連星系に関する問題 [改訂版]
—Roche 問題、潮汐力—

1 Roche 問題

二つの星の質量が M_1 と M_2 であるような連星系を考え、その連星系中の流体の運動を調べる。**Roche 問題** に於いては、連星系中の流体の運動を、お互いに軌道円を運動している二つの星が作るポテンシャル中のテスト粒子の運動と同等であるとして調べる（**制限三体問題**）。従ってテスト粒子は連星の軌道運動に何ら影響を与えないものとする。二つの星は互いに円軌道を描くとし、また、ポテンシャルを計算するに当たっては、星は質点として扱うものとする。

1.1 運動方程式

軌道半径が a 、公転周期が Π であるような連星系を考え、ケプラーの法則

$$4\pi^2 a^3 = G\,(M_1 + M_2)\,\Pi^2 \tag{1}$$

が成立しているとする。連星系の質量中心を座標原点とし、その原点の回りを公転周期 Π で回転する座標系に乗ったとき、連星系重力場中の質点（テスト粒子）の運動を記述する式は

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\Phi_R - 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} \tag{2}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{G\,(M_1+M_2)}{a^3}} \tag{3}$$

$$\Phi_R = -\frac{GM_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2}\,(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})^2 \tag{4}$$

で与えられる。ここで $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ は原点から計った星の位置ベクトルであり、公転の角振動数は

$$\Omega = \frac{2\pi}{\Pi}$$

である。また $\mathbf{\Omega}$ は軌道面と垂直な方向に向いているとする。

1.2 軌道半径と公転周期

軌道半径 a が公転周期 Π を年の単位、日の単位、時間の単位で表すことを考える。重力定数は

$$\begin{aligned}
G &= 6.672\times10^{-11}\ [\mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)}] = 6.672\times10^{-5}\quad [\mathrm{cm^3/(kg\cdot s^2)}]\\
&= 6.672\times10^{-5}\cdot(3600)^2\quad [\mathrm{cm^3/(kg\cdot hour^2)}]\\
&= 6.672\times10^{-5}\cdot(3600)^2\cdot(24)^2\quad [\mathrm{cm^3/(kg\cdot day^2)}]\\
&= 6.672\times10^{-5}\cdot(3600)^2\cdot(24)^2\cdot(365)^2\quad [\mathrm{cm^3/(kg\cdot year^2)}]
\end{aligned}$$

であり、また太陽質量は

$$M_\odot = 1.9891 \times 10^{30} \quad [\mathrm{kg}]$$

である。(1) は $M_2/M_1 = q$ とし、また太陽質量 $M_\odot$ を用いれば、

$$\begin{aligned} a &= \frac{G\,(M_1+M_2)\,\Pi^2}{4\pi^2} = \left(\frac{G}{4\pi^2}\right)^{1/3}\left\{M_\odot \frac{M_1}{M_\odot}\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)\right\}^{1/3}\Pi^{2/3} \\ &= \left(\frac{GM_\odot}{4\pi^2}\right)^{1/3}\left(\frac{M_1}{M_\odot}\right)^{1/3}(1+q)^{1/3}\,\Pi^{2/3} \end{aligned}$$

と書けるので、これを計算すると

$$a = \begin{cases} 1.4952\cdots\times 10^{13}\,(M_1/M_\odot)^{1/3}\,(1+q)^{1/3}\,\Pi_{\mathrm{year}}^{2/3} & \sim 1.5\times 10^{13}\,(M_1/M_\odot)^{1/3}\,(1+q)^{1/3}\,\Pi_{\mathrm{year}}^{2/3} \quad [\mathrm{cm}] \\ 2.9277\cdots\times 10^{11}\,(M_1/M_\odot)^{1/3}\,(1+q)^{1/3}\,\Pi_{\mathrm{day}}^{2/3} & \sim 2.9\times 10^{11}\,(M_1/M_\odot)^{1/3}\,(1+q)^{1/3}\,\Pi_{\mathrm{day}}^{2/3} \quad [\mathrm{cm}] \\ 3.5187\cdots\times 10^{10}\,(M_1/M_\odot)^{1/3}\,(1+q)^{1/3}\,\Pi_{\mathrm{hour}}^{2/3} & \sim 3.5\times 10^{10}\,(M_1/M_\odot)^{1/3}\,(1+q)^{1/3}\,\Pi_{\mathrm{hour}}^{2/3} \quad [\mathrm{cm}] \end{cases} \tag{5}$$

となる。この式を使えば、例えば、太陽質量の星同士が壱拾時間の周期で公転している場合軌道半径は

$$a = 3.5\times 10^{10}\times 2^{1/3}\times 10^{2/3} = 2.046812417\cdots\times 10^{11} = 2.0\times 10^{11} \quad [\mathrm{cm}]$$

であることが分かる。

1.3　ポテンシャルの変形

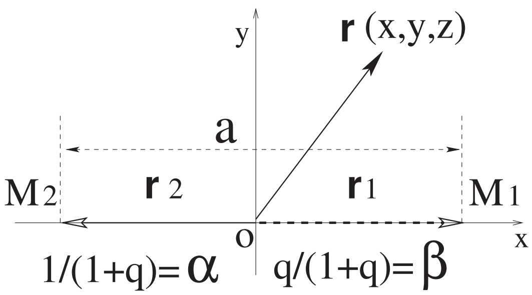


図 1　連星、テスト粒子それぞれの位置座標

軌道面に垂直に z 軸をとり、その軌道面内で二つの星を結ぶ線を x 軸にとり、それに垂直な軸を y 軸ととるとき、

$$\Psi \equiv -\frac{a\Phi_R}{G\,(M_1+M_2)} \tag{6}$$

と定義する。座標の取り方から位置ベクトル $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ は図の様になる。原点は長さ a の $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ を、図のように内分する点であるので、今

$$\alpha = \frac{M_1}{M_1+M_2} = \frac{1}{1+M_2/M_1} = \frac{1}{1+q}, \quad \beta = \frac{M_2}{M_1+M_2} = \frac{M_2/M_1}{1+M_2/M_1} = \frac{q}{1+q} \tag{7}$$

とすると $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ベクトルは $\mathbf{r}_1 = (\alpha a, 0, 0)$, 　$\mathbf{r}_2 = (-\beta a, 0, 0)$ と書けることから

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| = a\sqrt{\left(\frac{x}{a}-\alpha\right)^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}}, \qquad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| = a\sqrt{\left(\frac{x}{a}+\beta\right)^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}}$$

となる。また $\boldsymbol{\Omega}$ は z 軸方向であるから

$$(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})^2 = \Omega^2 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{G\,(M_1+M_2)}{a^3}$$

と書ける。これららを元に (4) を (6) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \frac{M_1}{M_1+M_2}\frac{a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}+\frac{M_2}{M_1+M_2}\frac{a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{1}{1+q}\frac{a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}+\frac{q}{1+q}\frac{a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)\\
&= \frac{\alpha}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}-\alpha\right)^2+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}}+\frac{\beta}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}+\beta\right)^2+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}}}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)
\end{aligned}
$$

となる。これを更に

$$\frac{x}{a}\longrightarrow x,\qquad \frac{y}{a}\longrightarrow y,\qquad \frac{z}{a}\longrightarrow z$$

と置き換えると、上式は

$$\Psi=\frac{\alpha}{\sqrt{(x+\beta)^2+y^2+z^2}}+\frac{\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \tag{8}$$

となる。

1.4 ポテンシャルの極小点

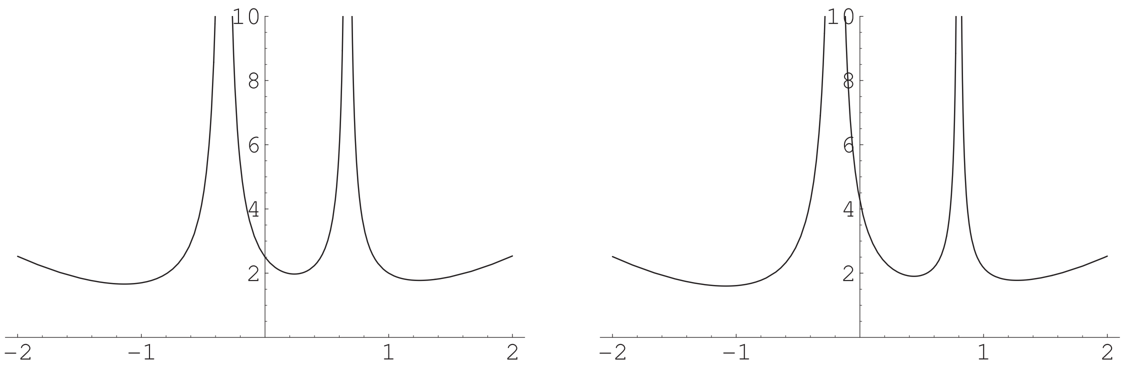


図 2 左：Ψ：$q=1/2$、右：Ψ：$q=1/4$

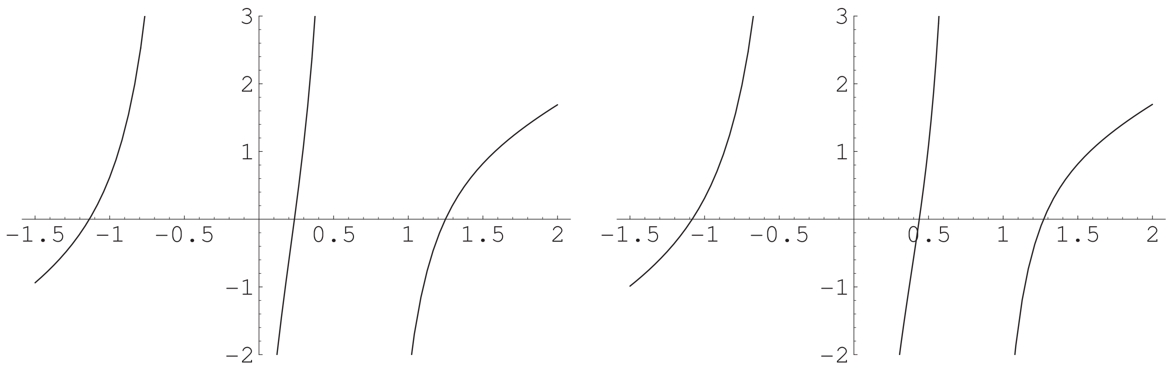


図 3 左：$\partial\Psi/\partial x$：$q=1/2$、右：$\partial\Psi/\partial x$：$q=1/4$

$y=0, z=0$ のとき

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0 \tag{9}$$

を満たす x は三つある。 x_1, x_2, x_3 と小さい順に名前を付ける。Newton 法を用いてこの値を計算すると

$$
\begin{aligned}
q = \frac{1}{2}\text{のとき、}\quad & x_1 = -1.136361298095237559735437571 36\\
& x_2 = 0.2374182302500000008027569720 07\\
& x_3 = 1.24904738366666668994155315886\\
q = \frac{1}{4}\text{のとき、}\quad & x_1 = -1.0828394724999996778791455653 8\\
& x_2 = 0.43807595366442364515080498677\\
& x_3 = 1.27104868466666662064109232233
\end{aligned}
$$

となる。

1.5　ポテンシャルの可視化

ポテンシャル Ψ の等ポテンシャル面をプロッタしたものを示す。

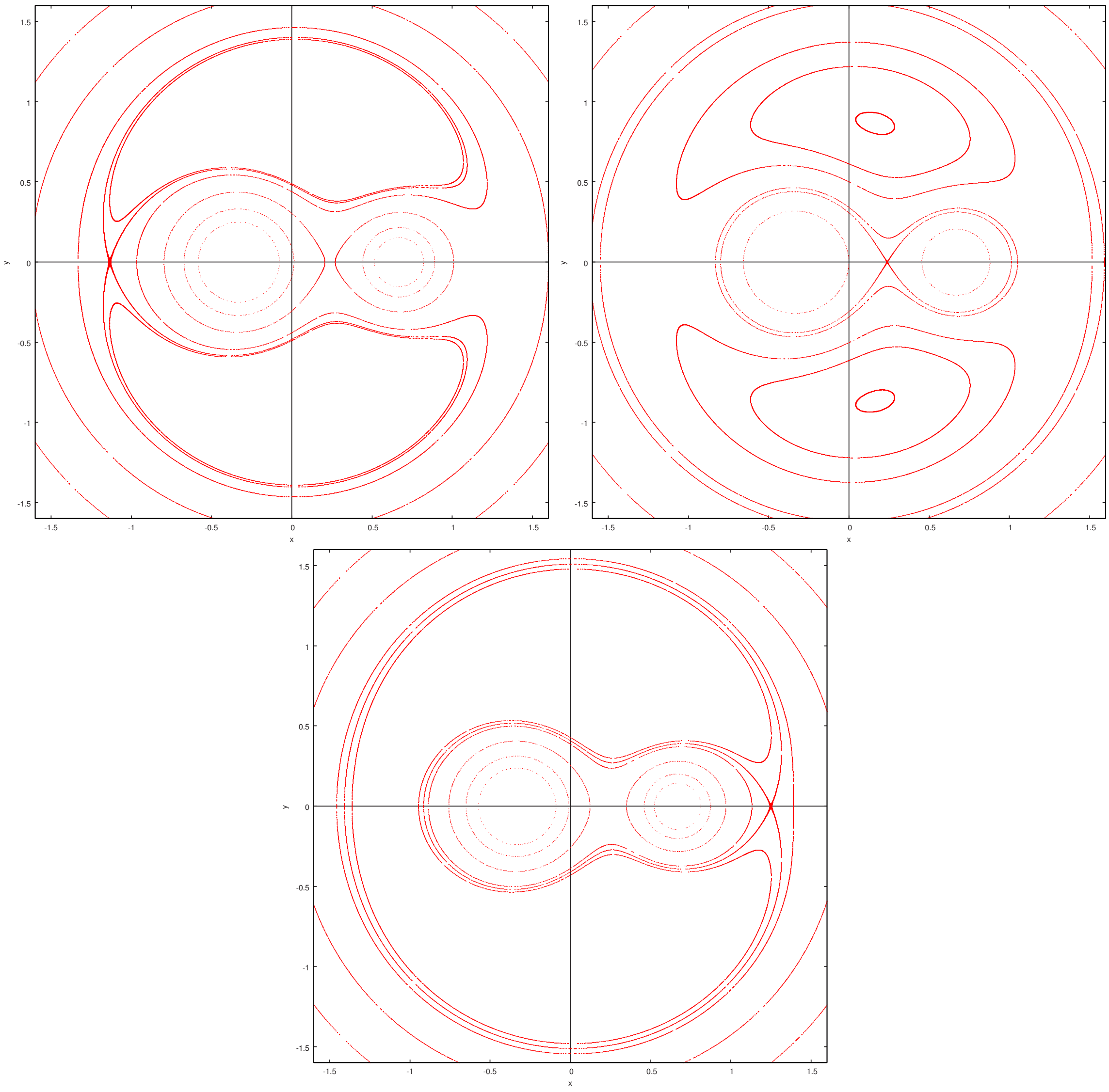


図 4　$q = 1/2$ の等ポテンシャル面

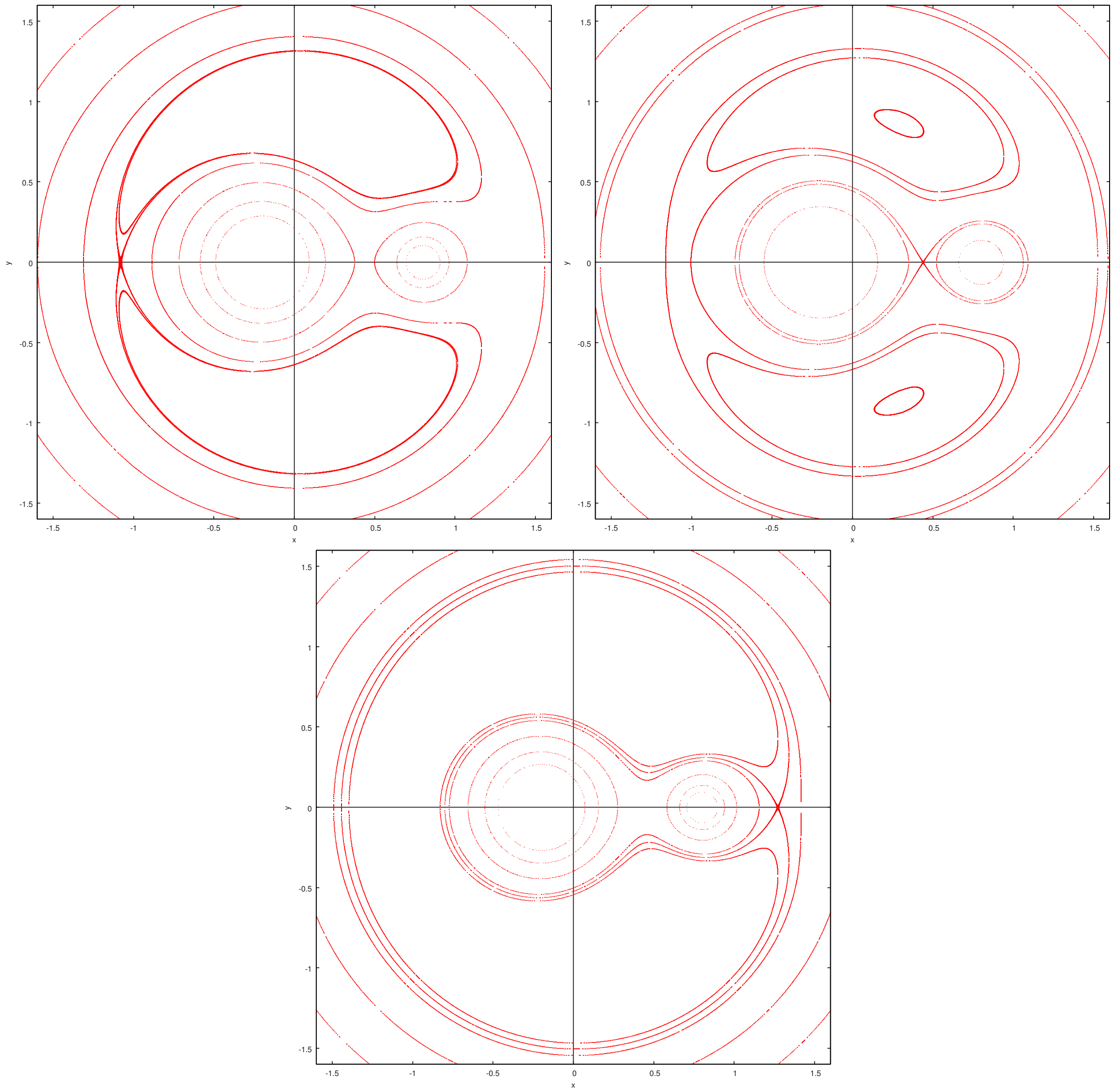
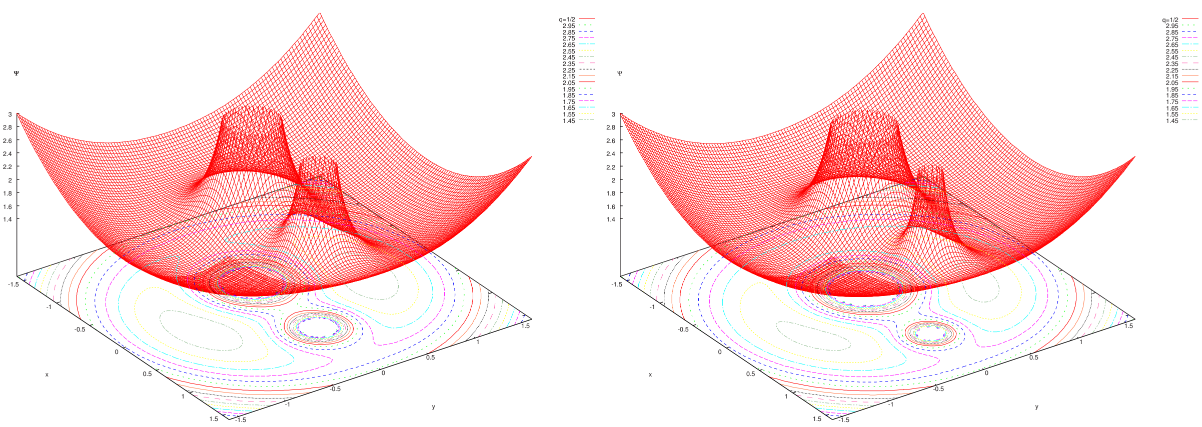


図 5　$q = 1/4$ の等ポテンシャル面



1.6　粒子の運動を記述する微分方程式

先ほどプロットしたポテンシャル中のテスト粒子の運動を表す運動方程式 (2) は、運動が x-y 平面内に限られるとすれば、成分で書いて

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi_R}{\partial x} + 2\Omega\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi_R}{\partial y} - 2\Omega\frac{dx}{dt} \tag{10}$$

と書ける。前と同様に

$$\frac{x}{a} \longrightarrow x, \qquad \frac{y}{a} \longrightarrow y, \qquad \frac{z}{a} \longrightarrow z, \qquad \Psi \equiv -\frac{a\Phi_R}{G\,(M_1+M_2)}$$

と置き換え—**長さを軌道半径を単位として測り、エネルギーを** GM/a **を単位として測る**—、更に

$$\Omega t \longrightarrow t \tag{11}$$

と置き換えれば—時間を $1/\Omega$ を単位として測る—、

$$\left(\frac{d}{d(t'/\Omega)}\right)^2 (ax') = -\frac{\partial}{\partial(ax')}\left(-\frac{GM}{a}\Psi\right) + 2\Omega\frac{d}{d(t'/\Omega)}(ay') \quad\Longrightarrow\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + 2\frac{dy}{dt} \tag{12}$$

$$\left(\frac{d}{d(t'/\Omega)}\right)^2 (ay') = -\frac{\partial}{\partial(ay')}\left(-\frac{GM}{a}\Psi\right) - 2\Omega\frac{d}{d(t'/\Omega)}(ax') \quad\Longrightarrow\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} - 2\frac{dx}{dt} \tag{13}$$

と書けることが分かる。

更に

$$z_1 = x, \quad z_2 = \frac{dx}{dt}, \quad z_3 = y, \quad z_4 = \frac{dy}{dt} \tag{14}$$

とすれば、(12),(13) は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial z_1} + 2z_4 \\ z_4 \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial z_3} - 2z_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

と行列表示で書くことができる。

1.7　粒子の運動

Runge-Kutta 法を使って、Eq.(15) の微分方程式を積分することを考える。$q = 1/4$ として、$t = 0$ で

$$x = x_2, \quad \frac{dx}{dt} = p, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \tag{16}$$

という初期条件の許で積分することを考える。ここで p はパラメータである。$p = \pm 0.001$ と $p = \pm 0.01$ の場合について、粒子の軌跡を $t = 10$ まで積分した結果を以下に載せておく。$t \sim 4$ 程度までの軌跡を示した。コリオリの力は $-2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}$ であるから図の黄緑ベクトルに相当する（赤ベクトルは速度ベクトル）。計算から得られた運動の軌跡は、常に外側に向かってその軌跡が膨らんでいるが、これはコリオリの力が働いている方向と一致している。これより計算結果とコリオリの力による回転系に於ける粒子の運動方向の変化とが矛盾していないことが分かる。

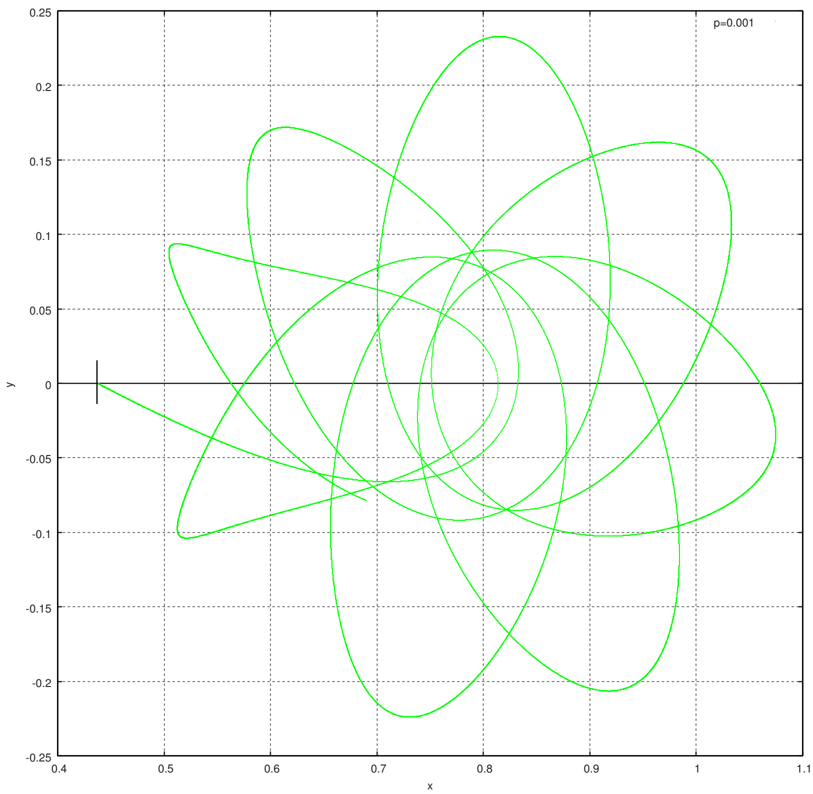


図 6　$p = 0.001$

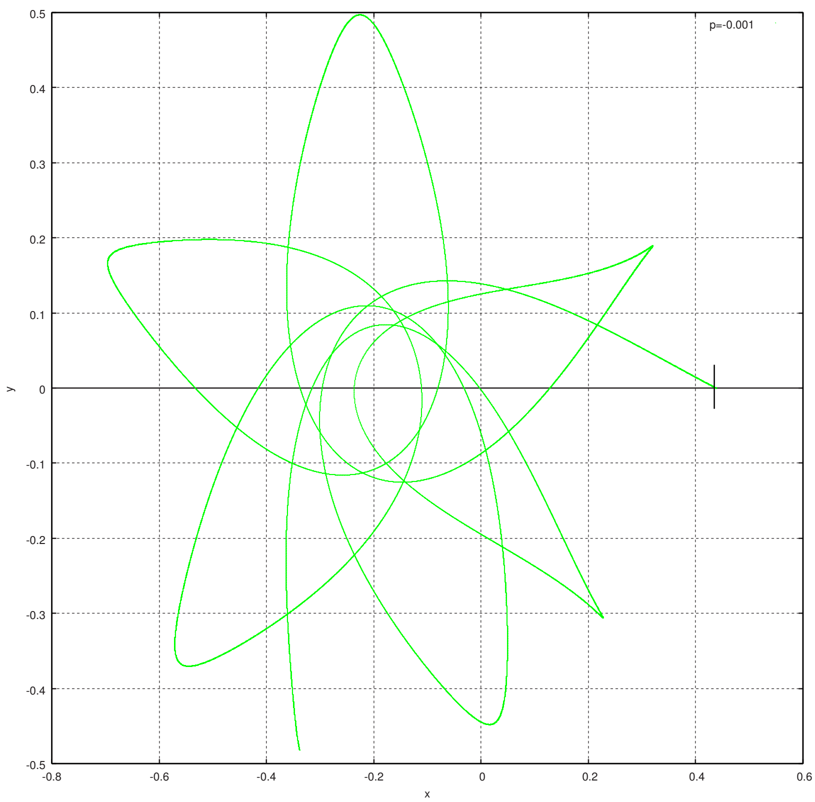


図 7　$p = -0.001$

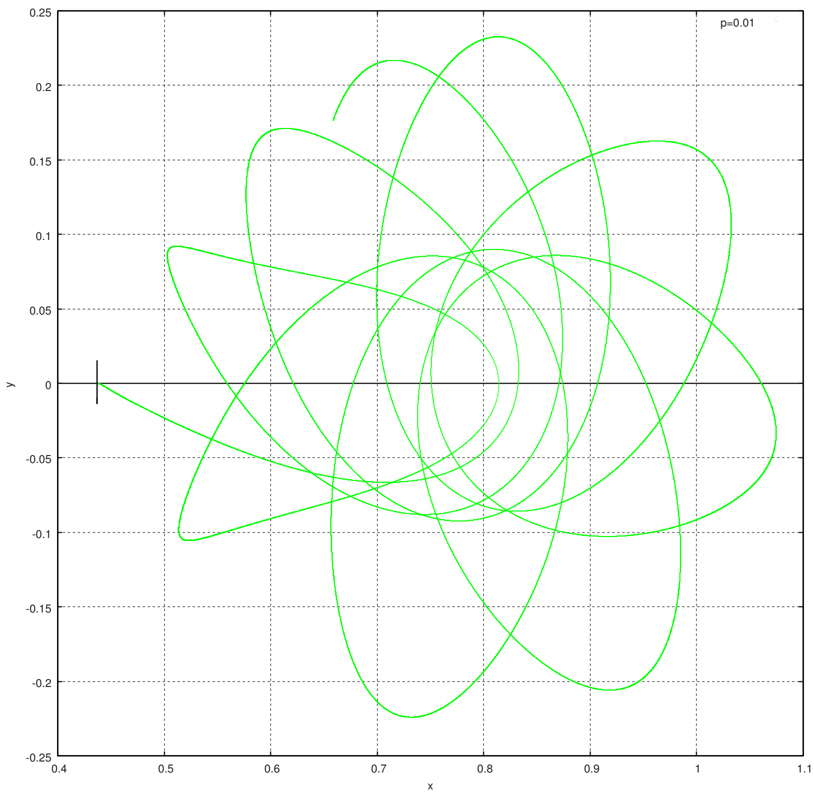


図 8　$p = 0.01$

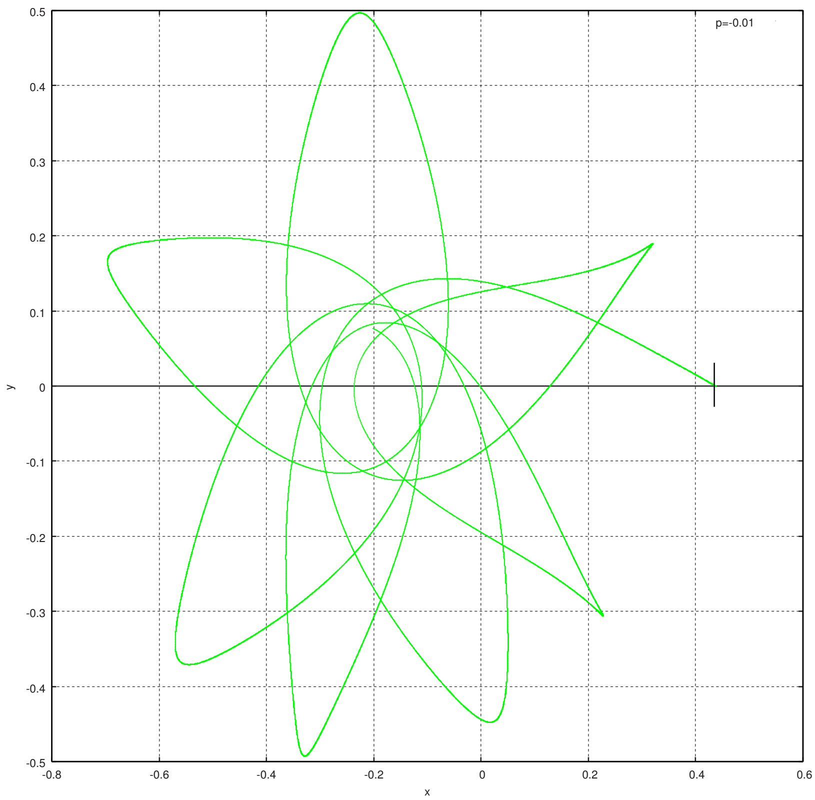


図 9　$p = -0.01$

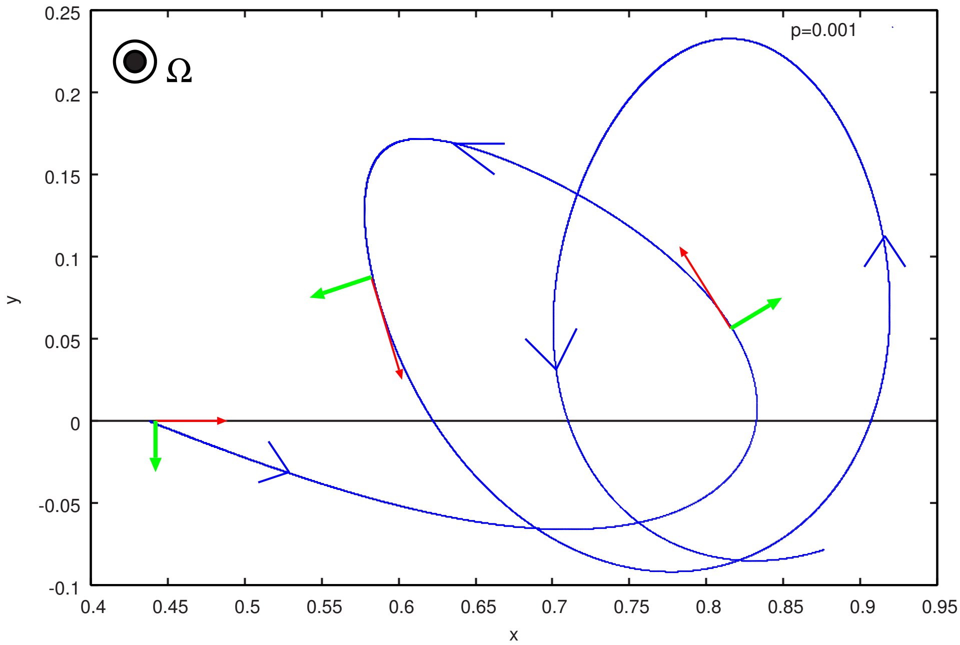


図 10　コリオリ力：$p = 0.001$

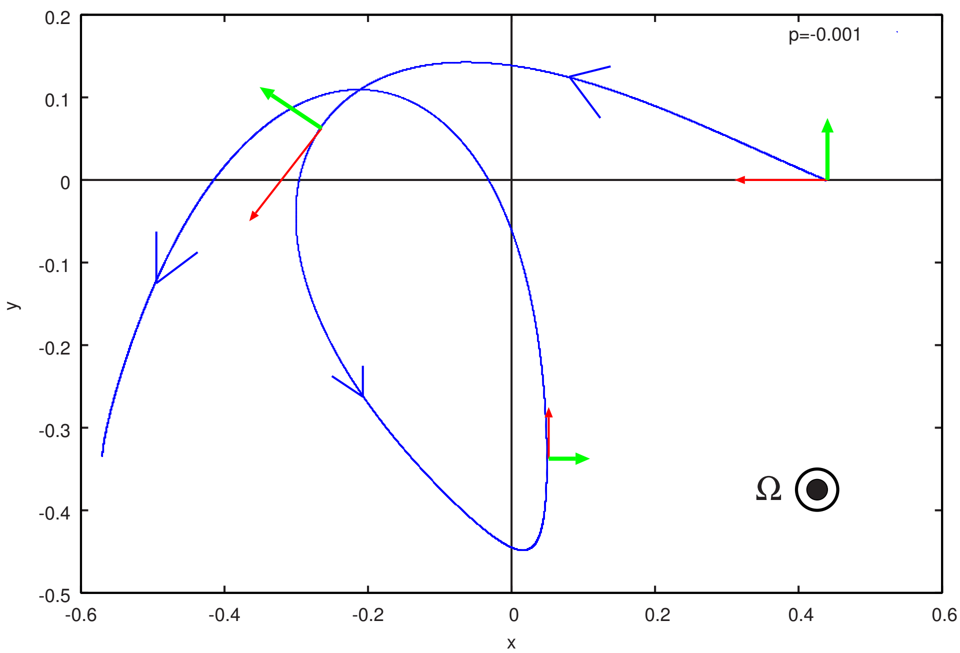


図 11　コリオリ力：$p = -0.01$

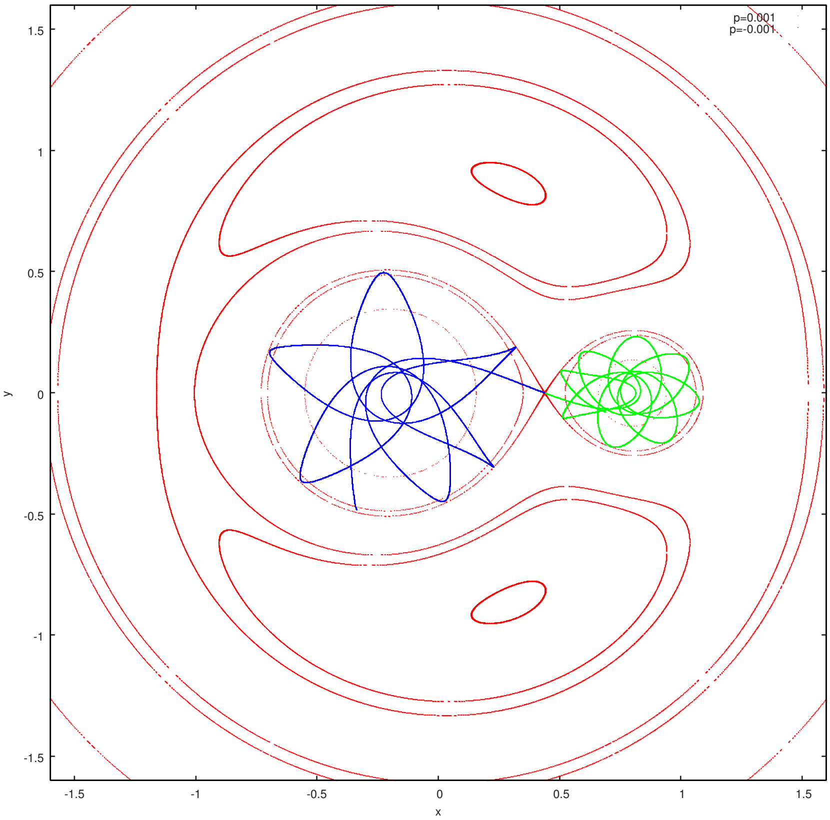


図 12　等ポテンシャル面と粒子の運動：$p = \pm 0.001$

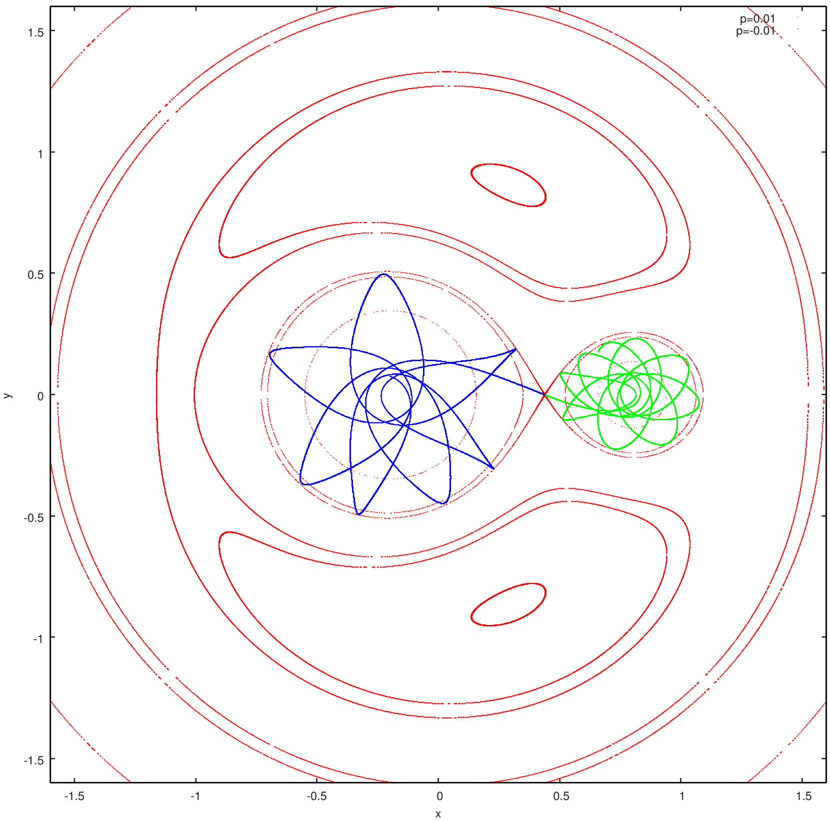


図 13　等ポテンシャル面と粒子の運動：$p = \pm 0.01$

2 潮汐力 (Tidal Force)

連星系中の星はもう一方の星の重力場により変形を受ける。この問題は、例えば、月の重力場により地球上の海面が変形を受け、地球の自転に伴って潮の満ち引きが起こるのと同じ問題である。今、星 M_2 の重力により引き起こされる星 M_1 の変形を計算することを考える。星 M_1 が静水圧平衡にあるから

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi \tag{17}$$

が成り立つとする。ここで、

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$$

であり、Φ_1 は星 M_1 の自己重力ポテンシャルであり、星 M_1 の密度分布とポワッソンの式により

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho \tag{18}$$

で結びついている。Φ_2 は星 M_2 の自己重力ポテンシャルであり

$$\Phi_2 = -\frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \tag{19}$$

で与えられる。ここで座標原点は星 M_1 の中心にとってあり、$\mathbf{r}$ は星 M_1 内の点の位置ベクトルであり、$\mathbf{a}$ は星 M_2 の位置ベクトルである。このポテンシャルは $\mathbf{r} = |\mathbf{r}| < a = |\mathbf{a}|$ として展開すれば

$$\Phi_2 = -\frac{GM_2}{a}\left[1 + \frac{r}{a} P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{a^2} P_2(\cos\theta) + \ldots\right] \tag{20}$$

が得られる。ここで $P_n(\cos\theta)$ は**ルジャンドル多項式**であり、θ は $\mathbf{r}$ と $\mathbf{a}$ と成す角度である。低次のルジャンドル関数は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
P_0(\cos\theta) &= 0 \\
P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\
P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\
P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

2.1 潮汐ポテンシャル

Φ_2 の展開式の第一項は定数であり、力を生じさせないので無視できる。

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

であるとし、第弐項による力を計算すると

$$\begin{aligned}
-\nabla\left[-\frac{GM_2}{a}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)\right] &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{GM_2}{a}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)\right] + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{GM_2}{a}\frac{r}{a}\cos\theta\right] = \mathbf{e}_r \frac{GM_2}{a^2}\cos\theta - \mathbf{e}_\theta \frac{GM_2}{a^2}\sin\theta \\
&= \frac{GM_2}{a^2}\left(\mathbf{e}_r \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta\right) = \frac{GM_2}{a^2}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \qquad \therefore \text{ 次図より}
\end{aligned} \tag{21}$$

となるが、これは正に両星を質点と考えた場合に、星 M_2 が星 M_1 に及ぼす引力 $GM_2/a^2 \cdot \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ であることが分かる。

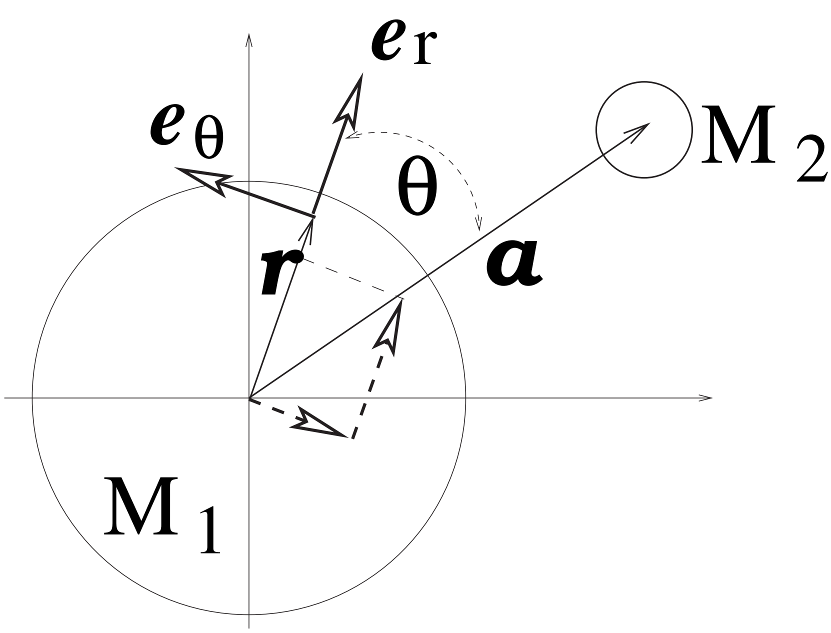


図 14　$\theta, \mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$: $\mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \mathbf{e}_r \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta$

今星 M_1 の中心を座標原点としているが、この座標系は連星系の質量中心（これは慣性系としてよい）の周りを公転円運動しているので見かけの力が現れる。これは遠心力であると考えることができるので、遠心力の性質よりその向きは $-\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ であり、大きさは

$$a \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2}\Omega^2 = a\frac{M_2}{M_1 + M_2}\frac{G\,(M_1 + M_2)}{a^3} = \frac{GM_2}{a^2}$$

であるから

$$(21) + (\textbf{遠心力}) = \frac{GM_2}{a^2}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \left(-\frac{GM_2}{a^2}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right) = \frac{GM_2}{a^2}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} - \frac{GM_2}{a^2}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = 0$$

となり、(21) の力と釣り合っていることが分かる。

星の変形に寄与する最初の項は、従って、

$$\Phi_D = -\frac{GM_2}{a}\frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta) \tag{22}$$

で与えられることになる。これは潮汐ポテンシャルと呼ばれる。

2.2　潮汐力

$\nabla\Phi_D$ により、潮汐力を計算すると

$$\begin{aligned}
-\nabla\Phi_D &= \nabla\left[\frac{GM_2}{a}\frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta)\right] = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{GM_2}{a^2}\frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta)\right] + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{GM_2}{a^2}\frac{r^2}{a^2}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right] \\
&= \mathbf{e}_r\frac{2GM_2}{a^3}r\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) - \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{GM_2}{a}\frac{r^2}{a^2}3\sin\theta\cos\theta = \frac{3GM_2}{a^2}\frac{r}{a}\cos\theta\cdot\mathbf{e}_r\ \cos\theta - \frac{GM_2}{a^2}\frac{r}{a}\mathbf{e}_r - \frac{3GM_2}{a^2}\frac{r}{a}\cos\theta\cdot\mathbf{e}_\theta\ \sin\theta \\
&= \frac{3GM_2}{a^2}\frac{r}{a}\left[\cos\theta\left(\mathbf{e}_r\ \cos\theta - \mathbf{e}_\theta\ \sin\theta\right)\right] - \frac{GM_2}{a^2}\frac{r}{a}\mathbf{e}_r \\
&= \frac{3GM_2}{a^2}\frac{r}{a}\cos\theta\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} - \frac{GM_2}{a^2}\frac{r}{a}\mathbf{e}_r
\end{aligned} \tag{23}$$

となる。

第壱項は常に $\mathbf{a}$ と平行であり、$\theta = 0$ のとき $\mathbf{a}$ 正の方向で最大となる（星 M_2 の方向に引っ張られる)。$\theta = \pm\pi/2$ のとき零となり、$\theta = \pm\pi$ のとき $\mathbf{a}$ 負の方向で最大となる（星 M_2 方向とは正反対方向に引っ張られる)。第弐項は $-\mathbf{e}_r$ 方向に働く力で、常に星 M_1 の内側向きに働く力であるり、潮汐力は以上の力の和である（図参照)。

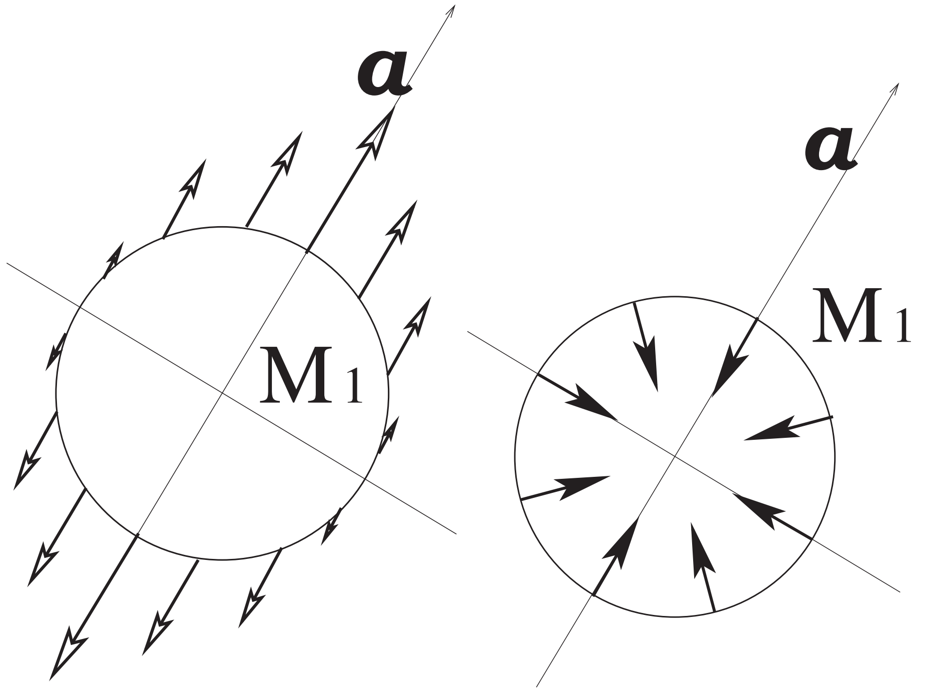


図 15　左：(23) 第一項に依る力。力の向きは $\mathbf{a}$ に常に平行である。右：(23) 第弐項に依る力。力の向きは常に M_1 の中心を向いている。

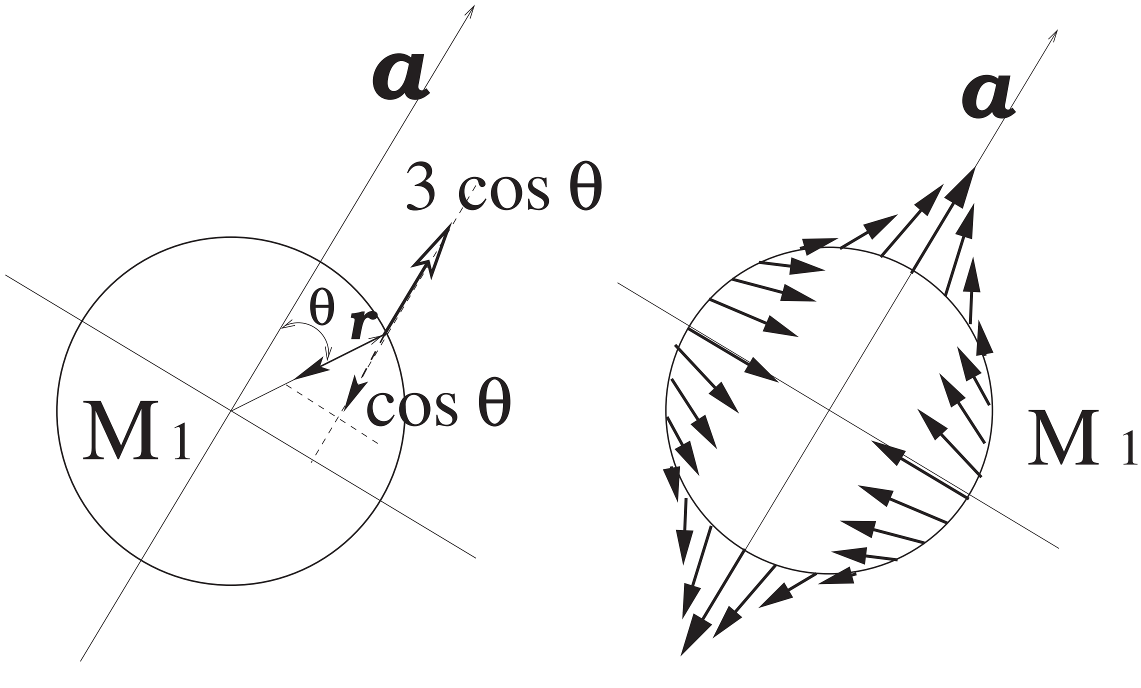


図 16　左；力の合成。右：潮汐力

2.3 月、太陽が地球に及ぼす影響の比

月が地球表面に及ぼす潮汐ポテンシャル Φ_D^{Moon} の大きさと太陽が地球表面に及ぼす潮汐ポテンシャル Φ_D^{Sun} の大きさの比を計算する。$P_2(\cos\theta) \to 1$ とし、

$$M_{\mathrm{Moon}} = 7.35 \times 10^{25}\ [\mathrm{g}]、\quad r_{\mathrm{Moon}\leftrightarrow\mathrm{Earth}} = 3.84 \times 10^{10}\ [\mathrm{cm}]$$
$$M_{\mathrm{Sun}} = 1.989 \times 10^{33}\ [\mathrm{g}]、\quad r_{\mathrm{Sun}\leftrightarrow\mathrm{Earth}} = 1.496 \times 10^{13}\ [\mathrm{cm}]$$

であるから、

$$\left|\frac{\Phi_D^{\mathrm{Moon}}}{\Phi_D^{\mathrm{Sun}}}\right| = \left|\frac{-\dfrac{GM_{\mathrm{Moon}}}{r^3_{\mathrm{Moon}\leftrightarrow\mathrm{Earth}}}}{-\dfrac{GM_{\mathrm{Sun}}}{r^3_{\mathrm{Sun}\leftrightarrow\mathrm{Earth}}}}\right| = \frac{M_{\mathrm{Moon}}}{M_{\mathrm{Sun}}}\left(\frac{r_{\mathrm{Sun}\leftrightarrow\mathrm{Earth}}}{r_{\mathrm{Moon}\leftrightarrow\mathrm{Earth}}}\right)^3 = 2.18501118\cdots \sim 2$$

となる。これより、太陽の潮汐ポテンシャルの地球に対する影響は、月の潮汐ポテンシャルの地球に対する影響の約半分であることが分かる。

3 角運動量の変化

連星系の一方の星が進化の結果（例えば、主系列星から赤色巨星に進化する過程で星の半径は増加する。星の進化の速さは質量に依存し、重い星ほど速いので、連星系中の重い方が巨星に進化しても、軽い方の星は主系列のままであったりする） **Roche Robe** を満たせば L_1 点からもう一方の星に向かって星のガスが溢れ出ていく。すると二つの星の質量が変わり、質量比も変わるので、連星系の状態も変わって行くことが考えられる。

3.1 角運動量の和

連星系質量中心周りでの角運動量の和は

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{2} M_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

で与えられるが、運動は **xy** 平面内であり、**J** は **z** 軸正の方向であるから J は

$$\begin{aligned}
J &= \left|\sum_{i=1}^{2} M_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i\right| = \sum_{i=1}^{2} M_i r_i (r_i\Omega) = \Omega \sum_{i=1}^{2} M_i r_i^2 = \Omega\left(M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2\right) \\
&= \left[M_1\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}a\right)^2 + M_2\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}a\right)^2\right]\Omega \qquad \because\quad r_1 = \frac{M_2}{M_1+M_2}a, r_1 = \frac{M_1}{M_1+M_2}a \\
&= \left(M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2\right)\Omega \qquad \because\quad a_1 = \frac{M_2}{M_1+M_2}a, a_2 = \frac{M_1}{M_1+M_2}a \qquad (24) \\
&= \left[M_1\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}\right)^2 + M_2\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}\right)^2\right]a^2\sqrt{\frac{G(M_1+M_2)}{a^3}} = \frac{M_1M_2^2 + M_1^2M_2}{M_1+M_2}\sqrt{\frac{Ga}{M}} \qquad \because\quad M_1 + M_2 = M \\
&= M_1 M_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}} \qquad (25)
\end{aligned}$$

となる。

もし星 M_2 から星 M_1 に物質が流れるとして、しかも系全体の質量は保存されるとすれば $\dot{M}_1 > 0, \dot{M}_2 < 0$ 、そして $\dot{M}_1 + \dot{M}_2 = 0$ が成り立つ。

3.2 角運動量、質量、Roche Robe 半径の関係式

(25) より、J を時間微分すると

$$\dot{J} = \dot{M}_1 M_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}} + M_1 \dot{M}_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}} + \frac{1}{2} M_1 M_2 \sqrt{\frac{G}{Ma}} \cdot \dot{a} = \left(\dot{M}_1 M_2 + M_1 \dot{M}_2 + M_1 M_2 \frac{\dot{a}}{2a} \right) \sqrt{\frac{Ga}{M}}$$

となるので、これをより $2\dot{J}/J$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{J}}{J} &= \frac{2\dot{M}_1 M_2 + 2M_1 \dot{M}_2 + M_1 M_2 \dfrac{\dot{a}}{a}}{M_1 M_2} = 2\frac{\dot{M}_1}{M_1} + 2\frac{\dot{M}_2}{M_2} + \frac{\dot{a}}{a} = 2\frac{(-\dot{M}_2)}{M_1} + 2\frac{\dot{M}_2}{M_2} + \frac{\dot{a}}{a} \qquad \because \quad \dot{M}_1 + \dot{M}_2 = 0 \\ &= -2\frac{(-\dot{M}_2)}{M_2} \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \right) + \frac{\dot{a}}{a} \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2\dot{J}}{J} + 2\frac{(-\dot{M}_2)}{M_2} \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \right) \tag{26}$$

と書ける。

だいたい $0.1 \leq q \leq 0.8$ のとき、星は M_2 の周りで Roche Robe の半径 R_2 がよい近似で

$$\frac{R_2}{a} = 0.462 \left(\frac{M_2}{M} \right)^{1/3} \tag{27}$$

で与えられることが知られている。このとき

$$J = M_1 M_2 \sqrt{\frac{G}{M} \frac{R_2}{0.462} \left(\frac{M}{M_2} \right)^{1/3}} = M_1 M_2^{5/6} \sqrt{\frac{GR_2}{M^{2/3}\, 0.462}}$$

であるから、先ほどと同じように J を時間で微分すると

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{M}_1 M_2^{5/6} \sqrt{\frac{GR_2}{0.462\, M^{2/3}}} + \frac{5}{6} M_1 M_2^{-1/6} \dot{M}_2 \sqrt{\frac{GR_2}{0.462\, M^{2/3}}} + \frac{1}{2} M_1 M_2^{5/6} \sqrt{\frac{GR_2}{0.462\, M^{2/3}}} \frac{\dot{R}_2}{R_2} \\ &= \left(\dot{M}_1 M_2^{5/6} + \frac{5}{6} M_1 M_2^{-1/6} \dot{M}_2 + \frac{1}{2} M_1 M_2^{5/6} \frac{\dot{R}_2}{R_2} \right) \sqrt{\frac{GR_2}{0.462\, M^{2/3}}} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{J}}{J} &= \frac{2\dot{M}_1 M_2^{5/6} + 2\dfrac{5}{6} M_1 M_2^{-1/6} \dot{M}_2 + M_1 M_2^{5/6} \dfrac{\dot{R}_2}{R_2}}{M_1 M_2^{5/6}} = \frac{2(-\dot{M}_2) M_2^{5/6} + 2\dfrac{5}{6} M_1 M_2^{-1/6} \dot{M}_2 + M_1 M_2^{5/6} \dfrac{\dot{R}_2}{R_2}}{M_1 M_2^{5/6}} \\ &= -\frac{2(-\dot{M}_2)}{M_2} \left(\frac{5}{6} - \frac{M_2}{M_1} \right) + \frac{\dot{R}_2}{R_2} \end{aligned}$$

と整理できるので、結局

$$\frac{\dot{R}_2}{R_2} = \frac{2\dot{J}}{J} + \frac{2(-\dot{M}_2)}{M_2} \left(\frac{5}{6} - \frac{M_2}{M_1} \right) \tag{28}$$

を得る。

もし角運動量が連星系から外に失われないとすれば $\dot{J} = 0$ である。このとき、軽い方の星から重い方の星へ物質の流れがあるときは、軌道半径は増加し、逆に重い方の星から軽い方の星に物質の流れがあるときは、軌道半径が減少することが分かる。また $q > 5/6$ であれば、質量を失っている星 M_2 の周りの Roche Robe の半径 R_2 が収縮することになり、星 M_2 の半径がそれよりも速く収縮しない限り、質量の流れは Roche Robe の半径 R_2 の収縮により、より激しくなることが分かる。