望遠鏡の設置誤差から見込まれる天体の追尾誤差

沖田博文

2008/2/29

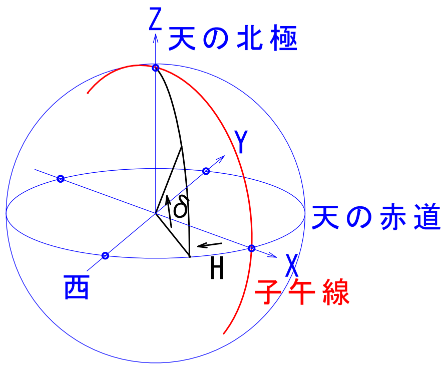

図 1　時角

ある時刻 $t=0$ のとき、観測する天体を時角 h および赤緯 δ でその位置を表す。図 (1) よりその方向余弦は

$$\begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ -\cos\delta\sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

時刻 $t=T$ の天体の位置は、z 軸正の向きから見て時計回りに T 回転するのだから、ここで回転行列 T を定義すると、

$$T \equiv \begin{pmatrix} \cos T & \sin T & 0 \\ -\sin T & \cos T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

よって時刻 $t=T$ の方向余弦は

$$\begin{pmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{pmatrix}_1 = T \begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos(H+T) \\ -\cos\delta\sin(H+T) \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{3}$$

これが時間 T 後の正しい天体の位置である。

望遠鏡の極軸が時角 H_p、天の北極から距離角
$epsilon_p$ の方向を向いているとすると、視野中心に天体を導入していても時間 T 後には望遠鏡の追尾 (回転) 軸と日周運動の回転軸がずれている為、視野中心からはずれてしまう。

どれぐらいはずれるかは、まず図 (1) の Z 軸の方向を天の北極から望遠鏡の追尾 (回転) 軸の方向に座標系を回転させて天体の座標を書き直し、この座標軸で時間 T だけ追尾 (回転) し、最後に天の北極が Z 軸となるように座標系を回転させれば求められる。

望遠鏡の追尾 (回転) 軸が Z 軸となる座標軸を

$$\begin{pmatrix} L_0' \\ M_0' \\ N_0' \end{pmatrix} \tag{4}$$

とすると、この座標系はまず Z 軸正の向きから見て時計回りに H_p 回転し (この回転行列を A と定義)

$$A \equiv \begin{pmatrix} \cos H_p & -\sin H_p & 0 \\ \sin H_p & \cos H_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

さらに Y 軸正の向きから見て反時計回りに ϵ_p 回転 (B と定義)

$$B \equiv \begin{pmatrix} \cos \epsilon_p & 0 & -\sin \epsilon_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \epsilon_p & 0 & \cos \epsilon_p \end{pmatrix} \tag{6}$$

するので、この座標軸は

$$\begin{pmatrix} L_0' \\ M_0' \\ N_0' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

と書き表せる。時間 T 後の天体の座標は

$$\begin{pmatrix} L_T' \\ M_T' \\ N_T' \end{pmatrix} = TBA \begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

よって天の北極が Z 軸という座標軸 (最初の座標軸) で

$$\begin{pmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{pmatrix}_2 = A^{-1}B^{-1}TBA \begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

これが望遠鏡が時間 T 後に向いている方向の位置である。ただし

$$A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \cos H_p & \sin H_p & 0 \\ -\sin H_p & \cos H_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$B^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \cos \epsilon_p & 0 & \sin \epsilon_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \epsilon_p & 0 & \cos \epsilon_p \end{pmatrix} \tag{11}$$

式 (9) を計算する。ここで望遠鏡の設置誤差は小さいとして $\epsilon_p \ll 1$ と近似すると、

$$\begin{pmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos(H+T) \\ -\cos\delta\sin(H+T) \\ \sin\delta \end{pmatrix} - \epsilon_p \begin{pmatrix} \sin\delta[\cos(H_p+T)-\cos H_p] \\ -\sin\delta[\sin(H_p+T)-\sin H_p] \\ \cos\delta[\cos(H-H_p+T)-\cos(H-H_p)] \end{pmatrix} \tag{12}$$

式 (3) より天体の位置 (H_{T1}, δ_{T1}) は

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \arcsin(N_{T1}) = \delta \\ H_1 &= \arctan\left(\frac{-M_{T1}}{N_{T1}}\right) = H + T \end{aligned} \tag{13}$$

式 (12) より望遠鏡の向く方向 (H_{T2}, δ_{T1}) は

$$
\begin{aligned}
\delta_2 &= \arcsin(N_{T2}) \\
&= \arcsin\left[\sin\delta - \epsilon_p \cos\delta \left\{\cos(H - H_p + T) - \cos(H - H_p)\right\}\right] \\
H_2 &= \arctan\left(\frac{-M_{T2}}{N_{T2}}\right) \\
&= \arctan\left[\frac{\cos\delta\sin(H+T) - \epsilon_p \sin\delta\left\{\sin(H_p+T) - \sin H_p\right\}}{\cos\delta\cos(H+T) - \epsilon_p \sin\delta\left\{\cos(H_p+T) - \cos H_p\right\}}\right]
\end{aligned} \tag{14}
$$

であるので、時間 T 後の望遠鏡の追尾誤差は

$$
\begin{aligned}
\Delta\delta &= \delta_2 - \delta \\
\Delta H &= H_2 - (H + T)
\end{aligned} \tag{15}
$$

ただし望遠鏡の視野内で星が南に逃げるように見える (実際には望遠鏡が北を向く) 時 $\Delta\delta \geq 0$ となり、星が東に逃げるように見える (実際には望遠鏡が西を向く) 時 $\Delta H \geq 0$ となる。

これで知りたい関係式が求まった。天体の位置 (H, δ) および観測時間 T は既知、ΔH と $\Delta\delta$ は観測で得られるので式 (15) を逆に解けば望遠鏡の極軸の向いている方向 (H_p, ϵ_p) を求められる。H_p は解くことができないが、ϵ_p は式 (14) より

$$
\epsilon_p = \frac{\sin\delta - \sin(\delta + \Delta\delta)}{\cos\delta\left\{\cos(H - H_p + T) - \cos(H - H_p)\right\}} \tag{16}
$$

であるので、適当な H_p を与えて ϵ_p を求め、この (H_p, δ_p) の組を式 (15) 式に代入し、観測量 $(\Delta H, \Delta\delta)$ と等しくなるかどうかを調べることで (H_p, δ_p) を数値的に求めることができる。それを行うプログラムは PolarSettingCalculator.xls である。