DIMM 観測において検出器で測定される相対的な天体位置の平均・分散・共分散に含まれる装置誤差について

沖田博文

2012/7/18
2012/8/15 加筆修正

1 Longitudinal 方向と transverse 方向の定義

DIMM では 2 つの異なるパスを通ってきた天体からの光を観測し、その相対的な位置の分散からシーイングを求める。実際には 1 つの望遠鏡の開口部に直径 D の穴を距離 d だけ離して 2 つ開けた「マスク板」を取り付けることで 1 つの望遠鏡・1 つの検出器で DIMM 観測が可能になる。ただしこのままでは焦点位置で 2 つの穴からの光は 1 点で結像してしまうため、それぞれの穴にはウェッジプリズムを取り付けて望遠鏡内部の光路を曲げて検出器上に 2 つの星像が出来るようにする。図 1 は DIMM 観測の概要である。

ところで DIMM 観測の時の座標を定義する。2 つの開口をつないだ方向を longitudinal 方向、それに垂直な方区を transverse 方向と定義する。この定義から longitudinal 方向及び transverse 方向は「マスク板」に開けられた穴の物理的な位置関係に依存することになる。図 2 はこの longitudinal 方向と transverse 方向の定義を図示したものである。

検出器の座標軸 (縦軸・横軸) が longitudinal 方向と transverse 方向に一致する場合、検出器の x 座標、y 座標から簡単にシーイングを計算できる。しかし実際は取り付け誤差がどうしても生じ、検出器の座標と longitudinal 方向・transverse 方向は必ずしも一致しない。本レポートではこの取り付け誤差について考察する。加えて天頂ミラーを使用した場合にどのような誤差が生じるかも議論する。

2 ウエッジプリズムの取り付け誤差について

ウエッジプリズムが無い場合、マスク板の開口を通ってきた天体からの光は光軸上で焦点を結ぶ。図 3 ではこれは赤破線で示した光路に対応する。これに対してウエッジプリズムをマスク板の開口に取り付けると、天体からの光は ϕ だけ曲げられ、検出器上では光軸から ϕ 離れた場所で焦点を結ぶ。図 3 ではこれは青破線で示した光路に対応する。ウェッジプリズムの頂角の方向を変えることによって検出器上に結ぶ天体の位置は変化する。焦点を結ぶ場所は光軸から角度 ϕ の円上となる。

しかしウェッジプリズムは検出器上で焦点を結ぶ位置のみを変化させるだけであって像を回転させる効果は無い。図 4 は検出器上に写った土星を模式的に示したものである。赤実線で描かれた土星はウェッジプリズム無しの場合に出来る光軸上での像を意味する。ウエッジプリズムを取り付けた場合は青実線で示した。光軸から角度 ϕ の円上 (青破線) の任意の位置に土星は結像することになる。ここで結像する土星の位置はウエッジ

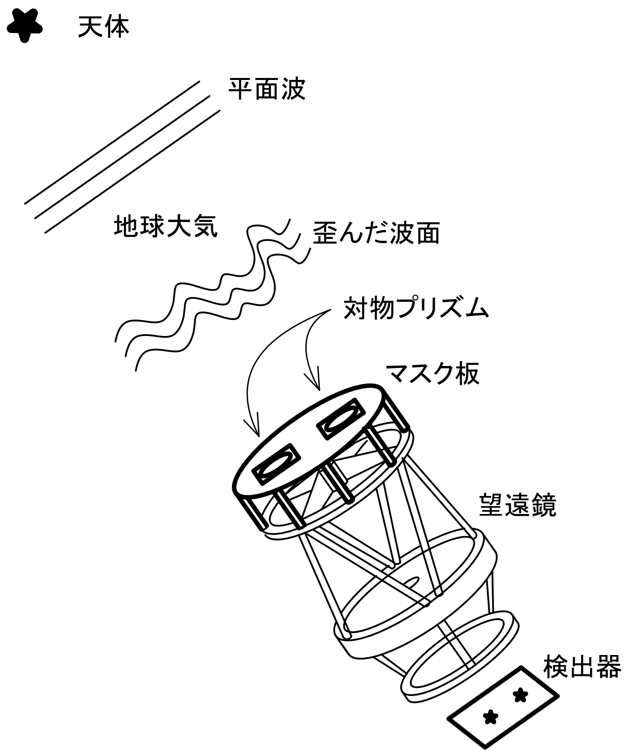

図 1　DIMM 観測の概要

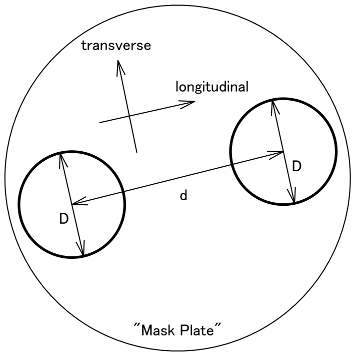

図 2　マスク板の物理的な位置関係 (longitudinal 方向と transverse 方向の定義)

プリズムの頂角の方向によって決まるが、ウエッジプリズムは光路を角度 ϕ 曲げる効果しかないので、土星像は回転せず常に同じ向きに写る。

よってマスク板と検出器の座標軸が一致する場合、つまり図 3 の longitudinal 方向と x 軸、 transverse 方向と y 軸が一致する場合、ウェッジプリズムの頂角がどの方向にあっても、x 軸方向は longitudinal 方向、y 軸方向は transverse 方向となる。よってウエッジプリズムの取り付け誤差を考慮する必要は無い。

なお検出器上に出来る 2 つの星像を結んだ方向及びそれと垂直な方向はウエッジプリズムの頂角の方向が

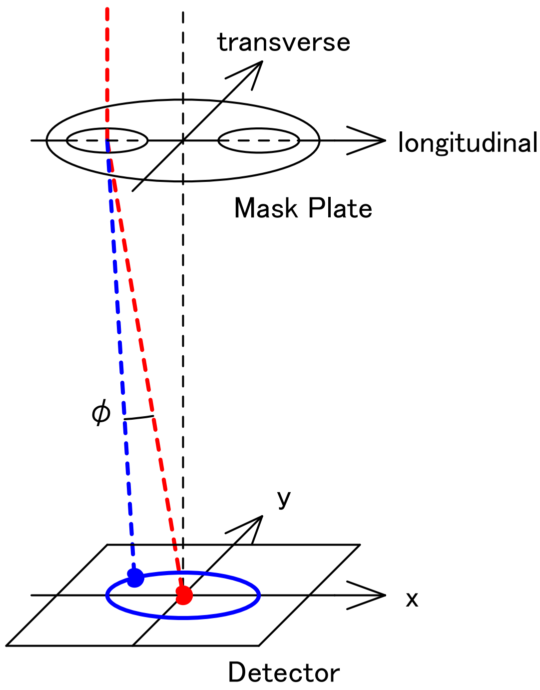

図 3　結像する位置

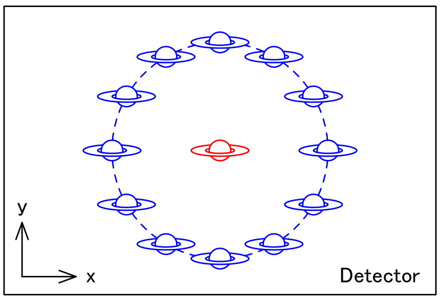

図 4　検出器上に写った土星の模式図。赤実線で描かれた土星はウェッジプリズム無しの場合に出来る光軸上での像を意味する。ウエッジプリズムを取り付けた場合は青実線で示した。光軸から角度 ϕ の円上 (青破線) の任意の位置に土星は結像することになる。ここで結像する土星の位置はウエッジプリズムの頂角の方向によって決まるが、ウエッジプリズムは光路を角度 ϕ 曲げる効果しかないので、土星像は回転せず常に同じ向きに写る。

任意であるので longitudinal 方向及び transverse 方向とはならない。DIMM によってはこれを定義としているものもあるようであり (東大 DIMM がこれ)、注意が必要である。詳細は付録 A「2 星を結んだ直線を longitudinal 方向と見なした場合」を参照のこと。

3　観測装置を望遠鏡に取り付ける際の誤差について

図 5 のように、観測装置（検出器、もしくは天頂ミラー＋検出器）を望遠鏡に取り付けたときに検出器 (x, y) 平面で (x_b, y_b) の位置に天体を検出したとする。ここで観測装置は望遠鏡に対して角度 α だけ傾いて取り付

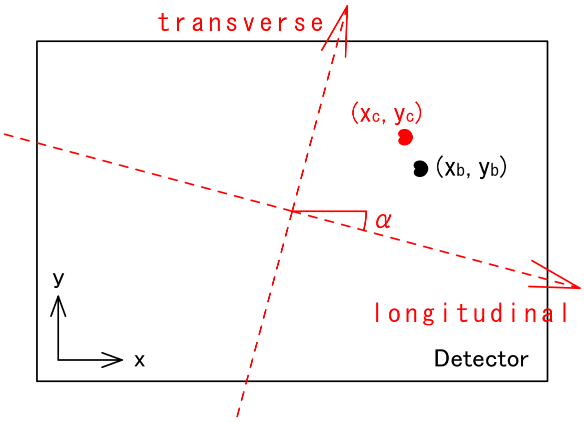

図 5　観測装置（検出器、もしくは天頂ミラー＋検出器）を望遠鏡に取り付けた時

けられたとすると、正しく取り付けらた場合 ($\alpha = 0$ の場合) に天体は位置 (x_c, y_c) に検出されるはずである。これを書くと以下となる。

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \tag{1}$$

よって観測装置の傾きが全くない時に期待される天体の位置 (x_c, y_c) は、観測した天体の位置 (x_b, y_b) から求める事が出来る。しかし実際問題として角度 α をどうやって求めるかは非常に難しい。

なお繰り返しになるが DIMM 観測の場合「正しく取り付けられた場合」とは DIMM マスクの 2 つの開口を結ぶ方向とそれに垂直な方向が検出器の長辺または短辺の方向と平行もしくは垂直となる場合のことである。

4　天頂ミラーを用いる場合の注意と検出器を天頂ミラーに取り付ける際の誤差について

天頂ミラーを使うとその像は「裏像」となり、使用しない場合の像（倒立像）に対して上下が逆の像となる。そこで天頂ミラーを使う場合はこの裏像を座標変換して、天頂ミラーを使用しない場合に得られるであろう倒立像での座標に変換する必要がある。

図 6 のように天頂ミラーを用いたときに検出器 (x, y) 平面で (x_a, y_a) の位置に天体を検出したとする。ここで検出器は天頂ミラーに対して角度 β だけ傾いて取り付けられたとすると、天頂ミラーを用いなかった場合の天体の位置は (x_b, y_b) となるはずである。この位置をまず求める。図 6 のように天頂ミラーの座標軸を (x', y') と書くと (x, y)=(x_a, y_a) は $-\beta$ 回転して以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$

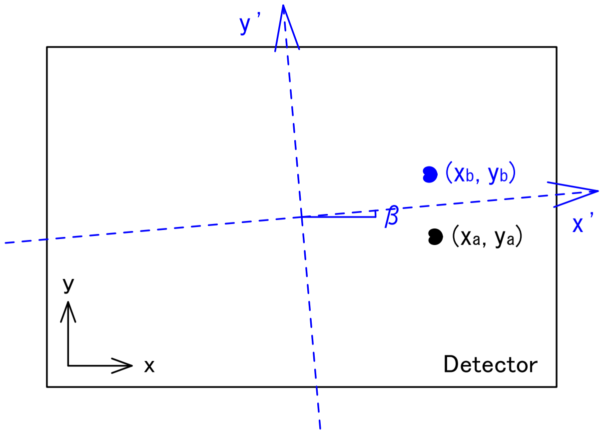

図 6　天頂ミラーを用いた時

(x', y') 座標系で (x'_a, y'_a) に対して x' 軸に軸対象な位置 (x'_b, y'_b) は

$$\begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_a \\ y'_a \end{pmatrix}$$

よってこれを β 回転させるともとの座標系での天頂ミラーを用いなかった場合の天体の位置 (x_b, y_b) が求まる。

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \end{pmatrix}$$

よってこれらを計算すると最終的に

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \tag{2}$$

と書ける。よって天頂ミラーを用いなかった場合に期待される天体の位置 (x_b, y_b) は、天頂ミラーを用いて検出された天体の位置 (x_a, y_a) から求める事が出来る。しかし実際問題として角度 β をどうやって求めるかは非常に難しい。

実際には観測装置の取り付け誤差 α も考慮する必要がある。これまでの考察から、本来天体があると期待される位置 (x_c, y_c) は、検出器で観測した座標 (x_a, y_a) を用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+2\beta) & \sin(\alpha+2\beta) \\ \sin(\alpha+2\beta) & -\cos(\alpha+2\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

5　検出器座標 (x,y) から (longitudinal, transverse) 座標への変換

前章まででウェッジプリズムと天頂ミラーを通して検出器に作られる星像の位置についてズレ量 α, β が分かっていれば longitudinal 方向・transverse 方向での位置に変換できることを示した。本章ではこの結果を DIMM 観測で得られる量に適用する。

DIMM では 2 つのウェッジプリズムを用いて 2 つの星像を 1 つの検出器上に作り、その 2 つの星像の相対的な位置を測りその分散からシーイングを求める。ここで検出器で観測される星像の位置を (x_1, y_1)、(x_2, y_2) とすると、i 番目に観測した画像におけるこの 2 つの星像の相対的な位置 (位置の差) は検出器座標 (x, y) で以下と書くことが出来る。

$$\Delta x_i \equiv x_{i1} - x_{i2} \tag{4}$$
$$\Delta y_i \equiv y_{i1} - y_{i2} \tag{5}$$

この平均を以下と定義する。

$$\overline{\Delta x} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{i1} - x_{i2}) \tag{6}$$
$$\overline{\Delta y} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_{i1} - y_{i2}) \tag{7}$$

さらにこの分散と共分散を以下と定義する。

$$\sigma_{\Delta x}^2 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i - \overline{\Delta x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i^2 - \overline{\Delta x}^2 \tag{8}$$
$$\sigma_{\Delta y}^2 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta y_i - \overline{\Delta y})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i^2 - \overline{\Delta y}^2 \tag{9}$$
$$\sigma_{\Delta x \Delta y} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i - \overline{\Delta x})(\Delta y_i - \overline{\Delta y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i \Delta y_i - \overline{\Delta x \Delta y} \tag{10}$$

実際の DIMM 観測では $N = 30 \sim 50$ 程度回撮像し、得られた各画像から相対的な位置を検出して平均、分散、共分散を計算し出力する。

5.1 天頂ミラー無し

ここで本来天体があると期待される位置を (x_1', y_1')、(x_2', y_2') と書くと、天頂ミラーを用いない場合は位置の差はその定義から

$$\begin{aligned}\Delta x_i' &\equiv x_{i1}' - x_{i2}' \\ &= \cos\alpha(x_{i1} - x_{i2}) - \sin\alpha(y_{i1} - y_{i2}) \\ &= \cos\alpha\Delta x_i - \sin\alpha\Delta y_i \qquad (11)\\ \Delta y_i' &\equiv y_{i1}' - y_{i2}' \\ &= \sin\alpha\Delta x_i + \cos\alpha\Delta y_i \qquad (12)\end{aligned}$$

平均は

$$\begin{aligned}\overline{\Delta x'} &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x'_i \\ &= \cos\alpha\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i - \sin\alpha\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i \\ &= \cos\alpha\overline{\Delta x} - \sin\alpha\overline{\Delta y} \qquad (13)\\ \overline{\Delta y'} &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta y'_i \\ &= \sin\alpha\overline{\Delta x} + \cos\alpha\overline{\Delta y} \qquad (14)\end{aligned}$$

分散は

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\Delta x'} &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x'_i - \overline{\Delta x'})^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta {x'_i}^2 - \overline{\Delta x'}^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\cos\alpha\Delta x_i - \sin\alpha\Delta y_i\right)^2 - \left(\cos\alpha\overline{\Delta x} - \sin\alpha\overline{\Delta y}\right)^2 \\ &= \cos^2\alpha\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta {x_i}^2 - \overline{\Delta x}^2\right) + \sin^2\alpha\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta {y_i}^2 - \overline{\Delta y}^2\right) \\ &\quad -2\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\Delta y_i - \overline{\Delta x\Delta y}\right) \\ &= \cos^2\alpha\sigma^2_{\Delta x} + \sin^2\alpha\sigma^2_{\Delta y} - \sin(2\alpha)\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (15)\\ \sigma^2_{\Delta y'} &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta y'_i - \overline{\Delta y'})^2 \\ &= \sin^2\alpha\sigma^2_{\Delta x} + \cos^2\alpha\sigma^2_{\Delta y} + \sin(2\alpha)\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (16)\end{aligned}$$

と求まる。

よって検出器座標 (x, y) で計算した分散 $\sigma^2_{\Delta x}, \sigma^2_{\Delta y}$ と共分散 $\sigma_{\Delta x\Delta y}$ が分かっていればシーイングの計算に必要な (longitudinal, transverse) 座標の分散 $\sigma^2_l(=\sigma^2_{\Delta x'}), \sigma^2_t(=\sigma^2_{\Delta y'})$ を計算出来ることになる。しかし一般に望遠鏡と観測装置の取り付け誤差 (角度)α の測定は困難である。

ところでもしそれぞれの誤差が微小だと仮定すると以下のように近似することができる。

$$\sigma^2_{\Delta x'} \sim \sigma^2_{\Delta x} - 2\alpha\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (17)$$

$$\sigma^2_{\Delta y'} \sim \sigma^2_{\Delta y} + 2\alpha\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (18)$$

よって検出器座標 (x, y) で計算した分散 $\sigma^2_{\Delta x}, \sigma^2_{\Delta y}$ には $2\alpha\sigma_{\Delta x\Delta y}$ 程度の誤差が含まれていることになる。検出器・プリズムをそれぞれ 3 度程度の誤差で取り付けたと仮定すると $0.1\sigma_{\Delta x\Delta y}$ 程度の誤差が見込まれることになる。これを考慮に入れた解析・考察が必要と考える。

ちなみに共分散も計算すると

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\Delta x'\Delta y'} &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x'_i - \overline{\Delta x'})(\Delta y'_i - \overline{\Delta y'}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x'_i\Delta y'_i - \overline{\Delta x'\Delta y'} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{\cos\alpha\Delta x_i - \sin\alpha\Delta y_i\}\{\sin\alpha\Delta x_i + \cos\alpha\Delta y_i\} \\
&\quad - \left\{\cos\alpha\overline{\Delta x} - \sin\alpha\overline{\Delta y}\right\}\left\{\sin\alpha\overline{\Delta x} + \cos\alpha\overline{\Delta y}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\left[\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta {x_i}^2 - \overline{\Delta x}^2\right\} - \left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta {y_i}^2 - \overline{\Delta y}^2\right\}\right] \\
&\quad + \cos(2\alpha)\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\Delta y_i - \overline{\Delta x\Delta y}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sin(2\alpha)(\sigma_{\Delta x}^2 - \sigma_{\Delta y}^2) + \cos(2\alpha)\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

となる。

5.2 天頂ミラー有り

ここで本来天体があると期待される位置を (x'_1, y'_1),(x'_2, y'_2) と書くと、天頂ミラーを用いる場合位置の差はその定義から

$$
\begin{aligned}
\Delta x'_i &\equiv x'_{i1} - x'_{i2} \\
&= \cos(\alpha+2\beta)(x_{i1} - x_{i2}) + \sin(\alpha+2\beta)(y_{i1} - y_{i2}) \\
&= \cos(\alpha+2\beta)\Delta x_i + \sin(\alpha+2\beta)\Delta y_i \qquad (20) \\
\Delta y'_i &\equiv y'_{i1} - y'_{i2} \\
&= \sin(\alpha+2\beta)\Delta x_i - \cos(\alpha+2\beta)\Delta y_i \qquad (21)
\end{aligned}
$$

平均は

$$
\begin{aligned}
\overline{\Delta x'} &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x'_i \\
&= \cos(\alpha+2\beta)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i + \sin(\alpha+2\beta)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i \\
&= \cos(\alpha+2\beta)\overline{\Delta x} + \sin(\alpha+2\beta)\overline{\Delta y} \qquad (22) \\
\overline{\Delta y'} &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta y'_i \\
&= \sin(\alpha+2\beta)\overline{\Delta x} - \cos(\alpha+2\beta)\overline{\Delta y} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

分散は

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\Delta x'}^2 &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i' - \overline{\Delta x'})^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta {x_i'}^2 - \overline{\Delta x'}^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\cos(\alpha+2\beta)\Delta x_i + \sin(\alpha+2\beta)\Delta y_i\right\}^2 - \left\{\cos(\alpha+2\beta)\overline{\Delta x} + \sin(\alpha+2\beta)\overline{\Delta y}\right\}^2 \\
&= \cos^2(\alpha+2\beta)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta {x_i}^2 - \overline{\Delta x}^2\right) + \sin^2(\alpha+2\beta)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta {y_i}^2 - \overline{\Delta y}^2\right) \\
&\quad +2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\Delta y_i - \overline{\Delta x\Delta y}\right) \\
&= \cos^2(\alpha+2\beta)\sigma_{\Delta x}^2 + \sin^2(\alpha+2\beta)\sigma_{\Delta y}^2 + \sin\left\{2(\alpha+2\beta)\right\}\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (24) \\
\sigma_{\Delta y'}^2 &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta y_i' - \overline{\Delta y'})^2 \\
&= \sin^2(\alpha+2\beta)\sigma_{\Delta x}^2 + \cos^2(\alpha+2\beta)\sigma_{\Delta y}^2 - \sin\left\{2(\alpha+2\beta)\right\}\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (25)
\end{aligned}
$$

と求まる。

よって検出器座標 (x, y) で計算した分散 $\sigma_{\Delta x}^2, \sigma_{\Delta y}^2$ と共分散 $\sigma_{\Delta x\Delta y}$ が分かっていればシーイングの計算に必要な (longitudinal, transverse) 座標の分散 $\sigma_l^2(=\sigma_{\Delta x'}^2), \sigma_t^2(=\sigma_{\Delta y'}^2)$ を計算出来ることになる。しかし一般に望遠鏡と観測装置の取り付け誤差 (角度)α と天頂ミラーと検出器の取り付け誤差 (角度)β は測定困難である。

ところでそれぞれの誤差が微小だと仮定すると以下のように近似することができる。

$$
\sigma_{\Delta x'}^2 \sim \sigma_{\Delta x}^2 + 2(\alpha+2\beta)\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (26)
$$

$$
\sigma_{\Delta y'}^2 \sim \sigma_{\Delta y}^2 - 2(\alpha+2\beta)\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (27)
$$

よって検出器座標 (x, y) で計算した分散 $\sigma_{\Delta x}^2, \sigma_{\Delta y}^2$ には $2(\alpha+2\beta)\sigma_{\Delta x\Delta y}$ 程度の誤差が含まれていることになる。検出器・プリズムをそれぞれ 3 度程度の誤差で取り付けたと仮定しても $0.3\sigma_{\Delta x\Delta y}$ 程度の誤差が見込まれることになる。これを考慮に入れた解析・考察が必要と考える。

ここまでの結果から、取り付け精度 α, β が同程度だとすると天頂ミラー有りの場合と無しの場合では (longitudinal, transverse) 座標での分散 σ_l^2, σ_t^2 に含まれる誤差が 3 倍違う事になる。可能な限り天頂ミラーは用いるべきではないことがここから示される。

ちなみに共分散も計算すると

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Delta x'\Delta y'} &\equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x'_i - \overline{\Delta x'})(\Delta y'_i - \overline{\Delta y'}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x'_i \Delta y'_i - \overline{\Delta x'\Delta y'} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{\cos(\alpha+2\beta)\Delta x_i + \sin(\alpha+2\beta)\Delta y_i\}\{\sin(\alpha+2\beta)\Delta x_i - \cos(\alpha+2\beta)\Delta y_i\} \\
&\quad - \left\{\cos(\alpha+2\beta)\overline{\Delta x} + \sin(\alpha+2\beta)\overline{\Delta y}\right\}\left\{\sin(\alpha+2\beta)\overline{\Delta x} - \cos(\alpha+2\beta)\overline{\Delta y}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sin\{2(\alpha+2\beta)\}\left[\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{\Delta x_i}^2 - \overline{\Delta x}^2\right\} - \left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{\Delta y_i}^2 - \overline{\Delta y}^2\right\}\right] \\
&\quad - \cos\{2(\alpha+2\beta)\}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i \Delta y_i - \overline{\Delta x \Delta y}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sin\{2(\alpha+2\beta)\}(\sigma^2_{\Delta x} - \sigma^2_{\Delta y}) - \cos\{2(\alpha+2\beta)\}\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (28)
\end{aligned}$$

となる。

なお分散・共分散の 3 項目 (いずれも共分散を含む項) の正負が前節と逆となるのは直感的には天頂ミラーの使用によって y 座標が逆となり、その結果 $\sigma_{\Delta x\Delta y}$ の符号も逆になることに起因する。

6 Seeing への変換

longitudinal 方向の分散 σ_l^2 と transverse 方向の分散 σ_t^2 からシーイング θ_l、θ_t へ変換する方法は M. Sarazin & F. Roddier, “The ESO differential image motion monitor”, A&A, 227, 294 (1990) より以下の式で表される。

$$\theta_l = 0.98 \times 2^{-3/5}\lambda^{-1/5}\left\{\sigma_l^2\cos(z)/\left(0.179D^{-1/3} - 0.0968d^{-1/3}\right)\right\}^{3/5}$$
$$\theta_t = 0.98 \times 2^{-3/5}\lambda^{-1/5}\left\{\sigma_l^2\cos(z)/\left(0.179D^{-1/3} - 0.145d^{-1/3}\right)\right\}^{3/5}$$

但し λ は観測に用いた光の波長、z は天頂角、D は開口直径、d は 2 つの開口間距離を意味する。よって σ_l^2 と σ_t^2 以外は観測時には定数となるのでこれらをまとめて

$$\theta_l = \left(C_l\sigma_l^2\right)^{3/5} \qquad (29)$$
$$\theta_t = \left(C_t\sigma_t^2\right)^{3/5} \qquad (30)$$

と書ける。比例定数の C_l、C_t は以下で表される。

$$C_l = 0.483445\lambda^{-1/3}\cos(z)/\left(0.179D^{-1/3} - 0.0968d^{-1/3}\right) \qquad (31)$$
$$C_t = 0.483445\lambda^{-1/3}\cos(z)/\left(0.179D^{-1/3} - 0.145d^{-1/3}\right) \qquad (32)$$

これを天頂ミラー無しの場合の近似式 (17)、(18) に代入すると

$$\theta_l^{5/3} \sim \theta_x^{5/3} - C_l \cdot 2\alpha\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (33)$$
$$\theta_t^{5/3} \sim \theta_y^{5/3} + C_t \cdot 2\alpha\sigma_{\Delta x\Delta y} \qquad (34)$$

但し θ_x は検出器 x 座標を longitudinal 方向と見なして計算したシーイング値、θ_y は検出器 y 座標を transverse 方向と見なして計算したシーイング値を意味する。また天頂ミラー有りの場合の近似式 (26)、(27) に代入すると

$$\theta_l^{5/3} \sim \theta_x^{5/3} + C_l \cdot 2(\alpha + 2\beta)\sigma_{\Delta x \Delta y} \tag{35}$$

$$\theta_t^{5/3} \sim \theta_y^{5/3} - C_t \cdot 2(\alpha + 2\beta)\sigma_{\Delta x \Delta y} \tag{36}$$

となる。この結果からシーイングを計算する際には分散 $\sigma^2_{\Delta x}$、$\sigma^2_{\Delta y}$ だけでなく共分散 $\sigma_{\Delta x \Delta y}$ も求めておかないと正しく longitudinal 方向、transverse 方向のシーイングを求める事が出来ない事がわかる。

付録 A　2 星を結んだ直線を longitudinal 方向と見なした場合

longitudinal 方向、transverse 方向の定義は図 2 で示したように 2 つの開口の物理的な位置関係で決まる。しかしながら DIMM のソフトウェアの都合から 2 星を結んだ直線を longitudinal 方向、それと垂直な方向を transverse 方向として計算する DIMM が存在する (例えば東大 DIMM)。この場合ウェッジプリズムの頂角の方向の任意性によって検出器上に写る天体の位置は任意であるため、2 星を結んだ直線は必ずしも longitudinal 方向と一致するとは限らない。よってこの場合ウェッジプリズムの取り付け誤差が観測結果に影響を及ぼすことになる。

なおウェッジプリズムの取り付け誤差は第 3 節で示した「観測装置を望遠鏡に取り付ける際の誤差」と同じように扱うことが出来る。よってこれまでに述べてきた方法でウェッジプリズムの取り付け誤差を補正することは可能である。しかしウェッジプリズムの取り付けを正確に行う事には限界があり一般に困難である。

いずれにせよ DIMM 観測では各種装置の取り付け誤差によって必ず測定結果に誤差が混入することになる。これを補正するためには分散 $\sigma^2_{\Delta x}$、$\sigma^2_{\Delta y}$ だけでなく共分散 $\sigma_{\Delta x \Delta y}$ も求めておかないと、正しく longitudinal 方向、transverse 方向のシーイングを求める事は出来ないと言える。