

# 追尾エラーの定量的評価

沖田博文 (東北大)

2009/11/11 改訂版

## 1 はじめに

南極 40cm 赤外線望遠鏡には試験観測から追尾誤差が存在することが確認されている。これらの原因として

1. 極軸が不一致 (望遠鏡の設置誤差)
2. 大気差 (地球大気の影響)
3. ピリオディックモーション (望遠鏡の加工精度)

が考えられる。

そこでこのレポートでは上記 3 つの要素を定量的に見積もることとする。

なおこれまでの実験や観測から

1. 追尾パルスの誤差 (ソフトウェアのバグ)
2. 鏡筒のたわみ (鏡筒の剛性の不足)
3. クラッチ部のスリップ (クラッチ部の構造欠陥)

が原因でないことは既に示されている。

## 2 極軸エラー

極軸とは赤経軸 (RA 軸) の事であり、赤道儀はこの極軸を正しく天の赤道に向け一定速度で回転させる事で天体を追尾する装置である。よって極軸がズれていると正しく天体を追尾しない。

図 1 のように、ある天体  $S$  の位置を (時角, 赤緯値) =  $(H, \delta)$  で表すと図 1 で示した座標系  $(x, y, z)$  では

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書ける。

ここで望遠鏡の極軸が  $P'(H_p, \pi/2 - \epsilon_p)$  を向いていたとすると、ある天体  $S(H, \delta)$  は望遠鏡では  $(H', \delta')$  と表示される事になる。これを真の座標  $(H, \delta)$  で表したい。

その為に座標系を回転する。まず  $z$  軸を中心に ( $z$  軸正の方向から見て) 時計回りに  $H_p$  回転し、さらに  $z$  回転後の座標系の  $y$  軸を中心に反時計回りに  $\epsilon_p$  回転し、最後に子午線で  $H' \equiv 0$  (時角の定義) となるよう再度  $z$  軸を中心に  $-H_p$  回転させる。

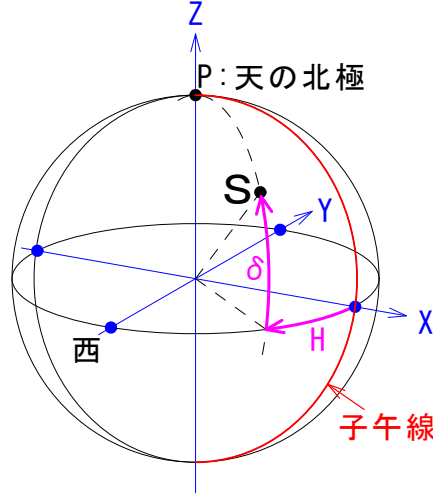


図1 時角  $H$  と赤緯  $\delta$  で天体  $S$  の位置を表す

これを具体的に計算する。

$z$  軸を中心に  $H_p$  回転を行列  $A$  と定義すると

$$A \equiv \begin{pmatrix} \cos H_p & -\sin H_p & 0 \\ \sin H_p & \cos H_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$y$  軸を中心に  $-\epsilon_p$  回転を行列  $B$  と定義すると

$$B \equiv \begin{pmatrix} \cos \epsilon_p & 0 & -\sin \epsilon_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \epsilon_p & 0 & \cos \epsilon_p \end{pmatrix} \quad (3)$$

よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= A^{-1}BA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 H_p \cos \epsilon_p + \sin^2 H_p & \sin H_p \cos H_p (1 - \cos \epsilon_p) & -\cos H_p \sin \epsilon_p \\ \sin H_p \cos H_p (1 - \cos \epsilon_p) & \sin^2 H_p \cos \epsilon_p + \cos^2 H_p & \sin H_p \sin \epsilon_p \\ \cos H_p \sin \epsilon_p & -\sin H_p \sin \epsilon_p & \cos \epsilon_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$\epsilon_p \ll 1$  であるので  $\cos \epsilon_p \sim 1$ 、 $\sin \epsilon_p \sim \epsilon_p$  と近似すると

$$\begin{pmatrix} \cos \delta' \cos H' \\ -\cos \delta' \sin H' \\ \sin \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\epsilon_p \cos H_p \\ 0 & 1 & \epsilon_p \sin H_p \\ \epsilon_p \cos H_p & -\epsilon_p \sin H_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (5)$$

よって望遠鏡で示される座標  $(H', \delta')$  で天体の位置  $(H, \delta)$  を示すことができた。

## 2.1 単位時間あたりの時角 $H'$ 方向のズレ

(5) 式の 1 行目を  $H$  で微分する。

$$\frac{\partial(\cos \delta' \cos H')}{\partial H} = -\cos \delta \sin H \quad (6)$$

ところで

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cos \delta' \cos H')}{\partial H} &= \frac{\partial H'}{\partial H} \frac{\partial(\cos \delta' \cos H')}{\partial H'} \\ &= \frac{\partial H'}{\partial H} \left[ \cos H' \frac{\partial \cos \delta'}{\partial H'} + \cos \delta' \frac{\partial \cos H'}{\partial H'} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

であり、 $\delta'$  と  $H'$  は直交しているので

$$\frac{\partial \cos \delta'}{\partial H'} = 0 \quad (8)$$

よって

$$\frac{\partial(\cos \delta' \cos H')}{\partial H} = -\frac{\partial H'}{\partial H} \cos \delta' \sin H' \quad (9)$$

とも書ける。(6) 式と (9) 式を比較して、

$$\frac{\partial H'}{\partial H} = \frac{\sin H \cos \delta}{\sin H' \cos \delta'} = \frac{\sin H \cos \delta}{\cos \delta \sin H - \epsilon_p \sin \delta \sin H_p} \quad (10)$$

となる。なお途中の式変形で (5) 式の 2 行目を用いた。

ところで星が視野中心から西の方向に動く早さを  $dH'/dt$  とすると時角  $H[\text{rad}]$  は時間  $t[\text{min}]$  に対応し、

$$H[\text{rad}] = \frac{2\pi}{23h56m04s} t[\text{min}] \sim 4.37527 \times 10^{-3} t[\text{min}] \quad (11)$$

また radian は arcsec に変換すると

$$1[\text{rad}] = \frac{180}{\pi} \times 3600[\text{arcsec}] \quad (12)$$

であるので単位を [arcsec/min] と書き直して

$$\left( \frac{\partial H'}{\partial t} \right)_{\text{pol}} = 902.465'' \times \frac{\sin H \cos \delta}{\cos \delta \sin H - \frac{\pi}{180 \times 3600} \epsilon_p'' \times \sin \delta \sin H_p} [\text{arcsec}/\text{min}] \quad (13)$$

となる。但し  $\epsilon_p''$  は [arcsec] 単位。

なお係数の  $902.465''$  は上記の単位変換で出てきたがこれは 1 分間の天体の移動量 (恒星時) に等しい。

## 2.2 単位時間あたりの赤緯 $\delta'$ 方向のズレ

(5) 式の 3 行目を  $H$  で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sin \delta'}{\partial H} &= -\epsilon_p \sin(H - H_p) \\ &= \frac{\partial \delta'}{\partial H} \frac{\partial \sin \delta'}{\partial \delta'} \\ &= \frac{\partial \delta'}{\partial H} \cos \delta' \end{aligned} \quad (14)$$

と書ける。片々比較して、

$$\frac{\partial \delta'}{\partial H} = -\frac{\cos \delta}{\cos \delta'} \epsilon_p \sin(H - Hp) \sim -\epsilon_p \sin(H - Hp) \quad (15)$$

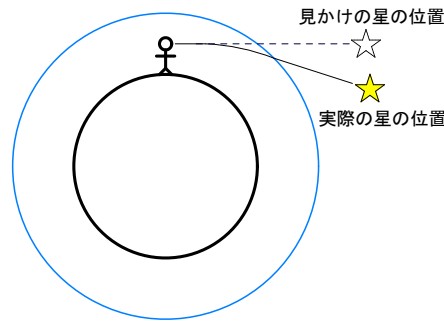
ここで  $\epsilon_p \ll 1$  より  $\cos \delta \simeq \cos \delta'$  とした。単位を [arcsec/min] にすると

$$\left(\frac{\partial \delta'}{\partial t}\right)_{pol} = -4.37527 \times 10^{-3} \epsilon_p'' \times \sin(H - Hp) [\text{arcsec}/\text{min}] \quad (16)$$

となる。但し  $\epsilon_p''$  は [arcsec] 単位。

### 3 大気差によるエラー

大気差とは地球の大気によって地平線付近の天体が浮かび上がって見える現象のことである。これは地球大気の屈折率やその高度依存性によって天体の位置がずれて見えることからくる。これにより天体の(天球上での見かけの)運動は一定ではなく、天体は地上からの高度に応じて微妙に動く速度が違うことになる。



赤道儀は基本的に一定速度で RA 軸を回転させて天体を追尾する装置なので、大気差によって天体の追尾が早まったり遅れたりすることになる。

実際の大気差の大きさは大気の状態(気温、気圧、水上気圧、観測波長)によって変わり、またその推定は困難である。しかし近似的には星の高度  $h$  の関数として、大気差  $R$  は以下のように書ける。

$$R = R_0 \tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = R_0 \frac{1}{\tan h} [\text{arcsec}] \quad (17)$$

$$R_0 \simeq 58''.3 \quad (18)$$

#### 3.1 大気差の向きと大きさ

大気差は高度  $h$  の関数で記述される。そこでこれを時角  $H$  方向と赤緯  $\delta$  方向に分解してそれぞれその量を見積もる。図 2 のように、(時角, 赤緯) =  $(H, \delta)$  の天体  $S$  を緯度  $L$  の観測地点で観測したとする。この時天体  $S$  の位置を(高度, 方位角) =  $(h, A)$  と書き、また  $\angle ZSP = S$  と書くと時角  $H$  方向、赤緯  $\delta$  方向の大気差のはそれぞれ

$$R_H = -R \sin S = -\frac{R_0}{\tan h} \sin S \quad (19)$$

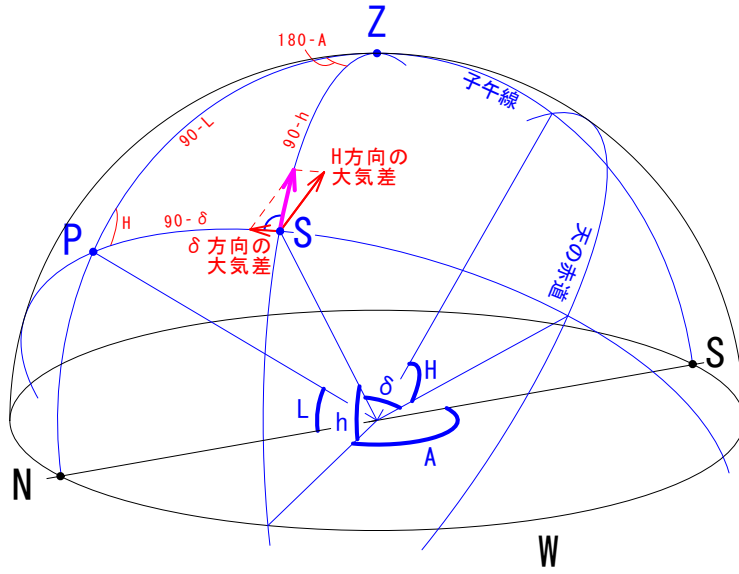


図2 球面三角  $\triangle ZPS$

$$R_{\delta} = R \cos S = \frac{R_0}{\tan h} \cos S \quad (20)$$

ここで球面三角  $\triangle ZPS$  より正弦法則を用いて

$$\frac{\sin S}{\sin(90^{\circ} - L)} = \frac{\sin H}{\sin(90^{\circ} - h)} \quad (21)$$

計算して

$$\sin S = \frac{\sin H \cos L}{\cos h} \quad (22)$$

球面三角  $\triangle ZPS$  より余弦法則を用いて、

$$\cos(90^{\circ} - L) = \cos(90^{\circ} - h) \cos(90^{\circ} - \delta) + \sin(90^{\circ} - h) \sin(90^{\circ} - \delta) \cos S \quad (23)$$

計算して

$$\cos S = \frac{\sin L - \sin h \sin \delta}{\cos h \cos \delta} \quad (24)$$

よって (19) 式、(22) 式より時角  $H$  方向の大気差の大きさは

$$R_H = -R_0 \frac{\sin H \cos L}{\sin h} \quad (25)$$

(20) 式、(24) 式より赤緯  $\delta$  方向の大気差の大きさは

$$R_{\delta} = R_0 \left( \frac{\sin L}{\sin h \cos \delta} - \tan \delta \right) \quad (26)$$

となる。

### 3.2 単位時間あたりの時角 H 方向のズレ

(25) 式を  $H$  で微分する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_H}{\partial H} &= -R_0 \cos L \frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{\sin H}{\sin h} \right) \\
 &= -R_0 \cos L \left[ \frac{1}{\sin h} \cos H + \sin H \frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{1}{\sin h} \right) \right] \\
 &= -R_0 \frac{\cos L}{\sin^2 h} \left[ \sin h \cos H - \sin H \frac{\partial(\sin h)}{\partial H} \right]
 \end{aligned} \tag{27}$$

ところで球面三角  $\triangle ZPS$  より

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - L) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - L) \cos H \tag{28}$$

より

$$\sin h = \sin \delta \sin L + \cos \delta \cos L \cos H \tag{29}$$

$$\frac{\partial(\sin h)}{\partial H} = -\cos \delta \cos L \sin H \tag{30}$$

これらを代入して (27) 式を書き改めると、

$$\frac{\partial R_H}{\partial H} = -R_0 \frac{\sin \delta \sin L \cos L \cos H + \cos \delta \cos^2 L}{(\sin \delta \sin L + \cos \delta \cos L \cos H)^2} \tag{31}$$

となる。(11) 式を用いて単位を [arcsec/min] にすると

$$\left( \frac{\partial R_H}{\partial t} \right)_{atm} = -0''.255078 \times \frac{\sin \delta \sin L \cos L \cos H + \cos \delta \cos^2 L}{(\sin \delta \sin L + \cos \delta \cos L \cos H)^2} [\text{arcsec/min}] \tag{32}$$

### 3.3 単位時間あたりの赤緯 $\delta$ 方向のズレ

(26) 式を  $H$  で微分する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_\delta}{\partial H} &= \frac{\partial h}{\partial H} \frac{\partial R_\delta}{\partial h} \\
 &= \frac{\partial h}{\partial H} \times \left( -R_0 \frac{\sin L \cos h}{\cos \delta \sin^2 h} \right)
 \end{aligned} \tag{33}$$

ここで (30) 式と

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\sin h)}{\partial H} &= \frac{\partial h}{\partial H} \frac{\partial(\sin h)}{\partial h} \\
 &= \frac{\partial h}{\partial H} \cos h
 \end{aligned} \tag{34}$$

より、

$$\frac{\partial h}{\partial H} = -\frac{\cos \delta \cos L \sin H}{\cos h} \tag{35}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_\delta}{\partial H} &= -\frac{\cos \delta \cos L \sin H}{\cos h} \left( -R_0 \frac{\sin L \cos h}{\cos \delta \sin^2 h} \right) \\
&= R_0 \frac{\sin L \cos L \sin H}{\sin^2 h} \\
&= R_0 \frac{\sin L \cos L \sin H}{(\sin \delta \sin L + \cos \delta \cos L \cos H)^2}
\end{aligned} \tag{36}$$

(11) 式を用いて単位を [arcsec/min] にすると

$$\left( \frac{\partial R_\delta}{\partial t} \right)_{atm} = 0''.255078 \times \frac{\sin L \cos L \sin H}{(\sin \delta \sin L + \cos \delta \cos L \cos H)^2} [\text{arcsec}/\text{min}] \tag{37}$$

## 4 ピリオディックモーション

ピリオディックモーションとは望遠鏡を駆動するウォームネジの偏芯によって発生する RA 軸の周期的な回転のむらの事である。回転のむらは sin カーブに近似できる。

ところで南極 40cm 赤外線望遠鏡の RA 軸は歯数 360 枚のウォームホイールが取り付けられている。よって RA 軸を 1 回転させるにはウォームネジを 360 回転させる必要がある。天体は 23h56m04s(恒星時) で回転しているため、ウォームネジは

$$23h56m04s \div 360 \simeq 3.98907[\text{min}] \tag{38}$$

で 1 回転する計算となる。よってピリオディックモーション  $P$  の周期は 3.98907 分であり、ピリオディックモーションの大きさは

$$P_{RA}(t) = P_0'' \times \left\{ \sin \left( \frac{2\pi}{3.98907} t + \phi \right) - \sin \phi \right\} [\text{arcsec}/\text{min}] \tag{39}$$

と書ける。但し  $P_0$  はピリオディックモーションの振幅、 $\phi$  は位相を表し、 $t = 0$  で  $P_{RA}(0) = 0$  となるよう  $\sin \phi$  を引いた。

計算して書き直すと

$$P_H(t) = P_0'' \times \{ \sin (1.57510t + \phi) - \sin \phi \} [\text{arcsec}/\text{min}] \tag{40}$$

## 5 追尾エラーの見積もり

前章までで極軸エラー・大気差によるエラー・ピリオディックモーションを定量的に見積もった。観測される追尾エラーはこれらの足しあわせで表せる。

望遠鏡にカメラを取り付け追尾しながら周期的に天体を撮影して追尾エラーを測定する場合、観測される RA 方向の追尾エラー  $\Delta_{RA}$ 、Dec 方向の追尾エラー  $\Delta_{Dec}$  は以下ようになる。

$$\Delta_{RA} = \int_0^t dt \left( \frac{\partial H'}{\partial t} \right)_{pol} + \int_0^t dt \left( \frac{\partial R_H}{\partial t} \right)_{atm} + P_H(t) - 902.465'' t \tag{41}$$

$$\Delta_{Dec} = \int_0^t dt \left( \frac{\partial \delta'}{\partial t} \right)_{pol} + \int_0^t dt \left( \frac{\partial R_\delta}{\partial t} \right)_{atm} \tag{42}$$

ただし望遠鏡は天体を追尾している為、RA 方向の追尾エラーから  $902.465''t$  を引いている。

ここで観測時間はせいぜい 10 分間程度 (ピリオディックモーション 2 周期程度) であると仮定し、その間の時角  $H$  の変化が無視できるとみなすと、(41)(42) 式の積分は 1 次式に近似することができる。その場合 RA 方向、Dec 方向の追尾エラーは

$$\Delta''_{RA} = \left\{ 902.465'' \times \left( \frac{\cos \delta \sin H_0}{\cos \delta \sin H_0 - 4.84814 \times 10^{-6} \epsilon_p'' \sin H_p \sin \delta} - 1 \right) - 0'' .255078 \times \frac{\sin \delta \sin L \cos L \cos H_0 + \cos \delta \cos^2 L}{(\sin \delta \sin L + \cos \delta \cos L \cos H_0)^2} \right\} t + P_0'' \times \{ \sin(1.57510t + \phi) - \sin \phi \} \quad (43)$$

$$\Delta''_{Dec} = \left\{ -4.37527 \times 10^{-3} \epsilon_p'' \sin(H_0 - H_p) + 0'' .255078 \times \frac{\sin L \cos L \sin H_0}{(\sin \delta \sin L + \cos \delta \cos L \cos H_0)^2} \right\} t \quad (44)$$

となる。ただし、

$H_0$	[rad]	ある天体の観測開始時刻における時角
$\delta$	[rad]	ある天体の赤緯
$L$	[rad]	観測地の緯度
$H_p$	[rad]	望遠鏡の極軸のズレの時角
$\epsilon_p$	[arcsec]	極軸ズレの大きさ
$P_0$	[arcsec]	ピリオディックモーションの振幅
$\phi$	[rad]	ピリオディックモーションの位相
$t$	[min]	観測開始時刻からの経過時間

なお  $\Delta''_{RA}$  は + が西、- が東へのズレを表し、 $\Delta''_{Dec}$  は + が北、- が南を表している。複数の天体を観測することで精度よく  $H_p$ 、 $\epsilon_p$ 、 $P_0$ 、 $\phi$  を求めることができるはずである。

## 6 参考文献

1. 宇宙を見る II -現代天文学実験、横尾武夫 編、株式会社恒星社厚生閣
2. ZEUS プロジェクト技術資料、早水勉、[http://www2.synapse.ne.jp/haya/zeus/zeus\\_tech.html](http://www2.synapse.ne.jp/haya/zeus/zeus_tech.html)
3. 理科年表 平成 18 年、国立天文台、丸善株式会社
4. 天文年鑑 2009 年版、天文年鑑編集委員会、株式会社誠文堂新光社
5. DIMM のピクセルサイズ測定、沖田博文 (2008/01/16 レポート)
6. 望遠鏡の設置誤差から見込まれる天体の追尾誤差、沖田博文 (2008/02/29 レポート)
7. 南極 40cm 望遠鏡のビデオディックモーションの測定と考察、沖田博文 (2008/10/22 レポート)
8. 南極 40cm 望遠鏡の駆動パルス周期の測定、沖田博文 (2009/01/22 レポート)
9. 南極 40cm 望遠鏡の駆動パルスカウント、沖田博文 (2009/01/22 レポート)
10. 南極 40cm 望遠鏡のクラッチ部スリップ測定再実験、沖田博文 (2009/3/24 レポート)
11. 子午線通過に伴う南極 40cm 望遠鏡の追尾エラーの変化の測定、沖田博文 (2009/03/24 レポート)
12. 鏡筒のたわみによる追尾エラーへの影響の検証、沖田博文 (2009/04/02 レポート)
13. RA 軸受け改造後のクラッチ部スリップ測定、沖田博文 (2009/10/27 レポート)