として

$$\sqrt{1+s^2} = s + t \ \text{とすると、} s = \frac{1-t^2}{2t},\ \sqrt{1+s^2} = \frac{1+t^2}{2t},\ \frac{ds}{dt} = -\frac{t^2+1}{2t^2},\ x = \frac{p_f}{mc}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{s^4}{\sqrt{1+s^2}}\, ds &= -\int_0^{-x+\sqrt{1+x^2}} \frac{2t}{1+t^2} \left(\frac{1-t^2}{2t} \right)^4 \frac{1+t^2}{2t^2}\, dt = -\frac{1}{16} \int_0^{-x+\sqrt{1+x^2}} \left(t^3 - 4t + \frac{2}{t} - \frac{4}{t^3} + \frac{1}{t^5} \right) dt \\ &= \frac{1}{8} \left[-\frac{t^4}{8} + t^2 - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{8t^4} - 3\log t \right]_0^{-x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ x(2x^2-3)\sqrt{x^2+1} + 3\ln\left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right\} = \frac{1}{8} \left\{ x(2x^2-3)\sqrt{x^2+1} + 3\sinh^{-1} x \right\} \equiv \frac{1}{8} f(x) \end{aligned}$$

と計算される。以上より P は

$$P = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} f(x), \qquad x = \frac{p_f}{mc} = \frac{h}{mc} \left(\frac{3}{8\pi} n_0 \right)^{1/3} \tag{42}$$

となることが分かる。

ここで $f(x)$ の $x \to 0$、$x \to +\infty$ での展開を考える。ここでは次の一般式項展開

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

を許に、展開を考えることとする。$x \to 0$ の極限では $x = 0$ のまわりで展開することで

$$f(x) = 8 \int_0^x \frac{s^4}{\sqrt{1+s^2}}\, ds = 8 \int_0^x ds\, s^4 \left(1 - \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{8} s^4 + \cdots \right) = 8 \int_0^x ds \left(s^4 - \frac{x^6}{2} + \frac{3}{8} x^8 + \cdots \right) = \frac{8}{5} x^5 - \frac{4}{7} x^7 + \frac{x^9}{3} + \cdots$$

であるから

$$f(x) \approx \frac{8}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \cdots \tag{43}$$

となる。$x \to 0$ の極限では $0 < x < \infty$ で展開することで

$$\begin{aligned} f(x) &= 8\int_0^x \frac{s^4}{\sqrt{1+s^2}}\,ds = 8\int_0^x \frac{s^3}{\sqrt{1+1/s^2}}\,ds = 8\int_0^x ds\, s^3\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8s^4} + \cdots\right) = 8\int_0^x ds\left(s^3 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8x}\cdots\right) \\ &= 2x^4 - 2x^2 + 3\ln x + \cdots \end{aligned}$$

であるから

$$f(x) \approx 2x^4 - 2x^2 + \cdots \tag{44}$$

となる。従って、質量密度を $\rho = mn_0$ とすれば

$$\begin{aligned} P = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} f(x) \quad &\propto \quad \left(\rho^5\right)^{1/3} = \rho^{5/3}\,, \qquad x \ll 1 \\ &\propto \quad \left(\rho^4\right)^{1/3} = \rho^{4/3}\,, \qquad x \gg 1 \end{aligned} \tag{45}$$

となることが分かる。

8 単位体積当たりの完全縮退気体粒子の運動エネルギー

単位体積当たりの**完全縮退気体粒子**の運動エネルギーを計算することを考える。粒子の運動エネルギーは相対論的な場合も考慮するとき、単位体積当たりの縮退粒子の運動エネルギーは

$$u = \int_0^{p_f} K\, g\, \frac{4\pi p^2}{h^3}\, dp \tag{46}$$

で与えられる。これを計算すると $K = mc^2\left(\sqrt{1+(p/mc)^2} - 1\right)$ であるから

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{p_f} K\, g\, \frac{4\pi p^2}{h^3}\, dp = \frac{4\pi g m c^2}{h^3}\int_0^{p_f}\left(\sqrt{1+(p/mc)^2} - 1\right)p^2\, dp = \frac{4\pi g m^4 c^5}{h^3}\int_0^x \left(\sqrt{1+s^2} - 1\right)s^2\, ds \\ &= \frac{4\pi g m^4 c^5}{h^3}\left[\int_0^x s^2\sqrt{1+s^2}\, ds - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{8\pi m^4 c^5}{h^3}\left[\frac{1}{3}\left(x^3\sqrt{1+x^2} - \int_0^x \frac{s^4}{\sqrt{1+s^2}}\, ds\right) - \frac{x^3}{3}\right] \\ &= \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}\left[8x^3\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) - f(x)\right] = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} g(x) \end{aligned}$$

となり

$$u = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} g(x)\,, \qquad g(x) = 8x^3\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) - f(x) \tag{47}$$

であることが分かる。また

$$u = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} g(x) = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} x^3\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) - \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} f(x) = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} x^3\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) - P$$

であるから、$x \to 0$ の極限で

$$P = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} f(x) \approx \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}\frac{8}{5}x^5 = \frac{8}{15}\frac{\pi m^4 c^5}{h^3}x^5$$

$$\frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} x^3\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) \approx \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} x^3\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots - 1\right) = \frac{8\pi m^4 c^5}{15h^3}\frac{5}{2}x^5 = \frac{5}{2}P$$

$$\Longrightarrow \quad u = \frac{3}{2}P$$

となるので

$$P \to \frac{2}{3}u \tag{48}$$

であることが分かる。同様に $x \to \infty$ の極限で

$$P = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} f(x) \approx \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} \cdot 2x^4 = \frac{2}{3}\frac{\pi m^4 c^5}{h^3} x^4$$

$$\frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} x^3 \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) \approx \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} x^4 \left(\sqrt{1+1/x^2} - 1/x\right) = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} x^4 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \cdots\right) = 4 \cdot \frac{2}{3}\frac{\pi m^4 c^5}{h^3} x^4 = 4P$$

$$\Longrightarrow \quad u = 3P$$

となるので

$$P \to \frac{1}{3}u \tag{49}$$

であることが分かる。

9 光子気体

自由 Bose 粒子について、そのエネルギーレベル ϵ を占める粒子数の平均値は

$$\bar{n}_B(\epsilon) = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta\epsilon) - 1} \tag{50}$$

で与えられる。(17) に対応して

$$n(p) = \bar{n}_B(\epsilon)\, g\, \frac{4\pi p^2}{h^3} \tag{51}$$

が得られる。

光子は質量が零でスピンが 1 の Bose 粒子であるが、ある一定温度、一定体積の容器に閉じこめられた光子ガスに含まれる光子数は、熱平衡条件により決まり（従って、光子数が温度に依存する）、光子数を保存量と見なすことはできないので、$\mu = 0$ 、従って $\alpha = 0$ としなければならない。

温度 T の光子気体を考える。光子についてエネルギー ϵ は $\epsilon = h\nu$ 、運動量は $p = \epsilon/c$ で与えられるとすれば、振動数 ν と $\nu + d\nu$ との間にある光子の数密度 $\hat{n}(\nu)$ は

$$n(p)\, dp = \hat{n}(\nu)\, d\nu$$

として

$$\hat{n}(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^2}{\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right) - 1}\, d\nu \tag{52}$$

で与えられる。ここで光子は二つの偏りがあるので $g = 2$ とした。

単位振動数当たりのエネルギー密度 $\tilde{u}(T, \nu)$ を

$$\tilde{n}(T, \nu)\, d\nu = h\nu\, \hat{n}(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right) - 1}\, d\nu \tag{53}$$

で定義して、エネルギー密度を

$$u(T) = \int_0^\infty \tilde{u}(T,\nu)\, d\nu \tag{54}$$

とする。今の場合、圧力を P_{Rad} と書くと

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{Rad}} &= \frac{1}{3}\int_0^\infty dp\, p v_p n(p), \qquad v_p = c\,,\ p = \frac{\epsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\infty h\nu\, \hat{n}(\nu)\, d\nu = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\, d\nu = \frac{1}{3}u(T) \end{aligned}$$

であるから

$$P_{\mathrm{Rad}} = \frac{1}{3}u(T) \tag{55}$$

となることが分かる。これは相対論的粒子についての $u = 3P$ の関係と同じである。また $u(T)$ は上の積分を計算することで

$$\begin{aligned} u(T) &= \int_0^\infty \tilde{u}(T,\nu)\, d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\, d\nu, \qquad \frac{h\nu}{kT} = x\,,\ \frac{dx}{d\nu} = \frac{h}{kT} \\ &= \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\, dx = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3}\frac{\pi^4}{15} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^3 \frac{k^4\pi^2}{15c^3}T^4 = \frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3}T^4 \end{aligned}$$

となるので

$$u(T) = \frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3}T^4 = aT^4\,, \qquad a = \frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3} \tag{56}$$

となることが分かる。ここで比例係数 a は輻射定数と呼ばれるものである。