

# 南極 40cm 望遠鏡の固定プレートのたわみ計算と設計

沖田博文 (東北大)

2009/4/22

## 1 概要

南極 40cm 望遠鏡の試験観測より、極軸合わせが困難である事が報告されている。これは望遠鏡を「方位軸」「高度軸」にそれぞれ独立して動かせる機構が無く、また脚部の剛性が足りないことが原因である。そこで今回、南極 40cm 望遠鏡を台に固定するプレートを新たに製作する事になったので、これに方位・高度調整機構を設けることにした。製作のポイントとしては

- 物理 A 棟屋上の小ドームでの設置が前提
- 南極でそのまま使える
- 出来るだけ軽く

に心がけた。また形状をモデル化し、材料力学の手法で強度の解析を行う事で必要な厚さを調べた。

## 2 モデル化

今回設計した固定プレートの形状は複雑で、実際に解析する為には FEM(有限要素法) を用いて数値的に解くしかない。しかし、固定プレートの形状をモデル化し簡単にすると解析的に解く事が出来る。そこで今回は固定プレートを図 1 のような梁とモデル化した。この梁は長さ  $l$  であり、単位長さあたり  $w$  の梁の自重に加え両端で下向きに  $W$  の荷重が掛かるとし、両端からそれぞれ  $a$  の位置にある 2 つの単純支点がこれらの荷重を支える。この梁の端 A と中央部 E のたわみ量を求める。

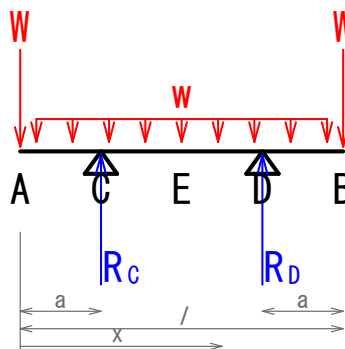


図 1

## 2.1 たわみの式

梁の全たわみ量  $\Delta$  は曲げ応力によるたわみ  $\Delta_b$  とせん断応力によるたわみ  $\Delta_s$  の足しあわせで表現できる。

$$\Delta = \Delta_b + \Delta_s \quad (1)$$

なお一般にせん断応力によるたわみは曲げ応力によるたわみに比べ非常に小さい為、材料力学の教科書等では無視して良いとされる事が多い(ようだ)。今回はせん断応力によるたわみも検証した。

## 3 たわみを求める為の準備

曲げ応力によるたわみ  $\Delta_b$ 、せん断応力によるたわみ  $\Delta_s$  を求める為にまずせん断力  $F$  及び曲げモーメント  $M$  を求める。

### 3.1 反力を求める

$C$  点、 $D$  点に生じる反力をもとめる。 $A$  点周りのモーメントの釣り合いより

$$R_C \cdot a + R_D \cdot (l - a) - W \cdot l - \int_0^l w \cdot x dx \quad (2)$$

力の釣り合いより

$$R_C + R_D - 2W - \int_0^l w dx \quad (3)$$

これらから

$$R_C = W + \frac{1}{2}wl \quad (4)$$

$$R_D = W + \frac{1}{2}wl$$

### 3.2 せん断力を求める

(i)  $A \sim C$  のとき

$$F_{A \sim C} = -W - \int_0^x w dx \quad (5)$$

(ii)  $C \sim D$  のとき

$$F_{C \sim D} = F_{A \sim C} + R_C \quad (6)$$

(iii)  $D \sim B$  のとき

$$F_{D \sim B} = F_{A \sim C} + R_C + R_D \quad (7)$$

であるので値を代入して

$$F_{A \sim C} = -W - wx$$

$$F_{C \sim D} = \frac{1}{2}(l - 2x) \quad (8)$$

$$F_{D \sim B} = W + w(l - x)$$

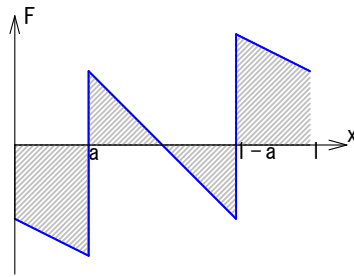


図2 S.F.D.(せん断力線図)

### 3.3 曲げモーメントを求める

(i)  $A \sim C$  のとき

$$M_{A \sim C} = -W \cdot x - \int_0^x w \cdot x' dx' \quad (9)$$

(ii)  $C \sim D$  のとき

$$M_{C \sim D} = M_{A \sim C} + R_C \cdot (l - a) \quad (10)$$

(iii)  $D \sim B$  のとき

$$M_{D \sim B} = M_{A \sim C} + R_C \cdot (l - a) + R_D \cdot (x - l - a) \quad (11)$$

値を代入して

$$\begin{aligned} M_{A \sim C} &= -Wx - \frac{1}{2}wx^2 \\ M_{C \sim D} &= -Wa - \frac{1}{2}w(x^2 - lx + la) \\ M_{D \sim B} &= W(x - l) - \frac{1}{2}w(x^2 + 2la - l^2) \end{aligned} \quad (12)$$

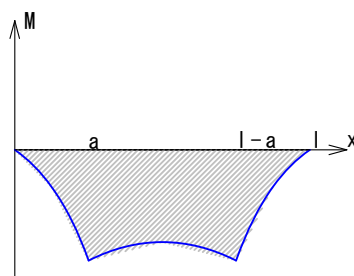


図3 B.M.D.(曲げモーメント線図)

## 4 曲げ応力によるたわみの計算

曲げ応力は曲がった梁の内側と外側でそれぞれ圧縮応力と引張応力が発生することで生じる。詳細は材料力学の教科書に譲るとして、梁の位置  $x$  におけるたわみ量  $\Delta_b$  は以下の2階の微分方程式で表される。

$$\frac{d^2 \Delta_b}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (13)$$

ここで  $M$  は曲げモーメント、 $E$  は縦弾性係数 (=ヤング率)、 $I$  は断面二次モーメントである。代入して

(i)  $A \sim C$  のとき

$$\frac{d^2 \Delta_{b;A \sim C}}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \left( -Wx - \frac{1}{2}wx^2 \right) \quad (14)$$

(ii)  $C \sim D$  のとき

$$\frac{d^2 \Delta_{b;C \sim D}}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \left[ -Wa - \frac{1}{2}w(x^2 - lx + la) \right] \quad (15)$$

(iii)  $D \sim B$  のとき

$$\frac{d^2 \Delta_{b;D \sim B}}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \left[ W(x-l) - \frac{1}{2}w(x^2 + 2la - l^2) \right] \quad (16)$$

これを以下の境界条件で解く。意味は  $x = a$  でたわみ角が等しくたわみ量は0、 $x = l/2$  でたわみ角が0。

$$\begin{aligned} \Delta_{b;A \sim C} \Big|_{x=a} &= \Delta_{b;C \sim D} \Big|_{x=a} = 0 \\ \frac{d\Delta_{b;A \sim C}}{dx} \Big|_{x=a} &= \frac{d\Delta_{b;C \sim D}}{dx} \Big|_{x=a} \\ \frac{d\Delta_{b;C \sim D}}{dx} \Big|_{x=\frac{l}{2}} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

なお梁は対称であるから  $D \sim B$  間のたわみ量  $\Delta_{b;D \sim B}$  は  $\Delta_{b;A \sim C}$  と等しくなる。これを解いて、 $A \sim C$  間

$$\Delta_{b;A \sim C} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}Wx^3 \right) + C_1x + C_2 \quad (18)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \frac{W}{EI} a(a-l) + \frac{1}{24} \frac{1}{EI} wl(l^2 - 6al + 6a^2) \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{1}{6} \frac{W}{EI} a^2(3l - 4a) - \frac{1}{24} \frac{1}{EI} wa(l^3 - 6al^2 + 6a^2l + a^3)$$

$C \sim D$  間

$$\Delta_{b;C \sim D} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{24}wx^4 - \frac{1}{12}wlx^3 + \frac{1}{4}(wla + 2Wa)x^2 \right] + D_1x + D_2 \quad (20)$$

$$D_1 = -\frac{1}{2} \frac{W}{EI} al + \frac{1}{24} \frac{1}{EI} wl(l^2 - 6al) \quad (21)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \frac{W}{EI} a^2(l-a) - \frac{1}{24} \frac{1}{EI} wa(l^3 - 6al^2 + 4a^2l + a^3)$$

よって A 点のたわみ量は  $x = 0$  を代入して、

$$\Delta_{b,A} = \frac{1}{6} \frac{W}{EI} a^2(3l - 4a) - \frac{1}{24} \frac{w}{EI} a(l^3 - 6al^2 + 6a^2l + a^3) \quad (22)$$

E 点のたわみ量は  $x = l/2$  を代入して、

$$\Delta_{b,E} = -\frac{1}{8} \frac{W}{EI} a(l-2a)^2 + \frac{1}{384} \frac{w}{EI} (5l^4 - 40al^3 + 96a^2l^2 - 64a^3l - 16a^4) \quad (23)$$

となる。

## 5 せん断応力によるたわみの計算

梁の位置  $x$  におけるせん断応力によるたわみ量  $\Delta_s$  は以下の 1 階の微分方程式で表される。

$$\frac{d\Delta_s}{dx} = \frac{F}{AG} \quad (24)$$

ここで  $A$  は位置  $x$  における梁の断面積、 $G$  は横弾性係数、 $F$  はせん断力である。代入して、

(i)  $A \sim C$  のとき

$$\frac{d\Delta_{s,A\sim C}}{dx} = \frac{1}{AG} (-W - wx) \quad (25)$$

(ii)  $C \sim D$  のとき

$$\frac{d\Delta_{s,C\sim D}}{dx} = \frac{1}{AG} \left[ \frac{1}{2}(l-2a) \right] \quad (26)$$

(iii)  $D \sim B$  のとき

$$\frac{d\Delta_{s,D\sim E}}{dx} = \frac{1}{AG} [W + w(l-x)] \quad (27)$$

これを以下の境界条件で解く。 $x = a$ 、 $x = l - a$  でたわみ量は 0 であるから、

$$\begin{aligned} \Delta_{s,A\sim C} \Big|_{x=a} &= 0 \\ \Delta_{s,C\sim D} \Big|_{x=a} &= 0 \\ \Delta_{s,C\sim D} \Big|_{x=l-a} &= 0 \\ \Delta_{s,D\sim E} \Big|_{x=l-a} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

これを解いて、 $A \sim C$  間

$$\Delta_{s,A\sim C} = -\frac{1}{AG} \left( \frac{1}{2} wx^2 + Wx \right) + H_1 \quad (29)$$

$$H_1 = \frac{1}{AG} \left( \frac{1}{2} wa^2 + Wa \right) \quad (30)$$

$C \sim D$  間

$$\Delta_{s,C\sim D} = -\frac{1}{2} \frac{1}{AG} (wx^2 - wlx) + J_1 \quad (31)$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{AG} wa(a-l) \quad (32)$$

よって A 点のたわみ量は  $x = 0$  を代入して、

$$\Delta_{s,A} = \frac{1}{AG} \left( \frac{1}{2} wa^2 + Wa \right) \quad (33)$$

E 点のたわみ量は  $x = l/2$  を代入して、

$$\Delta_{s,E} = \frac{1}{8} \frac{w}{AG} (l^2 - 4al + 4a^2) \quad (34)$$

となる。これらから全たわみ量  $\Delta$  を求める事が出来る。

## 6 安全率

今回考えている梁には荷重  $W$  及び自重  $w$  が掛かっている為、梁は多かれ少なかれたわむ。構造物として問題になるのは、梁が荷重を支えられるかどうかである。そこで梁が弾性変形する最大の荷重を調べ、実際にかかるであろう荷重の予定の何倍があるか、すなわち何倍までの荷重に耐えられるかを調べておく必要がある。この倍数の事を「安全率」と呼び(実際の定義は若干違うが)、一般に安全率が 3 ~ 10 になるように設計する必要がある。

安全率は梁に掛かる曲げモーメント  $M$  の最大値  $M_{max}$  を許容最大曲げモーメント  $M_{P;max}$  で割ることで求める。

$$\frac{M_{max}}{M_{P;max}} \quad (35)$$

最大曲げモーメント  $M_{max}$  はこの場合、図 3 より

$$M_{max} = |M_{x=a}| = |M_{x=l-a}| = Wa \quad (36)$$

許容最大曲げモーメント  $M_{P;max}$  は許容曲げ応力  $\sigma$ 、断面係数  $Z$  とすると以下の式で与えられる。

$$M_{P;max} = \sigma Z \quad (37)$$

また JIS B8265 より、

$$\text{許容曲げ応力} = \text{許容引張応力} \times 1.5 \quad (38)$$

と計算でき、また許容引張応力とはこの場合耐力(一般に降伏応力、アルミニウム等の場合は 0.2% 耐力)であるので

$$M_{P;max} = \text{耐力} \times 1.5 \times Z \quad (39)$$

よって安全率を求める事が出来る。

## 7 その他

### 7.1 断面二次モーメント

今回のモデル化では梁は単純な厚板を想定している。よって断面二次モーメント  $I$  は幅  $b$ 、厚さ  $h$  として

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \quad (40)$$

### 7.2 断面係数

同様に断面係数も以下のように与えられる。

$$Z = \frac{1}{6}bh^2 \quad (41)$$

## 8 ここまでのまとめ

図1のような梁において、  
端のたわみ量は

$$\Delta_A = \frac{1}{6} \frac{W}{EI} a^2 (3l - 4a) - \frac{1}{24} \frac{w}{EI} a (l^3 - 6al^2 + 6a^2l + a^3) + \frac{1}{AG} \left( \frac{1}{2} wa^2 + Wa \right) \quad (42)$$

中央のたわみ量は

$$\Delta_E = -\frac{1}{8} \frac{W}{EI} a (l - 2a)^2 + \frac{1}{384} \frac{w}{EI} (5l^4 - 40al^3 + 96a^2l^2 - 64a^3l - 16a^4) + \frac{1}{8} \frac{w}{AG} (l^2 - 4al + 4a^2) \quad (43)$$

また、最も構造上大きな曲げモーメントが生じるのは支点部分であり、この箇所での安全率は

$$\frac{M_{max}}{M_{P,max}} = \frac{Wa}{\text{耐力} \times 1.5 \times Z} \quad (44)$$

である。なお  $E$  は縦弾性係数 (=ヤング率)、 $G$  は横弾性係数、 $A$  は断面積、 $I$  は断面二次モーメント、 $Z$  は断面係数である。

## 9 材質について

	アルミニウム (A5052)	ジュラルミン (A2017)	鉄 (SS400)
縦弾性係数 $E[N/mm^2]$	72,000	74,000	206,000
ポアソン比 $\nu$	0.3	0.3	0.3
横弾性係数 $G[N/mm^2]$	27,000	27,000	79,000
密度 $\rho[g/cm^3]$	2.7	2.7	7.9
引張応力 $[N/mm^2]$	195	425	400
耐力 $[N/mm^2]$	90	280	245
せん断応力 $[N/mm^2]$	125	125	200

表1 各金属の特性

ここで注目すべきはジュラルミンの縦弾性係数と引張応力、密度であろう。ジュラルミンは縦弾性係数がアルミニウムとほぼ同じであり、アルミと同程度・鉄の1/3程度の「柔らかい金属」とであると言える。しかし密度は鉄の1/3にも関わらず引張応力は鉄以上である。つまり「軽く柔らかいけれど、引っ張っても簡単にはちぎれない」という性質を持っているのである。故にジュラルミンは航空機に多用されているようである。

今回の南極望遠鏡の固定プレートの材質としては、「軽い」事が求められる為アルミかジュラルミンで製作する。より高強度のジュラルミンを、と当初考えていたが、アルミとジュラルミンは縦弾性係数=たわみ量がほぼ同じであるので、十分な安全率が確保出来るのであればアルミで作っても差し支えないことが表1より分かった。

また固定プレートは押しネジ・引きネジによって方位・高度を調整する構造とするのだが、たとえジュラルミンを用いたとしてもネジのあたる部分は鉄やステンレス等、縦弾性係数が高い素材を用いる必要があることも分かった。

## 10 解析結果

望遠鏡はおよそ  $200[kg] \sim 2000[N]$  であるので、望遠鏡の脚 1 本にかかる荷重は平均すると  $W = 500[N]$ 。また固定プレートの自重  $w$  は密度  $\rho$  より求める事が出来る。よってたわみ量・安全率を算出する事が出来る。

### 10.1 現在の固定プレートの場合

アルミニウム (A5052) 製の固定プレート ( $l = 740$ 、 $a = 180$ 、 $h = 18$ 、 $b = 200$ ) の場合の結果を表 2 に示す。たわみ量は、鉛直下向きを正としている。たわみ量は  $1mm$  以下であり、また安全率が 16.2 であること

端部のたわみ量 [mm]	0.58
中央部のたわみ量 [mm]	-0.23
安全率	16.2

表 2 現在の固定プレート

から十分な強度を有している事が分かる。

### 10.2 今回設計した固定プレート (上板) の場合

形状が複雑であるので今回の梁モデルでの正確な見積もりは不可能であるが、上板として適当に  $W = 500N$ 、アルミニウム (A5052) 製、 $l = 740$ 、 $a = 290$ 、 $h = 18$ 、 $b = 290$  とした場合の結果を表 3 に示す。

端部のたわみ量 [mm]	0.76
中央部のたわみ量 [mm]	-0.05
安全率	14.6

表 3 固定プレート (上板)

### 10.3 今回設計した固定プレート (中板) の場合

これも正確な見積もりは不可能であるが、中板として適当に  $W = 1000N$ 、アルミニウム (A5052) 製、 $l = 740$ 、 $a = 315$ 、 $h = 18$ 、 $b = 670$  とした場合の結果を表 4 に示す。

端部のたわみ量 [mm]	0.71
中央部のたわみ量 [mm]	-0.02
安全率	15.5

表 4 固定プレート (中板)



## 10.4 今回設計した固定プレート (下板) の場合

同様に、下板として適当に  $W = 1000N$ 、アルミニウム (A5052) 製、 $l = 508$ 、 $a = 200$ 、 $h = 18$ 、 $b = 670$  とした場合の結果を表 5 に示す。

端部のたわみ量 [mm]	-0.21
中央部のたわみ量 [mm]	0.01
安全率	24.4

表 5 固定プレート (下板)

## 11 考察と最適化

表 1 で示したように、アルミニウムとジュラルミンの相違点は引張応力であり、これはすなわち、ジュラルミンの方がおよそ 3 倍大きい安全率を得る事が出来るという事になる。よってジュラルミンで製作する方が薄く=軽く出来ると言う事になる。

しかし、ジュラルミンとアルミニウムの縦弾性係数はほぼ同じであるから、ジュラルミンで薄く作ると固定プレートは大きくたわむ事になる。製作予定の固定プレートは極軸調整を行った後は全く動かさない部品ではあるが、たわむと調整が困難になることが予想される。また軽量化できたとしても全体で 10kg 程度であり、ジュラルミンで製作するのは調整面・コスト面で不利と言える。

また、前章の解析結果より今回設計している固定プレートはたわみ量・安全率を見る限りアルミニウム (A5052) 製でも十分な強度を有すると考えられる。よって材質をアルミニウム (A5052) として、十分な安全率・少ないたわみ量の板厚となるよう最適化を考える。まず安全率  $\geq 10$  を満たす板厚を調べると

	最小厚み	最大たわみ量
上板	15.0mm	1.30mm
中板	14.5mm	1.34mm
下板	11.6mm	0.78mm

表 6 安全率を基準とした最小厚み

また、最大たわみ量  $\Delta \leq 1mm$  を満たす板厚も調べると

	最小厚み	安全率
上板	16.4mm	12.1
中板	16.1mm	12.4
下板	10.7mm	8.6

表 7 最大たわみ量を基準とした最小厚み

よってこれらの結果から、今回製作する固定プレートはアルミニウム (A5052) 製で、上板・中板の厚みを  $h = 18\text{mm}$ 、下板の厚みを  $h = 15\text{mm}$  とするのが最適であると考えられる。なお、この場合の板の質量はそれぞれ  $19.0\text{kg}$ 、 $22.4\text{kg}$ 、 $26.4\text{kg}$  であり、十分 1 人で運搬・設置可能な重さである。

## 12 参考文献

1. きょう体のたわみ量について、池田優二 (2000/03/21 LIPS 実験レポート)
2. 図解入門よくわかる材料力学の基礎、菊池正紀・和田義孝著、秀和システム
3. 新機械工学シリーズ材料力学、加藤正名・他共著、朝倉書店
4. 材料力学の考え方解き方、萩原国雄著、東京電機大学出版局
5. 機械現場の基礎物理 始めて学ぶ材料力学、山田義昭著、技術評論社
6. JIS 使い方シリーズ新判非鉄金属材料選択のポイント、編集委員長高橋恒夫、日本規格協会