

相对論

服部 誠

2024年4月17日

相対論には、その発表以来（特殊相対論 1905 年、一般相対論 1916 年）様々な都市伝説がつきまとっている。その代表例が相対論を理解しているのは世界に 3 人しかいないとアインシュタインが語ったと言われていることだ。元ネタを確認していないので本当にアインシュタインの発言か、何時どこでどういう文脈での発言だったのかは不明だが、少なくとも 1919 年にはそのような都市伝説は世界中に広まっていたようである。1919 年に英国の物理学者エディントンが皆既日食を使って太陽近傍の恒星が太陽の重力による重力レンズ効果で天球上の位置が相対論の予想通りにズレて観測される事を示した。この結果が相対論が正しいことの観測的証明として報道で大々的に取り上げられた時のインタビューで、相対論を理解しているのは世界に 3 人しかいないとのことだが後の一人は誰だろう、とエディントンがコメントした。彼らの発言は恐らくジョークとして語られたものと思われるが、私が子どもの頃は、相対論は理解困難な難しい学問と語られる時、世界で 3 人という話を良く聞かされた。

当時との大きな違いは、技術が凄まじく進歩して、相対論的效果が実際に測定可能になったことである。例えば GPS の高い位置測定精度を達成するには、重力赤方偏移の効果を補正しなければならない。重力レンズ効果は、宇宙の暗黒物質の分布を測定する最も信頼度の高いツールとして当たり前のように使われている。重力波の初検出も達成され重力波天文学の幕開けを迎えた。この検出はブラックホールの存在を確定付けた。初期宇宙の時空の量子揺らぎから生成された原始重力波の存在を観測的に捉えようと世界中の研究者が凌ぎを削っている。加速運動する観測者が熱放射を感じるウンルー効果の実験的検証や星の自転による慣性系の引きづり効果の観測的検証も具体的に検討が進んでいる。また、宇宙の進化を記述するには、相対論は書かせないツールとなっており、多くの物理学者・天文学者が相対論を使いこなしている。このように現代そしてこれからの物理学者にとって相対論は重要で必須なツールであると言って過言ではないであろう。そこで、これから物理学者あるいは天文学者を目指す受講生の皆さんが相対論に感じている壁を出来るだけ下げて、習得の手助けをすることにこの講義の目的をおいて内容を設計した。

目次

第 1 章	特殊相対論	1
1.1	特殊相対性原理・光速度不変の原理	1
1.2	時空図	1
1.3	運動する観測者の時計の遅れ	4
1.4	棒の縮み	9
1.5	ローレンツ変換	14
1.6	4元ベクトル・間隔の不変	17
1.7	ミンコフスキー計量	19
1.8	固有時間・4元速度・4元運動量	21
1.9	ドップラーシフト	25
1.10	粒子の運動方程式	27
1.11	速度・光行差・加速度の合成則	29
1.12	リンドラー時空	31
1.13	ストレス・エネルギーテンソル	35
	1.13.1 ダスト	36
	1.13.2 完全流体	37
1.14	チャンドラセカール質量限界	40
第 2 章	一般相対論	45
2.1	一般相対性原理・等価原理	45
2.2	座標基底	47
2.3	反変ベクトル	49

2.4	メトリックテンソルと等価原理	51
2.5	共変ベクトル	53
2.6	n 階のテンソル	54
2.7	ベクトルの平行移動	55
2.8	ベクトルの共変微分	60
2.9	クリストッフェル記号	62
2.10	時空の曲率	65
2.11	ビアンキの恒等式	69
2.12	ワイルテンソル	72
2.13	アインシュタイン方程式	73
2.14	重力場中の粒子の運動方程式	77
2.15	重力場中の光の伝搬：測地線方程式	83
2.16	重力赤方偏移・重力散乱	85
2.17	重力レンズ	90
2.18	測地線偏差	97
2.19	ザックス光学スカラー方程式	100
2.20	ザックス光学スカラー方程式の応用例	107
	2.20.1 自由空間	107
	2.20.2 ロバートソン・ウォーカー計量での角径距離	108
	2.20.3 重力レンズによる天体の像の変形	110
2.21	時空の摂動：スカラー・ベクター・テンサーモード分解	115
2.22	重力波	117
	2.22.1 真空中の伝搬	117
	2.22.2 四重極放射	119
2.23	重力場の正準形式	123
2.24	テンソルモードのラグランジアン	130
2.25	ゲージ変換	134
2.26	弱い重力場のアインシュタイン方程式	137
	トランスバース・トレースレスゲージ	140

第 3 章	ブラックホール	145
3.1	球対称星	145
3.1.1	シュワルツシルトの外部解	145
3.1.2	時空の特異点	151
3.1.3	事象の地平線	153
3.1.4	クルスカル・スゼッケル座標	157
3.1.5	最終安定軌道	160
3.1.6	重力赤方偏移	164
3.1.7	水星の近日点移動	165
3.2	自転する球対称星が作る時空	169
3.2.1	地球の自転による時空の歪み	169
3.2.2	慣性系の引きずり	172
3.2.3	カー・ブラックホール	175
	エルゴ領域	175
	地平面	176
	慣性系の引きずり	176
第 4 章	宇宙論	179
4.1	一様・等方宇宙	179
4.1.1	二次元球面	180
4.1.2	ロバートソン・ウォーカー計量	183
4.1.3	共動座標・固有距離	185
4.1.4	宇宙論的赤方偏移	188
4.2	フリードマン方程式	189
4.3	宇宙の物資構成：物質・輻射・ダークエネルギー・曲率	192
4.4	宇宙の半径の時間進化	196
4.5	角径距離・輝度距離・固有体積	198
4.6	粒子的地平線・事象の地平線	202
4.7	プランク時間・プランクエネルギー・プランク質量	206
4.8	インフレーションモデル	208

4.8.1	Slow roll inflation	211
4.9	インフレーションによる膨張率	213
4.10	重力場の量子化	218
4.11	膨張宇宙におけるテンソルモードの進化	221
4.12	インフレーション中の時空の量子ゆらぎによる宇宙背景重 力波の生成	222
4.13	インフレーション期の揺らぎの生成過程概要	226
4.14	スカラー曲率および密度の揺らぎのパワースペクトル . . .	227

第 1 章

特殊相対論

この講義の主たる課題は、一般相対論である。この章では、一般相対論を学ぶにあたって必要となる特殊相対論の概要を解説する。

1.1 特殊相対性原理・光速度不変の原理

加速度運動していない観測者と一緒に運動している座標系、言い換えるところの観測者が乗っている座標系を慣性系と呼ぶ。ある慣性系に静止している観測者に対して等速直線運動している観測者が乗っている座標系も慣性系である。特殊相対性原理は、全ての慣性系において物理法則は不変であるべきという原理である。言い換えると、特別な座標系は存在しないというのが物理学の基本原則の一つである、ということである。

マイケルソン・モーレーの実験結果から全ての慣性系で光速度は不変であることが示された。これは光速度不変の原理と呼ばれる相対論の基本原則の一つである。以下、光速度は c で表す。現在の測定結果は $c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{cm/s}$ であり、約 $3 \times 10^{10} \text{cm/s}$ である。

1.2 時空図

時空図を用いて特殊相対論に現れる基本的事項をまとめる。加速度ゼロの観測者を考える。この観測者が原点 O に静止する座標系 K 系を考える。

この座標系は、慣性系である。座標系 K 系の時空図を図 1.1 に示す。ここでは、空間座標次元を取り出した。縦軸が時間軸 ct 、横軸が一次元空間座標軸 x である。時空図上の 1 点 $P(ct, x)$ を事象と呼ぶ。時空図内での物体の

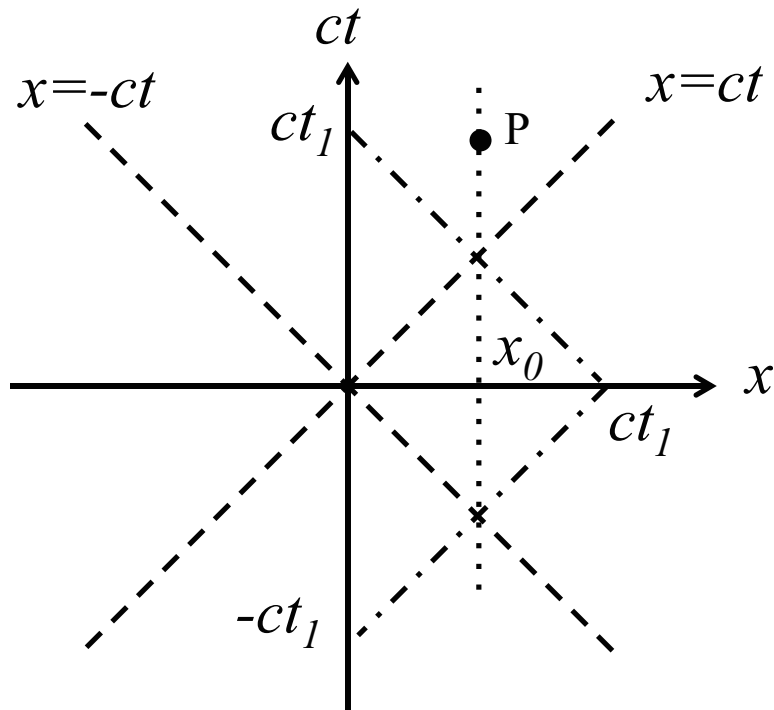


図 1.1 時空図。

運動の軌跡を世界線と呼ぶ。時間軸は、原点に静止する観測者の世界線である。図 1.1 には、 $x = x_0$ で静止する観測者の世界線を点線で示した。また $t = 0$ に原点を通過し x 軸の正負の方向に伝搬する光の世界線をそれぞれ二本の破線で示した。光の軌跡は時空図上では、傾き $\pm 45^\circ$ の直線となるが、もう一つの空間軸例えば y 軸を付け加えるとこれら二つの直線を時間軸を軸として回転して作られる円錐となる。その為、時空図上で光の軌跡が作る面を光円錐と呼ぶ。

空間座標軸 x 軸の定義を同時刻の事象の集まりという観点から捉え直し

てみる。x 軸上の事象の発生時刻は $t = 0$ である。このことを空間座標原点（以下簡単のため原点と呼ぶ）に静止する観測者が観測的に確認する以下の方法を考える。時刻 $t = 0$ に x 軸上の各点に置かれた鏡に光が反射される仮想実験を考える。時刻 $t = -t_1$ に観測者から発せられた光は、 $t = 0$ の時には距離 $x = ct_1$ 進み、ここで鏡に反射されて原点の観測者に向かって戻ってくる。再び観測者に戻る時刻は $t = t_1$ である。言い換えると光の発射から $t = 0$ までと $t = 0$ から光の再受信までの時間間隔が同じである。この実験で用いた光の世界線を一点鎖線で図 1.1 に示した。x 軸は、様々な発射時刻 $-t_1$ に対して同様の実験を行い、光が反射された事象の集合として定義される。x 軸の負の領域は、x の負の方向に進行する光を発することで定義できる。以下この座標系を K 系と呼ぶ。

K 系に対して等速度 v で x の正の方向に等速直線運動する観測者 O' を考える。この観測者は $t = 0$ の時 K 系の原点を通過するとする。 O' が乗った座標系を K' 系と呼ぶことにする。図 1.2 にこの様子を示した。ニュートン力学の世界では、これらの座標系は以下のガリレイ変換で結ばれる。

$$x' = x - vt, \quad (1.1)$$

$$t' = t. \quad (1.2)$$

この時 K 系での光の速度が $dx/dt = c$ の時、 K' 系での光の速度は $dx'/dt' = c - v$ となり、光速度不変の原理が成り立たない。つまり、光速度不変の原理が成立する為には、相対運動する二つの慣性系間を結ぶ関係式はガリレイ変換では不十分あることが分かる。

図 1.3 に時空図上での K 系と K' 系の関係を示した。 K' 系の時間軸 ct' は、K 系の時空図上の $x = vt$ の世界線である。ここで $v < c$ を仮定した。 ct 軸と ct' 軸の成す角 ϕ は、

$$\tan \phi = \frac{v}{c} = \beta, \quad (1.3)$$

で与えられる。 K' 系の空間座標軸 x' 軸を定義する。 $x = vt$ の世界線上を運動する観測者から時刻 $-t'_1$ の発せられた光が x' 軸上の鏡に反射されて時刻 t'_1 にこの観測者に再受信されるとする。この時、鏡による光の反射が起きた

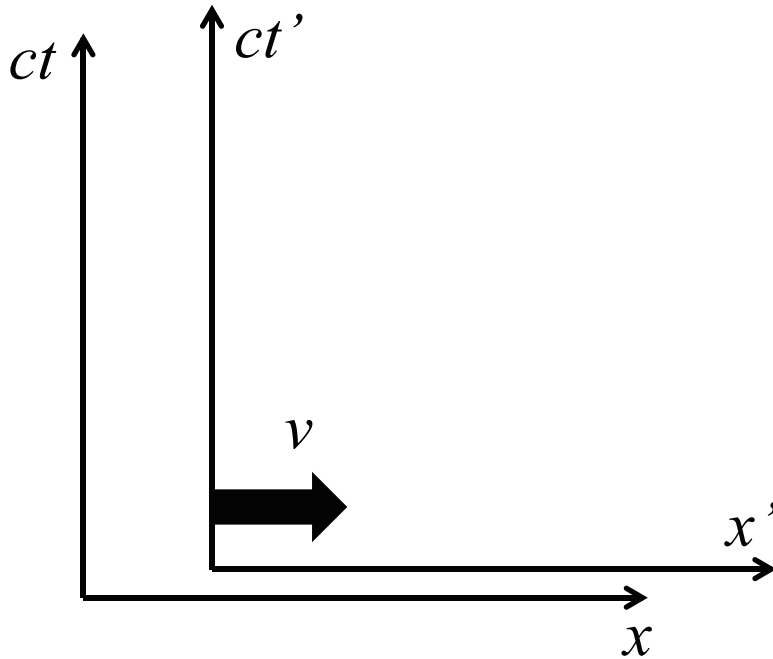


図 1.2 慣性系 K 系に対して、 x 軸正の方向に等速直線運動する K' 系。

時刻が $t' = 0$ である。様々な t'_1 に対するこのような事象の集合が x' 軸である。この様子を図 1.3 に示した。光速不変の原理から K' 系でも光の速度は c であり、 x' 軸上で光が反射する位置は、時間間隔 t'_1 の間に光が進む距離であり、 $x' = ct'_1$ である。したがって図より x' 軸と x 軸のなす角も ϕ である。

1.3 運動する観測者の時計の遅れ

相対運動する二つの慣性系間の関係式の導出準備として、ある慣性系に対して等速直線運動している慣性系の時計に遅れが生ずることを示す。図 1.4 に光を用いた時計を示す。図のように平面鏡 1 を $x-z$ 平面に反射面が平行になるように原点附近に設置し、 y 軸に沿って距離 d 離れた位置に平面鏡 1

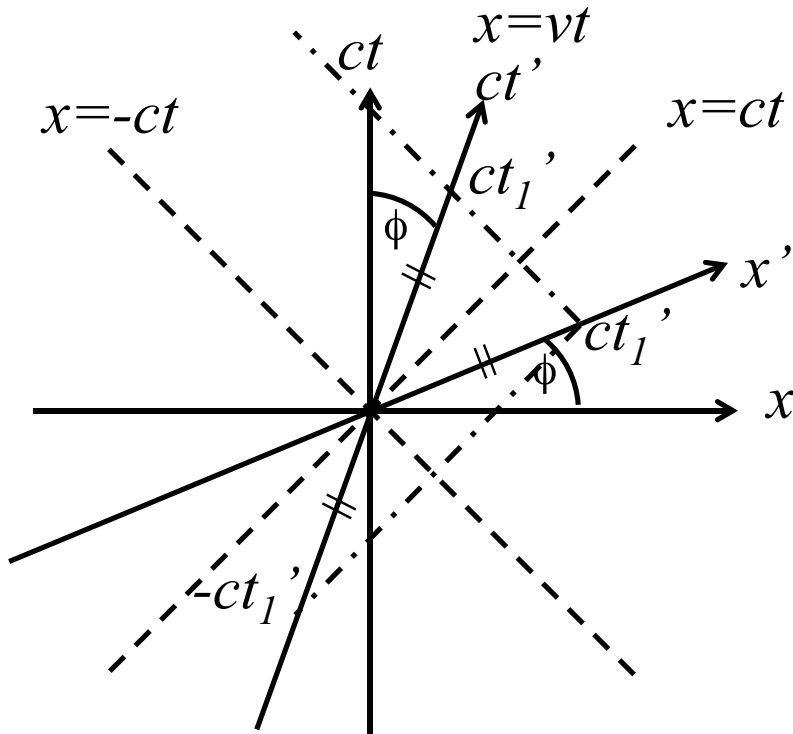


図 1.3 時空図上での K 系と K' 系の関係。

の反射面と平行になるように反射面を向けた平面鏡 2 を設置する。平面鏡 1 から y 軸に沿って平面鏡 2 に向かって光を発射し、平面鏡 2 で反射され再び平面鏡 1 に戻るまでの時間間隔で時間の進みを測定する装置である。これを光時計と呼ぶ事にする。この光時計によって刻まれるラップタイムは

$$\Delta t_0 = 2t_0 = \frac{2d}{c}, \quad (1.4)$$

である。即ち、この座標系に静止している観測者は、このラップタイムを時間測定、つまり時計の基準として用いて経過時間を測定するのである。

図 1.4 に示したように K 系に対して x 軸正の方向に速度 v で等速直線運動する慣性系 K' 系にも同様の光時計を設置する。K' 系に設置された光時

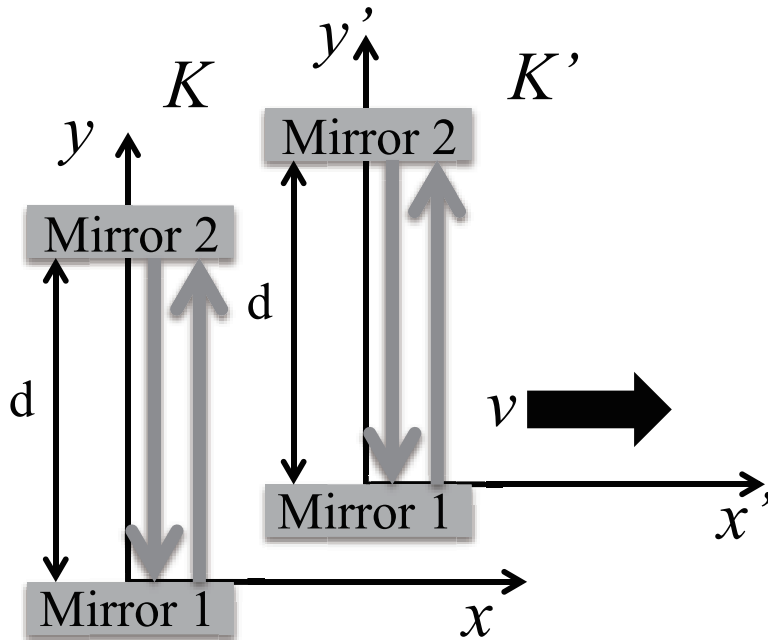


図 1.4 光時計。

計のラップタイムを K' 系で測定した結果 $2t'_1$ は、光速不変の原理より式 (1.4) と同じで

$$\Delta t' = 2t'_1 = \frac{2d}{c}, \quad (1.5)$$

ある。では、この時計のラップタイムを K 系から測定するとどうなるであろうか。図 1.5 に K 系から観測した K' 系の光時計の様子を示した。平面鏡 1 から 2 までの光の到達時間を、 K 系で測定した結果が t_1 であったとする。光が平面鏡 1 から発せられてから平面鏡 2 に届くまでに鏡は x 軸正の方向に vt_1 だけ進む。したがって、 K 系から観測すると光は、平面鏡 1 から発せられてから平面鏡 2 に到達するまでの間に、距離 $\sqrt{d^2 + (vt_1)^2}$ 進んだことになる。光速不変の原理から K 系での光の速度も c であるから t_1 は以下の式で与えられる。

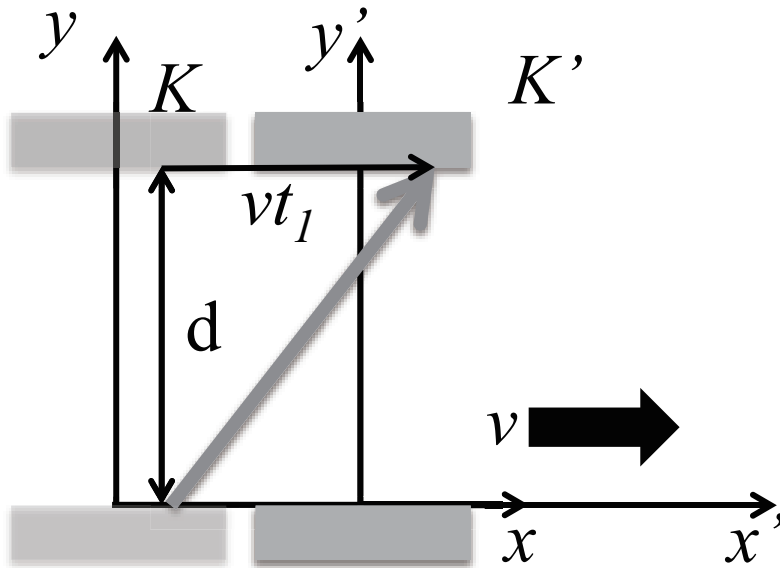


図 1.5 時計の遅れ。

$$t_1 = \frac{1}{c} \sqrt{d^2 + (vt_1)^2}. \quad (1.6)$$

この式に $d = ct'_1$ を代入して解くことで K' 系の光時計の時間の進みを K 系で測定した結果と K' 系で測定した結果の関係式を得る。

$$t_1 = \gamma t'_1. \quad (1.7)$$

ここで

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.8)$$

はローレンツ因子と呼ばれる量であり

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (1.9)$$

は二つの系の相対速度と光速の比である。 $v < c$ である限り $\gamma > 1$ であるから、式 (1.7) から、 $t'_1 < t_1$ である。即ち、運動している観測者の時計は静止

している観測者の時間の進みより遅れている。

上記の観測の様子を時空図を用いて解説する。図 1.6 に K' 系に設置された光時計による時間の測定を K' 系と K 系から観測する様子を時空図で示した。 K' 系は x 軸正の向きに速度 v で等速直線運動している。 K' 系に設置された光時計から、 $t' = 0$ の時 K' 系の原点から光を発し、再び原点に戻って来た時間が t'_1 であったとする。 K' 系の ct' 軸上に黒丸で示した点は、 K' 系の原点にいる観測者に光が戻ってきた事象を示しており、 K' 系での座標は $(ct'_1, 0)$ である。この事象の K 系での座標は、 (ct_1, x_1) である。式 (1.7) から

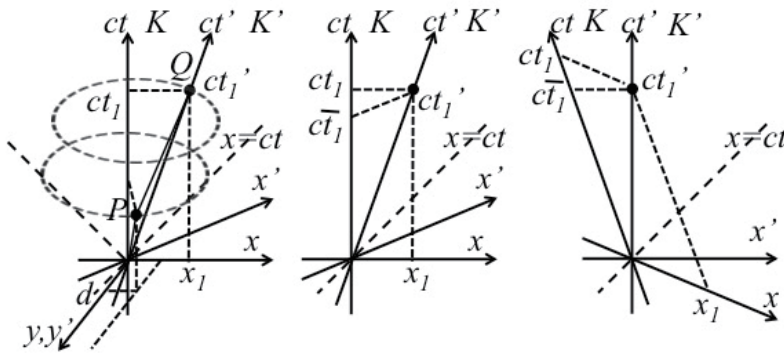


図 1.6 時空図上を用いた時計の遅れの解説。左図：原点を頂点とする光円錐上を直進し事象 P で反射された光は、点 P を頂点とする光円錐上を直進し事象 Q で再び K' 系原点の観測者に戻る。

$$t_1 = \gamma t'_1, \quad (1.10)$$

を得る。次に中央の図に示したように K 系上で事象 (ct_1, x_1) を通り、 x' 軸に平行な直線が K 系の時間軸と交わる点を $(ct_1, 0)$ とする。この事象点の物理的理解を助けるため右の図を描いた。この図は K' 系に乗った観測者から K 系を観測すると x 軸負の方向に速度 v で運動して見える事象を表している。時間軸は $x' = -vt'$ の直線である。ここで \bar{t}_1 が、 K 系に設置された光時計から $t = 0$ の時に原点から光を発し、再び K 系原点の観測者に光が戻って

くるまでの経過時間となるような光時計を K 系原点に設置したとする。この時 t'_1 は、この光時計の経過時間を静止している K' 系から観測した結果であり、運動している時計の遅れの関係から

$$t'_1 = \gamma \bar{t}_1, \quad (1.11)$$

で与えられる。

1.4 棒の縮み

図 1.7 に示したような x 軸に平行に置かれた棒の長さ d を光を用いて測定する実験を考える。棒の片方の端が、空間座標原点に一致するように設置する。棒の反対側の端には鏡が設置されている。原点にいる観測者が、 x 正の方向に光を発する。鏡で反射され再び観測者に戻ってくるまでの経過時間を $2t_0$ とすると

$$2t_0 = 2\frac{d}{c}, \quad (1.12)$$

となり、棒の長さは、

$$d = ct_0, \quad (1.13)$$

により測定される。

K 系に対して x 軸正の方向に速度 v で等速直線運動している座標系 K' 系に固定された棒の長さを K 系の観測者が測定した結果を考察する。図 1.8 に測定の様子を示した。図 1.9 には、時空図上でのこの測定の様子を示した。棒の左端の世界線は、 ct' 軸であり、右端の世界線はこの軸に平行な一点鎖線で表される軌跡である。K 系で測定した棒の長さを \bar{d} とする。棒の左端が K 系の原点にいる観測者を通過した瞬間に、K' 系の観測者が光を x' 軸正の方向に発射する。棒の反対側の端に固定した鏡に反射されて光が再びこの観測者に戻るまでの経過時間を $2t'$ とすると、 t' は式 (1.13) により

$$t' = \frac{\bar{d}}{c}, \quad (1.14)$$

で与えられる。K 系の観測者から観測した鏡に光が当たるまでの経過時間

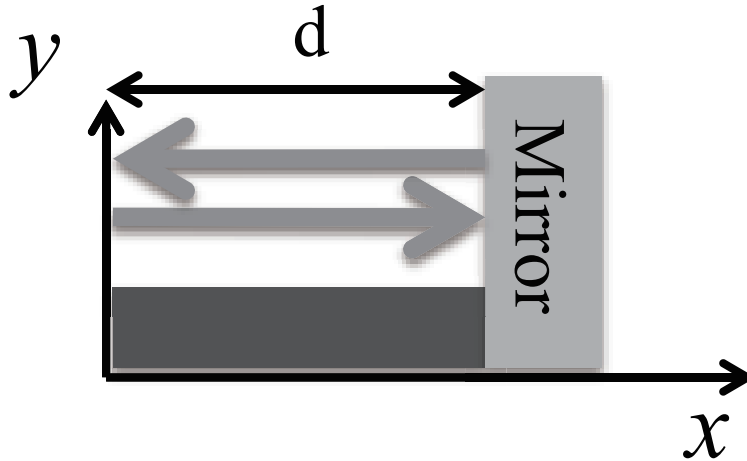


図 1.7 棒の長さの測定。

を t_1 、鏡に反射されてから K' 系の原点で K' 系に乗った観測者に再び届くまでの経過時間を t_2 とする。図 1.9 に示した通り、時刻 t_1 は事象 P を K 系で測定した時刻である。光が鏡に当たるまでに棒は距離 vt_1 移動するため、 K 系から観測すると鏡に当たるまでに光が走る距離は $\bar{d} + vt_1$ である。したがって、以下の関係式が成り立つ。

$$t_1 = \frac{1}{c}(\bar{d} + vt_1). \quad (1.15)$$

次に光が鏡で反射されてから K' 系原点の観測者に戻るまでに K' 系原点の観測者は K 系から見て距離 vt_2 鏡に近づくため、 K 系で観測すると鏡にあたってから K' 系原点の観測者に届くまでに光が走る距離は $\bar{d} - vt_2$ である。したがって、以下の関係式が成り立つ。

$$t_2 = \frac{1}{c}(\bar{d} - vt_2). \quad (1.16)$$

式 (1.15), (1.16) より

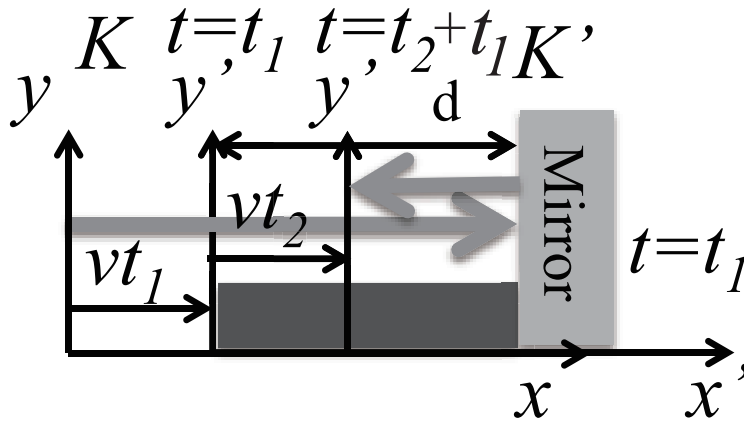


図 1.8 棒の縮み。

$$t_1 = \frac{\bar{d}}{c} \frac{1}{1-\beta}, \quad (1.17)$$

$$t_2 = \frac{\bar{d}}{c} \frac{1}{1+\beta}. \quad (1.18)$$

以上の結果から K 系に静止した観測者は、K' 系に静止した光時計を光が往復する時間を

$$2t = t_1 + t_2 = \frac{2\bar{d}}{c} \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2 \frac{2\bar{d}}{c}. \quad (1.19)$$

と観測する。 t と t' は図 1.6 中の t_1 と t'_1 の関係と同じであり、式 (1.7) より

$$t = \gamma t', \quad (1.20)$$

となる。この式と式 (1.19) および (1.14) より

$$\bar{d} = \frac{d}{\gamma}, \quad (1.21)$$

を得る。 $\gamma > 1$ であるから常に $\bar{d} < d$ である。即ち運動している棒の長さを静止した観測者が観測すると短く見えることになる。これがローレンツ収縮である。

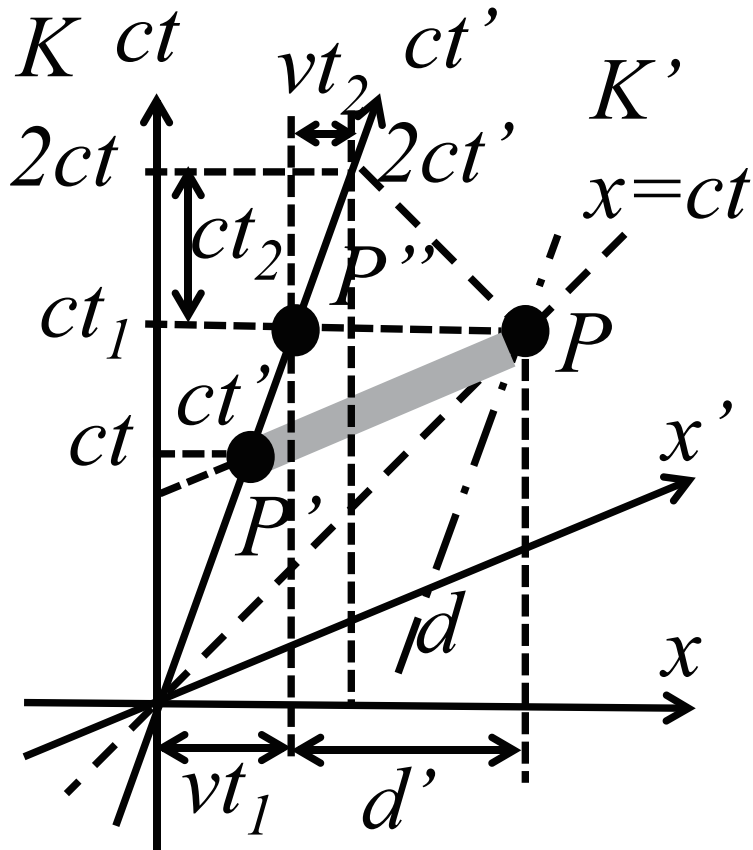


図 1.9 棒の長さの測定の時空図を用いた測定。

上記の棒の長さのローレンツ収縮が生じた様子を時空図を用いてもう少し詳しく解説する。図 1.10 の左の図では、 x 軸正の向きに速度 v で運動する座標系 K' 系の x' 軸に平行に設置された棒の運動を K 系で観測した様子が示されている。式 (1.7) から

$$t_1 = \gamma' l_1, \quad (1.22)$$

棒の左端の世界線は ct' 軸であり、右端の世界線を一点鎖線で示している。 K' 系で測定した棒の長さは l_1 である。 K 系でこの棒の長さを測定するこ

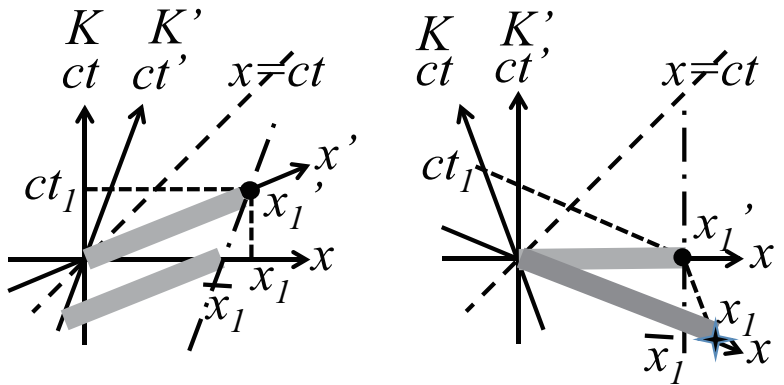


図 1.10 時空図を用いた棒の長さ測定の説明。

とを考える。棒は運動しているので棒の端から端までの長さを同時刻に測定しないと正しく測定出来ない。例えば $t = 0$ の時に K 系で棒の長さ測定を行なったとする。この時棒の左端の位置は原点に一致している。 $t = 0$ と同時刻の点の集合は x 軸である。即ち K 系の観測者は、 $t = 0$ の時棒の右端は x 軸上の $x = \bar{x}_1$ にあると観測する。結果 K 系で測定した棒の長さは \bar{x}_1 となる。ローレンツ収縮の関係式 (1.21) より

$$\bar{x}_1 = \frac{x'_1}{\gamma}, \quad (1.23)$$

で二つの座標系での長さの測定結果が結ばれる。次に $t' = 0$ の時の棒の右端の K' 系での座標点 $(0, x'_1)$ を K 系で観測したときの座標を求める。そこで K' 系から K 系を観測すると x 軸負の方向に速度 v で運動して見える事に着目する。図 1.10 の右の図に K' 系を静止系として扱った場合の時空図を示した。左の図で長さ測定に用いた棒を x' 軸上の灰色の棒で示した。式 (1.23) の結果を用いて、 x_1 を導出するために右の図に濃い灰色の棒で示したように x 軸上に設置された長さ x_1 の棒の長さを K' 系で測定する問題を考える。式 (1.23) で示した状況と K 系と K' 系の関係が入れ替わっただけであり、式 (1.23) の結果は速度の正負に依存しないため以下の関係式を得る。

$$x'_1 = \frac{x_1}{\gamma}. \quad (1.24)$$

1.5 ローレンツ変換

慣性系 K 系に対して x 軸正の方向に速度 v で運動する慣性系 K' 系を考え、これら二つの慣性系間の座標変換の関係式を導出する。図 1.11 に示した事象点 P の座標が K 系では (ct, x) であり、 K' 系では (ct', x') であったとする。

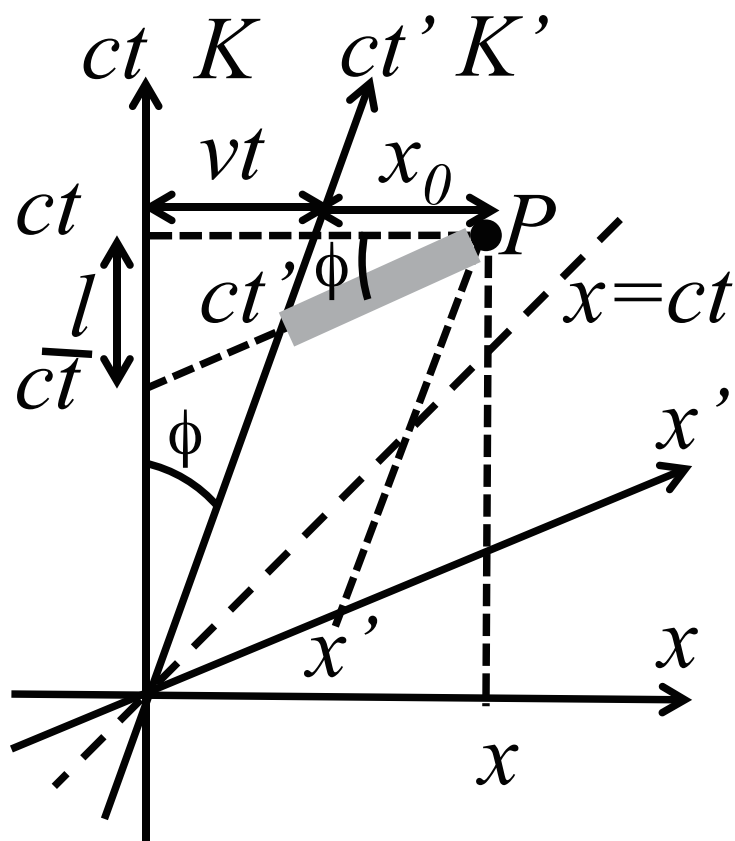


図 1.11 ローレンツ変換。

まず図の灰色の棒で示したように $t' = t'$ の時に x' 軸に平行に設置され K' 系と共に運動する長さ x' の棒の長さを測定する問題を考える。節 1.4 の結果、式 (1.23) より、 K 系で測定した棒の長さ x_0 は

$$x_0 = \frac{x'}{\gamma}, \quad (1.25)$$

と求まる。また K 系で棒の長さ測定が行なわれる時刻 t までの間に K' 系の原点にいる観測者は、 K 系の原点にいる観測者から距離 vt 移動する。したがって、

$$x = vt + x_0 = vt + \frac{x'}{\gamma}, \quad (1.26)$$

を得る。これより空間座標の変換則

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad (1.27)$$

を得る。

次に時間座標の変換則を導出する。時計の遅れの関係式 (1.11) より

$$c\bar{t} = \frac{ct'}{\gamma}, \quad (1.28)$$

である。 K 系の時間軸上の二点 $(ct, 0)$ と $(c\bar{t}, 0)$ の間隔 l は図より

$$l = x \tan \phi, \quad (1.29)$$

と書ける。この式に式 (1.3) を代入すると

$$l = \beta x, \quad (1.30)$$

を得る。図より $ct = c\bar{t} + l$ であり、式 (1.28) を代入して整理すると以下の時間座標の変換則を得る。

$$ct' = \gamma(ct - \beta x). \quad (1.31)$$

式 (1.31) と (1.27) がローレンツ変換と呼ばれる相対運動する二つの慣性系間の座標変換を表す関係式である。

K' 系の運動方向に垂直な方向である y, z 座標は、系の相対運動によって影響を受けない。したがって、空間 3 次元の場合の二つの慣性系間の座標

変換をまとめると以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(-\beta ct + x), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (1.32)$$

一般のローレンツ変換を $\Lambda^{\mu'}_{\nu}(\vec{\beta})$ を成分に持つ二階のテンソル $\Lambda(\vec{\beta})$ を用いて表す事にする。式 (1.32) で表された例では、

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

である。これを用いると 4 元位置ベクトルのローレンツ変換は以下のように表される。

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu}(\vec{\beta})x^{\nu}. \quad (1.34)$$

勿論アインシュタインの規約により右辺では $\nu = 0, 1, 2, 3$ の和を取る。行列 (1.33) の逆行列を求めると以下ようになる。

$$\Lambda^{-1}(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

これが逆行列であることは、行列 (1.33) と (1.35) を掛け合わせてみれば確認できる。逆行列 (1.35) は、 $\Lambda(-\vec{\beta})$ 即ち K' 系の K 系に対する速度と逆方向に同じ速度で運動する座標系へのローレンツ変換即ち K' 系から K 系へのローレンツ変換を表している。これは物理的に当然の結果である。

以下 K 系から K' 系へのローレンツ変換の成分を $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ と書き、その逆変換である K' 系から K 系のローレンツ変換を $\Lambda^{\nu}_{\mu'}$ と書く。

1.6 4元ベクトル・間隔の不変

座標系の取り方によらず方向と大きさを持った量をベクトルと呼ぶ。相対論では座標変換にローレンツ変換も含めるためベクトルは時空図上で定義され4つの成分を持つ。これを4元ベクトルと呼ぶ。例えば、図 1.11 で原点を始点として事象 P を終点とする位置ベクトル \vec{x} は、原点から P へ向かう量であることは座標系の取り方によらないため、4元ベクトルである。ある4元ベクトルの K 系での成分が $\vec{A} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ で与えられたとき、K' 系でこの量を観測したときの成分 $\vec{A}' = (A^{0'}, A^{1'}, A^{2'}, A^{3'})$ は以下の変換則により K 系の成分と結ばれる。

$$\begin{aligned} A^{0'} &= \gamma A^0 - \beta \gamma A^1, \\ A^{1'} &= -\beta \gamma A^0 + \gamma A^1, \\ A^{2'} &= A^2, \\ A^{3'} &= A^3. \end{aligned} \quad (1.36)$$

一般のローレンツ変換に対する4元ベクトルの変換則は以下のように書ける。

$$A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^{\nu}. \quad (1.37)$$

4元ベクトルは1階のテンソルとも呼ばれる。階数が一つ上がった2階のテンソルは、二つの4元ベクトルを使って以下のように作れる。

$$T^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu}. \quad (1.38)$$

4元ベクトルの変換則から二階のテンソルの変換則は以下のようになることは自明である。

$$T^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (1.39)$$

ローレンツ変換に対して成分の変換則が式 (1.37) にしたがうものを1階のテンソル、式 (1.39) にしたがうものを2階のテンソルの定義であると捉える事もできる。成分が、この変換則にしたがえば、これら成分から構成され

る物理量は座標系の取り方によらず不変となる。

ベクトルの大きさ、言い換えると長さは座標系の取り方によらず不変で無ければならない。ローレンツ変換に対して長さが不変になるようにするには、ベクトルの長さの定義をどのようにしたらよいか考察する。式 (1.36) を用いて $(A^0)^2$ と $(A^1)^2$ を計算すると以下の結果を得る。

$$(A^0)^2 = \gamma^2(A^0)^2 - 2\beta\gamma^2 A^0 A^1 + \beta^2 \gamma^2 (A^1)^2, \quad (1.40)$$

$$(A^1)^2 = \beta^2 \gamma^2 (A^0)^2 - 2\beta\gamma^2 A^0 A^1 + \gamma^2 (A^1)^2, \quad (1.41)$$

これら二つの式を足し合わせても

$$(A^0)^2 + (A^1)^2 \neq (A^0)^2 + (A^1)^2$$

であり不変量が得られない。式 (1.41) から式 (1.40) を引くと

$$\begin{aligned} -(A^0)^2 + (A^1)^2 &= -(1-\beta^2)\gamma^2(A^0)^2 + (1-\beta^2)\gamma^2(A^1)^2, \\ &= -(A^0)^2 + (A^1)^2, \end{aligned}$$

となり、ローレンツ変換の前後で不変な量が得られる。そこで4元ベクトルの大きさを次のように定義する。

$$|\vec{A}|^2 = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2. \quad (1.42)$$

4元ベクトルの大きさは任意のローレンツ変換および空間座標回転に対して不変な量である。このような量をスカラー量と呼ぶ。以下では4元ベクトルの成分を

$$A^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.43)$$

と書き、二つのベクトルの内積を以下のように書く。

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = \sum_{\mu=0}^3 B_\mu A^\mu = B_\mu A^\mu. \quad (1.44)$$

ここで座標の添字が下についている（下付きの添字）ベクトルの成分は、時間成分だけ上付きの成分と符号を変えて後は上付きのベクトルの成分と同じにとることにした。例えば $B_\mu = (-B^0, B^1, B^2, B^3)$ である。最後の等号では、上付きと下付きのギリシャ文字が同じであるとき、0 から 3 まで全てに

ついでに和を取りなさい、というアインシュタインの規約と呼ばれるルールを用いている。和の記号をイチイチ書く手間を省く為の方法である。以下ではこの操作を縮約を取ると呼ぶ。

4元ベクトルの特別な例として時空内の隣接した二点間を結ぶ微小線素ベクトル $d\vec{x} = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$ を考える。この微小線素ベクトルの大きさを ds と定義すると

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (1.45)$$

で与えられる。これを二つの事象間の間隔と呼ぶ。位置ベクトルが4元ベクトルであることから、微小線素ベクトルもベクトルであり、ローレンツ変換(1.36)により成分が変換される。即ち、二つの事象間の間隔 ds は、ローレンツ変換に対して不変である。

光が微小時間間隔 dt の間に時空図上で移動する二点間を結ぶ微小間隔は、光速不変の原理からどの慣性系でも $dx = cdt$ であり、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt^2 + c^2 dt^2 = 0, \quad (1.46)$$

のようにゼロである。ここで簡単のため光の進行方向を x 軸にとった。 ds^2 がスカラー量であることから、いかなる慣性系においても光が辿る経路に沿った微小線素の大きさはゼロとなる。即ち光のパスに沿ってスカラー量 ds^2 が0であるということが光速不変の原理と直接関係している。

1.7 ミンコフスキー計量

下付きのベクトル成分を節 1.6 で導入した。ここで $\eta_{\mu\nu}$ を成分とし、以下のように定義される二階のテンソル η を導入する。

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

つまり $\eta_{00} = -1, \eta_{ii} = 1, \eta_{\alpha\beta} = 0$ 但し $\alpha \neq \beta$ である。この η をミンコフスキー計量と呼ぶ。これを用いると下付きのベクトル成分と上付きのベクトル成分が以下のように結ばれる。

$$B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu. \quad (1.48)$$

またベクトルの内積は、以下のように書き換えられる。

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = \eta_{\mu\nu} B^\nu A^\mu. \quad (1.49)$$

ベクトルの内積が式 (1.47) で定義されるミンコフスキー計量を用いて式 (1.49) のように書ける時空をミンコフスキー時空と呼ぶ。

ミンコフスキー計量がローレンツ変換によって不変であることを示す。ローレンツ変換の逆変換は以下のように書ける。

$$A^\mu = \Lambda^\mu_\nu A'^\nu, \quad (1.50)$$

内積 (??) のから

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} B^\mu A^\nu &= \vec{B}^t \eta \vec{A} = \vec{B}^t \Lambda^{-1t} \eta \Lambda^{-1} \vec{A}' \\ &= \vec{B}^t \eta' \vec{A}'. \end{aligned} \quad (1.51)$$

ローレンツ変換を表す変換行列 Λ の具体的な形をこの式に代入することで、 K' 系のメトリックがローレンツ変換によって不変であることを確認できる。

$$\begin{aligned} \eta' &= \Lambda^{-1t} \eta \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \eta. \end{aligned} \quad (1.52)$$

この結果は、ミンコフスキー計量が、慣性系の取り方によらず常に同じ成分を持つ事を示す。

1.8 固有時間・4元速度・4元運動量

節 1.3 で示したように、時計の進み具合は観測者によって異なる。観測者に依存しない時間の刻みを以下のように定義する。ある粒子の運動を K 系で観測したとき微小時間間隔 dt の間に (dx^1, dx^2, dx^3) 移動したとする。この時 $ds^2 = -(cdt)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ がスカラー量であることを利用して、固有時間 $d\tau$ を以下のように定義する。

$$d\tau^2 = \frac{-ds^2}{c^2}. \quad (1.53)$$

ここで粒子の速度ベクトルが $\vec{v} = (dx^1/dt, dx^2/dt, dx^3/dt)$ である事を用いると固有時間はローレンツ因子を用いて以下のように書ける。

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}. \quad (1.54)$$

粒子と同じ速度で運動する慣性系から観測すると $v=0$ 即ち $\gamma=1$ であるから $d\tau = dt$ である。即ち固有時間は、粒子に乗った座標系の時計を用いて測定した時間である。時空図上で $d\tau^2 > 0$ の場合を time like、 $d\tau^2 < 0$ の場合を space like と呼ぶ。一般の4元ベクトルに対しても $A_\mu A^\mu < 0$ の場合を time like vector、 $A_\mu A^\mu > 0$ の場合を space like vector と呼ぶ。粒子の固有時間は実数でなければならないことから、粒子にのった座標系が定義出来る為には $d\tau^2 > 0$ でなければならない。このことから粒子に乗った座標系が定義できる為には、粒子の速度は光速より遅くなければならないことになる。 $d\tau = 0$ の線分をヌルと呼ぶ。光は光速不変の原理から $v=c$ であり、 $1/\gamma=0$ である。したがって、光の固有時間は常に0である。

微小時間間隔 dt の間の移動量を表す (dx^1, dx^2, dx^3) をまとめて作った、微小線素ベクトル $d\vec{x} = (cdt, dx^1, dx^2, dx^3)$ は4元ベクトルである。4元ベクトルにスカラー量を掛けたり割ったりした量も4元ベクトルである。加速度運動している粒子の場合、粒子に乗って運動する座標系は慣性系ではない。固有時間を粒子に乗った観測者の時計ではかった時間と定義すると、その座標系は慣性系ではないためここまでの定義を修正する必要性が生じる。

そこで各瞬間瞬間の粒子の速度と同じ速度で運動する座標系、瞬間的共動慣性系 (momentarily comoving reference frame (MCRF)) を導入する。MCRF は、慣性系に対して等速直線運動する座標系であるから慣性系である。粒子が加速度運動している場合は、MCRF が粒子と共動であるのは、粒子の速度と MCRF の速度が一致した瞬間だけである。MCRF は慣性系なので、この節で定義した固有時間をその瞬間に粒子に乗った観測者の時計ではかった時間経過と解釈する事ができる。\$d\tau > 0\$ の粒子の4元速度を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (u^0, u^1, u^2, u^3) = \left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right), \\ &= (\gamma c, \gamma v^1, \gamma v^2, \gamma v^3).\end{aligned}\tag{1.55}$$

4元速度の大きさは以下のようになり

$$u_\mu u^\mu = -\frac{c^2}{d\tau^2} dt^2 (1 - \beta^2) = -c^2,\tag{1.56}$$

確かにスカラー量であることが分かる。MCRF の物理量を \$\tilde{}\$ を用いて表すと \$d\vec{\tilde{x}} = (c\tilde{t}, 0, 0, 0)\$ であり

$$\tilde{u}^\mu = (c, 0, 0, 0),\tag{1.57}$$

となる。即ち4元ベクトルは MCRF の時間軸と平行であり、図 1.12 のように時空図上の粒子の世界線の接線ベクトルである。

4元速度を用いて4元運動量を以下のように定義する。粒子の質量 \$m\$ は、座標系によらないスカラー量である。したがって、4元速度に質量を掛けた量も4元ベクトルであり、これを4元運動量とよび

$$\vec{p} = m\vec{u} = (\gamma mc, \gamma mv^1, \gamma mv^2, \gamma mv^3),\tag{1.58}$$

で定義される。非相対論的極限、即ち \$\beta \ll 1\$ の極限では、4元運動量の空間成分は \$m\vec{v}\$ となり、ニュートン力学の運動量と一致する。4元運動量の時間成分は

$$p^0 \sim mc \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 \right) = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \right),\tag{1.59}$$

となる。最後の等号の括弧内の物理量は静止質量エネルギーに運動エネルギー

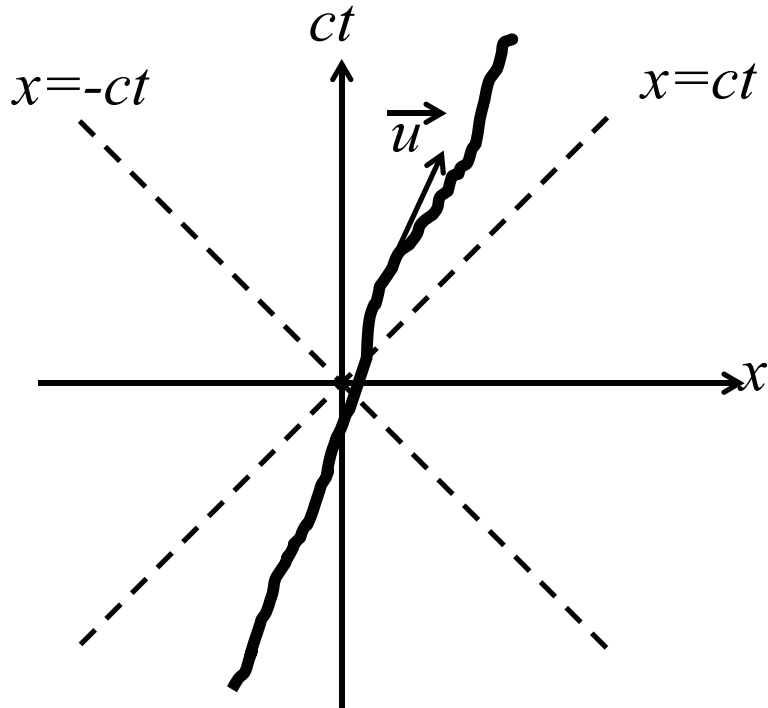


図 1.12 4元速度。

ギーを加えたものである。そこで静止質量エネルギー込みの粒子のエネルギー ε を

$$\varepsilon = p^0 c, \quad (1.60)$$

で定義すればよい事が分かる。式 (1.56) より4元運動量の大きさは以下のようなになる。

$$p_\mu p^\mu = -\frac{1}{c^2} \varepsilon^2 + p^2 = -(mc)^2. \quad (1.61)$$

これから粒子のエネルギーは、運動量を用いて以下のように計算されることが分かる。

$$\varepsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}. \quad (1.62)$$

光のような質量がゼロの粒子の場合、固有時間の変化量がゼロ即ち $d\tau = 0$ であり、式 (1.55) 及び式 (1.58) により 4 元運動量を定義することができない。そこで有限の質量 m を持つ 4 元運動量から質量ゼロの極限を取ることによって以下の様に定義する。質量 m で速度 v の粒子の 4 元運動量の第ゼロ成分は式 (1.58) より

$$p^0 = \frac{\varepsilon}{c} = \gamma mc$$

で与えられる。ここで ε は粒子のエネルギーである。同じエネルギーを持つ質量ゼロの粒子の 4 元運動量をこの式の右辺の質量ゼロの極限を取ることによって定義することとする。その為には $\gamma m = \varepsilon/c^2 =$ 一定の条件が満たされれば良い。即ち $m \rightarrow 0$ の極限で $\gamma \rightarrow \infty$ である。したがって、式 (1.54) より $d\tau = dt/\gamma \rightarrow 0$ となる。ここで以下の式で変化量が定義される変数 λ を導入する。

$$d\lambda \equiv \frac{d\tau}{m}. \quad (1.63)$$

固有時間の間隔と質量はスカラー量である為、 $d\lambda$ も座標系の取り方に依存しないスカラー量である。上記の議論にしたがって、エネルギー一定のまま粒子の質量をゼロの極限に近づけると

$$d\lambda = \frac{dt}{\gamma m} = \frac{c^2 dt}{\varepsilon}$$

となる。この式の右辺の最後の表式は、質量および固有時間を含まず、式 (1.63) の固有時間を時間間隔 dt に質量を ε/c^2 に置き換えた形になっており、質量ゼロの粒子に対しても $d\lambda$ が有限の値を持つ量として定義できることを示している。以上の議論の副産物として微小時間間隔 dt とその座標系で測定した粒子のエネルギー ε の比がスカラー量であることが示された。ここで導入した固有時間の代わりに任意の質量の粒子の軌跡を特徴づけることができるスカラー量 λ をアフィンパラメータと呼ぶ。ここまでの議論を用いて 4 元運動量を次のように定義する。

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (1.64)$$

質量ゼロの粒子の4元運動量の大きさは、世界線がヌルであることから、

$$p_\mu p^\mu = 0. \quad (1.65)$$

で0である。質量が0の粒子のエネルギー ε と運動量 p の関係は、式 (1.62) の $m \rightarrow 0$ の極限を取る事で以下の式で与えられる事が分かる。

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \quad (1.66)$$

また4元運動量の第0成分は当然 ε/c である。

1.9 ドップラーシフト

真空中を伝搬する波長 λ 、振動数 ν の光を考える。波数ベクトル \mathbf{k} を大きさが $k = 2\pi/\lambda$ で定義され、光の伝搬方向を向いた3次元ベクトルとして定義する。以下では、空間ベクトルを太字で表す事にする。さらに、振動数 ν を用いて角振動数を $\omega = 2\pi\nu$ で定義する。慣性系 K 系で観測した時、時刻 t の時、位置 \mathbf{x} にある波面の位相 ϕ は、

$$\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}, \quad (1.67)$$

で与えられる。波の進行方向に x 軸を取ると、 ϕ 一定となる位相一定面が

$$x = \frac{\omega}{k} t - \frac{\phi}{k}, \quad (1.68)$$

のように進行することが分かる。位相を 2π で割った量は、 \mathbf{x} を固定した時、一定の場所で観測する観測者が $t = 0$ から t までの間に観測する光の波の山の数であり、また t を固定した時、波の進行方向に沿って進行方向と逆方向に距離 $x \cos \theta$ (ここで θ は波の進行方向と x 軸のなす角) 進んだ時、光の波の山が入っている数である。 K 系の原点を事象 A、 K 系で時刻 t 、位置 \mathbf{x} の点を事象 B とするとこれら二つの事象 A、B 間に含まれる光の山の数座標系の取り方によらないスカラー量であることは、自明であろう。ただし、時間原点をズラしたり空間原点のズラしたりする時間、空間推進変換はここでは除外している。それらの変換を行うと波の数を数えている二つの事象の内的一方である原点に固定した事象が変わってしまう。そこで K'

系で観測した時の物理量に'をつけて表現すると以下の関係式が成り立たなければならない。

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'. \quad (1.69)$$

波面の位置は4元位置ベクトル $\vec{x} = (ct, \mathbf{x})$ で表される。式(1.69)で表される波の位相が座標系の取り方によらずスカラー量であることから

$$\vec{k} = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right), \quad (1.70)$$

で定義される \vec{k} も4元ベクトルでなければならない事になる。これらを使うと位相(1.67)は以下のように表現できる。

$$\phi = -\vec{k} \cdot \vec{x} = -(-k^0 x^0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (1.71)$$

この式と(1.67)を比較すると式(1.70)で定義される4元波数ベクトルの成分は、上付きの成分即ち k^μ であることが分かる。

4元波数ベクトルのローレンツ変換は以下になる。簡単のため \mathbf{K}' 系は x 軸正の向きに速度 v で \mathbf{K} 系に対して移動しているとする。

$$k^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} k^{\nu},$$

$$\vec{k}' = \left(\gamma \frac{\omega}{c} - \gamma \beta k_1, -\gamma \beta \frac{\omega}{c} + \gamma k_1, k_2, k_3 \right), \quad (1.72)$$

波の進行方向と \mathbf{K}' 系の移動方向のなす角を θ とし、 $\omega = ck$ の関係を用いると、式(1.72)より \mathbf{K}' 系で測定した周波数 ν' と ν の間の以下の関係式が求まる。

$$\nu' = \gamma(1 - \beta \cos \theta) \nu. \quad (1.73)$$

これはドップラー効果を表す式である。 $\theta = \pi/2$ 即ち光の進行方向と観測者の移動方向が垂直である場合は

$$\nu' = \gamma \nu, \quad (1.74)$$

となり、この場合でも周波数の増加が起こる。これは横ドップラー効果と呼ばれる効果である。式(1.22)で t_1, t_1' をそれぞれ \mathbf{K} 系、 \mathbf{K}' 系で測定した光の周期とすると、運動している観測者の時計が遅れる事から、 \mathbf{K}' 系では

光の周期が短くなることを示していることになる。このため式 (1.74) で示したような運動する観測者の測定する周波数の増加が起こる。式 (1.73) のローレンツ因子以外の項は、通常のドップラー効果と同じである。

ドップラー効果の公式 (1.73) を位相 (1.71) がローレンツ変換に対してスカラーであることを用いて導出する。K 系に対して一定の速度 \mathbf{v} で運動する観測者を時間間隔 dt' の間に通過する波の数（通過する波の山の数）は $\omega' dt'/2\pi = \mathbf{v}' dt'$ である。したがって、この観測者が dt' 間に観測する波の位相の変化量は $d\phi = \omega' dt'$ である。この観測者が観測を開始した時の事象と dt' 後に観測を完了した時の事象を結ぶ 4 元微小ベクトル $d\vec{x}$ は、観測者の系では $d\vec{x} = (cdt', 0, 0, 0)$ である。K 系では、 $d\vec{x} = (cdt, d\mathbf{x})$ であったとする。時計の遅れの公式 (1.7) より、 $dt = \gamma dt'$ で結ばれる。位相 (1.71) より

$$d\phi = -\vec{k} \cdot d\vec{x} = \omega' dt'$$

である。この式を dt' で割って、 $dt' \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\omega' = -\vec{k} \cdot \vec{u}, \quad (1.75)$$

を得る。ここで dt' は、K 系に対して速度 \mathbf{v} で運動する観測者の固有時間であることから K 系で測定される運動する観測者の固有速度が $\vec{u} = d\vec{x}/dt'$ で与えられることを用いた。式 (1.75) の右辺を具体的に計算することで以下のドップラー効果の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \omega' &= -\vec{k} \cdot \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = k^0 \gamma c - \mathbf{k} \cdot \gamma \mathbf{v} \\ &= \gamma(\omega - kv \cos \theta) = \gamma(1 - \beta \cos \theta) \omega. \end{aligned} \quad (1.76)$$

ここで速度 \mathbf{v} と波の伝搬方向のなす角 θ 、光の分散関係式 $\omega = kc$ を用いた。

1.10 粒子の運動方程式

粒子の 4 元加速度 a^μ を以下のように定義するのは自然な流れである。

$$\begin{aligned} \vec{a} &\equiv \frac{d\vec{u}}{d\tau}, \\ a^\mu &\equiv \frac{du^\mu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

式 (1.56) の両辺を固有時間で微分すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(\vec{u} \cdot \vec{u}) &= 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{d\tau} = 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{a} &= 0.\end{aligned}\tag{1.78}$$

したがって、4元加速度は4元速度と直交している。MCRFでは、4元速度は第0成分しか持たないため、直交性 (1.78) より

$$\vec{a}_{\text{MCRF}} = (0, a^1, a^2, a^3),\tag{1.79}$$

となり、空間成分のみ持つ。

相対性原理を満たすために粒子の運動方程式は座標系に依存しない形で書けなければならない。この要請を満たすには、運動方程式を4元ベクトルを用いて書けば良い。4元フォースベクトルを F^μ とし、質量を持った粒子の運動方程式は以下の形で書けるとする。

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu.\tag{1.80}$$

この式を相対論的運動をする粒子の運動方程式として採用してよいかどうかは、非相対論的極限、即ち $\beta \ll 1$ の極限で、ニュートンの運動方程式が再現されることが、必要条件である。式 (1.80) の非相対論的極限を取ると空間成分は、

$$\frac{dp^i}{dt} \sim F^i,\tag{1.81}$$

となり、 $F^i = 0$ の時、非相対論的極限での運動量保存則を表す事になる。これは期待通りの結果である。このテキストでは、小文字の英字 $i, j, k,$ は、空間座標即ち 1, 2, 3 の何れかを表すとする。また $A_i B^i$ は $i = 1, 2, 3$ の和すなわち空間座標での縮約を表すとする。一方、時間成分は $F^0 = 0$ の時、

$$d\frac{mc^2 + \frac{1}{2}mv^2}{dt} = 0,\tag{1.82}$$

となり、運動エネルギーの保存則を表す。これも期待通りの結果である。そこで式 (1.80) を相対論的に運動する粒子の運動方程式として採用する事にする。

光のような質量を持たない粒子は、光速度不変の原理より、常に速度は一定であり、慣性系では加速も減速も受けない。そこで、運動方程式は以下のものを採用する。

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = 0. \quad (1.83)$$

1.11 速度・光行差・加速度の合成則

慣性系 K 系とこの系に対して相対速度 v で x 軸正の向きに運動する慣性系 K' 系を考える。 K 系での粒子の速度 u^i は

$$u^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad (1.84)$$

で与えられる。同様に K' 系の粒子の速度 u'^i は以下のように与えられる。

$$u'^i = \frac{dx'^i}{dt'}, \quad (1.85)$$

ローレンツ変換 (1.32) より微小線素の各成分は以下の変換則で結ばれる。

$$\begin{aligned} dt &= \gamma \left(dt' + \frac{1}{c} \beta dx' \right), dx = \gamma (dx' + \beta c dt'), \\ dy &= dy', dz = dz'. \end{aligned} \quad (1.86)$$

これらの式を式 (1.84) に代入すると以下の式を得る。

$$u^1 = \frac{\gamma(dx' + \beta c dt')}{\gamma(dt' + \beta dx'/c)} = \frac{u'^1 + v}{1 + u'^1 v/c^2}, \quad (1.87)$$

$$u^2 = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \beta dx'/c)} = \frac{u'^2}{\gamma(1 + u'^1 v/c^2)}, \quad (1.88)$$

$$u^3 = \frac{dz'}{\gamma(dt' + \beta dx'/c)} = \frac{u'^3}{\gamma(1 + u'^1 v/c^2)}, \quad (1.89)$$

これらの式が、速度 v で x 軸正の向きに運動する座標系で測定した粒子の速度 u'^i から、静止する慣性系 K 系で測定した速度 u^i を導出する速度の合成則である。非相対論的極限 $\beta \ll 1$ で、ガリレイ変換に一致する事が確かめられる。

速度の合成則から光行差 (aberration) の公式を導く。K' 系で静止している光源から等方的に光が放射されている状況を考える。K' 系の運動方向 $x^{1'}$ 方向を軸にとりその軸と光が放射された方向のなす角を θ' とする。系の対称性から $x^{1'}$ 軸の回りの回転角に結果は依存しない。そこで放射された光が $x^{1'} - x^{2'}$ 平面内にあるように座標系を決める。同じ光を K 系から観測した時、光の進行方向が x^1 軸となす角を θ とする。すると

$$\begin{aligned} u^{1'} &= c \cos \theta', u^{2'} = c \sin \theta', \\ u^1 &= c \cos \theta, u^2 = c \sin \theta, \end{aligned}$$

と書ける。これらを速度の合成則 (1.87), (1.88) に代入し比を取る事で K 系で観測される光の進行方向と K' 系で観測される光の進行方向の関係式が以下のように求まる。

$$\tan \theta = \frac{u^2}{u^1} = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' + \beta)}. \quad (1.90)$$

これが光行差の公式 aberration formula である。例えば、 $\theta' = \pi/2$ の方向に K' 系で放射された光を考えると

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma\beta}. \quad (1.91)$$

となり $\theta < \pi/2$ である。即ち K' 系で系の運動方向に垂直に放射された光が、K 系では K' 系の運動方向言い換えると前方に放射されたように観測されることを示している。K 系で $\theta = \pi/2$ に放射されたように観測される光は、K' 系では $\theta' > \pi/2$ 即ち後方に放射された光である。以上をまとめると運動している光源から等方的に放射された光を静止している観測者が観測すると前方に偏ってより多く放射されているように観測されることになる。光源の速度が光速に非常に近い時 $\beta \sim 1, \gamma \gg 1$ であるから式 (1.91) より

$$\theta \sim \frac{1}{\gamma}, \quad (1.92)$$

となり、K' 系で $0 \leq \theta' \leq \pi/2$ の範囲に放射された光即ち全放射の半分の光が、K 系では光源の進行方向を軸にして僅か頂角 $\frac{1}{\gamma}$ の円錐に含まれる方

向に放射されて観測されることになる。これを相対論的ビーミング効果と呼ぶ。

次に K 系での粒子の加速度 a^i と K' 系で測定したときの加速度 $a^{i'}$ との関係を導出する。

$$a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{du^i}{dt}, \quad (1.93)$$

$$a^{i'} = \frac{d^2x^{i'}}{dt'^2} = \frac{du^{i'}}{dt'}, \quad (1.94)$$

に式 (1.86) と (1.87) 達を代入すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} a^1 &= \frac{du^1}{\gamma(dt' + \beta dx'/c)} = \frac{1}{\gamma(1 + vu^{1'}/c^2)} \left(\frac{a^{1'}}{1 + u^{1'}v/c^2} - \frac{u^{1'} + v}{(1 + u^{1'}v/c^2)^2} \frac{v}{c^2} a^{1'} \right), \\ &= \frac{a^{1'}}{\gamma^3(1 + u^{1'}v/c^2)^3}, \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{du^2}{\gamma(dt' + \beta dx'/c)} = \frac{1}{\gamma(1 + vu^{1'}/c^2)} \left(\frac{a^{2'}}{\gamma(1 + u^{1'}v/c^2)} - \frac{a^{1'}}{\gamma(1 + u^{1'}v/c^2)^2} \frac{u^{2'}v}{c^2} \right), \\ &= \frac{a^{2'}}{\gamma^2(1 + u^{1'}v/c^2)^2} - \frac{a^{1'}}{\gamma^2(1 + u^{1'}v/c^2)^2} \frac{u^{2'}v}{c^2}, \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$a^3 = \frac{a^{3'}}{\gamma^2(1 + u^{1'}v/c^2)^2} - \frac{a^{1'}}{\gamma^2(1 + u^{1'}v/c^2)^2} \frac{u^{3'}v}{c^2}, \quad (1.97)$$

これが加速度の合成則である。

1.12 リンドラー時空

粒子が、一定の空間的方向と大きさを持った 4 元加速度ベクトル \vec{a} で表される加速度を受けて加速度運動している運動を考察する。このような運動を一様な加速度運動と呼ぶ。加速度の向きを K 系の x 軸正の方向とする。MCRF 系で観測すると粒子の 4 元加速度ベクトルは

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (0, \vec{a}, 0, 0), \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{u}^1}{d\vec{t}}, \end{aligned} \quad (1.98)$$

となる。MCRF系の物理量に \sim をつけた。ここで $d\tilde{t} = d\tau$ である。K'系がMCRF系なので $u^i = 0$ である。したがって、加速度の合成則(1.95)達を用いるとK系での加速度は次のように求まる。

$$a^1 = \frac{\tilde{a}}{\gamma^3}, a^2 = 0, a^3 = 0. \quad (1.99)$$

また $u^1 = v$ である。定義より

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{dt} &= \frac{\tilde{a}}{\gamma^3}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\tilde{a}}{\gamma^3 c}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

$\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$ を代入し、初期条件 $t=0$ で $v=0$ を用いてこの方程式を解くと次の解を得る。

$$\beta = \frac{\tilde{a}t/c}{\sqrt{(\tilde{a}t/c)^2 + 1}}, \quad (1.101)$$

この式を更に時間について積分し、初期条件 $t=0$ で $x=c^2/\tilde{a}$ を用いると次の解を得る。

$$x = \frac{c^2}{\tilde{a}} \sqrt{(\tilde{a}t/c)^2 + 1}. \quad (1.102)$$

MCRF系での時間刻み即ち粒子の固有時間とK系の時間の刻みに $dt = \gamma d\tau$ の関係がある。式(1.101)の結果を γ に代入して、 $t=0$ で $\tau=0$ の条件の元でこの式を積分すると以下の結果を得る。

$$ct = \frac{c^2}{\tilde{a}} \sinh\left(\frac{\tilde{a}\tau}{c}\right). \quad (1.103)$$

この結果を式(1.102)に代入する事で以下の結果を得る。

$$x = \frac{c^2}{\tilde{a}} \cosh\left(\frac{\tilde{a}\tau}{c}\right). \quad (1.104)$$

図1.13に様々な加速度 \tilde{a} に対する一様加速度運動する粒子の世界線、即ち式(1.103),(1.104)で表される世界線を示した。原点に近い世界線から $\tilde{a} = 4, 2, 1, 0.8, 0.5$ の場合の世界線である。時間が十

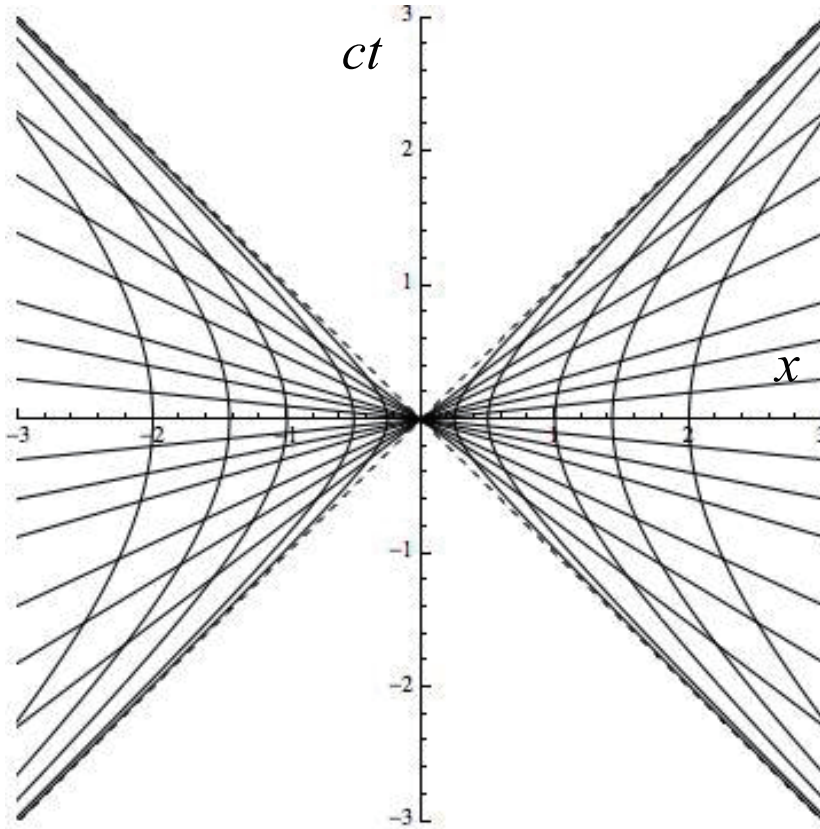


図 1.13 リンドラー時空。

分経過すると粒子の速度は光速に近づきヌルの世界線に漸近している。軌跡が存在する領域は、 $t > 0$ の時 $-ct < x < ct$ 、 $t < 0$ の時 $ct < x < -ct$ の領域に限られる。この図には更に $\tilde{a}\tau$ 一定の直線を $\tilde{a}\tau = -1, -0.7, -0.5, -0.3, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ に対して描いた。これらの線で表された時空の内右半分はリンドラー時空と呼ばれる。式 (1.103) と (1.104) で表される世界線は、ある加速度 \tilde{a} で等加速度直線運動する観測者の時間軸である。一方 $\tilde{a}\tau =$ 一定の直線

$$ct = \tanh \frac{\tilde{a}\tau}{c} x, \quad (1.105)$$

が、この観測者の固有時間一定の事象の集合、即ち空間軸を表すことを以下で示す。この観測者の固有時刻が τ_1 になった事象 $P_1(ct_1, x_1)$ で x 軸正の方向に発した光が、直線 (1.105) 上に置かれた鏡に反射される事象を $Q(ct_0, x_0)$ とすると

$$ct_0 = \tanh \frac{\tilde{a}\tau}{c} x_0, \quad (1.106)$$

で結ばれる。事象 P_1 で発せられた光の世界線との交点であることから

$$ct_0 = ct_1 + x_0 - x_1,$$

で与えられる。これらから以下の関係式を得る。

$$\tanh \frac{\tilde{a}\tau}{c} x_0 = \frac{c^2}{\tilde{a}} \sinh \frac{\tilde{a}\tau_1}{c} + x_0 - \frac{c^2}{\tilde{a}} \cosh \frac{\tilde{a}\tau_1}{c}$$

よって

$$x_0 = \frac{c^2}{\tilde{a}} \frac{\sinh \frac{\tilde{a}\tau_1}{c} - \cosh \frac{\tilde{a}\tau_1}{c}}{\tanh \frac{\tilde{a}\tau}{c} - 1}.$$

事象 Q で反射された光が再び等加速度直線運動する観測者に到達する事象を $P_2(ct_2, x_2)$ とする。この事象の固有時刻を τ_2 とすると

$$ct_2 = \frac{c^2}{\tilde{a}} \sinh \frac{\tilde{a}\tau_2}{c},$$

$$x_2 = \frac{c^2}{\tilde{a}} \cosh \frac{\tilde{a}\tau_2}{c}.$$

この事象が事象 Q で反射された光との交点であることから

$$ct_2 = ct_0 - (x_2 - x_0),$$

で結ばれる。これらから以下の式を得る。

$$\frac{c^2}{\tilde{a}} \sinh \frac{\tilde{a}\tau_2}{c} = \tanh \frac{\tilde{a}\tau}{c} x_0 - \frac{c^2}{\tilde{a}} \cosh \frac{\tilde{a}\tau_2}{c} + x_0.$$

これに上で求めた x_0 の式を代入し変形すると以下の関係式を得る。

$$-\cosh \frac{\tilde{a}}{c} (\tau_2 - \tau) - \sinh \frac{\tilde{a}}{c} (\tau_2 - \tau) = -\cosh \frac{\tilde{a}}{c} (\tau - \tau_1) - \sinh \frac{\tilde{a}}{c} (\tau_1 - \tau). \quad (1.107)$$

この結果は

$$\tau_2 - \tau = \tau - \tau_1, \quad (1.108)$$

が導かれ、式 (1.106) で表される世界線が等加速度直線運動する観測者にとっての同時刻の事象の集まり即ち空間軸であることが示された。

ここまでの議論は観測者の加速度 \tilde{a} の具体的値に依存しない。したがって、等加速度直線運動する観測者にとって式 (1.106) で表される世界線が空間軸となる。一方でこの直線は $\tilde{a}\tau$ 一定の直線であることから分かるように同じ直線でも加速度の異なる観測者にとっては異なる固有時刻を表すことになる。例えば、 \tilde{a}_1 と \tilde{a}_2 の二人の観測者で比較すると一方の観測者にとっては固有時刻 $\tau_1 = \text{const.}/\tilde{a}_1$ の同時刻の直線であるがもう一方の観測者にとっては固有時刻 $\tau_2 = \text{const.}/\tilde{a}_2$ の同時刻の直線となり固有時刻は加速度 \tilde{a} に反比例して小さくなる。極端な例として $\tilde{a} \rightarrow \infty$ の場合は、固有時刻が進むことなく観測者の進行方向が逆転することになる。この結果を有名な双子のパラドックスに適用してみる。同時刻同地点で二人が誕生したとする。一方は慣性系に静止した系で生まれ、もう一方は同時刻同地点を通過する光速に近い速度で飛ぶロケット内で生まれたとする。生まれた瞬間はともに 0 歳である。ロケットが慣性系の時計で 30 年後に無限大の減速度で一瞬にして飛行方向を変えたとする。更に 30 年後にこのロケットは慣性系のもう一方の人の位置を通過する。慣性系の人には 60 歳になっている。一方ロケット内は固有時刻の進みが遅く且つ方向転換の時に固有時間が進まないことを考慮すると 60 歳よりは若い状態に再会することになる。

1.13 ストレス・エネルギーテンソル

この節では、粒子の集合体の状態を表すストレス・エネルギーテンソルを導出する。この粒子の集合体のことを流体と呼ぶ事にする。厳密な意味での流体とは、系の特徴的スケール（圧力が大きく変わる長さ等）と比べて、構成要素である粒子間の衝突の平均自由行程が十分短い場合に適用出来る近似法である。しかし、この教科書では、平均自由行程の長短に関わらず、扱う粒子の集合体を流体と呼ぶことにする。

1.13.1 ダスト

流体を構成する粒子の熱運動のエネルギーが、静止質量エネルギーに比べて無視出来る程十分小さい時、相対論では、そのような流体をダストと呼ぶ。相対論では、ダストとは、熱エネルギーや圧力が静止質量エネルギーに比べて無視出来る流体の事を指す。実際のダストが、多数の原子の集まりであり、単一の原子・分子と比べて質量が非常に大きく、熱運動の速度が、同じ温度で熱平衡状態にある原子・分子に比べて圧倒的に小さいことからこのネーミングが来ているのではないかと推測される。

K系で観測した時、ある時刻 t での、流体の速度が一様で \vec{v} であったとする。この流体の MCRF 系で観測した時の粒子の個数密度を n とする。定義からこれは、スカラー量である。MCRF 系で、流体の 4 元個数フラックスベクトルを $\vec{N} = (nc, 0, 0, 0)$ のように定義する。MCRF 系では流体は静止しているので、粒子の流れが無く空間成分が 0 である。K 系で観測した粒子の 4 元個数フラックスベクトル \vec{N} は、MCRF 系の 4 元個数フラックスベクトルをローレンツ変換することで以下のように求まる。

$$\vec{N} = (nu^\mu) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}). \quad (1.109)$$

ここで \vec{v} は時刻 t 、空間座標 \mathbf{x} での流体の速度であり、 \mathbf{x} 周辺の粒子の同時刻での速度の平均値である。また u^μ は流体の 4 元速度である。非相対論的極限では、 $\vec{N} = (nc, n\vec{v})$ となる。非相対論的極限での粒子数保存則は

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \partial_i n v^i &= 0, \\ \partial_\mu N^\mu &= 0, \end{aligned} \quad (1.110)$$

と書ける。ここで $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ で、空間座標 x^i による偏微分を表しており、左辺第 2 項は $i = 1, 2, 3$ についての和を取る事を表していて、 $\text{div}(n\vec{v})$ に対応する。また $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ であり、第 2 式は $\mu = 0, 1, 2, 3$ での和、即ち 4 次元の発散を表している。式 (1.110) の第 2 式の左辺は、4 次元の勾配ベクトルと個数フラックスベクトルの内積であり、ローレンツ変換に対してスカラー

量、即ち不変である。以上の考察から、光速に近い速度で運動する流体の粒子数保存則が、式 (1.109) で定義される 4 元個数フラックスベクトルを用いて式 (1.110) で表されるとしてよい。

1.13.2 完全流体

粘性や熱伝導等粒子数、運動量、エネルギーの拡散が無視出来る流体を完全流体と呼ぶ。MCRF 系での粒子一個の平均のエネルギーを $\langle \varepsilon \rangle$ とする。これには、熱エネルギーや化学ポテンシャル等も含まれている。平均は、MCRF 系でのアンサンブル平均である。各粒子の速度を \vec{v} とすると MCRF 系であることから $\langle \vec{v} \rangle = 0$ である。MCRF 系で粒子系のエネルギー密度 ρc^2 は $\rho c^2 = n \langle \varepsilon \rangle$ で表され、スカラー量である。例えば、非相対論的極限では $\langle \varepsilon \rangle \sim mc^2 + \langle mv^2/2 \rangle$ である。粒子系が温度 T の熱平衡状態にある時、 $\langle mv^2/2 \rangle = 3/2 \times k_B T$ である。 k_B はボルツマン定数である。MCRF 系で測定した粒子の圧力を P とする。これもスカラー量である。完全流体のストレス・エネルギーテンソル $T^{\mu\nu}$ を以下のように定義する。

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + P) \frac{u^\mu}{c} \frac{u^\nu}{c} + P \eta^{\mu\nu}. \quad (1.111)$$

ここで u^μ は、流体の 4 元速度であり、流体の速度 \vec{v} を用いて

$$(u^\mu) = (\gamma c, \gamma \vec{v}), \quad (1.112)$$

で与えられる。また上付き成分のメトリックテンソルは下付き成分の逆行列で定義され、

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

で与えられる。式 (1.111) の定義は、エネルギーの次元を持ち、2 階のテンソルとなり、且つ流体の速度とエネルギー密度、圧力を含む組み合わせであれ

という要請を満たす最も簡単な定義の一つである。MCRF系では以下のように対角行列となる。

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.114)$$

外部の系と相互作用しない限り、完全流体のエネルギー、運動量は保存する。相対論での、エネルギー・運動量保存則が、ストレス・エネルギーテンソルを用いて、以下の連続の式で表されるとしてみる。

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.115)$$

この方程式は、1階のテンソルであり、全ての慣性系で成り立つことが保証されている。非相対論的極限で、良く知られた流体の質量保存則と運動量保存則が再現されることが必要条件である。方程式を構築する上で用いるこのような指針を対応原理と呼ぶ。非相対論的極限で且つ $P \ll \rho c^2$ の場合の式 (1.111) は以下のようなになる。

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v^1 & \rho c v^2 & \rho c v^3 \\ \rho c v^1 & P + \rho v^1 v^1 & \rho v^1 v^2 & \rho v^1 v^3 \\ \rho c v^2 & \rho v^2 v^1 & P + \rho v^2 v^2 & \rho v^2 v^3 \\ \rho c v^3 & \rho v^3 v^1 & \rho v^3 v^2 & P + \rho v^3 v^3 \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

したがって、連続の式 (1.115) の時間成分は以下のようなになる。

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0. \quad (1.117)$$

ここで $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ で、時間による偏微分を表している。これは、連続の式と呼ばれる質量保存則を表す方程式である。空間 i 成分は以下のようなになる。

$$\partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\rho v^i v^j) + \partial_i P = 0. \quad (1.118)$$

これは流体の運動量の i 成分 ρv^i の保存則を表す。以上から非相対論的極限で、方程式 (1.115) が、質量保存則と運動量保存則を表す事が示せた。

式 (1.115) に、式 (1.111) で定義されたストレス・エネルギーテンソルを代入してみる。

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left((\rho c^2 + P) \frac{u^\mu}{c} \frac{u^\nu}{c} + P \eta^{\mu\nu} \right), \\
 &= \partial_\mu \left(\frac{(\rho c^2 + P)}{n} \frac{nu^\mu}{c} \frac{u^\nu}{c} \right) + \partial_\mu P \eta^{\mu\nu}, \\
 &= \frac{nu^\mu}{c} \left(\frac{(\rho c^2 + P)}{n} \frac{u^\nu}{c} \right)_{,\mu} + P_{,\mu} \eta^{\mu\nu}. \quad (1.119)
 \end{aligned}$$

ここでは式 (1.109) を用いた。また x^μ による偏微分を $_{,\mu}$ のように表した。以後この表記を用いる。流体の固有時間での全微分をチェーンルールを使って展開すると座標偏微分と以下の関係式で結ばれる。

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = u^\mu \partial_\mu. \quad (1.120)$$

これは流体の流れに沿った微分を表しており、流体力学でラグランジ微分として知られているものである。これを用いて式 (1.119) を更に整理すると

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{n}{c} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{(\rho c^2 + P)}{n} \frac{u^\nu}{c} \right) + P_{,\mu} \eta^{\mu\nu}. \quad (1.121)$$

4 元加速度と 4 元速度の直交性 (1.78) は速度の成分を用いて以下のように書ける。

$$u_\nu \frac{du^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.122)$$

この式を意識して式 (1.121) の両辺に u_ν を掛けて添字 ν で縮約を取ると

$$\begin{aligned}
 u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{n}{c} u_\nu \frac{d}{d\tau} \left(\frac{(\rho c^2 + P)}{n} \frac{u^\nu}{c} \right) + u_\nu P_{,\mu} \eta^{\mu\nu}, \\
 &= \frac{n}{c} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{(\rho c^2 + P)}{n} \right) (-c) + u^\mu P_{,\mu} \\
 &= n \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{(\rho c^2 + P)}{n} \right) + \frac{dP}{d\tau} = 0, \quad (1.123)
 \end{aligned}$$

を得る。ここで $u_\nu u^\nu = -c^2$ を用いた。この結果を整理すると以下の方程式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\rho c^2}{n} \right) = -P \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{n} \right). \quad (1.124)$$

$1/n$ は粒子一個が入る平均の体積であり、これを V と書くとこの式は、断熱過程での熱力学第一法則

$$dU = -PdV, \quad (1.125)$$

に対応している。以上から連続の式 (1.115) が断熱過程の仮定の下でのエネルギー保存則を含んでいる事が分かった。MCRF 系での $v = i$ 成分から以下の式を得る。

$$\frac{(\rho c^2 + P)}{c^2} \frac{du^i}{d\tau} + P_{,i} = 0. \quad (1.126)$$

ここで $P_{,i} = P_{,\mu} \eta^{\mu i}$ である。これは相対論的流体が圧力勾配を受けて運動する時の運動方程式である。

1.14 チャンドラセカール質量限界

電子の縮退圧で支えられる星の質量限界であるチャンドラセカール質量限界を導出する。星は、原料である水素からヘリウムから鉄までの元素が合成される核融合反応で生じる質量欠損エネルギーを熱エネルギーに変えて燃えている。燃え尽きると熱エネルギー源を失い、自身の重力を支えることが出来なくなり収縮を始める。星の半径が小さくなるにしたがって、電子間距離が縮まり、量子力学的不確定性原理で許される限界まで電子同士が近寄る。電子はフェルミ粒子であるため、一つの量子状態に一つしか電子が入る事が許されない。最低エネルギーの量子状態から順々に電子が詰まっている状態を縮退していると呼び、この時に発生する反発力を縮退圧と呼ぶ。

星の質量を M とする。星がこのような進化をする段階は、星のコアでの核融合反応が進んで原料である水素が燃え尽きた後であり、縮退圧で支えられる状態が発生するのは、この燃えかすのコアである。したがって、構成元素はヘリウムから鉄までの元素である。これらは、ほぼ同数の陽子と中性子から構成される元素である。したがって、電子は、核子2個あたりに一

個供給される。核子一個の質量を $m_p \sim 1.62 \times 10^{-24} \text{g}$ とする。電子の総数を N_e とすると

$$N_e = \frac{M}{2m_p}, \quad (1.127)$$

で与えられる。不確定性原理から電子の位置の不確定さ Δx と運動量の不確定さ Δp の間に

$$\Delta x \Delta p \sim h, \quad (1.128)$$

の関係が成り立つ。ここで $h = 6.67 \times 10^{-27} \text{erg/Hz}$ はプランク定数である。星の半径を R 、電子が縮退している時の量子状態の最大の運動量を p_f とすると以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} N_e &= 2 \times \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{4\pi}{3} p_f^3 \times \frac{1}{(\Delta x \Delta p)^3}, \\ &= \frac{32\pi^2}{9} \frac{R^3}{h^3} p_f^3. \end{aligned} \quad (1.129)$$

一番目の等号の右辺は、半径 R の球内で運動量 p_f 以下を持つ量子状態の数であり、2の因子は、一つの量子状態にスピン $+1/2$ と $-1/2$ の電子が入る事が許されることに起因している。これを解くとフェルミ運動量 p_f が以下のように求まる。

$$p_f = \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{1/3} \frac{h}{R} N_e^{1/3}. \quad (1.130)$$

運動量空間で p_f 一定の球面をフェルミ面と呼ぶ。縮退した状態とは、フェルミ面以下のエネルギー状態の全てにギチギチに電子が詰まった状態である。

電子の運動エネルギーが $p^2/2m_e$ の非相対論的な関係式で表されるとしてみよう。ここで $m_e = 9.12 \times 10^{-28} \text{g}$ は電子の質量である。フェルミ面以下の全ての量子状態が詰まっているとすると電子の全運動エネルギー E_k は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{2}{h^3} \int_0^{p_f} 4\pi p^2 dp \frac{p^2}{2m_e} \frac{4\pi}{3} R^3, \\ &= \frac{3}{10m_e h^3} \frac{32\pi^2}{9} p_f^5 R^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{10m_e} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{2/3} \frac{h^2}{R^2} N_e^{5/3}, \\
&= \frac{3}{10m_e} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{2/3} \frac{h^2}{R^2} \left(\frac{M}{2m_p} \right)^{5/3}. \quad (1.131)
\end{aligned}$$

一方、自己重力エネルギーは、星内部の密度が一様であると仮定し、以下のよう求められる。

$$\begin{aligned}
E_g &= - \int_0^R \frac{G \frac{4\pi}{3} r^3 \rho 4\pi r^2 dr \rho}{r}, \\
&= - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.132)
\end{aligned}$$

ここで $\rho = M / (\frac{4\pi}{3} R^3)$ は星内部の密度である。以上から星の全エネルギーは以下のようになる。

$$\begin{aligned}
E = E_k + E_g &= \frac{3}{10m_e} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{2/3} \frac{h^2}{R^2} \left(\frac{M}{2m_p} \right)^{5/3} - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \\
&= \frac{3}{5} GM^2 \left(\frac{1}{2m_e G} (2m_p)^{-2} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{2/3} h^2 \left(\frac{M}{2m_p} \right)^{-1/3} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R} \right) \quad (1.133)
\end{aligned}$$

ここで

$$R_0 = \frac{1}{2m_e G} (2m_p)^{-2} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{2/3} h^2 \left(\frac{M}{2m_p} \right)^{-1/3} = 3.76 \times 10^8 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3} \text{ cm},$$

と置くと $E = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_0} ((R_0/R)^2 - R_0/R)$ となり、 $R = 2R_0$ で最小値を取り、それより半径が縮むと運動エネルギー即ち縮退圧の増加が、重力エネルギーの減少に打ち勝つ。つまり、星は $R = 2R_0$ の半径で安定となる。ここで $M_\odot \sim 2 \times 10^{33} \text{ g}$ は太陽の質量である。星の質量が増加すると R_0 が減少するが、安定な半径が存在し続ける。星が、この安定な半径で落ち着いた時、電子のフェルミエネルギーは以下のように

$$p_{fc} \sim 1.7 \times m_e c^2,$$

となり、電子の静止質量エネルギーを超えており、相対論的扱いが必要である。

次に電子を超相対論的状态にあると仮定して運動エネルギーを pc として

縮退状態にある時の星内部の全運動エネルギーを計算すると以下のようになる。

$$E_k = \frac{3}{4} \frac{hc}{R} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{1/3} N_e^{4/3}. \quad (1.134)$$

したがって、星の全エネルギーは以下のように書き換えられる。

$$E = \frac{G(2m_p)^2}{R} \left[\left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{1/3} \frac{3}{4} \frac{hc}{G(2m_p)^2} \left(\frac{M}{2m_p} \right)^{4/3} - \frac{3}{5} \left(\frac{M}{2m_p} \right)^2 \right] \quad (1.135)$$

今度は、運動エネルギーと重力エネルギーの半径依存性が同じとなり、この式のカギ括弧内の正負のみで、星の安定性が決まる。カギ括弧内の値は、星の質量の増加と共に減少し、

$$M_{ch} = \left[\frac{5}{3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{1/3} \frac{3}{4} \frac{hc}{G(2m_p)^2} \right]^{3/2} 2m_p \sim 1.7M_\odot, \quad (1.136)$$

以上になると縮退圧で支えきれなくなり、更に収縮し中性子星やブラックホールまで進化する。この時の星の半径は、大体 $3 \times 10^8 \text{cm} = 3000 \text{km}$ である。この質量限界 M_{ch} がチャンドラセカール質量限界と呼ばれ、厳密な計算によると $1.4M_\odot$ である。電子の縮退圧で支えられた星を白色矮星と呼ぶ。白色矮星表面付近の重力ポテンシャル GM/R_0 を光速の 2 乗の単位で評価すると以下のようになり、

$$\frac{GM/R_0}{c^2} \sim 5 \times 10^{-4}, \quad (1.137)$$

c^2 より十分小さく、ニュートン重力理論を用いた上記の議論が十分よい近似であることが分かる。

白色矮星の質量がチャンドラセカール質量限界を超えともはや電子の縮退圧で星の重力を支える事が出来なくなり、さらに収縮が進む。星の収縮が進むと密度が高くなり、電子が陽子の中に取り込まれる逆ベータ崩壊が起きて星の内部の核子が全て中性子になることが期待される。このような状態の星を中性子星と呼ぶ。中性子星は、中性子の縮退圧が重力とバランスした状態にあると考えられる。中性子星の半径は凡そ数 km で

$$\frac{GM/R_0}{c^2} \sim 1. \quad (1.138)$$

となり、重力が非常に強く、この星の状態を議論するには一般相対論を用いて記述しなければならず、白色矮星に対して用いた議論をそのまま適応することができない。

この発見には以下のような逸話がある。当時イギリスの統治下にあったインドで異才を放つ若干20歳のチャンドラセカールはイギリス政府に見初められ奨学生として渡英する事になった。チャンドラセカールはイギリスへ渡航する船旅の道中でチャンドラセカール質量限界の存在を発見した。この発見は、星は潰れるといつか自重を支えきれなくなり後にブラックホールと呼ばれるようになる特殊な天体になることを示唆していた。エディントンは、チャンドラセカールの発見を頭ごなしに否定し受け入れようとしなかった。それら諸々の事情により渡英から暫くはチャンドラセカールは自暴自棄になっていた。その後も、チャンドラセカールのフェロー授賞式という晴れ舞台でエディントンが誹謗中傷演説をする等、執拗に責められ続けた。チャンドラセカールとエディントンの立場が逆転するには、渡英から7年後、当時の移住先のアメリカで開かれた国際学会まで待たなければならなかった。

第2章

一般相対論

2.1 一般相対性原理・等価原理

一般相対論の基本は、一般相対性原理と等価原理の二つの原理である。

一般相対性原理は、物理法則は座標系の取り方によらず不変である、という原理である。物理法則の座標系からの解放を主張する原理と言ってもよいであろう。数学的表現を用いると物理法則を表す方程式が一般座標変換に対して共変であればと主張する原理である。この要請を満たすには、物理量や方程式が4次元空間内のテンソルで表されていけばよい。例えば、ある時刻にある場所に存在する人の数のような0階のテンソルであるスカラー量は、観測者の座標系の取り方によらず、誰から見ても同じ数になる量である。また、風速毎秒10メートルの東南の風を表す風速ベクトルは1階のテンソルでありベクトル量である。座標系の取り方によっては、風速ベクトルの方向や大きさを表す表現が変わりうるが、物理的実態としての風速ベクトルが変わるわけではなく、どういう座標系で観測するかによらない物理的存在である。

等価原理は、慣性質量と重力質量の比は、物質によらず一定という原理である。この講義では、比を1として慣性質量と重力質量は等しいと主張する原理と考える。地上の重力加速度が g で場所によらず一定であると、慣性質量 m_I 、重力質量 m_g の粒子が、真空中を自由落下する運動を表すニュー

トンの運動方程式は以下のように書ける。

$$m_g g = m_I a. \quad (2.1)$$

ここで a は粒子の落下の加速度である。慣性質量 m_I は、何か一定の力 F を物体に掛けて加速度を測定することで、測定する事ができる物質の慣性（今の運動状態を保とうとする性質）を表す物理量である。一方、重力質量 m_g は、重力場と物質の相互作用の結合定数である。電場と荷電粒子の相互作用時に現れる結合定数電荷に対応するものである。粒子と共に自由落下する観測者 \tilde{K} 系から粒子の運動を観測すると、運動方程式 (2.1) は以下のようになる。

$$m_g g - m_I a = 0. \quad (2.2)$$

左辺第2項は、慣性力である。等価原理を用いると $m_g = m_I = m$ であるから式 (2.2) は以下のように書き換えられる。

$$m(g - a) = 0. \quad (2.3)$$

この方程式は、 \tilde{K} 系では、粒子の重力質量（あるいは慣性質量。以下単に質量と呼ぶ）によらず全ての粒子に対して重力が慣性力により打ち消され、無重力状態で等速直線運動しているように観測される事を示している。即ち等価原理は、全ての粒子に対して重力を打ち消すことできる座標系が常に存在することを保証している。この座標系では、元々重力以外の力が働いていなかった粒子は等速直線運動を行なう。したがって、この座標系は慣性系である。重力加速度は、一般に場所によって異なる。例えば、地球の重力加速度は、地球中心からの距離の2乗に逆比例して小さくなる。したがって、ある一定の加速度で運動する座標系を定義した時、ある場所の重力加速度を慣性力で丁度打ち消す事ができたとしても、場所が変わると重力加速度が変わってしまい、その座標系の慣性力で重力を相殺することが出来なくなる。このことから一つの座標系で重力を慣性力で打ち消す事ができるのは、ある限られた局所的な場所でのみであることになり、このような座標系を局所慣性系と呼ぶ。等価原理は、重力の元で運動する粒子の運動を記述する時、局所慣性系を選択することが必ずできることを主張する原

理と言う事ができる。

2.2 座標基底

座標基底を導入し、一般相対論の数学的記述に必要な数学準備を行なう。
座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu), \quad (2.4)$$

を施したとする。この時以下のように変換する基底ベクトルを座標基底と呼ぶ。

$$\vec{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \vec{e}_\nu. \quad (2.5)$$

ここで変換係数を行列 Λ の成分として以下の記号を用いて表す。

$$\Lambda^\nu_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu'}}. \quad (2.6)$$

この変換行列の逆行列が、式 (2.4) で表される変換の逆、即ち x' から x への変換を表す行列である。逆変換は、 x から x' に変換した結果を元に戻す変換であるから当然であろう。したがって、逆変換を表す変換行列は以下のように表される。

$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta}. \quad (2.7)$$

実際に式 (2.7) を成分を持つ行列を式 (2.6) を成分を持つ行列を掛けた結果得られる行列の各成分は以下ようになる。

$$\Lambda^{\alpha'}_{\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu'}} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x'^{\mu'}} = \delta^{\alpha'}_{\mu'}. \quad (2.8)$$

二つ目の等号では、チェーンルールを用いた。最後の等号は、 $x'^{\alpha'}$ と $x'^{\mu'}$ は、 $\alpha' \neq \mu'$ の時、一次独立であるため 0 であることを用いた。

例として、二次元デカルト座標から二次元極座標への変換を考える。

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

すると変換後の基底は以下の様に書ける。

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y, \\ \vec{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial\theta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}\vec{e}_y = -r\sin\theta\vec{e}_x + r\cos\theta\vec{e}_y.\end{aligned}\quad (2.10)$$

\vec{e}_r は動径方向外向きの基底ベクトルであり、 \vec{e}_θ は方位角が増加する方向を向いた基底ベクトルである。通常にならってこの講義では、デカルト座標での基底は正規直交基底とする。

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1, \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1. \quad (2.11)$$

二次元極座標の基底間の内積は以下のようになる。

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1, \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0, \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2. \quad (2.12)$$

動径方向の基底は、大きさ1であるが、方位角方向の基底ベクトルは大きさ r であり、二つは互いに直交している。

二次元の微小線素ベクトル $d\vec{x}$ を例にとる。デカルト座標では、

$$d\vec{x} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y. \quad (2.13)$$

と書ける。この式に

$$\begin{aligned}dx &= x(r+dr, \theta+d\theta) - x(r, \theta) = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial\theta}d\theta, \\ dy &= y(r+dr, \theta+d\theta) - y(r, \theta) = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial\theta}d\theta.\end{aligned}\quad (2.14)$$

を代入して整理すると

$$\begin{aligned}d\vec{x} &= dr\left(\frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y\right) \\ &\quad + d\theta\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}\vec{e}_y\right), \\ &= dr\vec{e}_r + d\theta\vec{e}_\theta,\end{aligned}\quad (2.15)$$

を得る。図 2.1 に $dr=0$ で点 P を始点とする微小線素ベクトルを示した。図から分かるようにこの微小線素ベクトルの大きさは $r d\theta$ である。式 (2.15) で $dr=0$ として、 $|d\vec{x}|$ を計算すると \vec{e}_θ の大きさが r であるため、正

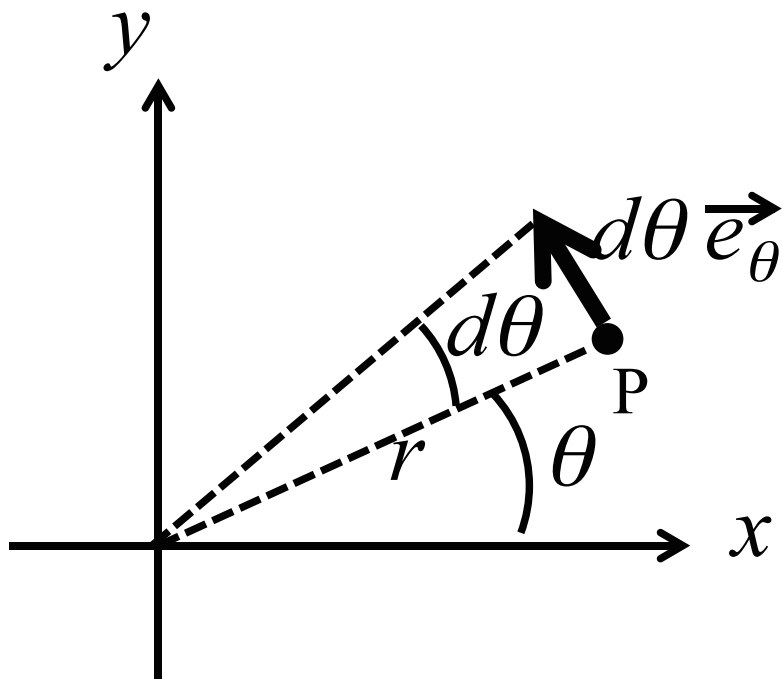


図 2.1 2次元極座標方位角方向の基底ベクトル。

しく $r d\theta$ と求まる。この例が示すように座標基底は、大きさが 1 とは限らず、座標に依存した任意の値を取りうる。

2.3 反変ベクトル

ベクトルを基底ベクトルを用いて式 (2.16) のように展開したとき、各基底ベクトルの係数 A^μ をベクトルの成分と呼ぶ。

$$\vec{A} = A^\mu \vec{e}_\mu. \quad (2.16)$$

微小線素ベクトルの例、式 (2.13) と (2.15) で示したように、成分は基底ベクトルの取り方に依存する。座標変換に対するベクトルの成分の変換則を

導出する。座標変換 (2.4) に伴ってベクトル \vec{A} の成分が $A^{\mu'}$ に変化したとするとベクトル本体が座標変換に依存しない量であることを考慮して以下の式をえる。

$$\vec{A} = A^{\mu'} \vec{e}_{\mu'} = A^{\nu} \vec{e}_{\nu}. \quad (2.17)$$

この式に座標基底の変換則 (2.5) を代入すると以下の式をえる。

$$A^{\nu} \vec{e}_{\nu} = A^{\mu'} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} \vec{e}_{\nu}. \quad (2.18)$$

基底ベクトルは一次独立であるから、この式の両辺の各基底ベクトルの係数が等しくなければならない。このことから以下の関係式を得る。

$$A^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} A^{\mu'}. \quad (2.19)$$

式 (2.19) に逆行列 (2.7) を掛けると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} A^{\nu} &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} A^{\mu'} = \delta^{\mu'}_{\mu'} A^{\mu'} = A^{\mu'}, \\ A^{\mu'} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^{\nu}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

この式 (2.20) が求めるベクトルの成分の変換則である。この変換係数は、基底の変換則 (2.5) を表す行列の逆行列である。上付き添字のベクトルの成分 A^{μ} を反変ベクトルと呼ぶが、これはこのように変換則が基底とは逆あるいは反対であることから来ている。

例としてローレンツ変換 (1.32) を取り上げる。式 (2.7) の定義を用いて変換行列の成分を計算すると以下のように確かに反変ベクトルのローレンツ変換行列が求まる。

$$\begin{aligned} (\Lambda^{\mu'}_{\nu}) &= \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \right), \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.4 メトリックテンソルと等価原理

メトリックテンソルは以下のように基底ベクトルの内積で定義される成分 $g_{\mu\nu}$ を持つ行列として定義される。

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu. \quad (2.22)$$

例えば、二次元デカルト座標では以下のようなになる。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

また、ミンコフスキー時空では、 $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -1$ とし空間方向の基底ベクトルはデカルト座標の基底ととることで、定義 (2.22) からミンコフスキー計量 (1.47) が導出される。さらに 2 次元極座標でのメトリックテンソルは以下のようなになる。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

定義からメトリックテンソルは対称テンソルであり、4 次元時空では独立な成分の数は 10 個である。

メトリック、計量、というネーミングは、微小線素ベクトル $d\vec{x} = dx^\nu \vec{e}_\nu$ の長さ、即ち時空上の 2 点間の微小間隔がメトリックテンソルを用いて以下のように計算できる事から来ている。

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.25)$$

例えば、二次元空間中の微小間隔はデカルト座標、二次元極座標でそれぞれ以下のように書ける。

$$ds^2 = g_{xx} dx^2 + g_{yy} dy^2 = dx^2 + dy^2, \quad (2.26)$$

$$= g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (2.27)$$

ミンコフスキー時空での微小間隔はメトリックを用いて以下のように書ける。

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.28)$$

座標変換による基底の変換則 (2.5) より x から x' への座標変換にともなうメトリックテンソルの変換則が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= \vec{e}_{\mu'} \cdot \vec{e}_{\nu'} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} \vec{e}_\alpha \right) \cdot \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu}} \vec{e}_\beta \right), \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu}} \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta, \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

等価原理によりどんな座標系も座標変換により局所慣性系に変換することができ、重力の影響を局所的に消す事ができる。以下局所慣性系の物理量を $\tilde{\sim}$ をつけて表す事とする。数学的には、等価原理は、座標系 x 系から \tilde{x} 系への変換に伴うメトリックテンソルの変換 (2.29) によって、メトリックが $\eta_{\mu\nu}$ になるような \tilde{x} 系を必ず選択できることを保証する原理である。時空内のある事象点 P において、局所慣性系となる \tilde{x} 系のメトリックを $\tilde{g}_{\mu\nu}$ とする。等価原理は以下の条件を満たすように必ず座標系を選択することができることを保証する原理である。

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu,\alpha} = 0. \quad (2.31)$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu,\alpha\beta} \neq 0. \quad \text{in general space time} \quad (2.32)$$

ここで、 $\tilde{g}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ は 0 である必要は無く、一般の曲がった空間では、 $\neq 0$ である。この状況を 2 次元平面内の曲線を用いて図 2.2 で解説している。左の図は、ある座標系で観測された曲線である。ここではこれを 1 次元の空間を 2 次元空間から俯瞰したものと捉える。点 P は y の値は ~ 6 で接線の傾きが有限値を持っている。この座標系をまず y 軸方向に -5 程度シフトし、座標系を適当に回転することで、必ず右の図のように見える座標系を選択できる。この座標系では、点 P は $y = 1$ で有り且つ接線の傾きが 0 となっている。しかし、曲線の曲率は曲線に固有の物理状態であり、線形座標変換によって消し去る事は出来ない。即ち曲線の 2 階微分の値を 0 にする

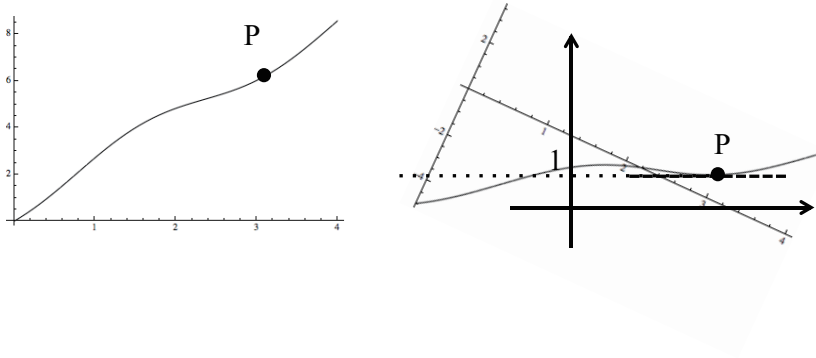


図 2.2 座標変換による局所慣性系への変換。

ことは出来ない。これらが、局所慣性系に変換する事でメトリックが条件(2.30),(2.31),(2.32)を満たすように変換できることに対応している。

2.5 共変ベクトル

ベクトルの下付きの添字がついた成分 B_μ を反変ベクトルから以下のように定義する。

$$B_\mu = g_{\mu\nu} B^\nu. \quad (2.33)$$

これを成分に持つベクトルを共変ベクトルと呼ぶ。座標変換に伴う、共変ベクトルの変換則を導出する。座標変換後の共変ベクトル成分を $B_{\mu'}$ とすると定義(2.33)より以下のように書ける。

$$\begin{aligned} B_{\mu'} &= g_{\mu'\nu'} B^{\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\gamma} B^\gamma, \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta} B^\gamma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} g_{\alpha\gamma} B^\gamma, \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} B_\alpha. \end{aligned} \quad (2.34)$$

この変換則は、基底ベクトルの変換則と同じ形である。基底ベクトルと同じように、共に、変換するため、この成分を持つベクトルが共変ベクトルと

呼ばれる。

ベクトルの内積が共変ベクトルと反変ベクトルの縮約で以下のように定義される。

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = g_{\mu\nu} B^\mu A^\nu = B_\mu A^\mu = B^\mu A_\mu. \quad (2.35)$$

ベクトルの内積が、座標変換により不変である事が、共変ベクトル、反変ベクトルの成分の変換則を代入すると以下のように証明出来る。

$$\begin{aligned} B_{\mu'} A^{\mu'} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu'}} B_\alpha \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\beta} A^\beta, \\ &= \delta^\alpha_\beta B_\alpha A^\beta = B_\alpha A^\alpha. \end{aligned} \quad (2.36)$$

ベクトルの内積は、一方のベクトルにもう一方のベクトルを射影した長さを、元のベクトルの長さに掛け合わせたものであり、この定義で得られる量は、座標系の取り方に依存しないことは幾何学的定義からも当然の結果である。

スカラー量 ϕ を考え、4次元の勾配 $\partial_\mu \phi$ を成分に持つベクトルを考える。座標変換による成分の変換則を調べると以下ようになる。

$$\partial_{\mu'} \phi = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu}} \partial_\nu \phi. \quad (2.37)$$

ここで左辺では、スカラー量は座標変換により不変であることを用いた。この式は、共変ベクトルの成分の変換則と同じであり、 $(\partial_\mu \phi)$ が4次元の共変ベクトルであることが示せた。

2.6 n 階のテンソル

4元ベクトルの成分を掛け合わせる事で任意の階数のテンソルを作れる。2階の反変テンソル $T^{\mu\nu}$ 、共変テンソル $T_{\mu\nu}$ が以下のように作れる。

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu, \quad (2.38)$$

$$T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu. \quad (2.39)$$

これらの座標変換に対する変換則は以下ようになる。

$$T^{\mu' \nu'} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha \beta}, \quad (2.40)$$

$$T_{\mu' \nu'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha \beta}. \quad (2.41)$$

成分の変換則が、式 (2.40) にしたがうものを 2 階の反変テンソル、式 (2.41) にしたがうものを 2 階の共変テンソルの定義であると考えてもよい。次のように 1 階の共変・1 階の反変テンソルを定義する事もできる。

$$T^{\mu}_{\nu} = A^{\mu} B_{\nu}. \quad (2.42)$$

以下では、これを 2 階の混合テンソルと呼び、その変換則は以下のようにあたえられる。

$$T^{\mu'}_{\nu'} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\alpha}_{\beta}. \quad (2.43)$$

上記のやり方を拡張することで n 階の反変・ m 階の共変混合テンソルは、 n 個の反変ベクトル、 m 個の共変ベクトルを掛け合わせる事で得られる。

式 (2.29) で示したメトリックテンソルの変換性からメトリックテンソルが 2 階の共変テンソルであることが分かる。

2.7 ベクトルの平行移動

ベクトルの座標 x^{ν} での微分は以下のように成分の微分と基底の微分で書ける。

$$\partial_{\nu} \vec{A} = A^{\mu}_{,\nu} \vec{e}_{\mu} + A^{\nu} \vec{e}_{\mu,\nu}. \quad (2.44)$$

ここで基底の微分も同一座標点でのベクトルであるので、以下のように基底ベクトルで展開できる。

$$\vec{e}_{\mu,\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \vec{e}_{\alpha}. \quad (2.45)$$

展開係数 Γ をクリストッフエル記号と呼ぶ。

図 2.3 に、例として 2 次元極座標の方位角方向の基底ベクトルの方位角による微分を取り上げた。微分は、点 P の基底ベクトルと点 P から方位角方向に $d\theta$ 離れた点 P' の基底ベクトルの差を取り、 $d\theta$ で割って、 $d\theta \rightarrow 0$ の

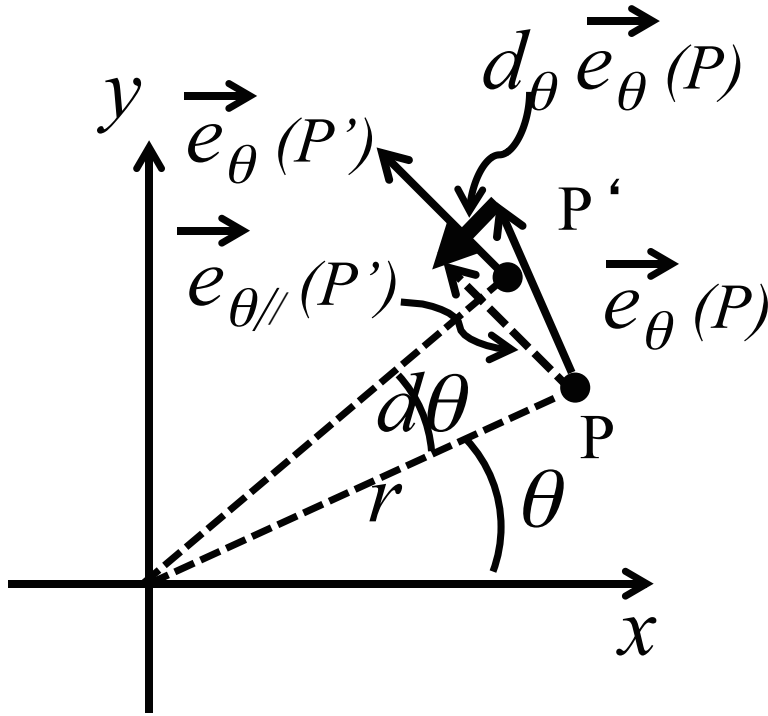


図 2.3 2次元方位角基底ベクトルの方位角微分。

極限を取るという操作である。二つの位置での基底ベクトルの差を計算するため、点 P' の基底ベクトルを平行移動して、始点を点 P に揃えて考える。図中の破線で表したベクトル $\vec{e}_{\theta//}(P')$ は、点 P' の方位角方向の基底ベクトルを点 P に平行移動して得られたベクトルを表している。ベクトル $\vec{e}_{\theta//}(P')$ と $\vec{e}_{\theta}(P)$ の差、 $d_{\theta}\vec{e}_{\theta}(P)$ は図より、大きさが $r d\theta$ で、向きが $-\vec{e}_r$ 方向のベクトルである。したがって、

$$d_{\theta}\vec{e}_{\theta}(P) = -r d\theta \vec{e}_r,$$

であり、これから以下の結果を得る。

$$\frac{\partial \vec{e}_{\theta}}{\partial \theta} = -r \vec{e}_r. \quad (2.46)$$

この結果を式 (2.45) と比較することで、2次元極座標のクリストッフエル記号の内以下の成分が求まる。

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0. \quad (2.47)$$

同じ操作を動径方向の基底ベクトルに適用すると、 $d_\theta \vec{e}_r(P)$ は大きさが $d\theta$ で \vec{e}_θ の方向を向いたベクトルであることが分かる。これより以下の結果を得る。

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta. \quad (2.48)$$

これからクリストッフエル記号の以下の成分が求まる。

$$\Gamma_{\theta r}^r = 0, \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}. \quad (2.49)$$

次に点 P' を点 P から動径方向正の向きに dr 離れた点に取る。これら二点間で基底ベクトルの向きは変化しない。しかし、方位角方向の基底ベクトルの大きさが点 P で r であるのに対して点 P' で $r+dr$ になる。したがって、

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta, \quad (2.50)$$

となる。一方、動径方向の基底ベクトルは長さも変化しない。したがって、

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0, \quad (2.51)$$

となる。これらからクリストッフエル記号の以下の成分が求まる。

$$\Gamma_{r\theta}^r = 0, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (2.52)$$

$$\Gamma_{rr}^r = 0, \quad \Gamma_{rr}^\theta = 0, \quad (2.53)$$

上記の例のように、二つの事象で定義されている基底ベクトルを比較するには、基底ベクトルの一方を平行移動して始点を揃えて、二つのベクトルの差を求めなければならない。上記の例のような平面内でのベクトルの移動であれば、平行移動をすることは、デカルト座標を取った時の各成分が変わらないように移動する操作と定義でき、途中の移動経路に移動結果は依存しない。デカルト座標では、基底ベクトルは場所によらず一定である

からである。しかし曲がった空間では、全空間をはれるデカルト座標を定義できない。そのため、平行移動の結果は、途中の経路に依存する。図 2.4 に球面上の点 A で定義されたベクトル $\vec{T}(A)$ を二つの経路で点 C まで平行移動した結果を示した。経路 A → C に沿って平行移動した結果を実線矢印

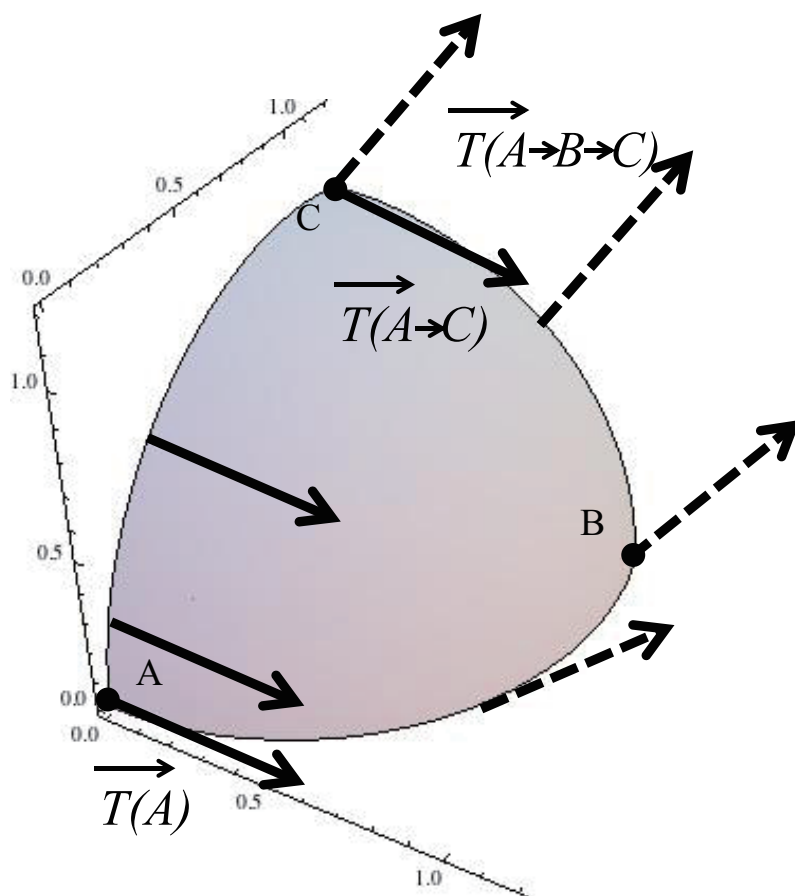


図 2.4 ベクトルの球面上の平行移動。

$\vec{T}(A \rightarrow C)$ で示した。一方経路 A → B → C に沿って平行移動した結果を破線矢印 $\vec{T}(A \rightarrow B \rightarrow C)$ で示した。図から明らかなようにこれら二つの経路に沿っての平行移動の結果、得られたベクトルは異なっている。この例は、

曲がった曲面上では、ベクトルの平行移動で得られる結果は、始点と終点と同じであっても途中の経路に依存している事を示している。

では曲がった空間での平行移動をどう定義したら良いだろうか。如何なる曲率をもった空間でも等価原理により局所慣性系が必ず存在する。局所慣性系では、それが定義された近傍で、基底ベクトルはミンコフスキー時空の基底で近似出来る。ミンコフスキー時空では、ベクトルの平行移動は、その成分が変化しないように移動することで定義できる。実は、図 2.4 で示した例におけるベクトルの平行移動は、この方針にしたがって行なわれていた。この例を使って曲面上のベクトルの平行移動の操作について解説する。まず点 A で曲面に接する微小面積を持った接平面を定義する。これが局所慣性系に対応する。この微小接平面内で水平方向、鉛直方向のベクトルの平行移動を行ない、微小接平面（微小タイル）の端までベクトルを移動する。ベクトルを移動した先で、始めのタイルと連続に繋がり、曲面と接する新たな微小タイルを貼付け、その中でまた平行移動を行なう。この操作を繰り返す事で目的の平行移動が完成する。即ち、曲面を微小タイルの張り合わせで覆う。これは、空間を局所慣性系で覆う事に対応する。タイル内は、平面であるため平行移動が一意に実行できる。そこでまずこの微小タイル内で平行移動を行う。次に移動先の接平面である微小タイルに乗り換える。この時、新たな微小タイルは元の微小タイルに対して平行では無く、空間の曲率を反映した僅かな傾きをもつ。この時、一つ前の微小タイル内を平行移動されてきたベクトルを、この微小タイル内に貼り付けたまま、微小タイルが移動先の接平面になるように傾ける。この操作を繰り返す事で目的の平行移動を完成させるのである。微小タイルの面積を無限小に取った極限で、タイルで覆った面は、球面に一致する。

局所慣性系では、基底ベクトルの平行移動した結果は、元の基底ベクトルと同じである。したがって、局所慣性系 \tilde{x} 系では、基底ベクトルの座標による微分、即ちある座標軸方向に微小距離離れた点の基底ベクトルを平行移動して、元の基底ベクトルを引いた結果は 0 であり、

$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = 0, \quad (2.54)$$

である。この事実は、局所慣性系ではメトリックテンソルの座標一階微分がゼロであることを保証する。

$$\partial_\mu \tilde{g}_{\alpha\beta} = \partial_\mu \tilde{e}_\alpha \cdot \tilde{e}_\beta + \tilde{e}_\alpha \cdot \partial_\mu \tilde{e}_\beta = 0. \quad (2.55)$$

一般座標での基底ベクトルは、局所慣性系の基底ベクトルと

$$\tilde{e}_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \tilde{e}_\nu, \quad (2.56)$$

で結ばれるため、式 (2.54) から一般座標の基底ベクトルの座標による微分は一意に決定できる。

2.8 ベクトルの共変微分

式 (2.44)、(2.45) から、ベクトルの座標 x^ν での微分は以下のように書ける。

$$\vec{A}_{;\mu} = A^{\nu}_{;\mu} \tilde{e}_\nu + A^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \tilde{e}_\nu. \quad (2.57)$$

μ を固定するとこれは、ベクトルであり、その成分は以下のように書ける。

$$\nabla_\mu A^\nu = A^{\nu}_{;\mu} \equiv A^{\nu}_{;\mu} + A^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu. \quad (2.58)$$

これを共変微分と呼ぶ。式 (2.58) は、反変ベクトルの共変微分を表す式である。スカラー量の共変微分は、基底の微分を含まないので、偏微分と等しい。

$$\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}. \quad (2.59)$$

式 (2.37) より座標変換に対する変換性が1階の共変ベクトルの変換性を満たしている。この例が示すように、共変微分は、テンソルの階数を一つ上げた新たなテンソルを生成する。例えば x 系から x' 系への座標変換を行なったとしよう。その時式 (2.59) で定義されるスカラー関数の共変微分は以下のように変換される。

$$\phi'_{;\mu'}(x') = \phi_{;\mu'}(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu}} \phi_{,\nu}(x). \quad (2.60)$$

確かに一階の共変ベクトルと同じ変換性を示している。ここでスカラー関数の性質 $\phi'(x') = \phi(x)$ を用いた。ベクトルの微分は式 (2.57) で定義されるので座標変換による変換性は以下のように書ける。

$$\vec{A}_{,\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \vec{A}_{,\nu}. \quad (2.61)$$

変換係数は微分演算子の変換性から現れたものである。これらの考察から一般にテンソルの共変微分は、テンソルの階数を一つ上げることに対応することが推察される。

共変ベクトルの共変微分を次のような手続きで導く。二つのベクトルの内積は、 $B_\nu A^\nu$ と書け、スカラー量である。したがって、

$$\begin{aligned} (B_\nu A^\nu)_{;\mu} &= (B_\nu A^\nu)_{,\mu} = B_{\nu,\mu} A^\nu + B_\nu A^\nu_{,\mu}, \\ &= B_{\nu;\mu} A^\nu + B_\nu A^\nu_{;\mu} = B_{\nu;\mu} A^\nu + B_\nu (A^\nu_{,\mu} + A^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu), \\ &= B_{\nu;\mu} A^\nu + B_\nu (A^\nu_{,\mu} + A^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu), \end{aligned}$$

となる。この式を整理すると以下の式をえる。

$$\begin{aligned} B_{\nu;\mu} A^\nu &= B_{\nu,\mu} A^\nu - B_\nu A^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu, \\ &= B_{\nu,\mu} A^\nu - B_\alpha A^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.62)$$

二つ目の等号では、上付きと下付きに同時に現れている ν を α に α を ν に変えた。上付き下付き同時に現れる添字は、0 から 3 までの和を取る事を表しており、二つが揃っていれば何でもよい。この様な添字をダミーな添字と呼ぶ。式 (2.62) では、 ν と α がダミーな添字なので式の構造が分かりやすくなるように添字の付け替えを行なった。この式は任意の A^ν に対して成立しなければならない。このことから共変ベクトルの共変微分を計算する公式が以下のように求まる。

$$B_{\nu;\mu} = B_{\nu,\mu} - B_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha. \quad (2.63)$$

次に 2 階の反変テンソル $T^{\mu\nu}$ の共変微分の公式を導出する。2 階の反変テンソルは二つの反変ベクトルを掛け合わせる事で得られる。このことを用いると 2 階の反変テンソルの共変微分の公式が得られる。

$$T^{\mu\nu}_{;\alpha} = (A^\mu B^\nu)_{;\alpha} = A^\mu_{;\alpha} B^\nu + A^\mu B^\nu_{;\alpha},$$

$$\begin{aligned}
&= (A^\mu{}_{,\alpha} + A^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu) B^\nu + A^\mu (B^\nu{}_{,\alpha} + B^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\nu), \\
&= (A^\mu B^\nu)_{,\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu A^\beta B^\nu + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu A^\mu B^\beta, \\
&= T^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu T^{\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu T^{\mu\beta}. \tag{2.64}
\end{aligned}$$

同様の手続きにより2階の共変テンソル $T_{\mu\nu}$ の共変微分の公式が以下のようを得られる。

$$T_{\mu\nu;\alpha} = T_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta T_{\beta\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta T_{\mu\beta}. \tag{2.65}$$

2階の混合テンソルの共変微分の公式は以下のようになる。

$$T^\mu{}_{\nu;\alpha} = T^\mu{}_{\nu,\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu T^\beta{}_\nu - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta T^\mu{}_\beta. \tag{2.66}$$

2.9 クリストッフエル記号

クリストッフエル記号をメトリックテンソルで表す公式を導出する。相対論の基本原理の一つは等価原理である。これによると重力場中で自由落下する系は無重力状態となる。即ちどんな座標系であっても局所慣性系に座標変換によってうつる事ができる。以下局所慣性系を \tilde{x} とし、その基底を \vec{e} と表す。局所慣性系とはメトリックテンソルの座標一階微分がゼロである系である。このことと等価であるが、局所慣性系では基底の座標一階微分がゼロである。一般座標系 x から局所慣性系への変換によって基底ベクトルは次のように変換される。

$$\vec{e}_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \vec{e}_\alpha$$

この両辺を x で微分する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_\alpha + \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\nu}, \\
&= \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_\alpha. \tag{2.67}
\end{aligned}$$

二つの目の等号では、局所慣性系では基底ベクトルの微分がゼロであることを用いた。一方クリストッフエル記号の定義式 (2.45) より

$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \vec{e}_\alpha,$$

であり式 (2.67) と比べると以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \vec{e}_\alpha &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_\alpha \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_\alpha \\ &= \frac{\partial \vec{e}_\nu}{\partial x^\mu} \\ &= \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \vec{e}_\alpha. \end{aligned} \quad (2.68)$$

即ち

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha, \quad (2.69)$$

でありクリストッフエル記号の下付き添字の対称性が等価原理により保証されている。

メトリックテンソルの座標偏微分を行なうと以下のようなる。

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \partial_\alpha \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \vec{e}_\sigma \cdot \vec{e}_\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\sigma, \\ &= \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma g_{\beta\sigma}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

この結果を、添字をサイクリックに並べ替えて並べると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma g_{\beta\sigma} \\ \partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma g_{\sigma\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma g_{\gamma\sigma} \\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma g_{\alpha\sigma} \end{aligned}$$

上の二つの式を足し、最後の式を引き、クリストッフエルの添字の対称性を用いると次の式を得る。

$$2\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}.$$

メトリックテンソルの反変成分 $g^{\mu\gamma}$ は、共変成分 $g_{\gamma\nu}$ の逆行列として定義され、

$$g^{\mu\gamma} g_{\gamma\nu} = \delta_\nu^\mu,$$

を満たすので両辺に $g^{\mu\gamma}$ つまり $g_{\sigma\gamma}$ の逆行列を掛けることで以下の結果を

得る。

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}(\partial_{\alpha}g_{\gamma\beta} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}). \quad (2.71)$$

これがメトリックテンソルからクリストッフェル記号を導出する公式である。クリストッフェル記号は、局所慣性系では基底の微分がゼロであることから、ゼロでなければならない。式(2.71)はメトリックの一階微分とメトリック自身から構成されているため、確かに局所慣性系ではクリストッフェル記号はゼロとなる。

メトリックテンソルの共変微分を求める。式(2.70)より以下の結果を得る。

$$\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}g_{\sigma\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}g_{\beta\sigma} = 0. \quad (2.72)$$

式(2.65)と比較すると、この左辺は2階の共変テンソル $g_{\beta\gamma}$ の共変微分であり、この結果はメトリックテンソルの共変微分がゼロであることを示している。このことは、以下のように示す事もできる。局所慣性系においてメトリックテンソルの共変微分を行うと局所慣性系ではクリストッフェル記号がゼロであること及びメトリックの座標一階微分がゼロであることから

$$\nabla_{\alpha}\tilde{g}_{\beta\gamma} = \tilde{g}_{\beta\gamma,\alpha} = 0.$$

即ち全ての成分がゼロである。一般座標におけるメトリックテンソルの共変微分は、局所慣性系のメトリックテンソルの共変微分の線形結合で必ず表す事ができる。具体的には以下のように書ける。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\alpha} &= \frac{\partial\tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \tilde{g}_{\beta\gamma;\sigma}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

従って、等価原理から一般座標におけるメトリックテンソルの共変微分はゼロとなる。

2.10 時空の曲率

時空の曲率の情報を持つリーマンテンソルは共変微分の交換関係式 $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu$ を用いて、次の様に定義される。

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} A^\beta. \quad (2.74)$$

この式の右辺に現れた $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ をリーマンテンソルと呼ぶ。左辺が、1階反変2階共変混合テンソル、右辺は一階反変ベクトルとの縮約によりリーマンテンソルの階数を一つ落としているので、 $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ は1階反変3階共変混合テンソルである。この操作の物理的意味を図 2.5 に示した。球面上の事象

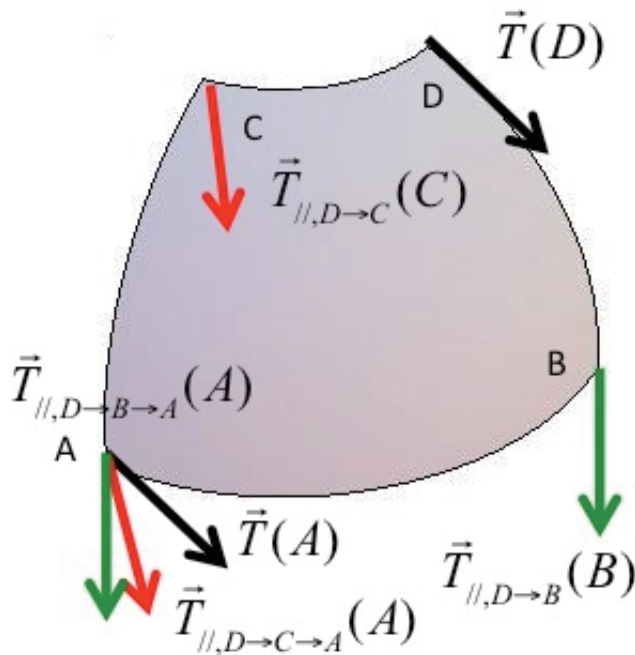


図 2.5 リーマンテンソル。

点 D から A へのベクトルの平行移動を表している。事象点 D は A と経度

方向に $\delta\phi$ 、緯度方向に $\delta\theta$ 離れている。共変微分 ∇_ϕ および ∇_θ の操作は、それぞれ次の式で表される。

$$\nabla_\phi \vec{T}(A) = \lim_{\delta\phi \rightarrow 0} \frac{\vec{T}_{//,B \rightarrow A}(A) - \vec{T}(A)}{\delta\phi}, \quad (2.75)$$

$$\nabla_\theta \vec{T}(A) = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\vec{T}_{//,C \rightarrow A}(A) - \vec{T}(A)}{\delta\theta}, \quad (2.76)$$

ここで $\vec{T}_{//,B \rightarrow A}(A)$ は事象点 B のベクトル $\vec{T}(B)$ を経路 $B \rightarrow A$ に沿って事象点 A まで平行移動を、 $\vec{T}_{//,C \rightarrow A}(A)$ は事象点 C のベクトル $\vec{T}(C)$ を経路 $C \rightarrow A$ に沿って事象点 A まで平行移動して得られた事象点 A で定義されたベクトルである。式 (2.75) に更に ∇_θ を作用した結果は以下のように表される。

$$\nabla_\theta \nabla_\phi \vec{T}(A) = \lim_{\delta\theta, \delta\phi \rightarrow 0} \frac{(\vec{T}_{//,B \rightarrow A}, //, C \rightarrow A}(A) - \vec{T}_{//,B \rightarrow A}(A)) - (\vec{T}_{//,C \rightarrow A} - \vec{T}(A))}{\delta\theta \delta\phi}, \quad (2.77)$$

ここで $\vec{T}_{//,B \rightarrow A}, //, C \rightarrow A}(A)$ は、経度方向に $\delta\phi$ 平行移動して得られたベクトル場から事象 A と同じ経度にあり、緯度方向に $\delta\theta$ 離れた事象点 D のベクトルを A へ平行移動して得られたベクトルである。つまりこのベクトルは、事象点 D で定義されたベクトルを D から C へ平行移動し、その後更に C から A へ平行移動して得られるベクトルであり、次のように表記できる。

$$\vec{T}_{//,B \rightarrow A}, //, C \rightarrow A}(A) = \vec{T}_{//,D \rightarrow C \rightarrow A}(A). \quad (2.78)$$

同様に式 (2.76) に更に ∇_ϕ を作用した結果は以下のように表される。

$$\nabla_\phi \nabla_\theta = \lim_{\delta\theta, \delta\phi \rightarrow 0} \frac{(\vec{T}_{//,D \rightarrow B \rightarrow A}(A) - \vec{T}_{//,C \rightarrow A}(A)) - (\vec{T}_{//,B \rightarrow A} - \vec{T}(A))}{\delta\theta \delta\phi}, \quad (2.79)$$

したがって、共変微分の交換関係は以下のように表記出来る。

$$[\nabla_\theta, \nabla_\phi] \vec{T}(A) = \lim_{\delta\theta, \delta\phi \rightarrow 0} \frac{\vec{T}_{//,D \rightarrow C \rightarrow A}(A) - \vec{T}_{//,D \rightarrow B \rightarrow A}(A)}{\delta\theta \delta\phi}, \quad (2.80)$$

図 2.5 から分かるように右辺の二つのベクトルは等しく無く、差は有限値を持つ。これは、ベクトルが張られた空間が曲面で有限の曲率を持っている

事に起因している。因に曲率ゼロの空間即ち平面内で式 (2.74) で定義された操作を行なうと、ベクトルの平行移動の結果は移動経路の選択に依存しないため、ゼロになる。以上の考察から分かるようにリーマンテンソルは時空間の曲がり具合を表す物理量である。

この定義式 (2.74) の左辺を計算することでリーマンテンソルをクリストッフエル記号で表す公式を導く。 $\nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha$ は、2 階の混合テンソル $\nabla_\nu A^\alpha$ の共変微分であり、式 (2.66) を用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha &= (A^\alpha_{;\nu})_{;\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\beta_{;\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta A^\alpha_{;\beta}, \\ &= A^\alpha_{;\nu\mu} + \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha A^\beta + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha A^\beta_{;\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha (A^\beta_{;\nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^\beta A^\gamma) - \Gamma_{\mu\nu}^\beta (A^\alpha_{;\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha A^\gamma). \end{aligned} \quad (2.81)$$

同様に計算すると以下の結果を得る。

$$\nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha = A^\alpha_{;\mu\nu} + \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha A^\beta + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha A^\beta_{;\nu} + \Gamma_{\nu\beta}^\alpha (A^\beta_{;\mu} + \Gamma_{\gamma\mu}^\beta A^\gamma) - \Gamma_{\nu\mu}^\beta (A^\alpha_{;\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha A^\gamma). \quad (2.82)$$

式の構造からこの結果は、式 (2.81) の μ と ν を入れ替える事で得られる。これらから

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha &= \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha A^\beta - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha A^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\gamma\nu}^\beta A^\gamma - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\gamma\mu}^\beta A^\gamma, \\ &= (\Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma) A^\beta, \end{aligned} \quad (2.83)$$

を得る。この式は任意のベクトル A^β に対して成立する必要がある。この条件よりリーマンテンソルをクリストッフエル記号から導く公式が次のように得られる。

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\sigma, \quad (2.84)$$

リーマンテンソルの添字に対する対称性を調べる。そのため $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} R^\sigma_{\beta\mu\nu}$ の対称性を調べる。テンソルの対称性は、座標系によらない性質である。そこで計算がしやすい局所慣性系で調べる事にする。局所慣性系では、メトリックの 1 階微分がゼロであるため、クリストッフエル記号はゼロである。しかし、メトリックの 2 階微分はゼロとは限らないので、リーマンテンソルは以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \eta_{\alpha\sigma}(\Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\sigma}), \\
&= \frac{1}{2}\eta_{\alpha\sigma}\eta^{\sigma\delta}(\tilde{g}_{\delta\beta,\nu\mu} + \tilde{g}_{\delta\nu,\beta\mu} - \tilde{g}_{\beta\nu,\delta\mu} - \tilde{g}_{\delta\mu,\beta\nu} - \tilde{g}_{\delta\beta,\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\beta,\delta\nu}), \\
&= \frac{1}{2}(\tilde{g}_{\alpha\nu,\beta\mu} - \tilde{g}_{\beta\nu,\alpha\mu} - \tilde{g}_{\alpha\mu,\beta\nu} + \tilde{g}_{\mu\beta,\alpha\nu}). \tag{2.85}
\end{aligned}$$

この結果を用いるとリーマンテンソルが以下の添字に対する対称性を持つ事が容易に示せる。

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \tag{2.86}$$

$$R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\mu\nu}, \tag{2.87}$$

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{2.88}$$

局所慣性系 $x^{\tilde{\alpha}}$ から一般座標系 $x^{\alpha'}$ への座標変換に伴い、それぞれで定義されたリーマンテンソルは以下のように結ばれる。

$$R_{\alpha'\beta'\mu'\nu'} = \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{2.89}$$

リーマンテンソルの対称性(2.86),(2.87),(2.88)は、式(2.85)を用いて、すなわち局所慣性系において導かれた性質である。そこで局所慣性系で導かれた反対称性(2.87)を式(2.89)の右辺のリーマンテンソルに用いるとまず以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
R_{\alpha'\beta'\mu'\nu'} &= -\frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \tilde{R}_{\beta\alpha\mu\nu}, \\
&= -\frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \tilde{R}_{\beta\alpha\mu\nu}, \\
&= -R_{\beta'\alpha'\mu'\nu'}. \tag{2.90}
\end{aligned}$$

最後の等号では、リーマンテンソルの変換則(2.89)を用いた。添字 μ, ν の入れ替えに対する反対称性も同様に示せる。さらに次の結果を得る。

$$\begin{aligned}
R_{\alpha'\beta'\mu'\nu'} &= \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta}, \\
&= \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta}, \\
&= R_{\mu'\nu'\alpha'\beta'}. \tag{2.91}
\end{aligned}$$

これらの結果は、確かに局所慣性系で示されたテンソルの対称性（反対称性）が、一般座標でも保たれる事を示している。

リッチテンソル、リッチスカラーをそれぞれ以下のように定義する。

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad (2.92)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}. \quad (2.93)$$

何も断らなければ、計算は時間一次元空間三次元の四次元空間で行う。一方ある固定された時間に対して、空間三次元だけで計算されたリッチスカラーを空間曲率 (spatial curvature) と呼び、以下のように表記する。

$$R^{(3)} = g^{ij} R_{ij}^{(3)}. \quad (2.94)$$

ここで

$$R_{ij}^{(3)} = R^{(3)k}_{ikj}. \quad (2.95)$$

で定義され、 $R^{(3)k}_{ikj}$ は3次元空間座標だけで計算されるリーマンテンソルである。

2.11 ビアンキの恒等式

以下のビアンキの恒等式から導かれる重要な2つの恒等式を導出する。

$$([\nabla_{\alpha}, [\nabla_{\beta}, \nabla_{\gamma}]] + [\nabla_{\beta}, [\nabla_{\gamma}, \nabla_{\alpha}]] + [\nabla_{\gamma}, [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]])A^{\mu} \equiv 0. \quad (2.96)$$

ここで A^{σ} は任意のベクトルである。この式が恒等的に成り立つ事は具体的に交換関係式を展開して括弧の中を計算してみれば自明である。計算を進めるにあたって $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]B_{\alpha}$ がリーマンテンソルを用いてどう書ける調べておく必要がある。そこでまず次のことを証明しておく。

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}](B_{\alpha}A^{\alpha}) &= \nabla_{\mu}\partial_{\nu}(B_{\alpha}A^{\alpha}) - \nabla_{\nu}\partial_{\mu}(B_{\alpha}A^{\alpha}) \\ &= \partial_{\mu}\partial_{\nu}(B_{\alpha}A^{\alpha}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\partial_{\sigma}(B_{\alpha}A^{\alpha}) - \partial_{\nu}\partial_{\mu}(B_{\alpha}A^{\alpha}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}\partial_{\sigma}(B_{\alpha}A^{\alpha}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

これはスカラー量を二回移動して同じ場所にうつす時その結果が移動の順番によらないことを示している。この結果から以下の式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= A^\alpha [\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_\alpha + B_\alpha [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha \\ &= A^\alpha [\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_\alpha + B_\beta R^\beta_{\alpha\mu\nu} A^\alpha \end{aligned}$$

従って以下の結果を得る。

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_\alpha = -B_\beta R^\beta_{\alpha\mu\nu} \quad (2.97)$$

ビアンキの恒等式の左辺最後の項を取り上げる。

$$[\nabla_\gamma, [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]] A^\mu = \nabla_\gamma [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu - [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \nabla_\gamma A^\mu$$

第一項は次のようになる。

$$\nabla_\gamma [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu = \nabla_\gamma (R^\mu_{\nu\alpha\beta} A^\nu) = (\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta}) A^\nu + R^\mu_{\nu\alpha\beta} \nabla_\gamma A^\nu$$

第二項は、共変微分の交換関係演算子が、共変ベクトル ∇_γ に作用する部分と反変ベクトル A^μ に作用する部分に分けられる。

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \nabla_\gamma A^\mu = -R^\sigma_{\gamma\alpha\beta} \nabla_\sigma A^\mu + R^\mu_{\nu\alpha\beta} \nabla_\gamma A^\nu$$

右辺第二項は、 A^μ に $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ が作用した結果現れた項であるが、何故 ∇_γ が A^μ にかかった形で現れて、 $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ に作用しないのか疑問に感じる人がいるかもしれない。このことは混合テンソル $T_\gamma{}^\mu$ に $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ が作用した結果が、式 (2.97) と式 (2.74) から

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] T_\gamma{}^\mu = -R^\sigma_{\gamma\alpha\beta} T_\gamma{}^\nu + R^\mu_{\nu\alpha\beta} T_\gamma{}^\nu \quad (2.98)$$

であることから理解できる。即ち $\nabla_\gamma A^\mu$ で一つの混合テンソルが出来上がっていて、その混合テンソルに $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ が作用したのであって、 ∇_γ と A^μ を切り離すことができないのである。共偏微分を噛みつきと表現すると A^μ に ∇_γ が噛み付いた状態で一つの混合テンソルが作られており、 $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ が来たからといって一旦口を離すことは許されないのである。これから

$$[\nabla_\gamma, [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]] A^\mu = (\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta}) A^\nu + R^\sigma_{\gamma\alpha\beta} \nabla_\sigma A^\mu$$

この結果をビアンキの恒等式に代入すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} &(\nabla_\alpha R^\mu_{\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R^\mu_{\nu\gamma\alpha} + \nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta}) A^\nu \\ &+ (R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} + R^\sigma_{\beta\gamma\alpha} + R^\sigma_{\gamma\alpha\beta}) \nabla_\sigma A^\mu \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.99)$$

ここで A^ν 、 $\nabla_\sigma A^\mu$ はそれぞれ独立で任意のベクトル及び 2 階のテンソルなので、この式が恒等的に成り立つためには、それぞれの係数がゼロで無ければならない。従ってビアンキの恒等式から以下の恒等式を得る。

$$\nabla_\alpha R^\mu{}_{\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} + \nabla_\gamma R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = 0, \quad (2.100)$$

$$R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma} + R^\sigma{}_{\beta\gamma\alpha} + R^\sigma{}_{\gamma\alpha\beta} = 0. \quad (2.101)$$

式 (2.101) を以下のように書き換える。

$$R_{\sigma\alpha\beta\gamma} + R_{\sigma\beta\gamma\alpha} + R_{\sigma\gamma\alpha\beta} = 0. \quad (2.102)$$

添字の一組が同じ場合を考える。

$$\begin{aligned} R_{0012} + R_{0120} + R_{0201} &= R_{0012} + R_{2001} + R_{0201} = R_{0012} + R_{2001} + R_{2010}, \\ &= R_{2001} + R_{2010} = 0, \end{aligned} \quad (2.103)$$

一つ目の等号では、添字の対称性 (2.86) を用いて、2 番目の項の前二つと後二つの添字の組みを入れ替えた。二つ目の等号では、添字の反対称性 (2.87) と (2.88) を 3 つ目の項に同時に用いた。最後の等号では、添字の反対称性 (2.87) と (2.88) から前二つの添字が揃った成分はゼロになることを用いた。得られた関係式 (2.103) は、添字の反対称性を表す関係式 (2.88) と同じ関係式であり、新たな独立な条件を与えない。同様の考察を繰り返せば、リーマンテンソルの 4 つの添字の内どれか二つが揃った成分は添字の入れ替えに対する反対称性の関係式に帰着され新たな条件を与えないことが示される。このことから時空の次元が 3 次元以下の場合、ビアンキの恒等式 (2.102) は、独立な条件を与えない事が分かる。4 つの成分が、全て異なる場合に、ビアンキの恒等式 (2.102) は初めて独立な制約を与える。再び 4 次元時空の場合を考える。式 (2.102) は、4 つの添字が全て異なる場合、以下の関係式を与える。

$$R_{0123} + R_{0231} + R_{0312} = 0. \quad (2.104)$$

関係式 (2.86)、(2.87)、(2.88) からリーマンテンソルの独立な成分の数を求める。以下時空の次元を D とする。添字 ($\sigma\alpha$) の組みを M 、添字 ($\beta\gamma$) の組みを N と置く。添字の入れ替えに対する反対称性 (2.87)、(2.88) より

M, N の独立の組みの数はそれぞれ $D(D-1)/2$ 個である。次に M と N の入れ替えに対する対称性 (2.86) から、リーマンテンソルの独立な成分の数は

$$\frac{(D(D-1)/2)(D(D-1)/2+1)}{2}, \quad (2.105)$$

である。4次元時空では、独立なリーマンテンソルの成分数は21個となる。さらにビアンキの恒等式 (2.104) より一つの成分が独立で無い事になる。したがって、4次元時空での独立なリーマンテンソルの成分数は20個となる。3次元時空では、式 (2.105) から独立なリーマンテンソルの成分数が6個となる。ビアンキの恒等式から新たな制約を受けないので、3次元時空での独立なリーマンテンソルの成分数は6個となる。

リッチーテンソルおよびメトリックテンソルは2階の対称テンソルであるから4次元時空では、独立な成分数は10個、3次元時空では6個である。したがって、3次元時空では、リッチーテンソルが決まれば、リーマンテンソルが決まる。しかし、4次元時空では、リッチーテンソルの独立な10個の成分を指定するだけでは、リーマンテンソルの独立成分20個の内半分しか決まらない。

ここで4次元時空に於けるゼロでない独立なリーマンテンソル全20成分を以下のまとめる。

$$\begin{array}{cccccc} R_{0101} & R_{0102} & R_{0103} & R_{0112} & R_{0113} & \\ R_{0123} & R_{0202} & R_{0203} & R_{0212} & R_{0213} & \\ R_{0223} & R_{0303} & R_{0313} & R_{0323} & R_{1212} & \\ R_{1213} & R_{1223} & R_{1313} & R_{1323} & R_{2323} & \end{array} \quad (2.106)$$

ここで R_{0312} はビアンキの恒等式 (2.104) より $R_{0123}, R_{0231}(R_{0213})$ と結ばれるため独立な成分から省かている。

2.12 ワイルテンソル

4次元以上の時空では、リッチーテンソルで決める事ができないリーマンテンソルの成分が残る。この残りの成分をワイル共形テンソルとして以下

のように定義する。

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}[g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma}] + \frac{1}{6}R[g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}]. \quad (2.107)$$

ワイルテンソルはリーマンテンソルと同じ対称性を持つ。即ち

$$\begin{aligned} C_{\beta\alpha\gamma\delta} &= -C_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\ C_{\alpha\beta\delta\gamma} &= -C_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\ C_{\gamma\delta\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

更にワイルテンソルのトレースは

$$g^{\gamma\alpha}C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \quad (2.109)$$

のようにゼロである。リッチテンソルはリーマンテンソルのトレース部であり、ワイルテンソルはリーマンテンソルのトレース部を抜いた部分、トレースレス部分である。したがって、4次元時空の場合、独立なワイルテンソルの成分の数は10個となる。一方、3次元時空では0個となる。

2.13 アインシュタイン方程式

重力場を記述するアインシュタイン方程式を導出する。指導原理の一つは、一般共変性、即ち方程式が一般座標変換に対して共変であることである。この要請を満たす為には、方程式がテンソルで書けている必要がある。もう一つは、エネルギー運動量の保存が必ず成り立つ事である。後者はストレス・エネルギーテンソルを用いて次のように表現できる。

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.110)$$

マックスウェル方程式が電荷保存則を必ず保証するように、アインシュタイン方程式はこの式の成立を必ず保証する必要がある。

ビアンキの恒等式(2.101)の μ と β の縮約をとると次の式を得る。

$$\nabla_{\alpha}R_{\nu\gamma} + \nabla_{\mu}R^{\mu}_{\nu\gamma\alpha} - \nabla_{\gamma}R_{\nu\alpha} = 0$$

次に $g^{\nu\gamma}$ を掛けると次の式を得る。

$$0 = \nabla_\alpha R - 2\nabla_\mu R^\mu_\alpha = \nabla_\mu (g^\mu_\alpha R - 2R^\mu_\alpha)$$

ここで $R^\mu_\alpha = g^{\mu\sigma} R_{\sigma\alpha}$ である。また、メトリックテンソルの共変ベクトルがゼロであることを用いた。以上から以下の恒等式を得る。

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (2.111)$$

従ってアインシュタイン方程式を以下の形にすれば、ビアンキの恒等式 (2.111) により、エネルギー運動量保存則が常に成立することが保証される。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \kappa^2 T^{\mu\nu}. \quad (2.112)$$

ここで κ^2 は定数である。アインシュタイン方程式の左辺のテンソルを

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}, \quad (2.113)$$

と定義してこれをアインシュタインテンソルと呼ぶ。式 (2.112) の両辺に $g_{\mu\nu}$ を掛けて縮約を取ると以下のようになる。

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R - 2R = -R = \kappa^2 T. \quad (2.114)$$

ここで $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ である。この式より $R = -\kappa^2 T$ となりアインシュタイン方程式を以下の形に変形出来る。

$$R^{\mu\nu} = \kappa^2 \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right). \quad (2.115)$$

この形のアインシュタイン方程式を用いると、スカラー曲率を計算せずリッチテンソルだけ計算すればよいので計算が楽になる。そのためこの形が用いられる事がしばしばある。

アインシュタイン方程式の未定定数は、弱い重力場の極限でアインシュタイン方程式がニュートンの万有引力の法則と矛盾しないという対応原理から導かれる。静止した圧力ゼロの非相対論的すなわち $P \ll \rho c^2$ の完全流体のエネルギー運動量テンソルは T^{00} 成分のみ値をもち $T^{00} = \rho c^2$ である。弱い重力場の極限では微小線素が次の様に見えるとする。

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Psi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2} \right) ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2).$$

(2.116)

ここで $|\Phi/c^2| \sim |\Psi/c^2| \ll 1$ である。これはメトリックテンソルを以下のように取ったことに対応する。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1 + \frac{2\Psi}{c^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \frac{2\Phi}{c^2}) \end{pmatrix}. \quad (2.117)$$

この行列の逆行列である上付きのメトリックテンソルは、 $\Phi/c^2, \Psi/c^2$ の一次までで以下のように求まる。

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2\Psi}{c^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \frac{2\Phi}{c^2}) \end{pmatrix}. \quad (2.118)$$

弱い重力場中のメトリックテンソル (2.117) は、一般に以下のように書ける。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.119)$$

ここで $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ であり、メトリクが式 (2.116) で表される場合

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2\Psi/c^2, & h_{0i} &= 0, \\ h_{ij} &= -2\Phi/c^2 \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.120)$$

である。微少量の一次までで逆行列で定義される上付きのメトリックテンソルは以下のようにかける。

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\ &= (\eta^{\mu\alpha} + h^{\mu\alpha})(\eta^{\nu\beta} + h^{\nu\beta})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\ &\sim \eta^{\mu\nu} + 2h^{\mu\nu} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$h^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}. \quad (2.121)$$

微少量の一次まででクリストッフェル記号は以下のように求まる。

$$\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}(h_{\gamma\nu,\beta} + h_{\gamma\beta,\nu} - h_{\nu\beta,\gamma}). \quad (2.122)$$

このようにクリストッフェル記号は、微少量の一次の量であるからリーマンテンソルをクリストッフェル記号から求める式 (2.84) の右辺第3項と4項に表れるクリストッフェル記号のかけ算の項は、微少量の2次以上となり無視出来る。その上で、リーマンテンソルの上付きの添字 α を下げると以下の結果を得る。

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} - h_{\nu\beta,\alpha\mu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} + h_{\mu\beta,\alpha\nu}). \quad (2.123)$$

ここで Φ, Ψ は時間に依存しないとし、式 (2.120) をこの式に代入することでリーマンテンソルのゼロで無い成分が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} R_{i0j0} &= -R_{0ij0} = R_{0i0j} = -R_{i00j} = \frac{\Psi_{,ij}}{c^2}, \\ R_{ijkl} &= \frac{1}{c^2}[-\delta_{il}\Phi_{,jk} + \delta_{lj}\Phi_{,ik} + \delta_{ik}\Phi_{,lj} - \delta_{kj}\Phi_{,il}]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

これからリッチテンソルは以下のようになる。

$$\begin{aligned} R_{00} &= g^{\alpha\sigma}R_{\sigma 0\alpha 0} = \frac{\Delta\Psi}{c^2}, \\ R_{0i} &= 0, \\ R_{jl} &= g^{\alpha\sigma}R_{\sigma j\alpha l} = g^{00}R_{0j0l} + R^k_{jkl} = -\frac{\Psi_{,jl}}{c^2} + \frac{1}{c^2}[\delta_{lj}\Delta\Phi + \Phi_{,lj}]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

リッチスカラーは以下のように求まる。

$$R = g^{00}R_{00} + g^{jl}R_{jl} = \frac{4}{c^2}\Delta\Phi - \frac{2}{c^2}\Delta\Psi. \quad (2.126)$$

ここで $\Delta = \sum_{i=1,2,3} \partial_i^2$ は、3次元のラプラシアンである。以上の結果からアインシュタインテンソル (2.113) の00成分は

$$G^{00} = R^{00} - \frac{1}{2}Rg^{00} = \frac{2\Delta\Phi}{c^2},$$

となり微少量の一次まででアインシュタイン方程式は以下のようになる。

$$\frac{2}{c^2} \Delta \Phi = \kappa^2 \rho c^2.$$

これがニュートンの万有引力の法則を表すポアソン方程式 $\Delta \Phi = 4\pi G\rho$ に一致する為には、

$$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.127)$$

であればよい。今考えている状況ではエネルギー運動量テンソルの非対角成分がゼロすなわち非等方ストレスが存在しない為、アインシュタイン方程式の非対角成分より $R_{ij} = 0$ が要請される。これより Ψ と Φ の間の以下の関係式を得る。

$$\Psi_{,ij} = \Phi_{,ij}. \quad (2.128)$$

これから積分定数の不定性を除いて

$$\Psi = \Phi, \quad (2.129)$$

であることが分かる。

2.14 重力場中の粒子の運動方程式

重力場中の粒子の運動方程式を導出する。粒子は重力以外の力を受けていないとする。粒子の質量を m とする。粒子の固有時間は次の式で与えられる。

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.130)$$

固有時間はスカラー量である。これを用いて固有速度、固有運動量を次のように定義する。

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$P^\mu = mU^\mu$$

これらの定義は、局所慣性系では、ミンコフスキー時空での定義と一致することは自明である。これらの定義から次の等式を得る。

$$g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = P_\mu P^\mu = m^2 \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = -m^2 c^2$$

等価原理より、重力場中の粒子の運動を記述する座標は必ず局所慣性系に取る事ができる。そこでは重力のみ感じて運動する粒子には、力が働かないので等速直線運動する。局所慣性系の物理量にチルダーを付けて表すと粒子の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{d\tilde{U}^\mu \vec{e}_\mu}{d\tau} = \frac{d\tilde{U}^\mu}{d\tau} \vec{e}_\mu = 0. \quad (2.131)$$

ここで、局所慣性系での基底の微分がゼロであることを用いた。この方程式を $\tilde{U}^\mu \vec{e}_\mu = U^\mu e_\mu$ を用いて一般座標での方程式に変換する。

$$\frac{dU^\mu e_\mu}{d\tau} = \frac{dU^\mu}{d\tau} e_\mu + U^\alpha \frac{de_\alpha}{d\tau} \quad (2.132)$$

$$= \frac{dU^\mu}{d\tau} e_\mu + U^\alpha \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.133)$$

$$= \frac{dU^\mu}{d\tau} e_\mu + U^\alpha U^\nu \Gamma_{\alpha\nu}^\mu e_\mu = 0. \quad (2.134)$$

よって自由落下する粒子の運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = -U^\alpha U^\nu \Gamma_{\alpha\nu}^\mu. \quad (2.135)$$

この方程式から分かるようにクリストッフエル記号は、粒子に働く重力を表す。粒子の運動方程式 (2.135) は、局所慣性系では粒子は等速直線運動をする、という指導原理で導かれた。局所慣性系では、二つの事象を最短距離で結ぶ曲線は直線である。二点を最短距離で結ぶ曲線を測地線と呼ぶ。そのため、運動方程式 (2.135) は、測地線方程式と呼ばれる。測地線方程式の右辺を左辺に持ってきて以下のように変形する。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} + U^\nu U^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\mu \\ &= U^\nu \left(\frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} + U^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\mu \right) \\ &= U^\nu \nabla_\nu U^\mu. \end{aligned} \quad (2.136)$$

この式の最後の式は、4元速度に沿った方向への4元速度の勾配を表している。重力場のみの影響の下で運動する粒子の軌跡は、粒子の4元速度の方向すなわち粒子の軌跡の接線方向に粒子の4元速度を平行移動したものであることを示している。

測地線方程式を共変ベクトル成分の発展方程式の形に変形することで時空の対称性と保存則の関係を導く。測地線方程式 (2.136) の両辺に $g_{\alpha\mu}$ を掛け、 μ で縮約をとる。メトリックの共変微分がゼロであることを使うと以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
0 &= U^\nu \nabla_\nu (g_{\alpha\mu} U^\mu) = U^\nu \nabla_\nu U_\alpha \\
&= U^\nu \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\nu} - U_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \right) \\
&= \frac{dU_\alpha}{d\tau} - U^\nu U_\beta \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} (g_{\gamma\alpha,\nu} + g_{\gamma\nu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\gamma}) \\
&= \frac{dU_\alpha}{d\tau} - \frac{1}{2} U^\nu U^\gamma (g_{\gamma\nu,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\nu} - g_{\alpha\nu,\gamma}) \\
&= \frac{dU_\alpha}{d\tau} - \frac{1}{2} U^\nu U^\gamma g_{\gamma\nu,\alpha}
\end{aligned}$$

最後変形では、対称テンソルと反対称テンソルの縮約がゼロになることを使った。得られた結果は以下のものである。

$$\frac{dU_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} U^\nu U^\gamma g_{\gamma\nu,\alpha}. \quad (2.137)$$

この式は、メトリックが x^α に依存しないとき、その座標に対応する粒子の4元速度の成分 U_α が保存することを示している。例として中心力場中を非相対論的速度で運動する粒子の角運動量保存則を示す。座標を球面極座標にとるとメトリックは、 $g_{rr} = 1 + h_{rr}$, $g_{\theta\theta} = r^2 + h_{\theta\theta}$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta + h_{\varphi\varphi}$ と書ける。ここで $h_{\alpha\alpha} \ll 1$ であり以下の計算では、速度が既に微量であるため無視する。メトリックは φ に依存しない。また、 $d\tau \sim dt$ と近似できる。微量の最低次で4元速度は以下のように書ける。

$$U_\varphi = g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \sim r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.138)$$

したがって、方程式 (2.137) より $U_\theta = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt}$ が保存することが示され

る。物理量 (2.138) は、 z 軸の周りの角運動量である。

測地線方程式 (2.135) から、弱い重力場の極限で良く知られたニュートンの万有引力の元で運動する方程式が導かれることを示す。そこで、光速より十分遅い速度の粒子が、弱い重力場中を運動する場合を考える。微小線素が次のように書けるとする。

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Psi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2). \quad (2.139)$$

ここで $|\Phi|/c^2 \sim |\Psi|/c^2 \ll 1$ である。これはメトリックテンソルを以下のように取ったことに対応する。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1 + \frac{2\Psi}{c^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \frac{2\Phi}{c^2}) \end{pmatrix}. \quad (2.140)$$

この行列の逆行列である上付きのメトリックテンソルは、 $|\Phi|/c^2 \sim |\Psi|/c^2$ の一次までで以下のように求まる。

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2\Psi}{c^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \frac{2\Phi}{c^2}) \end{pmatrix}. \quad (2.141)$$

固有時間は次のように近似出来る。

$$d\tau \sim dt \left(1 + \frac{\Psi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right). \quad (2.142)$$

ここで $v^i = dx^i/dt$ は粒子の3次元速度であり、 $v^2 \sim |\Phi|$ であるとする。この仮定は、粒子の運動が重力場の存在により誘起されたものであるなら、その運動エネルギーはポテンシャルエネルギーと同程度であることに基づい

ている。式 (2.142) では、 $|\Psi|/c^2$ の一次まで展開し、 Φv^2 の項を落とした。四元速度は次のようになる。

$$U^\mu = \left(c \left(1 - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right), v^i \left(1 - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right) \right). \quad (2.143)$$

クリストッフェル記号を $|\Psi|/c^2$ の一次までで計算すると以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} = \frac{1}{c} \frac{\dot{\Psi}}{c^2}, & \Gamma_{i0}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} g_{00,i} = \frac{\Psi_i}{c^2}, \\ \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (-g_{ij,0}) = -\frac{1}{c} \frac{\dot{\Phi}}{c^2} \delta_{ij}, & \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} g^{ii} (-g_{00,i}) = \frac{\Psi_i}{c^2}, \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} g^{ii} g_{ij,0} = -\frac{1}{c} \frac{\dot{\Phi}}{c^2} \delta_j^i, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{ii} (g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}) = \frac{1}{c^2} (-\Phi_{,k} \delta_{ij} - \Phi_{,j} \delta_{ik} + \Phi_{,i} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (2.144)$$

ここで $\dot{}$ は時間偏微分を表す。以下の計算の準備のため、これらの縮約を取った結果も以下にまとめる。

$$\Gamma_{i0}^i = -3 \frac{1}{c} \frac{\dot{\Phi}}{c^2}, \quad \Gamma_{ji}^i = -3 \frac{\Phi_{,j}}{c^2}, \quad (2.145)$$

$$\Gamma_{0\alpha}^\alpha = \left(-3 \frac{\dot{\Phi}}{c^2} + \frac{\dot{\Psi}}{c^2} \right) \frac{1}{c}, \quad \Gamma_{i\alpha}^\alpha = -3 \frac{\Phi_{,i}}{c^2} + \frac{\Psi_i}{c^2}. \quad (2.146)$$

測地線方程式 (2.135) の空間成分から以下の式を得る。具体的計算に進む前に現れる項の次数評価に関する注意を述べる。粒子の軌道に沿った時間全微分は

$$\frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi$$

であり、 $|\dot{\Phi}| \sim |\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi|$ である。したがって、 Φ の速度の一次が掛かった項は、 Φ の時間偏微分と同じオーダーの項であり無視することができない。更に dv^i/dt は、 $\Phi_{,i}$ のオーダー即ち Φ/c^2 の一次のオーダーであることが期待される。得られた結果を眺めてこの推測が正しいことを後ほど確認する。このことに注意して測地線方程式の空間成分を Φ/c^2 の2次以上の項を落

とすという方針で計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[v^i \left(1 - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right) \right] \times \left(1 - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} \right) &= -U^0 U^0 \Gamma_{00}^i - 2U^0 U^j \Gamma_{0j}^i - U^j U^k \Gamma_{jk}^i \\ &= -c^2 \frac{\Psi_{,i}}{c^2} + 2v^j c \frac{1}{c} \dot{\Phi} \delta_j^i - v^j v^k \frac{1}{c^2} (-\Phi_{,k} \delta_{ij} - \Phi_{,j} \delta_{ik} + \Phi_{,i} \delta_{jk}) \\ &= -\Psi_{,i} \end{aligned}$$

この式の左辺の最低次は dv^i/dt である。したがって、粒子の運動方程式は

$$\frac{dv^i}{dt} = -\Psi_{,i}, \quad (2.147)$$

と与えられる。今、非等方ストレスが存在しないとしている為、 $\Psi = \Phi$ であり、この方程式は確かに、重力ポテンシャル中を運動する粒子の運動方程式を再現している。また $|dv^i/dt| \sim |\Phi|$ の想定が正しいことも確認された。この様にメトリック (2.117) は、弱い重力場の極限で、ニュートンの万有引力の法則および重力場中の粒子の運動方程式を再現することから、ニュートニアンメトリックあるいはニュートニアンゲージと呼ばれる。

測地線方程式 (2.135) の時間成分から以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} c \frac{d}{dt} \left[-\frac{\Psi}{c^2} + \left(\frac{v^2}{2c^2} \right) \right] &= -U^0 U^0 \Gamma_{00}^0 - U^0 U^i \Gamma_{i0}^0 - U^i U^0 \Gamma_{0i}^0 - U^i U^j \Gamma_{ij}^0, \\ &= -c \frac{\dot{\Psi}}{c^2} - 2cv^i \frac{\partial_i \Psi}{c^2}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

最初の等号の右辺の最後の項は、 Ψ/c^2 の2次のオーダーの量なので落とした。ここで粒子の軌道に沿った時間全微分、即ちラグランジ的微分が

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + v^i \partial_i$$

と表せることから、式 (2.148) の最初の等号の右辺第二項・第三項と第一項が同じ次数であり、どちらも無視し得ない。粒子の単位質量辺りの力学的エネルギー $\varepsilon \equiv v^2/2 + \Psi$ を用いてこの式を変形すると以下の式を得る。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (2.149)$$

式 (2.149) は、ポテンシャルの時間変化が無い時、重力ポテンシャルエネル

ギーと運動エネルギーの和である力学的エネルギーが保存することを示す式である。一方、ポテンシャルが時間に陽に依存している時は、粒子の単位質量辺りの力学的エネルギーの増減があることを示している。例えば、月の重力を利用した人工衛星の加速法であるスイングバイは、この効果を用いた航法である。月に衝突する形で人工衛星を月の周辺軌道に投入すると、月の重力を最も強く受ける月に最接近した時、月は人工衛星から遠ざかる方向に移動する。その為、月の重力ポテンシャルの時間偏微分が正、つまりポテンシャルが浅くなり続ける。この時、人工衛星は加速される。逆に月に追突する形で投入すると、人工衛星は減速される。式 (2.149) で表されるエネルギー変化は、バイオレントリラキゼーションと呼ばれる、銀河内の星や暗黒物質の平衡分布を決定付けた物理過程と考えられている。

2.15 重力場中の光の伝搬：測地線方程式

次に光子のように質量がゼロの粒子の重力場中の運動を調べる。この時質量も固有時間もゼロであるから節 1.8 で定義したように光の軌跡をトレースするスカラー量アフィンパラメータ λ を用いて、光の四元運動量を次のように定義する。

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

当然だが $m \neq 0$ の時、これは質量がゼロで無い粒子の四元運動量と一致し

$$P_\mu P^\mu = -m^2 c^2$$

を満たす。光の固有時間がゼロであるため固有速度を定義できず運動方程式を考察するには、4 元運動量を用いる以外ない。そこで質量 m の粒子の重力場中の運動方程式 (2.135) の両辺に m^2 を掛け、四元運動量で書き換えてみる。

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = -P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu. \quad (2.150)$$

ここで $d\lambda = d\tau/m$ である。この方程式は $m \rightarrow 0, d\tau \rightarrow 0$ の極限で、質量ゼロの粒子即ち光にも適応できる重力場中の運動方程式である。しかし、この

式はアフィンパラメータを陽に含むため形式的にはよいが、具体的に時間発展を追うには適していない。そこで左辺を更に変形し、以下の形にする。

$$\frac{dP^\mu}{dx^0} \frac{dx^0}{d\lambda} = -P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$$

この左辺の変数変換は、光の軌跡をトレースする変数をアフィンパラメータから時間への変換を行なったことに対応している。したがって、光の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{dP^\mu}{dx^0} = -\frac{1}{P^0} P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu. \quad (2.151)$$

光も局所慣性系では、直進する。一般座標系では、光は最短距離となる経路即ち測地線を進む。方程式 (2.151) を光の測地線方程式、あるいは単に測地線方程式と呼ぶ。測地線方程式の物理的内容の理解を深めるため以下のような変形を行なう。

$$\begin{aligned} \frac{dP^\mu}{d\lambda} + P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha} + P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu, \\ &= P^\alpha \left(\frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha} + P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right), \\ &= P^\alpha \nabla_\alpha P^\mu = 0. \end{aligned} \quad (2.152)$$

3つ目の等号に現れた $P^\alpha \nabla_\alpha P^\mu$ は、4次元時空中での光の軌跡に沿った勾配を表しており、測地線方程式は、光が自身の軌跡に沿った4元運動量の勾配がゼロになる経路を進むことを意味している。局所慣性系では、光が直進するとは、4元運動量が自身が向く方向に単に平行移動するだけであることを考えれば、この結果は当然な結果である。

下付き四元運動量ベクトルを使った方程式にしておくると便利なのでそれを導出する。メトリックテンソルの共変微分がゼロであることから方程式 (2.152) は以下のように変形できる。

$$0 = P^\alpha \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} P_\nu) = g^{\mu\nu} P^\alpha \nabla_\alpha P_\nu$$

任意のメトリックテンソルについてこの式が成り立つことから以下の方程式を得る。

$$P^\mu \nabla_\mu P_\nu = P^\mu \partial_\mu P_\nu - P^\mu P_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0. \quad (2.153)$$

ここで

$$\begin{aligned} P^\mu P_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= P^\mu P_\alpha \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}), \\ &= \frac{1}{2} P^\mu P^\beta (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}), \\ &= \frac{1}{2} P^\mu P^\beta g_{\beta\mu,\nu}. \end{aligned}$$

また

$$P^\mu \frac{\partial P_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial P_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{dP_\nu}{d\lambda} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dP_\nu}{dx^0} = P^0 \frac{dP_\nu}{dx^0},$$

であるので求める方程式は以下のようになる。

$$\frac{dP_\nu}{dx^0} = \frac{1}{2} \frac{1}{P^0} P^\mu P^\beta g_{\beta\mu,\nu} \quad (2.154)$$

2.16 重力赤方偏移・重力散乱

測地線方程式 (2.154) の第 0 成分をメトリックテンソルが式 (2.141) で与えられ且つ弱い重力場の極限の場合について取り扱う。光子の周波数は局所慣性系で定義する。即ち

$$\frac{h\nu}{c} \equiv \frac{d\tilde{x}^0}{d\lambda}, \quad (2.155)$$

である。光子のエネルギーを $\varepsilon = h\nu$ で表す。局所慣性系では $\tilde{P}_0 = \eta_{00} \tilde{P}^0 = -\varepsilon/c$ である。一般座標への変換は次の式でできる。

$$P_0 = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^0} \tilde{P}_\mu. \quad (2.156)$$

変換係数は、局所慣性系から一般座標系へのメトリックテンソルの変換で与えられる以下の連立方程式を解く事で得られる。

$$\begin{aligned} g_{00} &= - \left(1 + \frac{2\Psi}{c^2} \right) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^0} \eta_{\mu\nu} \\ g_{0i} &= 0 = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^i} \eta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$g_{ij} = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \delta_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^j} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.157)$$

次のセットが、 $|\Phi/c^2|$ の一次までこれらの方程式を満たす解の一つであることを容易に示すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} &= \left(1 + \frac{\Psi}{c^2}\right), \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^0} = 0, \\ \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^i} &= 0, \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

ここで変換係数は、 4×4 行列で 16 個の未定成分を持つが、それを決定する方程式 (2.157) は、メトリックテンソルが対称であるため、独立のものは 10 個のみである。したがって、変換係数の内 6 個は未定となる。この 6 つは、それぞれ x, y, z 軸回りの座標回転の自由度の 3 つと x, y, z 軸方向にそれぞれ等速直線運動する系へのローレンツ変換の自由度 3 つの合計 6 つの自由度に対応している。即ち、これらの変換を施しても同じメトリックが与えられる。ここでは、変換行列の非対角要素をゼロとしたが、これは、出発点として使用した局所慣性系に対して相対運動をしておらず空間の各軸は平行であるという自然な仮定を暗黙の内にしていることに対応している。したがって P_0 は

$$P_0 = - \left(1 + \frac{\Psi}{c^2}\right) \frac{\epsilon}{c} \quad (2.159)$$

で与えられる。簡単のため光子の進行方向を x_1 方向とし、重力レンズ効果による経路の曲がり小さく、直進するとする Born 近似を適応する。測地線方程式 (2.154) から次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} - \frac{d(1 + \Psi/c^2)\epsilon}{dx^0} &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,0} \frac{P^\alpha P^\beta}{P^0} = \frac{1}{2} \left(g_{00,0} P^0 + g_{11,0} \frac{(P^1)^2}{P^0} \right) \\ &= \frac{1}{P^0} \left(- \frac{\dot{\Psi}}{c^3} (P^0)^2 - \frac{\dot{\Phi}}{c^3} (P^1)^2 \right) \end{aligned}$$

ここで

$$0 = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = - \left(1 + \frac{2\Psi}{c^2}\right) (P^0)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (P^1)^2$$

を用いて $(P^1)^2$ を消去すると次の式を得る。

$$-\frac{d(1+\Psi/c^2)\varepsilon/c}{dx^0} = -\left(\frac{\dot{\Psi}}{c^3} + \frac{\dot{\Phi}}{c^3}\right)P^0$$

$P^0 = g^{00}P_0 = -(1-2\Psi/c^2)P_0 = (1-\Psi/c^2)\varepsilon/c$ を代入し、 $\Psi = \Phi$ であることを使って整理すると次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \varepsilon\frac{\Phi}{c^2}\right) &= \frac{\varepsilon}{c^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \\ &= \frac{2\varepsilon}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.160)$$

これが重力場中を伝搬する光子のエネルギーの発展方程式である。

重力ポテンシャルが時間に依存せず定常な時、 $\dot{\Phi} = 0$ であり、方程式 (2.160) の右辺はゼロになる。したがって、光子の全力的エネルギー $\varepsilon + \varepsilon\Phi/c^2$ が、保存する。第二項は重力ポテンシャルエネルギーである。例えば、地上の場所 \vec{x}_1 で周波数が ν_1 であった光子が宇宙に向かって放たれた時、重力ポテンシャルの坂を登って場所 \vec{x}_2 に到達した時の周波数が ν_2 になったとする。このとき ν_2 は、エネルギー保存則より以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \nu_2\left(1 + \frac{\Phi(\vec{x}_2)}{c^2}\right) &= \nu_1\left(1 + \frac{\Phi(\vec{x}_1)}{c^2}\right), \\ \nu_2 &= \nu_1\left[1 + \frac{1}{c^2}(\Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2))\right]. \end{aligned} \quad (2.161)$$

ここでは $|\Phi|/c^2 \ll 1$ の一次までで展開した。上記の例では $\Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2) < 0$ であり、地上から放たれた光は、地球の重力に逆らって上昇するにつれてエネルギーが小さくなり、周波数が小さく、波長が長くなる。この効果を重力赤方偏移と呼ぶ。重力場中を光子が運動することでスタート地点と終点での重力ポテンシャルの差額分が光子のエネルギー変化に使われる効果である。宇宙論では、Sachs-Wolfe 効果として宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎの大角度スケールの揺らぎの振幅の決定に重要な役割を果たしている。

重力赤方偏移を各光子が占めるエネルギー状態の変化という観点から解説する。一辺が \tilde{L} の箱の中に閉じ込められた光子が周期境界条件を満たす状態を考える。ミンコフスキー時空では、周期境界条件を満たすためには

光子が占めるエネルギー固有状態の波数ベクトルの各成分は以下の条件を満たすことが知られている。

$$k_i = \frac{2\pi}{\tilde{L}} n_i. \quad (2.162)$$

ここで $i=1,2,3$ 、 n_i は整数である。このエネルギー固有状態の周波数 $\tilde{\nu}$ は、

$$\tilde{\nu} = \frac{c}{\tilde{L}} n, \quad (2.163)$$

と書ける。ここで $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$ である。簡単のために x 方向に進行する光を考える。この時、波数ベクトルは $\vec{k} = (\tilde{k}, 0, 0)$ であり、箱の中に含まれる波の山の数、即ち波の数が n であれば

$$\tilde{k}\tilde{L} = 2\pi n, \quad (2.164)$$

を満たす。重力の存在によりメトリックが、ミンコフスキーからニュートニアンに変化したことにより、考えている箱の一边の長さが \tilde{L} から L に変化したとする。箱の長さは、同時刻に測定した箱の両端の間隔である。同時刻に x 軸に沿った箱の両端の座標を測定するという二つの事象 A,B 間の固有距離は、

$$ds = \tilde{L} = \sqrt{1 - \frac{2\Phi}{c^2}} L \sim \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) L, \quad (2.165)$$

のように結ばれ、 $\Phi < 0$ であることから、重力場の存在により箱の一边の長さが収縮することが分かる。天体から十分離れていて重力が無視できる系に置かれた箱が天体に近づき重力の影響を受けて縮んだとする。この過程で、この中に存在する式 (2.164) を満たす光の波の波の数は不変であり、波数が k に変化したとすると

$$kL = 2\pi n, \quad (2.166)$$

を満たす。したがって、

$$k = \frac{2\pi}{L} n = \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \frac{2\pi}{\tilde{L}} n = \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \tilde{k}, \quad (2.167)$$

となり重力場の存在により波数が増加する。以上の結果は、天体の重力が

無視できる無限遠で周波数が $\tilde{\nu}$ であった状態の周波数が、重力場 Φ が存在すると周波数 ν の状態に変化し、それらが

$$\tilde{\nu} = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \nu, \quad (2.168)$$

の関係で結ばれることを示している。この関係式は、式 (2.161) と一致している。重力赤方偏移は、重力場の存在により空間が圧縮され、光子が占めるエネルギー固有状態の周波数が増加するために引き起こされると理解できる。すなわち光子自身は、同じ席（エネルギー固有状態）に座っているのだが、重力場の存在によりその座席の値段が上がる（周波数が上がる）ことに起因して引き起こされる現象であると解釈できる。

方程式 (2.160) の右辺は、光子が伝搬する途中で重力ポテンシャルが時間変化することで光子のエネルギー変化を生じる効果を示す。非相対論的粒子のエネルギーの進化の式 (2.149) と比較すると 2 倍だけ異なっているが、本質的な物理的効果は同じである。宇宙では、銀河や銀河団といった巨大な質量をもった天体は、固有速度を持って宇宙空間を運動している。これら天体の背景の天体から放出された光が、これらの天体の通過する時、重力ポテンシャルの時間変化を感じ光子のエネルギーが変化する。増減は、人工衛星のスイングバイの場合と同じで、衝突方向の入射でエネルギーが増加即ちブルーシフトし、追突方向の入射で減少即ちレッドシフトする。光が重力源により散乱される事でエネルギーが増減する効果なので重力散乱と呼ぶ。宇宙に存在する天体は、インフレーションと呼ばれる宇宙創成期に量子揺らぎによって生成された物質密度のシワが、重力によって次第に集まって来て形成されたと考えられている。もし宇宙のエネルギーが物質だけで構成され、幾何学的に平坦であるなら、揺らぎの振幅が十分小さい線形段階の揺らぎの成長過程で重力ポテンシャルは時間変化しない。観測から現在の宇宙は、幾何学的に平坦であるが、宇宙のエネルギーは、物質が凡そ 30% で残り 70% はダークエネルギーと呼ばれる正体不明でその重力により宇宙を加速させる物質で構成されていることが明らかになっている。ダークエネルギーが存在すると揺らぎの振幅が十分小さい線形段階の揺らぎの成長段階の重力ポテンシャルに時間変化が生じる。その為宇宙マイク

ロ波背景放射が、我々に届く間にこの重力ポテンシャルの時間変化を感じてそのエネルギーに変化を生じる。密度揺らぎの進化によって生じる重力ポテンシャルの時間変化であるから、伝搬する方向によってどれだけエネルギーが変化するか異なる。この結果、宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎに特徴的な情報が刻印される。伝搬過程での重力ポテンシャルの時間変化の積算量が観測されるのでこの効果を late integrated Sachs-Wolfe 効果と呼ぶ。これを利用して、宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎの詳細を観測することでダークエネルギーに関する情報を引き出す事ができる。宇宙マイクロ波背景放射が、放たれる宇宙晴れ上がり期は物質優勢期であるが、輻射のエネルギー密度も宇宙膨張へ無視し得ない影響を持つ。その為、宇宙晴れ上がり期から暫くの期間は、密度揺らぎの成長に伴う重力ポテンシャルの時間変化が現れる。この結果、宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎに特徴的なシグナルが刻印される。この効果は、early integrated Sachs-Wolfe 効果と呼ばれ、宇宙の物質密度の測定に用いられる。

2.17 重力レンズ

この節では、弱い重力場の極限で光の測地線方程式の空間成分を扱い重力レンズ効果の基礎について学ぶ。メトリックテンソルが式 (2.141) で与えられ、 Ψ, Φ は時間に陽に依存しないとする。光の4元運動量の空間成分は以下のように書ける。

$$P^i = \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^i}{dx^0} = p^0 \gamma^i. \quad (2.169)$$

ここで

$$\gamma^i = \frac{dx^i}{dx^0}, \quad (2.170)$$

で定義される3次元ベクトル $\vec{\gamma}$ は光の進行方向を表すベクトルである。重力場が存在しなかった時の進行方向ベクトルを $\vec{\gamma}^i$ とし、重力場の存在によって変更を受けた光の進行方向の変化量を $\delta\gamma^i$ とする。 $\delta\gamma^i$ は $|\Phi/c^2|$ と同じオーダーの微量である。

測地線方程式 (2.154) の空間成分は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{dp_i}{dt} &= \frac{1}{2p^0} (p^0 p^0 g_{00,i} + p^j p^k g_{jk,i}), \\
&= -\frac{p^0}{c^2} [\Psi_{,i} + \delta_{jk} \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \Phi_{,i}], \\
&= -\frac{p^0}{c^2} (\Psi_{,i} + \Phi_{,i}), \\
&= -\frac{1}{c^2} \frac{h\nu}{c} (\Psi_{,i} + \Phi_{,i}). \tag{2.171}
\end{aligned}$$

最後の等号では、 $\delta_{ij} \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j = 1$ 、即ち重力場が存在しない時の光の方向ベクトルの大きさが1であることを用いた。これは慣性系では

$$\begin{aligned}
0 &= \eta_{\mu\nu} \tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\lambda} \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\lambda} = -\left(\frac{d\tilde{x}^0}{d\lambda}\right)^2 + \delta_{ij} \frac{d\tilde{x}^i}{d\lambda} \frac{d\tilde{x}^j}{d\lambda} \\
&= \left(\frac{d\tilde{x}^0}{d\lambda}\right)^2 (-1 + \delta_{ij} \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j)
\end{aligned}$$

となることから証明できる。ここで

$$\begin{aligned}
p^0 &= \left(1 - \frac{\Psi}{c^2}\right) \frac{h\nu}{c}, \\
p_i &= g_{ij} p^j = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{\Psi}{c^2}\right) \frac{h\nu}{c} (\tilde{\gamma}^j + \delta\gamma^j), \\
&= \left[\left(1 + \frac{\Psi}{c^2}\right) \frac{h\nu}{c} - \frac{2}{c^2} (\Psi + \Phi) \frac{h\nu}{c}\right] (\tilde{\gamma}^j + \delta\gamma^j)
\end{aligned}$$

である。方程式 (2.171) の左辺は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{2}{c^2} \tilde{\gamma}^j \frac{h\nu}{c} \frac{d(\Psi + \Phi)}{cdt} + \frac{h\nu}{c} \frac{d\delta\gamma^j}{cdt}, \\
&= -\frac{2}{c^2} \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \frac{h\nu}{c} (\Psi + \Phi)_{,k} + \frac{h\nu}{c} \frac{d\delta\gamma^j}{cdt}. \tag{2.172}
\end{aligned}$$

ここで $d\tilde{\gamma}^j/dt = 0$ 即ちゼロ次の光の進行方向は時間変化しないこと、及び光子のエネルギーの変化は微量の一次であることから $\frac{d[(\Phi+\Psi)h\nu]}{dt} = h\nu \frac{d(\Phi+\Psi)}{dt}$ および $\frac{d(h\nu\delta\gamma^j)}{dt} = h\nu \frac{d\delta\gamma^j}{dt}$ と近似できること更に光のエネルギーの変化を記述する方程式 (2.160) を用いた。式 (2.172) を用いて方程式 (2.171) を整理すると重力場中の光の進行方向を決定する方程式として以下の結果

を得る。

$$\frac{1}{c} \frac{d\delta\gamma^i}{dt} = -\frac{1}{c^2} (\Psi_{,i} + \Phi_{,i}) + 2 \frac{\tilde{\gamma}^k}{c^2} (\Phi_{,k} + \Psi_{,k}) \tilde{\gamma}^i. \quad (2.173)$$

参考のため測地線方程式 (2.152) の空間成分から重力場中の光の進行方向を決定する方程式 (2.173) を導出する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{dp^i}{dt} &= -\frac{1}{p^0} (p^0 p^0 \Gamma_{00}^i + 2p^0 p^j \Gamma_{0j}^i + p^j p^k \Gamma_{jk}^i), \\ &= -p^0 \frac{\Psi_{,i}}{c^2} - p^0 \left(-2 \frac{\tilde{\gamma}^i}{c^2} \tilde{\gamma}^k \Phi_{,k} + \frac{1}{c^2} \delta_{jk} \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \Phi_{,i} \right), \\ &= -\frac{p^0}{c^2} (\Psi_{,i} + \Phi_{,i}) + 2 \frac{p^0}{c^2} \tilde{\gamma}^k \Phi_{,k} \tilde{\gamma}^i, \end{aligned} \quad (2.174)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\left(\left(1 + \frac{\Psi}{c^2} \right) \frac{hv}{c} - \frac{2\Psi}{c^2} \frac{hv}{c} \right) (\tilde{\gamma}^i + \delta\gamma^i) \right], \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{hv}{c} (\Psi + \Phi) \tilde{\gamma}^i + \frac{hv}{c} \frac{d\delta\gamma^i}{dt} - \frac{2}{c^2} \frac{hv}{c} \frac{d\Psi}{dt} \tilde{\gamma}^i, \\ &= \frac{hv}{c} \frac{d\delta\gamma^i}{dt} - \frac{2}{c^2} \frac{hv}{c} \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^k \Psi_{,k}. \end{aligned} \quad (2.175)$$

二つ目の等号では、光の測地線方程式 (2.160) の結果を用いた。三つ目の等号では、 $\Phi = \Psi$ とした。式 (2.175) と式 (2.174) から光の進路の変化を与える方程式として以下の方程式を得る。

$$\frac{1}{c} \frac{d\delta\gamma^i}{dt} = -\frac{1}{c^2} (\Psi_{,i} + \Phi_{,i}) + 2 \frac{\tilde{\gamma}^k}{c^2} (\Phi_{,k} + \Psi_{,k}) \tilde{\gamma}^i.$$

当然だが方程式 (2.173) と同じ結果が得られた。

重力場中の光の進行方向を決定する方程式 (2.173) をさらに整理して、重力レンズ効果による屈折角を決定する方程式を導出する。 $\vec{\gamma}$ に直交する単位ベクトル $\vec{\gamma}_{\perp,1}$ さらに $\vec{\gamma}$ と $\vec{\gamma}_{\perp,1}$ に直交する単位ベクトル $\vec{\gamma}_{\perp,2}$ を導入する。 $\delta\vec{\gamma}$ をゼロ次の光の進路に平行な成分 $\delta\gamma_{\parallel}$ と垂直な成分 $\delta\gamma_{\perp,1}, \delta\gamma_{\perp,2}$ に以下のように分解する。

$$\begin{aligned} \delta\gamma_{\parallel} &= \vec{\gamma} \cdot \delta\vec{\gamma}, \\ \delta\gamma_{\perp,1} &= \vec{\gamma}_{\perp,1} \cdot \delta\vec{\gamma}. \end{aligned}$$

$$\delta\gamma_{\perp,2} = \vec{\gamma}_{\perp,2} \cdot \delta\vec{\gamma}. \quad (2.176)$$

これらを用いて重力場の存在による光の進行方向の変化を記述する方程式 (2.173) に $\vec{\gamma}^i$ および $\vec{\gamma}_{\perp,1}^i, \vec{\gamma}_{\perp,2}^i$ を掛けて i で縮約を取り、この方程式を以下のように二つに分解する。

$$\frac{1}{c} \frac{d\delta\gamma_{\parallel}}{dt} = -\frac{1}{c^2} \vec{\gamma}^i (\Psi_{,i} + \Phi_{,i}) + 2 \frac{\vec{\gamma}^k}{c^2} (\Phi_{,k} + \Psi_{,k}), \quad (2.177)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d\delta\vec{\gamma}_{\perp}}{dt} = -\frac{1}{c^2} \vec{\nabla}_{\perp} (\Psi + \Phi). \quad (2.178)$$

ここで $\delta\vec{\gamma}_{\perp}$ は $\delta\gamma_{\perp,1} \vec{\gamma}_{\perp,1} + \delta\gamma_{\perp,2} \vec{\gamma}_{\perp,2}$ であり、 $\vec{\nabla}_{\perp}$ は光のゼロ次の経路に垂直な方向への勾配である。 $\Phi = \Psi$ を代入すると方程式 (2.178) は以下のように書ける。

$$\frac{1}{c} \frac{d\delta\vec{\gamma}_{\perp}}{dt} = -\frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_{\perp} \Phi. \quad (2.179)$$

これが重力の存在により光の進行方向がどのように変化するかを記述する方程式である。これを視線方向に沿ってゼロ次の光の経路に沿って積分すると以下の結果を得る。

$$\delta\vec{\gamma}_{\perp} = - \int d\ell \frac{2\vec{\nabla}_{\perp} \Phi}{c^2}. \quad (2.180)$$

これらの結果は、光が伝搬する途中に存在する天体の重力により、進行方向と垂直に力を受けて光の進行方向が曲がることを示している。これを重力レンズ効果と呼ぶ。 $\alpha = |\vec{\gamma}_{\perp}|$ は、光の進行方向が正味曲がった角度を表し曲がり角 (deflection angle) と呼ぶ。重力レンズ効果による光の曲がり角は、光の波長に依存しない。したがって、重力レンズ効果による天体の見え方は波長に依存しない。多くの天体の重力レンズ効果による deflection angle は非常に小さく、大きくても高々 10^{-4} ラジアン程度である。したがって重力レンズによる曲がり角が小さいとして、式 (2.180) の積分実行時重力源が存在していなかった時の経路に沿って積分を行なう近似がよい近似で扱える。重力ポテンシャルが時間に陽に依存しないとしているため、測地線方程式の時間成分 (2.160) より $\varepsilon(1 + \Phi/c^2)$ が保存する。重力レンズを引き起こす天体をレンズ天体とよぶ。重力レンズ現象が現れる状況では、光源となる

レンズ天体の背景の天体は、レンズ天体より十分遠方でありレンズ天体の重力ポテンシャルはゼロであると考えて良い。さらに観測者は、レンズ天体から十分離れておりレンズ天体の重力ポテンシャルはゼロであると考えて良い。したがって、観測される光の波長は、光源を発した時の光の波長と同じである。

図 2.6 に自由落下するエレベータ内を伝搬する光子の様子を示した。エレベータ乗って一緒に自由落下する観測者は、局所慣性系にいる観測者と考えることができる。この観測者が左の壁から右の壁へ進む光を観測すると図の黒い破線に沿って直進するように観測される。一方、エレベータの外にいる観測者は光は丸で示した軌跡に沿って伝搬したと観測され、光の進行方向が曲がったと観測される。即ち重力によって光が曲がったと観測される。

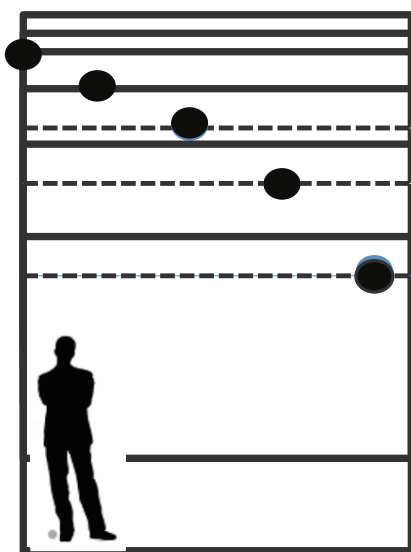


図 2.6 自由落下するエレベータと光の伝搬。

重力レンズ効果でどのような現象が観測されるかを概観するために、光の屈折という観点から重力レンズを解説する。簡単の為光の進行方向を x^1 方向とする。式 (2.139) でメトリックが与えられる場合について、光の位相速

度がどのようになるか調べる。局所慣性系での角振動数を ω 、波数を k とする。メトリックが式 (2.139) で与えられる座標系での 4 元共変波数ベクトルを $(k_0, k_1, 0, 0)$ とするとこれらの成分は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} \tilde{k}_0 = - \left(1 + \frac{\Psi}{c^2} \right) \frac{\omega}{c}, \\ k_1 &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \tilde{k}_1 = \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right) k. \end{aligned} \quad (2.181)$$

ここで $k_0 = \eta_{00} k^0 = -\omega/c$ 、及び式 (2.158) を用いた。時刻 t の時に x にあった波面が微小時間 dt 後に $x+dx$ に移動したとする。位相一定面 ($k_\mu x^\mu = \text{一定}$) の方程式

$$k_0 c t + k_1 x = k_0 c (t + dt) + k_1 (x + dx),$$

から同位相面が伝搬する速度即ち位相速度が微少量の一次までで以下のように計算出来る。

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ck_0}{k_1} = \left(1 + \frac{\Psi + \Phi}{c^2} \right) \frac{\omega}{k} = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \frac{\omega}{k}. \quad (2.182)$$

最後の等号では、非等方ストレスが無視できると仮定して $\Psi = \Phi$ を代入した。右辺の ω/k は局所慣性系での光の位相速度即ち c であり、この式は重力場の存在は屈折率

$$n = 1 - \frac{2\Phi}{c^2}, \quad (2.183)$$

の媒質と同じ役割を果たす事を示している。重力ポテンシャルは重力源から無限に離れた地点でゼロになるように零点を決める。そのため $\Phi < 0$ であり、重力場が存在すると屈折率は 1 以上となり、重力が強い場所ほど位相速度が遅くなる。

図 2.7 に光源 Source から発せられた光が宇宙空間を伝搬して観測者に届くまでの光の波面の伝搬の様子をしめした。光源から発せられた直後は球面波として伝搬する。伝搬途中に星や銀河の集団のような質量な大きな天体が存在しているとする。天体の中心部程重力ポテンシャルが深いため屈折率が大きく位相速度が遅くなる。その結果波面に図のような変形が生

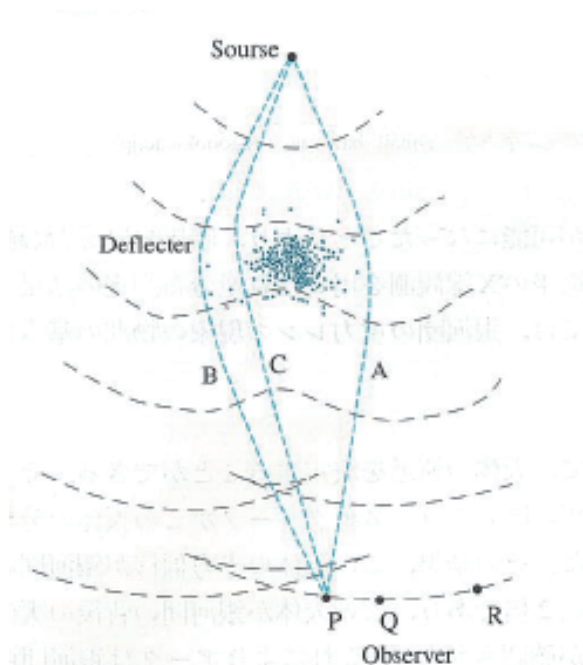


図 2.7 重力レンズによる光の屈折。

じる。波面に垂直方向が光の伝搬方向である。分かりやすくするため光源 **Source** は、超新星爆発のような突発性天体であり、図はその第一波の伝搬を表しているとする。観測者 **P** には三つの波面が到達する。まず始めに到達する波面は光線 **A** の方向から届く。したがって、天球面上の **A** の方向に天体が観測される。しばらくすると次の波面が到達し同じ天体が **B** の方向に観測される。最後に三つ目の波面が到達し同じ天体が **C** の方向に観測される。つまり重力レンズ現象により同じ天体が複数観測されること、光が到達するまでに掛かる時間にそれぞれの像で差があることになる。観測者 **Q** は **B** と **C** の波面が重なってこれらの像が一つになって観測される。更に観測者が移動して **R** では、到達する波面は一つで天体の像は一つしか観測されない。この場合でも天体が観測される位置や像の形、明るさは途中で存在する天体の重力の影響を受けて途中の天体が無い時と比べて変更を受けている。重力レンズ効果により像が複数観測される場合を強い重力レン

ズ効果、一つしか観測されないが像の変形を受けている場合を弱い重力レンズ効果と呼ぶ。重力レンズ効果は、光源から観測者の間に存在する重力源の分布を引き出すのに有用なツールであり、暗黒物質の分布を測定する上で重要なツールとして用いられている。

2.18 測地線偏差

重力場中を走る二本の隣接する光線の相対間隔の変化を記述する方程式を導出する。アフィンパラメータが $\lambda = \lambda_0$ の時、時空内の事象点 A を通る光線の軌跡を $x^\mu(A, \lambda)$ で表す。この点から微小距離 $\xi^\mu(A, \lambda_0)$ 離れた事象点 A' を通る光線の軌跡を $x^\mu(A', \lambda)$ で表す。 $x^\mu(A', \lambda_0) = x^\mu(A, \lambda_0) + \xi^\mu(A, \lambda_0)$ であり、アフィンパラメータがある値をとる時の二本の光線の偏差ベクトルを以下のように定義する。

$$\xi^\mu(A, \lambda) = x^\mu(A', \lambda) - x^\mu(A, \lambda). \quad (2.184)$$

光の経路は測地線であり、式 (2.184) で定義される微小ベクトルは測地線偏差と呼ばれる。点 A および A' を通る光線の4元運動量はそれぞれ

$$p^\mu(A, \lambda) = \frac{dx^\mu(A, \lambda)}{d\lambda}, \quad (2.185)$$

$$p^\mu(A', \lambda) = \frac{dx^\mu(A', \lambda)}{d\lambda} = p^\mu(A, \lambda) + \frac{d\xi^\mu(A, \lambda)}{d\lambda}, \quad (2.186)$$

で定義される。点 A および A' を通る光線はそれぞれ以下の測地線方程式を満たす。

$$\frac{dp^\mu(A, \lambda)}{d\lambda} + p^\alpha(A, \lambda)p^\beta(A, \lambda)\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x(A, \lambda)) = 0. \quad (2.187)$$

$$\frac{dp^\mu(A', \lambda)}{d\lambda} + p^\alpha(A', \lambda)p^\beta(A', \lambda)\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x(A', \lambda)) = 0. \quad (2.188)$$

点 A' の測地線方程式 (2.188) を ξ^μ が微量であることを考慮して、微量の一次までで展開すると以下の式を得る。

$$\frac{d^2\xi^\mu(A, \lambda)}{d\lambda^2} + 2p^\alpha \frac{d\xi^\beta(A)}{d\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x(A, \lambda)) + p^\alpha(A, \lambda)p^\beta(A, \lambda)\Gamma_{\alpha\beta, \nu}^\mu(x(A, \lambda))\xi^\nu(A, \lambda) = 0.$$

(2.189)

導出の過程で点 A' のクリストッフェル記号を一次までテイラー展開し、方程式 (2.187) を用いた。以下では煩雑さを避けるため引数の A と λ を省略するが、特に指摘が無ければ $\lambda = \lambda_0$ の時点 A を通る測地線上で定義された量である。

方程式 (2.189) のアフィンパラメーターによる微分を測地線に沿った微分に置き換える。測地線方程式 (2.152) より測地線に沿った ξ^μ の微分を以下のように定義する。

$$\frac{D\xi^\mu}{d\lambda} \equiv \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} + p^\alpha \xi^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = p^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu. \quad (2.190)$$

この記号を用いると測地線方程式は以下のように表現できる。

$$\frac{Dp^\mu}{d\lambda} = 0. \quad (2.191)$$

以上の結果から測地線偏差の測地線に沿ったアフィンパラメーターの二階微分は以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi^\mu}{d\lambda^2} &= \frac{D}{d\lambda}(p^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu) = \frac{Dp^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha \xi^\mu + p^\alpha \frac{D}{d\lambda}(\nabla_\alpha \xi^\mu), \\ &= p^\alpha p^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha \xi^\mu = (\nabla_\beta \xi^\mu)_{,\alpha} + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \nabla_\alpha \xi^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \nabla_\nu \xi^\mu, \\ &= p^\alpha p^\beta (\xi^\mu_{,\alpha\beta} + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \xi^\sigma_{,\alpha} + \Gamma_{\sigma\beta,\alpha}^\mu \xi^\sigma + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \xi^\nu_{,\alpha} + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu \xi^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \xi^\mu_{,\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \xi^\sigma) \end{aligned} \quad (2.192)$$

ここで

$$p^\alpha p^\beta \xi^\mu_{,\alpha\beta} = \frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} - \frac{dp^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha p^\sigma p^\rho \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}$$

を用いて（最後の変形では測地線方程式 (2.187) を用いた）式 (2.192) を変形すると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi^\mu}{d\lambda^2} &= \frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu p^\alpha p^\beta \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + 2p^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} - p^\alpha p^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \\ &\quad + p^\alpha p^\beta \Gamma_{\sigma\beta,\alpha}^\mu \xi^\sigma + p^\alpha p^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\mu \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu \xi^\sigma - p^\alpha p^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \xi^\sigma \end{aligned}$$

この式に方程式 (2.189) を代入すると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{D^2\xi^\mu}{d\lambda^2} &= p^\alpha p^\beta \xi^\nu [\Gamma_{\nu\beta}^\mu{}_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu], \\
&= p^\alpha p^\beta \xi^\nu [\Gamma_{\nu\beta}^\mu{}_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu], \\
&= R_{\beta\alpha\nu}^\mu p^\alpha p^\beta \xi^\nu. \tag{2.193}
\end{aligned}$$

最後の変形では $p^\alpha p^\beta \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma = p^\beta p^\alpha \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma$ を用いた。この方程式を測地線偏差の方程式と呼ぶ。測地線方程式は、局所慣性系に移れば空間の曲率に関する項は消えてしまう。即ち一本の光線の軌跡を追跡するだけでは空間の曲がり具合を測定することができない。一方、測地線偏差の方程式(2.193)は、曲率テンソルを含んでいる。即ち二本の光線の偏差を測定すれば局所的な空間の曲がり具合を測定することができる。測地線偏差の方程式は、偏差の線形方程式であり、始状態と終状態の線形写像を表している。

例として、 z 軸の方向に伝搬する光線にメトリックが式(2.116)で与えられる静的で弱い重力場の摂動が加わった時、測地線偏差がどのように伝搬するか調べる。測地偏差方程式の p^μ は重力場の摂動が加わる前のゼロ次のもので近似し、 $p^0 = p^3 = p$ とし、光線はこのゼロ次の光線の経路を通るとして扱う。測地線偏差はゼロ次の光線に直交する成分即ち ξ^1, ξ^2 のみを持つ。リーマンテンソルのゼロで無い成分は式(2.124)で与えられている。従って、測地線偏差の二成分が従う方程式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
\frac{D^2\xi^1}{d\lambda^2} &= R_{001}^1 p^2 \xi^1 + R_{002}^1 p^2 \xi^2 + R_{331}^1 p^2 \xi^1 + R_{332}^1 p^2 \xi^2, \\
&= \frac{p^2}{c^2} [-(\Psi_{,11} + \Phi_{,33} + \Phi_{,11})\xi^1 - (\Psi_{,12} + \Phi_{,12})\xi^2], \\
&= -\frac{p^2}{c^2} [(\Psi_{,11} + \Delta\Phi - \Phi_{,22})\xi^1 + (\Psi_{,12} + \Phi_{,12})\xi^2], \\
&= -\frac{p^2}{c^2} [(\Delta\Phi + \Phi_{,11} - \Phi_{,22})\xi^1 + 2\Phi_{,12}\xi^2]. \tag{2.194}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D^2\xi^2}{d\lambda^2} &= R_{001}^2 p^2 \xi^1 + R_{002}^2 p^2 \xi^2 + R_{331}^2 p^2 \xi^1 + R_{332}^2 p^2 \xi^2, \\
&= -\frac{p^2}{c^2} [2\Phi_{,21}\xi^1 + (\Delta\Phi - \Phi_{,11} + \Phi_{,22})\xi^2]. \tag{2.195}
\end{aligned}$$

ここで $\Psi = \Phi$ を用いた。これらの方程式はリッチテンソルとワイルテンソルを用いて以下のように表現できる。

$$\frac{D^2}{d\lambda^2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = -p^2 \begin{pmatrix} R_{11} + 2C_{1010} - C_{1212} & 2C_{1020} \\ 2C_{1020} & R_{11} - 2C_{1010} + C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}. \quad (2.196)$$

重力レンズによる像の変形の様子を調べるため光源の形が円形であったとし、光源から光が発した時のアフィンパラメータを λ_0 として $(\xi^1(\lambda_0))^2 + (\xi^2(\lambda_0))^2 = \beta_s^2$ を満たしていたとする。ワイルテンソルがゼロの時、方程式 (2.196) は恒等変換の定数倍となり、光束の断面の形は円形を保ちつつ半径を変えて、即ち面積のみ拡大・縮小して伝搬する。一方、リッチテンソルがゼロでワイルテンソルのみ値を持つ場合は、光束の断面の形が楕円形に変形する。

2.19 ザックス光学スカラー方程式

測地線偏差方程式の応用例として、重力場中を伝搬過程での光線ビームの断面の形状の変化を追跡する方程式を導く。ビーム中心附近の一本の光線を基準光線としてアサインし、その軌跡を $x^\alpha(\lambda)$ とする。ここで λ はアフィンパラメータである。この光線の4元運動量は以下のように計算される。

$$p^\mu(x^\alpha(\lambda)) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}.$$

光線は測地線を通るので

$$\frac{Dp^\mu}{d\lambda} = \frac{dp^\mu}{d\lambda} + p^\alpha p^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = p^\alpha p^\mu{}_{;\alpha} = 0, \quad (2.197)$$

を満たす。 λ 一定面でのビームの断面を考える。この面内の二つの互いに直交する基底ベクトルを ℓ_A^μ, ℓ_B^μ とする。これらのベクトルはスペース・ライクであり、大きさ1に規格されている。以上の条件を整理すると以下の式で表現できる。

$$g_{\mu\nu} \ell_A^\mu p^\nu = 0, g_{\mu\nu} \ell_B^\mu p^\nu = 0, \quad (2.198)$$

$$g_{\mu\nu} \ell_X^\mu \ell_Y^\nu = \delta_{XY} \quad X, Y = A, B. \quad (2.199)$$

断面内の基底ベクトルと参照光線との直交性が伝搬過程で常に保たれるとすると光線のいた所で条件 (2.198) が満たされる必要があり、

$$\frac{Dg_{\mu\nu}p^\mu\ell^\nu}{d\lambda} = 0,$$

が成立する必要がある。したがって、 $\ell_X(\lambda + d\lambda)$ は光線に沿って $\ell_X^\mu(\lambda)$ を平行移動したものと一致していなければならず以下の式を満たす。

$$\frac{D\ell_X^\mu}{d\lambda} = p^\alpha \nabla_\alpha \ell_X^\mu = 0. \quad (2.200)$$

したがって、 ℓ_A^μ, ℓ_B^μ の正規直交性条件 (2.199) の参照光線に沿った微分が

$$\frac{Dg_{\mu\nu}\ell_X^\mu\ell_Y^\nu}{d\lambda} = 2g_{\mu\nu}\frac{D\ell_X^\mu}{d\lambda}\ell_Y^\nu = 0,$$

となり、参照光線上常に正規直交条件が保たれる。ここでメトリックテンソルの共変微分がゼロであることを用いた。

今扱っているビーム内にあり参照光線から微小距離離れた光線 \bar{x}^μ を考える。偏差を $\xi^\mu(x^\alpha(\lambda))$ と定義すると

$$\bar{x}^\mu(\lambda) = x^\mu(\lambda) + \xi^\mu(x^\alpha(\lambda)), \quad (2.201)$$

で参照光線の軌跡と結ばれる。これをアフィンパラメータで微分すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda} &= p^\mu(x^\alpha(\lambda) + \xi^\alpha(x^\beta(\lambda))) \\ &= p^\mu(x^\alpha(\lambda)) + \xi^\alpha(x^\beta(\lambda))\partial_\alpha p^\mu(x^\alpha(\lambda)) \\ &= p^\mu(x^\alpha(\lambda)) + \frac{d\xi^\mu(x^\alpha(\lambda))}{d\lambda} \end{aligned}$$

ここで偏差が微小であることを考慮して、その一次までで展開した。この式から以下の関係式を得る。

$$\frac{d\xi^\mu(x^\alpha(\lambda))}{d\lambda} = \xi^\alpha(x^\beta(\lambda))\partial_\alpha p^\mu(x^\alpha(\lambda)). \quad (2.202)$$

この関係式を用いると偏差ベクトルの参照光線に沿った微分と、光線の4元ベクトルの偏差ベクトルに沿った微分の間以下の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned}
p^\beta \nabla_\beta \xi^\mu &= \frac{D\xi^\mu}{d\lambda} = \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} + \xi^\alpha p^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \\
&= \xi^\alpha \frac{\partial p^\mu}{\partial x^\alpha} + \xi^\alpha p^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \\
&= \xi^\alpha \left(\frac{\partial p^\mu}{\partial x^\alpha} + p^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) \\
&= \xi^\beta \nabla_\beta p^\mu. \tag{2.203}
\end{aligned}$$

偏差ベクトルは、ビーム内の二つの独立な基底ベクトルを用いて以下のように表される。

$$\xi^\mu = d_A \ell_A^\mu + d_B \ell_B^\mu. \tag{2.204}$$

ここで係数 d_A, d_B は、偏差ベクトルと基底ベクトルの内積により

$$d_A = \ell_{A\mu} \xi^\mu, d_B = \ell_{B\mu} \xi^\mu,$$

と定義されるスカラー量であり、偏差が微小であることから $|d_A| \ll 1, |d_B| \ll 1$ の微小量である。スカラー量であるからこれらの量の参照光線に沿った微分 $D/d\lambda$ は、基底の微分から出てくるクリストッフエル記号を含まず、単に $d/d\lambda$ と書ける。基底ベクトルが式 (2.200) を満たすことを意識して偏差ベクトルの参照光線に沿った微分を取ると以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
\frac{D\xi^\mu}{d\lambda} &= \frac{dd_A}{d\lambda} \ell_A^\mu + \frac{dd_B}{d\lambda} \ell_B^\mu \\
&= \xi^\beta \nabla_\beta p^\mu = (d_A \ell_A^\nu + d_B \ell_B^\nu) \nabla_\nu p^\mu. \tag{2.205}
\end{aligned}$$

ここで式 (2.203) の関係式を用いた。この式の両辺に $\ell_{A\mu}, \ell_{B\mu}$ をそれぞれ作用することで以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{dd_A}{d\lambda} &= \ell_A^\mu \ell_A^\nu p_{\mu;\nu} d_A + \ell_A^\mu \ell_B^\nu p_{\mu;\nu} d_B, \\
\frac{dd_B}{d\lambda} &= \ell_B^\mu \ell_A^\nu p_{\mu;\nu} d_A + \ell_B^\mu \ell_B^\nu p_{\mu;\nu} d_B. \tag{2.206}
\end{aligned}$$

ここでメトリックテンソルの共変微分がゼロであることを用いて、添字の上げ下げを行なった。さらに

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{d}{dx^0} = \frac{p^0}{c} \frac{d}{dt},$$

を用いて方程式 (2.206) を変形するとビーム形状を特徴付けるスカラー量の発展方程式として以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{dd_A}{dt} &= \frac{1}{p^0} (\ell_A^\mu \ell_A^\nu p_{\mu;\nu} d_A + \ell_A^\mu \ell_B^\nu p_{\mu;\nu} d_B), \\ \frac{1}{c} \frac{dd_B}{dt} &= \frac{1}{p^0} (\ell_B^\mu \ell_A^\nu p_{\mu;\nu} d_A + \ell_B^\mu \ell_B^\nu p_{\mu;\nu} d_B).\end{aligned}\quad (2.207)$$

方程式 (2.207) の右辺に表れる $p_{\mu;\nu}$ は、 $\ell_X^\mu \ell_Y^\nu$ が掛かっているため、同一時刻 (同一 λ) のビーム面内に射影した成分のみが、ビーム形状の発展に寄与する。ビーム面に直交する成分は、 $\ell_X^\mu \ell_Y^\nu$ との内積を取る事で消えてしまう。

方程式 (2.207) は、以下のように定義される 2×2 行列 D を用いて整理する事ができる。

$$\begin{aligned}D_{AA} &= \frac{1}{p^0} \ell_A^\mu \ell_A^\nu p_{\mu;\nu}, D_{AB} = \frac{1}{p^0} \ell_A^\mu \ell_B^\nu p_{\mu;\nu}, \\ D_{BA} &= \frac{1}{p^0} \ell_B^\mu \ell_A^\nu p_{\mu;\nu}, D_{BB} = \frac{1}{p^0} \ell_B^\mu \ell_B^\nu p_{\mu;\nu}.\end{aligned}\quad (2.208)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} d_A \\ d_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{AA} & D_{AB} \\ D_{BA} & D_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_A \\ d_B \end{pmatrix}.\quad (2.209)$$

行列 D のトレースを用いて光学的スカラーの一つである θ を以下のように定義する。これを convergence と呼び、リッチーテンソルにのみ依存する量である。

$$2\theta = D_{AA} + D_{BB} = (\ell_A^\mu \ell_A^\nu + \ell_B^\mu \ell_B^\nu) p_{\mu;\nu}.\quad (2.210)$$

行列 D からトレースを抜いた行列を σ_{XY} と定義する。ここで

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_{AB} = \sigma_{BA}, \\ \sigma_1 &= \sigma_{AA} = -\sigma_{BB},\end{aligned}\quad (2.211)$$

のように新しい変数を導入する。ここでは、 w_{XY} がトレースレスであることを用い、更に A, B の入れ替えに対して対称であると仮定した。これら二つの量を shear と呼び、ワイルテンソルにのみ依存する量である。さらにもう一つの光学的スカラー σ を以下のように定義して導入する。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \sum_Y \sigma_{XY} \sigma_{YX} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \quad (2.212)$$

これらの用いると行列 D は以下のように書き表される。

$$D = \begin{pmatrix} \theta + \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \theta - \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (2.213)$$

測地線偏差方程式 (2.193) に式 (2.204) を代入すると以下の方程式を得る。

$$\frac{d^2 d_A}{d\lambda^2} \ell_A^\mu + \frac{d^2 d_B}{d\lambda^2} \ell_B^\mu = R_{\beta\alpha\nu}^\mu p^\alpha p^\beta (d_A \ell_A^\nu + d_B \ell_B^\nu). \quad (2.214)$$

この式の左辺の第一項の係数を式 (2.213), (2.209) を用いて計算すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 d_A}{d\lambda^2} &= \frac{p^0}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{p^0}{c} \frac{dd_A}{dt} \right) = \frac{p^0}{c^2} \dot{p}^0 \frac{dd_A}{dt} + \left(\frac{p^0}{c} \right)^2 \frac{d^2 d_A}{dt^2} \\ &= \frac{p^0}{c} \frac{d}{dt} [p^0 (\theta + \sigma_1) d_A + \sigma_2 d_B] \\ &= \frac{\dot{p}^0}{c} p^0 [(\theta + \sigma_1) d_A + \sigma_2 d_B] \\ &\quad + (p^0)^2 \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{c} + \theta^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\dot{\sigma}_1}{c} + 2\theta\sigma_1 \right] d_A + (p^0)^2 \left(\frac{\dot{\sigma}_2}{c} + 2\theta\sigma_2 \right) d_B. \end{aligned} \quad (2.215)$$

これを整理すると以下のような d_A の時間発展の方程式を得る。

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 d_A}{dt^2} = \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{c} + \theta^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\dot{\sigma}_1}{c} + 2\theta\sigma_1 \right] d_A + \left(\frac{\dot{\sigma}_2}{c} + 2\theta\sigma_2 \right) d_B. \quad (2.216)$$

同様に d_B に対する以下の時間発展の方程式を得る。

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 d_B}{dt^2} = \left(\frac{\dot{\sigma}_2}{c} + 2\theta\sigma_2 \right) d_A + \left[\left(\frac{\dot{\theta}}{c} + \theta^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{\dot{\sigma}_1}{c} - 2\theta\sigma_1 \right] d_B. \quad (2.217)$$

次に測地線偏差方程式 (2.214) の左辺をリッチテンソルとワイルテンソルに分解する。ワイルテンソルの定義式 (2.107) よりリーマンテンソルをトレース部とワイルテンソル部に分解した後、式 (2.214) の両辺に $\ell_{A\mu}$ を掛け

て縮約をとると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 d_A}{d\lambda^2} &= \{C_{\mu\beta\alpha\nu} + \frac{1}{2}[g_{\mu\alpha}R_{\beta\nu} - g_{\beta\alpha}R_{\mu\nu} + g_{\beta\nu}R_{\mu\alpha} - g_{\mu\nu}R_{\beta\alpha}] - \frac{1}{6}R[g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu} - g_{\beta\alpha}g_{\mu\nu}]\} \\ &\quad \times p^\alpha p^\beta (d_A \ell_A^\nu \ell_A^\mu + d_B \ell_B^\nu \ell_A^\mu) \\ &= \left(-\frac{1}{2}R_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta + C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_A^\nu\right) d_A + C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_B^\nu d_B. \end{aligned} \quad (2.218)$$

式 (2.214) の両辺に $\ell_{B\mu}$ を掛けて縮約をとり同様の計算を行なうと以下の結果を得る。

$$\frac{d^2 d_B}{d\lambda^2} = C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_B^\mu \ell_A^\nu d_A + \left(-\frac{1}{2}R_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta + C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_B^\mu \ell_B^\nu\right) d_B. \quad (2.219)$$

これらの方程式の左辺は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 d_A}{d\lambda^2} &= \left(\frac{p^0}{c}\right)^2 \frac{d^2 d_A}{dt^2} + \frac{p^0}{c} \frac{\dot{p}^0}{c} \frac{d d_A}{dt} \\ &= \left(\frac{p^0}{c}\right)^2 \frac{d^2 d_A}{dt^2} + \frac{\dot{p}^0}{c} p^0 [(\theta + \sigma_1) d_A + \sigma_2 d_B]. \end{aligned} \quad (2.220)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 d_B}{d\lambda^2} &= \left(\frac{p^0}{c}\right)^2 \frac{d^2 d_B}{dt^2} + \frac{p^0}{c} \frac{\dot{p}^0}{c} \frac{d d_B}{dt} \\ &= \left(\frac{p^0}{c}\right)^2 \frac{d^2 d_B}{dt^2} + \frac{\dot{p}^0}{c} p^0 [\sigma_2 d_A + (\theta - \sigma_1) d_B] \end{aligned} \quad (2.221)$$

方程式 (2.216) に式 (2.220) を代入し、式 (2.218) のトレース部とトレースレス部とを比較することで以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}}{c} + \theta^2 + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\dot{p}^0}{c p^0} \theta &= -\frac{1}{2(p^0)^2} R_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta, \\ \frac{\dot{\sigma}_1}{c} + 2\theta\sigma_1 + \frac{\dot{p}^0}{c p^0} \sigma_1 &= \frac{1}{(p^0)^2} C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_A^\nu, \\ \frac{\dot{\sigma}_2}{c} + 2\theta\sigma_2 + \frac{\dot{p}^0}{c p^0} \sigma_2 &= \frac{1}{(p^0)^2} C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_B^\nu, \end{aligned} \quad (2.222)$$

これらがザックスの光学スカラー方程式と呼ばれる方程式である。

方程式 (2.218)、(2.219) の左辺を時間微分書き換えると、以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{d^2 d_A}{dt^2} &= \left(-\frac{1}{2(p^0)^2} R_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta + \frac{1}{(p^0)^2} C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_A^\nu \right) d_A + \frac{1}{(p^0)^2} C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_B^\nu d_B \\
&\quad - \frac{\dot{p}^0}{c p^0} ((\theta + \sigma_1) d_A + \sigma_2 d_B), \\
\frac{1}{c^2} \frac{d^2 d_B}{dt^2} &= \frac{1}{(p^0)^2} C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_B^\mu \ell_A^\nu d_A + \left(-\frac{1}{2(p^0)^2} R_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta + \frac{1}{(p^0)^2} C_{\mu\beta\alpha\nu} p^\alpha p^\beta \ell_B^\mu \ell_B^\nu \right) d_B \\
&\quad - \frac{\dot{p}^0}{c p^0} (\sigma_2 d_A + (\theta - \sigma_1) d_B). \tag{2.223}
\end{aligned}$$

方程式 (2.209) からビームの断面の変形変化を追跡する方程式を導出する。行列 D の固有値を求めると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\lambda_+ &= \theta + \sigma, \\
\lambda_- &= \theta - \sigma. \tag{2.224}
\end{aligned}$$

それぞれの固有値に対応する規格化された固有ベクトルをそれぞれ ℓ_+^μ , ℓ_-^μ とし、偏差ベクトルをこれらで展開したときの係数を d_+ , d_- とするとビームの断面積 A は $d_+ d_-$ に比例する。またこれらは以下の方程式を満たす。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{dd_+}{dt} &= (\theta + \sigma) d_+, \\
\frac{1}{c} \frac{dd_-}{dt} &= (\theta - \sigma) d_-. \tag{2.225}
\end{aligned}$$

これらを用いると以下のビームの断面積の参照光線にそった進化を与える方程式が得られる。まず断面積の時間一階微分が満たす方程式を導く。

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{cdt} = \frac{1}{d_+ d_-} \frac{dd_+ d_-}{cdt} = 2\theta. \tag{2.226}$$

この方程式を更に時間で微分して、光学スカラー方程式を用いて変形すると最終的に以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2 \sqrt{A}} \frac{d^2 \sqrt{A}}{dt^2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{R_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta}{(p^0)^2} + \sigma^2 \right) - \frac{\dot{p}^0}{c p^0} \theta, \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{R_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta}{(p^0)^2} + \sigma^2 \right) - \frac{\dot{p}^0}{c p^0} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d\sqrt{A}}{cdt}. \tag{2.227}
\end{aligned}$$

右辺第一項が、重力場の存在がビーム径の進化に与える影響を表す項であ

り、括弧内の量は必ずゼロ以上の値を持つ。シアアの二乗項 σ^2 がゼロ以上となるのは自明である。リッチテンソルを含む項も節 2.20.3 で挙げる例では、本質的に $\Delta\Phi$ でありゼロ以上の値を持つ。したがって、重力場はビーム径を小さくする方向、即ちビームをフォーカスする方向に働く。リッチテンソルを含む項によるビーム径の収縮はリッチフォーカシングと呼ばれ、物質が分布しているいて質量密度が有限である場所で起きるフォーカシング効果である。シアアによるビーム径の収縮は、真空中でも宇宙の非一様な物質分布の影響で有限値を持ち宇宙空間の至る所でこの効果によるビームのフォーカシングが発生する。このようなシアアによるフォーカシングをワイルフォーカシングと呼ぶ。

2.20 ザックス光学スカラー方程式の応用例

2.20.1 自由空間

重力場が存在しない自由空間中を観測者に対して静止した半径 d_S の円形をした光源から発した光の観測者への伝搬を考える。この時 $\theta = 0, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$ であり、また光子のエネルギー変化も無く $\dot{p}^0 = 0$ であり、 $A = \pi d^2$ であるから、方程式 eq:SachsAeq は以下のような簡単な形になる。

$$\frac{1}{d} \frac{d^2 d}{c^2 dt^2} = 0. \quad (2.228)$$

空間が等方的であるため、光源から発したビームの形は変形せず円形を保ったまま観測者に届く。したがって、ビームの半径 d の時間変化だけ追えば良い。光源を発した時刻を t_S 、観測者に届いた時刻を t_0 とする。この方程式は時間二階微分方程式であるから初期条件として $d(t_0), \dot{d}(t_0)$ を与える必要がある。そこでまず d の時間微分の物理的意味を考える。 $t = t_0$ から微小時間 Δt 過去に遡った時のビームの半径の変化量は以下のように与えられる。

$$\Delta d(t_0) = \dot{d}(t_0) c |\Delta t|. \quad (2.229)$$

観測者が遠方の光源を観測することを想定したビーム径の進化を追う事は、光源全体から発した光が観測者の所で一点に収束する光線集まりの偏差の

時間進化を追う事に対応する。即ち $d(t_0) = 0$ である。この観測者が光源を見込んだ時の視直径を Θ とすると $|\Delta t$ 光線に沿って遡った時のビーム径の変化量と以下の関係式で結ばれる。

$$\dot{d}(t_0)\Delta t = -c\Delta t\Theta. \quad (2.230)$$

したがって、ビーム径の時間微分は、以下の式のように、光源の視直径と関係した量である。

$$\dot{d}(t_0) = -c\Theta. \quad (2.231)$$

以上から解は以下のようになる。

$$d(t) = c(t_0 - t)\Theta. \quad (2.232)$$

特に $t = t_S$ とし観測者と光源間の距離を $r = c(t_0 - t_S)$ を用いて表すと

$$d_S = r\Theta. \quad (2.233)$$

となり、大きさ d_S の距離 r 離れた光源の見かけの大きさが $\Theta = d_S/r$ で観測されるという良く知られた関係が得られる。

もう一つの例として、 $\dot{d}(t_0) = 0$ の場合を考えると、 $\Theta = 0$ であり、方程式 (2.228) の解は

$$d = d_S, \quad (2.234)$$

となる。 $\dot{d} = 0$ であるからビーム径が変化せず、ビーム内で光線が平行を保ったまま観測者のいる地点に到達する。したがって、これら光線のなす角はゼロである。

2.20.2 ロバートソン・ウォーカー計量での角径距離

節 4.1.2 で導入するロバートソン・ウォーカー計量 (4.13) に適応する。ビームは動径方向に伝搬するとする。したがって、光線の4元運動量は以下のように与えられる。

$$p^\mu = \left(p^0, p^0 \frac{\dot{r}}{c}, 0, 0 \right). \quad (2.235)$$

光子の4元運動量の内積がゼロであることから \dot{r} が以下のように求まる。

$$\dot{r} = -c \frac{\sqrt{1-Kr^2}}{a}. \quad (2.236)$$

ここで、 $r = r_S$ にある光源から $t = t_S$ の時に発した光が、 $t = t_0$ に $r = 0$ にいる観測者に届く過程を扱う事を意識して $\dot{r} < 0$ を選択した。 ℓ_A^μ を Θ 方向、 ℓ_B^μ を ϕ 方向に取る。リッチーテンソルは式 (4.33),(4.34),(4.35),(4.36) で与えられる。計算すればワイルテンソルがゼロであることを示す事ができるが、系の対称性が良く、空間の形の歪みが存在しないことからゼロであることが納得できる。したがって、光学スカラーの内 σ は 0 である。式 (4.29) で与えられた宇宙論的赤方偏移の式から

$$\dot{p}^0 = -\frac{\dot{a}}{a} p^0, \quad (2.237)$$

である。前節と同様、光源は半径 d_S の円形をしているとする。系の対称性からビーム形状は円のまま伝搬する。時刻 t におけるビームの半径を $d(t)$ とする。これらを方程式 (2.227) に代入することで以下のロバートソン・ウオーカー計量中を伝搬する光線ビームのビーム径の発展方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2 d} \frac{d^2 d}{dt^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{d} \frac{dd}{dt} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{1-Kr^2} \frac{\dot{r}^2}{c^4} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2Kc^2) \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{K}{a}. \end{aligned} \quad (2.238)$$

\dot{r} を用いて曲率 K を含む項を消去する。式 (2.236) より

$$\ddot{r} = -\frac{\dot{a}\dot{r}}{ar} - \frac{rKc^2}{a^2}, \quad (2.239)$$

であり、これを用いて方程式 (2.238) 中の K を含む項を消去して整理するとロバートソン・ウオーカー計量中を伝搬するビーム径の発展方程式として以下の方程式を得る。

$$\frac{1}{d} \frac{d^2 d}{dt^2} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{d} \frac{dd}{dt} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\dot{a}\dot{r}}{ar} + \frac{\ddot{r}}{r}. \quad (2.240)$$

観測者が見込む角度が知りたいので、 $t = t_0$ で一点に収斂するビーム即ち $d(t_0) = 0$ となり、 $d(t_S) = d_S$ の条件を満たす解を求めると以下のように

なる。

$$\begin{aligned} d &= a(t)r(t)\Theta, \\ \Theta &= \frac{d_S}{a(t_S)r(t_S)}. \end{aligned} \quad (2.241)$$

この結果を元に

$$D_A = a(t_S)r(t_S), \quad (2.242)$$

を宇宙年齢 t_S に存在する天体までの角径距離と定義する。節 (4.5) で図形的に導出した結果と確かに一致している。

光学スカラー方程式を用いた角径距離の導出は、宇宙の物質分布の非一様性を考慮した時に威力を発揮する。非一様な物質分布をした宇宙での角径距離は Dyer-Röder distance と呼ばれ、現実の宇宙における物質分布の非一様性を考慮した角径距離の定義に威力を発揮する。

2.20.3 重力レンズによる天体の像の変形

メトリックが式 (2.139) で与えられるような弱い静的な重力場中を伝搬する過程での天体の像の変形に適応する。重力場が存在しなかった時、光線は z 軸正の向きに進むとする。ゼロ次の光線の4元運動量を $\tilde{p}^\alpha = (\tilde{p}, 0, 0, \tilde{p})$ と定義すると、摂動のゼロ次で $\tilde{p}_\alpha = (-\tilde{p}, 0, 0, \tilde{p})$ である。光線ビームの断面を二つの基底ベクトルで $\ell_A^\alpha = (0, 1, 0, 0)$, $\ell_B^\alpha = (0, 0, 1, 0)$ 張られる面、即ち $x-y$ 平面に定義する。静的な重力場中を伝搬する光のエネルギーは、重力赤方偏移により変化する。光源と観測者がそれぞれ重力源から十分離れた位置に存在するとすることで光源を発してから観測者に届くまでの間の正味のエネルギーの変化はほぼゼロとなる。光のエネルギー変化は、重力赤方偏移によるものであるから高々摂動量の一次の量である。したがって、方程式 (2.223) の右辺の最後の項で、伝搬過程での光のエネルギー変化を考慮しても微少量の二次以上でしか寄与を与えない。そこで方程式 (2.223) の \tilde{p}^0 が掛かった項は、落とす。以下、残った項を微少量の一次までの近似で具体的に計算する。

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2(p^0)^2}R_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta &= -\frac{1}{2}(R_{00} + R_{33}) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\Psi}{c^2} + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) = -\frac{\Delta\Phi}{c^2}, \quad (2.243)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p^0)^2}C_{\mu\beta\alpha\nu}p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_A^\nu &= \frac{1}{(p^0)^2}\left(p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_A^\nu R_{\mu\beta\alpha\nu} + \frac{1}{2}p^\alpha p^\beta R_{\beta\alpha}\right) \\
&= R_{1001} + R_{1331} + \frac{1}{2(p^0)^2}p^\alpha p^\beta R_{\beta\alpha} \\
&= -\frac{1}{c^2}(\Phi_{,11} - \Phi_{,22}), \quad (2.244)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p^0)^2}C_{\mu\beta\alpha\nu}p^\alpha p^\beta \ell_B^\mu \ell_B^\nu &= R_{2002} + R_{2332} + \frac{1}{2(p^0)^2}p^\alpha p^\beta R_{\beta\alpha} \\
&= \frac{1}{c^2}(\Phi_{,11} - \Phi_{,22}), \quad (2.245)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(p^0)^2}C_{\mu\beta\alpha\nu}p^\alpha p^\beta \ell_A^\mu \ell_B^\nu = R_{1002} + R_{1332} = -\frac{2\Phi_{,12}}{c^2}, \quad (2.246)$$

$$\frac{1}{(p^0)^2}C_{\mu\beta\alpha\nu}p^\alpha p^\beta \ell_B^\mu \ell_A^\nu = R_{2001} + R_{2331} = -\frac{2\Phi_{,21}}{c^2}. \quad (2.247)$$

方程式 (2.223) は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{d^2d_A}{dt^2} &= -\frac{1}{c^2}(\Delta\Phi + (\Phi_{,11} - \Phi_{,22}))d_A - \frac{2}{c^2}\Phi_{,12}d_B, \\
\frac{1}{c^2}\frac{d^2d_B}{dt^2} &= -\frac{2}{c^2}\Phi_{,12}d_A - \frac{1}{c^2}(\Delta\Phi - (\Phi_{,11} - \Phi_{,22}))d_B. \quad (2.248)
\end{aligned}$$

光源を光が発した時刻を t_S 、その時のビームのそれぞれの基底ベクトル方向の径を $d_A(t_S), d_B(t_S)$ とし、観測者に届く時刻を t_O として $d_A(t_O) = d_B(t_O) = 0$ 即ち観測者の位置で一点に収束するとして方程式 (2.248) を解く事で、重力レンズ効果による像の変形を調べる事ができる。

重力レンズ効果は、多くの場合、重力レンズの役割を担う天体は、光源と観測者から十分離れており、レンズ天体の影響は、光源から観測者に光が届くまでの間の内レンズ天体の近傍を通過するほんの僅かな期間に顕著に現れる。そこでレンズ効果はレンズ天体の存在する場所 $z=0$ を通過する僅かな時間 Δt_L でのみ起こり、その前後の空間は自由空間を光が伝搬していると近似して扱う。ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとった近似を thin lens 近似と呼ぶ。観測される見かけのサイズを Θ_A, Θ_B とすると $\dot{d}_A(t_O) = -c\Theta_A, \dot{d}_B(t_O) =$

$-c\Theta_B$ である。 t_0 に観測者に届いた光が $z=0$ を通過した時刻を t_L とし、この条件で観測者からレンズ天体まで時間を遡って方程式 (2.248) を解くと $t_L \leq t \leq t_0$ の間の解として以下の解を得る。

$$\begin{aligned} d_A(t) &= c(t_0 - t)\Theta_A(t_0), \\ d_B(t) &= c(t_0 - t)\Theta_B(t_0). \end{aligned} \quad (2.249)$$

レンズ効果を受ける期間を $t_L - \Delta t_L \sim t_L$ とし、方程式 (2.248) を差分化することでレンズ効果を受ける直前と直後の \dot{d}_A, \dot{d}_B を結びつける以下の式を得る。

$$\begin{pmatrix} \dot{d}_A(t_L - \Delta t_L) \\ \dot{d}_B(t_L - \Delta t_L) \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} -(\Delta\Phi + (\Phi_{,11} - \Phi_{,22}))c\Delta t & -2\Phi_{,12}c\Delta t \\ -2\Phi_{,12}c\Delta t & -(\Delta\Phi - (\Phi_{,11} - \Phi_{,22}))c\Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_A(t_L) \\ d_B(t_L) \end{pmatrix} \quad (2.250)$$

ここで

$$\varphi = \frac{1}{c^2} \Phi c\Delta t \sim \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz\Phi, \quad (2.251)$$

と近似し、光線に沿った重力ポテンシャルの積分を定義する。ここでは、レンズ効果を受ける位置で $z=0$ となるように座標を選択している。これを用いると方程式 (2.250) は以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \dot{d}_A(t_L - \Delta t_L) \\ \dot{d}_B(t_L - \Delta t_L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{d}_A(t_L) \\ \dot{d}_B(t_L) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(\varphi_{,11} + \varphi_{,22}) - (\varphi_{,11} - \varphi_{,22}) & -2\varphi_{,12} \\ -2\varphi_{,12} & -(\varphi_{,11} + \varphi_{,22}) + (\varphi_{,11} - \varphi_{,22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_A(t_L) \\ d_B(t_L) \end{pmatrix} \quad (2.252)$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\varphi_{,33} = 0$$

を用いた。次に $t_S \sim t_L - \Delta t_L$ の期間のフリースペースでの光の伝搬を $t = t_S$ で $d_A(t_S), d_B(t_S)$ 、 $t = t_L - \Delta t_L$ で \dot{d}_A, \dot{d}_B が式 (2.252) で与えられ、 $d_A = d_A(t_L), d_B = d_B(t_L), \dot{d}_A(t_L) = -c\Theta_A, \dot{d}_B(t_L) = -c\Theta_B$ の条件を満たすとして光

学スカラー方程式を解き、 $\Delta t_L \rightarrow 0$ の極限を取ると以下の解を得る。

$$\begin{pmatrix} d_A(t_S) \\ d_B(t_S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t_L - t_S)\Theta_A + c(t_O - t_L)\Theta_A \\ c(t_L - t_S)\Theta_B + c(t_O - t_L)\Theta_B \end{pmatrix} \\ + c(t_L - t_S) \begin{pmatrix} -(\varphi_{,11} + \varphi_{,22}) - (\varphi_{,11} - \varphi_{,22}) & -2\varphi_{,12} \\ -2\varphi_{,12} & -(\varphi_{,11} + \varphi_{,22}) + (\varphi_{,11} - \varphi_{,22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_A(t_L) \\ d_B(t_L) \end{pmatrix} \quad (2.253)$$

ここで観測者の位置からレンズ天体の位置までの角径距離 D_{OL} 、観測者から光源までの角径距離 D_{OS} 、レンズ天体から光源までの角径距離 D_{LS} を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} D_{OL} &= c(t_O - t_L), \\ D_{OS} &= c(t_O - t_S), \\ D_{LS} &= c(t_L - t_S). \end{aligned} \quad (2.254)$$

レンズ効果が無かった時の本来の光源の見かけの大きさを β_A, β_B を用いて表すと $d_A(t_S) = D_{OS}\beta_A, d_B(t_S) = D_{OS}\beta_B$ である。したがって方程式 (2.253) は以下のようにまとめられる。

$$\begin{pmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{D_{LS}D_{OL}}{D_{OS}}((\varphi_{,11} + \varphi_{,22}) + (\varphi_{,11} - \varphi_{,22})) & -2\frac{D_{LS}D_{OL}}{D_{OS}}\varphi_{,12} \\ -2\frac{D_{LS}D_{OL}}{D_{OS}}\varphi_{,12} & 1 - \frac{D_{LS}D_{OL}}{D_{OS}}((\varphi_{,11} + \varphi_{,22}) - (\varphi_{,11} - \varphi_{,22})) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \Theta_A \\ \Theta_B \end{pmatrix} \quad (2.255)$$

ここで更に以下のポテンシャルを定義する。

$$\psi = 2\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}}\varphi. \quad (2.256)$$

方程式 (2.255) は以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\partial_{\theta_x}^2 + \partial_{\theta_y}^2)\psi - \frac{1}{2}(\partial_{\theta_x}^2 - \partial_{\theta_y}^2)\psi & -\partial_{\theta_x}\partial_{\theta_y}\psi \\ -\partial_{\theta_x}\partial_{\theta_y}\psi & 1 - \frac{1}{2}(\partial_{\theta_x}^2 + \partial_{\theta_y}^2)\psi + \frac{1}{2}(\partial_{\theta_x}^2 - \partial_{\theta_y}^2)\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_A \\ \Theta_B \end{pmatrix} \quad (2.257)$$

ここで微分する変数を x, y から対応する角径サイズ $\theta_x(\Theta_A), \theta_y(\Theta_B)$ に変換している。レンズ天体の密度分布を ρ とすると重力ポテンシャルは $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ を満たす。したがって、ポテンシャル ψ は以下のポアソン方程式を満たす。

$$\begin{aligned}(\partial_{\theta_x}^2 + \partial_{\theta_y}^2)\psi &= \frac{2\Sigma}{\Sigma_{cr}}, \\ \Sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} dz\rho, \\ \Sigma_{cr} &= \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{OL}D_{LS}}.\end{aligned}\quad (2.258)$$

Σ はレンズ天体の質量分布の面密度であり、 Σ_{cr} は臨界密度と呼ばれるレンズ効果の規模の指標を与える面密度である。Convergence を κ 、シアーを $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ で表すと ψ と以下のように関係づけられる。

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{2}(\partial_{\theta_x}^2 + \partial_{\theta_y}^2)\psi, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2}(\partial_{\theta_x}^2 - \partial_{\theta_y}^2)\psi, \\ \gamma_2 &= \partial_{\theta_x}\partial_{\theta_y}\psi, \\ \gamma &= \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}.\end{aligned}\quad (2.259)$$

ここで

$$\kappa = \frac{\Sigma}{\Sigma_{cr}},\quad (2.260)$$

である。これらを用いると thin lens 近似のもと像の変形を記述する方程式が以下のように整理される。

$$\begin{pmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_A \\ \Theta_B \end{pmatrix}\quad (2.261)$$

ここまでで導出した重力レンズによる像の歪みを与える方程式は、途中の空間がロバートソン・ウオーカー計量で記述される膨張宇宙の場合にも角径距離を式 (2.242) で定義されるものに置き換えれば thin lens 近似を用

いる限り、そのまま適応出来る。この時、3つの角径距離は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} D_{OS} &= a(t_S)r(t_S, t_O), \\ D_{OL} &= a(t_L)r(t_L, t_O), \\ D_{LS} &= a(t_S)r(t_S, t_L). \end{aligned} \quad (2.262)$$

観測者からレンズ天体、レンズ天体から光源までの光の伝搬に伴うビーム形状の変化を与える方程式として節 2.20.2 で与えたものを用いれば、この置き換えが正しい事が証明出来る。共同座標での間隔 r の計算は、式 (4.85) を用いて行なえばよい。

2.21 時空の摂動：スカラー・ベクター・テンサーモード分解

メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ の摂動の一般論を扱う。平均値からの微小なズレを摂動の一次で扱う時、摂動量が満たす方程式は線形であり、重ね合わせが効く。したがって、フーリエモードで展開して、各モードの振る舞いを調べればよい。簡単の為摂動量を波数ベクトルが z 軸方向を向いた平面波で展開する。この節では、記述の煩雑さを避けるため $c = 1$ という単位系を採用する。メトリックの摂動は固有距離を用いて一般に以下のように書ける。

$$ds^2 = -(1+2A)dt^2 - 2B_i dt dx^i + [(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}]dx^i dx^j. \quad (2.263)$$

対応するメトリックテンソルは以下ようになる。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+2A) & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 1+2D+2E_{11} & 2E_{12} & 2E_{13} \\ -B_2 & 2E_{21} & 1+2D+2E_{22} & 2E_{23} \\ -B_3 & 2E_{31} & 2E_{32} & 1+2D+2E_{33} \end{pmatrix} \quad (2.264)$$

ここで A を lapse function、 $B^i = (B_1, B_2, B_3)$ を shift vector と呼ぶ。 E_{ij} はメトリック摂動の空間成分のトレースレス部である。摂動量の一次までで

$\det(g_{\mu\nu}) = -(1+2A+2D \times 3)$ 従って、逆行列 $g^{\mu\nu}$ は摂動量の一次までで次の式で与えられる。

$$g^{\mu\nu} = -(1-2A-6D) \times$$

$$\begin{pmatrix} 1+6D & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & -1-2A-4D-2E_{22}-2E_{33} & 2E_{21} & 2E_{31} \\ B_2 & 2E_{12} & -1-2A-4D-2E_{11}-2E_{33} & 2E_{32} \\ B_3 & 2E_{13} & 2E_{23} & -1-2A-4D-2E_{11}-2E_{22} \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1-2A) & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 1-2D-2E_{11} & -2E_{21} & -2E_{31} \\ -B_2 & -2E_{12} & 1-2D-2E_{22} & -2E_{32} \\ -B_3 & -2E_{13} & -2E_{23} & 1-2D-2E_{33} \end{pmatrix}$$

(2.265)

この結果は、式 (2.121) 用いれば直ちに得ることができる。

波数ベクトルを軸とした座標回転に対する摂動量の変換性により、分解できる。無限小回転に対して不変な量をスピンのゼロの摂動或はスカラーモードと呼ぶ。座標を一回転した時、元に戻る回数が一回の摂動をスピンの1の摂動或はベクトルモードと呼ぶ。座標を一回転した時、元に戻る回数が二回の摂動をスピンの2の摂動或はテンソルモードと呼ぶ。 A, D はスカラーモードである。 D はメトリックテンソルの空間部の摂動のトレースを抜き出した量である。Shift vector の内、波数ベクトルと平行成分、即ち縦波成分 $\vec{k} \cdot \vec{B}/k = B_3 = -iB$ はスカラーモードである。一方、横波成分 $(B_1, B_2, 0)$ はベクターモードである。次の成分はスカラーモードである。

$$E_{ij}^S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -2E \end{pmatrix}. \quad (2.266)$$

次の成分はベクトルモードである。

$$E_{ij}^V = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_1 \\ 0 & 0 & E_2 \\ E_1 & E_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.267)$$

次の成分はテンソルモードである。

$$E_{ij}^T = \begin{pmatrix} E^+ & E^\times & 0 \\ E^\times & -E^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.268)$$

テンソルモードは横波である。スカラー・ベクトル・テンソルモードは、独立なモードであり線形で扱える範囲では、互いに混じりあったり影響し合ったりすることは無い。

2.22 重力波

2.22.1 真空中の伝搬

節 2.21 で導出したテンソルモードは、重力波と呼ばれる時空を伝搬する横波である。この節から光速を復活する。

$$\frac{E^+}{c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.269)$$

で表されるプラスモードと

$$\frac{E^\times}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.270)$$

で表されるクロスモードの二つの独立な偏光状態を持つ。

メトリックテンソルがミンコフスキーにテンソルモードのプラスモードのみ加えた形になっている場合についてアインシュタイン方程式を具体的に計算する。メトリックテンソルは以下のように与えられる。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2E_+}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{2E_+}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.271)$$

テンソルモードが伝搬する空間は、真空として物質のストレス・エネルギーテンソルはゼロとする。クリストッフエル記号のゼロで無い成分は以下のものである。

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{E}_+}{c^3}, \Gamma_{22}^0 = -\frac{\dot{E}_+}{c^3}, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{E}_+}{c^3}, \Gamma_{13}^1 = \frac{E_{+,3}}{c^2}, \\ \Gamma_{20}^2 &= -\frac{\dot{E}_+}{c^3}, \Gamma_{23}^2 = -\frac{E_{+,3}}{c^2}, \\ \Gamma_{11}^3 &= -\frac{E_{+,3}}{c^2}, \Gamma_{22}^3 = \frac{E_{+,3}}{c^2}. \end{aligned} \quad (2.272)$$

ここで $|E_+|/c^2 \ll 1$ を用いて、微少量の一次までで計算した。また摂動は波数ベクトルが $x^3 = z$ 方向を向いた平面波とし、摂動量の x, y 依存性は無いとした。上記以外の成分は全てゼロである。

クリストッフエル記号は、摂動量の一次であるので、リーマンテンソルを計算する式 (2.84) の中でクリストッフエル記号のかけ算の部分は微少量の二次であり、無視出来る。したがって、リッチテンソルをクリストッフエル記号から計算する式は以下ようになる。

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha. \quad (2.273)$$

リッチテンソルの対角成分を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} R_{00} &= 0, R_{11} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{c^2} \ddot{E}_+ - E_{+,33} \right), \\ R_{22} &= \frac{1}{c^2} \left(-\frac{1}{c^2} \ddot{E}_+ + E_{+,33} \right), R_{33} = 0. \end{aligned} \quad (2.274)$$

これからスカラー曲率を計算すると $R = 0$ となる。以上の結果をアインシュタイン方程式に代入すると以下の真空中を伝搬する重力波の方程式を得る。

$$\frac{1}{c^2}\ddot{E}_+ - E_{+,33} = 0. \quad (2.275)$$

平面波解

$$E_+ = E_{+0}e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (2.276)$$

但し

$$\omega^2 = c^2k^2, \quad (2.277)$$

が解として得られる。重力波は、位相速度 c で伝搬する横波である。クロスモードに対しても同様の結果が得られる。

2.22.2 四重極放射

重力波の放射機構の基本について解説する。電磁波の放射は、双極子放射が最低次の放射過程である。一方、重力源である質量には正の質量しか存在しないため双極子放射が存在しない。したがって、重力波の放射過程の最低次は、四重極放射となる。

まず、双極子モーメント、四重極モーメントについてまとめる。双極モーメントは以下の式で

$$\vec{d} \equiv \sum_j q_j \vec{r}_j, \quad (2.278)$$

四重極モーメントは以下の式でそれぞれ定義される。

$$Q \equiv \begin{pmatrix} \sum_j q_j x_j x_j & \sum_j q_j x_j y_j \\ \sum_j q_j y_j x_j & \sum_j q_j y_j y_j \end{pmatrix}. \quad (2.279)$$

ここで q_j は j 番目の粒子の電荷、 $\vec{r}_j = (x_j, y_j)$ は j 番目の粒子の位置ベクトルで粒子は2次元平面内にいるとする。図 2.8 に双極子・四重極子モーメントを持つ代表的な電荷分布を示した。

定義 (2.278) および (2.279) にしたがって計算した、各例における双極子・四重極子モーメントを以下に示す。

$$\vec{d} = 2q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{for a} \quad (2.280)$$

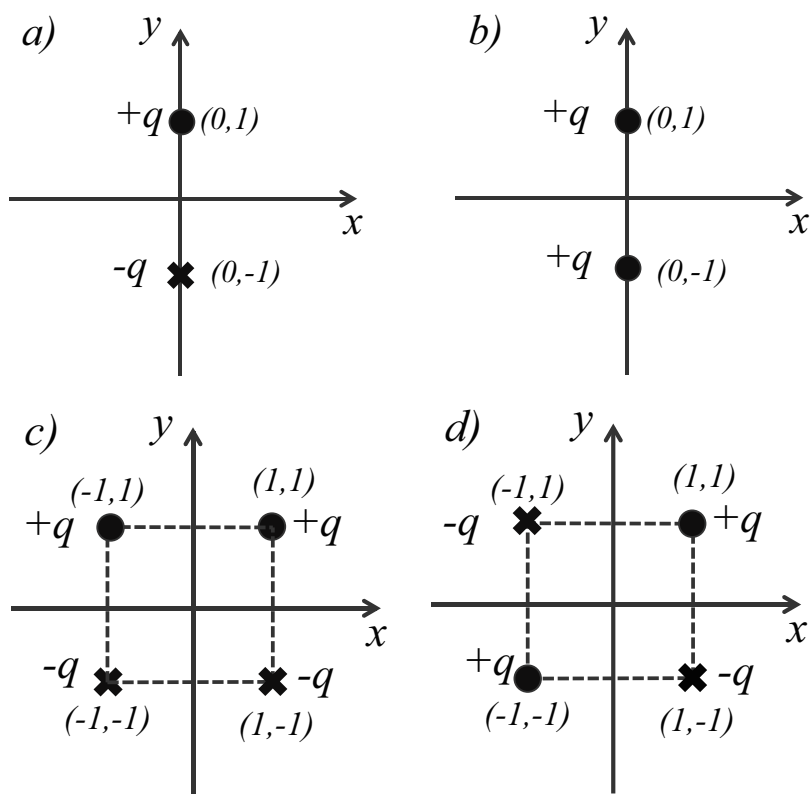


図 2.8 双極子・四重極子モーメントの例。

$$\vec{d} = 4q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = 2q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{for b} \quad (2.281)$$

$$\vec{d} = 2q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{for c} \quad (2.282)$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = 4q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{for d} \quad (2.283)$$

$$\vec{d} = 2q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{for e} \quad (2.284)$$

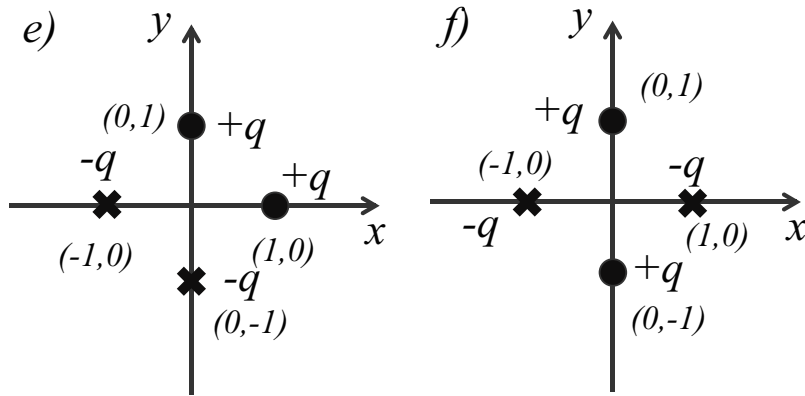


図 2.8 (Cont.) 双極子・四重極子モーメントの例。

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = -2q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{for f} \quad (2.285)$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = 2q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{for g} \quad (2.286)$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = 2q \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{for h} \quad (2.287)$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = 4q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{for i} \quad (2.288)$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = 4q \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{for j} \quad (2.289)$$

例 a,c,e は双極子モーメントを持ち四重極モーメントは0である。例 b は、二つの等しい正の電荷のみ分布しており、配列は例 a と同じであるが、双極子モーメントを持たない。四重極モーメントは、慣性モーメントに対応している。例 d,f は、典型的な四重極モーメントであり、双極子モーメントは持たない。これらの例からも双極子モーメントと四重極子モーメントは、互いに独立であることが分かる。例 h-g, j-i を以下に計算する。

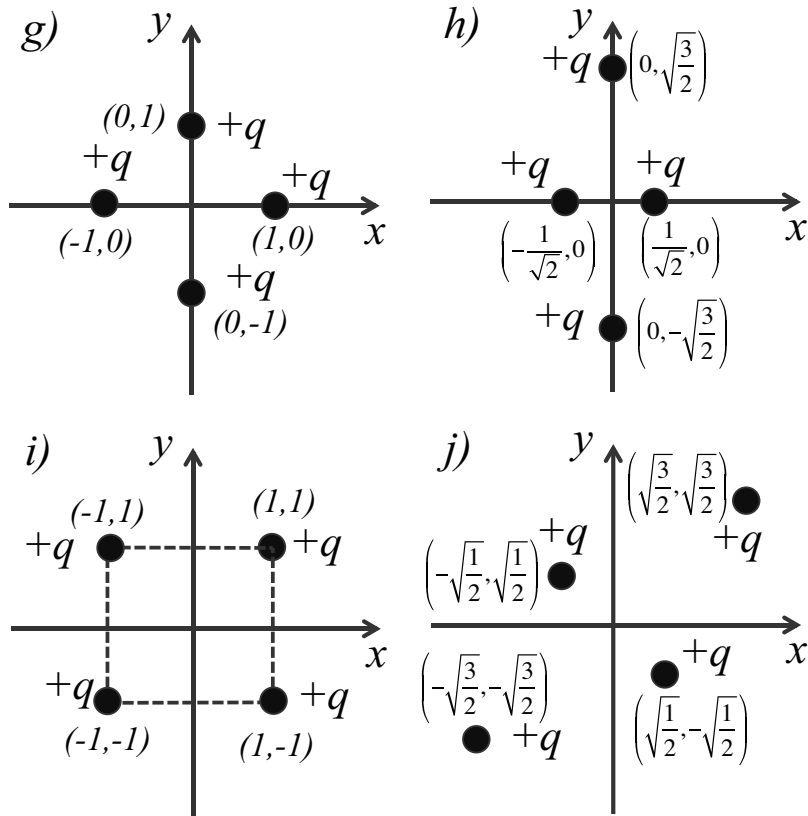


図 2.8 (Cont.) 双極子・四重極子モーメントの例。

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = q \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{for h-g} \quad (2.290)$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = 2q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{for j-i} \quad (2.291)$$

例 (2.290) は、 z 軸方向に伝搬する重力波のプラスモードに対応している。即ちプラスモード重力波の到来により 4 つの質点が初期の配列 a から振動により配列 b に変わったと考えればよい。同様に例 (2.291) は、クロスモードに対応している。

重力波の放射は、質量分布が例 (2.290) や (2.291) のような四重極モーメントの振動を行なう事で起きる。

2.23 重力場の正準形式

局所慣性系 (\tilde{x} 系) における物質のラグランジアンが L_M であるとする作用積分は以下のように書ける。

$$I = \int d^4\tilde{x} L_M. \quad (2.292)$$

局所慣性系から一般座標 x 系への変換に伴う微小体積要素の変換は

$$d^4\tilde{x} = \frac{\partial(\tilde{x})}{\partial(x)} d^4x = \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.293)$$

と書ける。これは以下のように証明できる。ミンコフスキーメトリック $\eta_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ は以下の変換公式で結ばれる。

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2.294)$$

ここでは、右辺が三つの行列のかけ算である事を意識して係数の順番を調整した。座標変換時のテンソルの成分の変換係数を行列 Λ を用いて表す。この行列の成分は以下のように定義される。

$$\Lambda_{\mu}^{\tilde{\alpha}} \equiv \frac{\partial\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.295)$$

変換公式 (2.294) は、以下の行列の積の形で表す事ができる。

$$(g_{\mu\nu}) = \Lambda(\eta_{\mu\nu})\Lambda^t. \quad (2.296)$$

ここで Λ^t は Λ の転置行列である。式 (2.296) からメトリックテンソルの行列式 $g = \det g_{\mu\nu}$ が以下のように書ける事が分かる。

$$g = -(\det(\Lambda))^2. \quad (2.297)$$

ここで $\eta_{\mu\nu}$ の行列式が -1 であること、転置行列の行列式が元の行列の行列式と等しいこと、行列の積の行列式は各行列の行列式の積に等しいことを

用いた。ここで $\det(\Lambda)$ は、ヤコビアン $\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)}$ そのものである。式 (2.297) より以下の結果を得る。

$$\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)} = \det(\Lambda) = \sqrt{-g}. \quad (2.298)$$

式 (2.293) が証明できた。ラグランジアンが一般座標変換に対してスカラーであることを用いると作用 (2.292) は一般座標において以下のように書ける。

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} L_M. \quad (2.299)$$

作用積分 (2.299) が、無限小時間推進・空間座標推進に対して不変である時、エネルギーと運動量が保存することを用いて、物質場のエネルギー・運動量テンソルを導出する。座標 x と座標 \bar{x} が以下の無限小変換で結ばれるとする。

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (2.300)$$

これをゲージ変換と呼ぶ。変換後のメトリックテンソルを $\bar{g}_{\mu\nu}$ とすると微小量の一次で変換前のメトリックテンソルと以下の変換則で結ばれる。

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}(x) \sim g^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\nu}(x) + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} g^{\mu\beta}(x) \\ &= g^{\mu\nu}(x) + \xi^{\mu, \alpha} g^{\alpha\nu}(x) + \xi^{\nu, \beta} g^{\mu\beta}(x). \end{aligned} \quad (2.301)$$

ここで上付きのメトリックテンソルは下付きのメトリックテンソルの逆行列である。以上の結果を用いるとメトリックのリー微分が以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \delta^L g^{\mu\nu}(x) &\equiv \bar{g}^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x), \\ &= \bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) - g^{\mu\nu}(x) - (\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) - \bar{g}^{\mu\nu}(x)), \\ &\sim \xi^{\mu, \alpha} g^{\alpha\nu}(x) + \xi^{\nu, \beta} g^{\mu\beta}(x) - g^{\mu\nu, \gamma}(x) \xi^\gamma. \end{aligned} \quad (2.302)$$

この式は、以下の手続きを経て更に整理できる。

$$\begin{aligned} \xi^{\mu, \alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^{\nu, \beta} g^{\beta\mu} &= (\xi^{\mu, \alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \xi^\gamma) g^{\alpha\nu} + (\xi^{\nu, \beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\nu \xi^\gamma) g^{\beta\mu} \\ &= \xi^{\mu, \alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^{\nu, \beta} g^{\beta\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\alpha,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\sigma}) g^{\alpha\nu} \xi^\gamma \\
& + \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (g_{\sigma\beta,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}) g^{\beta\mu} \xi^\gamma \\
& = \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} \\
& + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\alpha,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\sigma}) g^{\alpha\nu} \xi^\gamma \\
& + \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} (g_{\alpha\sigma,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\sigma} - g_{\sigma\gamma,\alpha}) g^{\sigma\mu} \xi^\gamma \\
& = \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\alpha} g_{\sigma\alpha,\gamma} \xi^\gamma \\
& = \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\alpha}{}_{,\gamma} g_{\sigma\alpha} \xi^\gamma \\
& = \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} - g^{\nu\mu}{}_{,\gamma} \xi^\gamma \quad (2.303)
\end{aligned}$$

三つ目の等号では、最後の項のダミーの添字を σ を α に β を α に置き換えた。五つ目の等号では $(g^{\nu\alpha} g_{\sigma\alpha})_{,\gamma} = (\delta_\sigma^\nu)_{,\gamma} = 0$ を使って、下付きのメトリックの微分を上付きのメトリックの微分に置き換えた。式 (2.302) と式 (2.303) よりメトリックのリー微分の以下の表式を得る。

$$\delta^L g^{\mu\nu}(x) = \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu}. \quad (2.304)$$

準備が整ったので作用積分 (2.299) の座標変換 (2.300) に対する変化量 δI を微少量の一次までで計算する。

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int d^4 \bar{x} \sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} \bar{L}_M(\bar{x}) - \int d^4 x \sqrt{-g(x)} L_M(x) \\
&= \int d^4 x ((1 + \xi^\mu{}_{,\mu}) (\sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} \bar{L}_M(\bar{x})) - \sqrt{-g(x)} L_M(x)) \\
&= \int d^4 x \xi^\mu{}_{,\mu} \sqrt{-g(x)} L_M(x) \\
&+ \int d^4 x [(\sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} \bar{L}_M(\bar{x}) - \sqrt{-\bar{g}(x)} \bar{L}_M(x)) + (\sqrt{-\bar{g}(x)} \bar{L}_M(x) - \sqrt{-g(x)} L_M(x))] \\
&= \int d^4 x [\xi^\mu{}_{,\mu} \sqrt{-g(x)} L_M(x) + (\sqrt{-g(x)} L_M(x))_{,\mu} \xi^\mu] \\
&+ \int d^4 x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta^L g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\gamma}} \delta^L g^{\mu\nu}{}_{,\gamma} \right] \\
&= \int d^4 x \left[\xi^\gamma \sqrt{-g} L_M + \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\gamma}} \delta^L g^{\mu\nu} \right]_{,\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu, \gamma}} \right] \delta^L g^{\mu\nu} \\
& = \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu, \gamma}} \right] \delta^L g^{\mu\nu}. \tag{2.305}
\end{aligned}$$

最後の等号では、一つ上の式の第一項がガウスの定理を用いて表面積分に置き換える事ができることを用いた。この領域の境界を表す表面をメトリックの変分を行った領域の、十分遠方にとれば、そこでは $\delta^L g_{\mu\nu}$ 及び ξ^μ はゼロであり、表面積分の寄与がゼロとできることを使った。また最後の括弧内の項は作用積分のリー微分であり、以下のように $\delta^L I$ を用いて表す。

$$\delta^L I = \int d^4x (\sqrt{-\bar{g}(x)} \bar{L}_M(x) - \sqrt{-g(x)} L_M(x)). \tag{2.306}$$

上記の変形から作用積分の変分の内リー微分以外は、表面積分に置き換えることができ寄与を持たず、リー微分のみが重要となることが分かる。ここで以下で定義される二階のテンソルを導入する。

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu, \gamma}} \right]. \tag{2.307}$$

これを用いると作用積分の変分は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\delta I & = \delta^L I = - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta^L g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} (\xi^\mu_{;\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu_{;\beta} g^{\beta\mu}) T_{\mu\nu} \\
& = - \int d^4x \sqrt{-g} \xi^\mu_{;\alpha} g^{\alpha\nu} T_{\mu\nu} = - \int d^4x \sqrt{-g} [(\xi^\mu T_\mu^\alpha)_{;\alpha} - \xi^\mu T_{\mu;\alpha}^\alpha] \tag{2.308}
\end{aligned}$$

ここで以下の公式を用いる。メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ の μ 行 ν 列を取り除いて作られる 3×3 行列である余因子行列 $\Delta_{\mu\nu}$ を用いて、逆行列 $g^{\mu\nu}$ は以下のように書ける。

$$g^{\mu\nu} = \frac{|\Delta_{\nu\mu}|}{g}. \tag{2.309}$$

これから

$$(\sqrt{-g})_{;\alpha} = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu, \alpha} |\Delta_{\nu\mu}| = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu, \alpha} g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\mu}^\mu, \tag{2.310}$$

が求まり、これから以下の式変形ができる。

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}U_{;\alpha}^{\alpha} &= \sqrt{-g}\left(U^{\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\alpha,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\alpha} - g_{\gamma\alpha,\sigma})U^{\gamma}\right) \\ &= \sqrt{-g}\left(U^{\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\alpha,\gamma}U^{\gamma}\right) = (\sqrt{-g}U^{\alpha})_{;\alpha}.\end{aligned}\quad (2.311)$$

この公式を用いて式 (2.308) の最後の等号の第一項は、ベクトルの発散の体積積分に還元でき、ガウスの定理を用いて無限遠の表面積分に変形でき、その表面は変分を行った領域の十分外にあるとすればゼロとできる。したがって、作用積分の変分は以下のようにまとめられる。

$$\delta I = \int d^4x \sqrt{-g} \xi^{\mu} T_{\mu;\alpha}^{\alpha}.\quad (2.312)$$

式 (2.312) は、無限小座標変換に対して系が不変すなわち作用積分が一定の時、保存する物理量が必ず存在することを示している。無限小座標変換に対して系が不変であることを系がその変換に対して対称であると言う。上記の例は、無限小変換 ξ^{μ} が時間空間座標 x に依存する場合を取り扱った。すなわち、同じように座標の変換を受けるのは、各時空点の周辺すなわち局所的（ローカル）である。局所的な系の対称性と保存量を結びつける式 (2.312) をネーターの第 2 定理とよぶ。これに対して ξ^{μ} は時間と場所に寄らず一定場合を大局的（グローバル）な変換と呼ぶ。大局的な系の対称性を保存則を結びつける関係式をネーターの第 1 定理と呼ぶ。系が座標推進および時間推進変換に対して不変であるとき、作用積分の変分量はゼロ $\delta I = 0$ となる。任意の ξ^{μ} に対して $\delta I = 0$ が成り立つ為には、

$$T_{\mu;\alpha}^{\alpha} = 0,\quad (2.313)$$

が満たされなければならない。この式は、エネルギー・運動量保存則に他ならない。したがって、式 (2.307) で定義される $T_{\mu\nu}$ が物質場のエネルギー・運動量テンソルである。

例としてスカラー場を取り上げる。スカラー場のラグランジアンは以下のように書ける。

$$L_M = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - V.\quad (2.314)$$

また $g^{\mu\nu}$ の余因子行列 $\Delta^{\mu\nu}$ を用いて $g_{\mu\nu}$ を $g^{\mu\nu}$ の逆行列として表すと

$\det(g^{\mu\nu}) = 1/g$, $\frac{\partial \det(g^{\mu\nu})}{\partial g^{\mu\nu}} = |\Delta^{\nu\mu}|$, $g_{\mu\nu} = |\Delta^{\nu\mu}|/\det(g^{\mu\nu}) = g|\Delta^{\nu\mu}|$ であることを用いると

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu}, \quad (2.315)$$

であることを用いて式 (2.307) からエネルギー・運動量テンソルを求めると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial L_M}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} L_M \right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(-\sqrt{-g} \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} L_M \right) \\ &= \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - V \right). \end{aligned} \quad (2.316)$$

平坦の時空すなわち $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ の場合のスカラール場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の具体的な成分を書き出すと以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 \right) + V & -\frac{1}{c} \dot{\phi} \partial^1 \phi & -\frac{1}{c} \dot{\phi} \partial^2 \phi & -\frac{1}{c} \dot{\phi} \partial^3 \phi \\ -\frac{1}{c} \dot{\phi} \partial^1 \phi & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2 \right) - V + (\partial^1 \phi)^2 & \partial^1 \phi \partial^2 \phi & \partial^1 \phi \partial^3 \phi \\ -\frac{1}{c} \dot{\phi} \partial^2 \phi & \partial^1 \phi \partial^2 \phi & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2 \right) - V + (\partial^2 \phi)^2 & \partial^2 \phi \partial^3 \phi \\ -\frac{1}{c} \dot{\phi} \partial^3 \phi & \partial^1 \phi \partial^3 \phi & \partial^2 \phi \partial^3 \phi & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2 \right) - V + (\partial^3 \phi)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.317)$$

物質場 L_M が作る重力場の作用積分は以下の式で与えられる。

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left(L_M + \frac{c^4}{16\pi G} R \right). \quad (2.318)$$

ここで R は、スカラール曲率であり、右辺第二項を Einstein-Hilbert action とよぶ。この作用の第一項の変分からエネルギー・運動量テンソルが導出される事は既に示した。第二項の変分を計算する。リッチテンソル・リッチスカラーは以下のように表される。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma, \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.319)$$

以下 (2.318) の第二項の変分を計算する。

$$\begin{aligned}
\delta^L \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta^L \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \delta^L \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\alpha \\
&\quad + \delta^L \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \delta^L \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma)] \\
&= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\
&\quad - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\alpha} \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\nu} \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha \\
&\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta^L \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \delta^L \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma)] \\
&= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\
&\quad - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\alpha} + \sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma g^{\mu\nu}) \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \\
&\quad + (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\nu} + \sqrt{-g} \Gamma_{\nu\gamma}^\gamma g^{\mu\nu}) \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha \\
&\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta^L \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \delta^L \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma)] \\
&= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\
&\quad - \sqrt{-g} (g^{\mu\nu})_{,\alpha} \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + g^{\mu\nu} \delta^L \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma + g^{\mu\nu} \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma) \\
&\quad + \sqrt{-g} (g^{\mu\nu})_{,\nu} \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\gamma}^\gamma \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + g^{\mu\nu} \delta^L \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma)] \\
&= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\
&\quad - \sqrt{-g} (g^{\mu\nu})_{,\alpha} + g^{\sigma\nu} \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu + g^{\mu\sigma} \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu) \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \\
&\quad + \sqrt{-g} (g^{\mu\nu})_{,\nu} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\gamma}^\gamma + g^{\sigma\nu} \Gamma_{\sigma\nu}^\mu) \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha] \\
&= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} - \sqrt{-g} (g^{\mu\nu})_{;\alpha} \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\nu})_{;\nu} \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha)] \\
&= \int d^4x \delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \delta^L g^{\alpha\beta} R + \delta^L g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right). \tag{2.320}
\end{aligned}$$

二つ目の等号では、クリストッフェル記号の変分の偏微分の項の部分積分を行って、領域の表面での変分がゼロであることを用いた。三つ目の等号では式 (2.310) を用いた。四つ目の等号は式を整理しただけである。五つ目の等号ではダミーの添字の付け替えを行って整理した。六つ目の等号では、二階の反変テンソルの共変微分の定義式を用いた。七つ目の等号では、メトリックテンソルの共変微分がゼロであることを用いた。最後の変形では、式 (2.315) を用いた。式 (2.320) と (2.308) を用いると作用積分 (2.318) の変

分が以下のように計算できる。

$$\delta^L I = \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[-T_{\mu\nu} + \frac{c^4}{8\pi G} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right) \right] \delta^L g^{\mu\nu} \quad (2.321)$$

作用積分が、停留値を取れ ($\delta I = 0$) という条件から以下の微分方程式を得る。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.322)$$

これはアインシュタイン方程式に他ならない。

2.24 テンソルモードのラグランジアン

平坦の時空を伝搬するテンソルモードのラグランジアンを導出する。簡単の為、伝搬方向は z 軸方向とし、偏光の + モードのみ扱う。メトリックテンソルは以下のように書ける。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.323)$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.324)$$

ここで $h_{22} = -h_{11} = -h$ である。以下リッチスカラーを微小量の二次までの精度で計算する。クリストッフェル記号の内、ゼロでない成分は以下のものである。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}g_{11,0}, & \Gamma_{22}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}g_{22,0}, & \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}g_{11,0}, \\
&= \frac{1}{2}h_{11,0} & &= \frac{1}{2}h_{22,0} & &= \frac{1}{2}g^{11}h_{11,0} \\
\Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}g_{11,3}, & \Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,0}, & \Gamma_{23}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,3}, \\
&= \frac{1}{2}g^{11}h_{11,3} & &= \frac{1}{2}g^{22}h_{22,0} & &= \frac{1}{2}g^{22}h_{22,3} \\
\Gamma_{11}^3 &= -\frac{1}{2}g^{33}g_{11,3}, & \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2}g^{33}g_{22,3}, \\
&= -\frac{1}{2}h_{11,3} & &= -\frac{1}{2}h_{22,3}
\end{aligned} \tag{2.325}$$

リッチスカラーを計算する式はクリストッフエル記号を用いて以下のよう
に書ける。

$$R = g^{\beta\nu}(\Gamma_{\nu\beta,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta,\nu}^\alpha + \Gamma_{\rho\alpha}^\alpha\Gamma_{\nu\beta}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha\Gamma_{\alpha\beta}^\rho). \tag{2.326}$$

まずこの式の第一、二項のクリストッフエルの微分が現れる項を計算する。

$$\begin{aligned}
12 &= \eta^{00}(\Gamma_{00,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 0,0}^\alpha) + g^{11}(\Gamma_{11,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 1,1}^\alpha) + g^{22}(\Gamma_{22,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 2,2}^\alpha) + \eta^{33}(\Gamma_{33,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 3,3}^\alpha) \\
&= \frac{1}{2} [-(-g^{11}h_{11,0} - g^{22}h_{22,0})_{,0} + g^{11}(h_{11,00} - h_{11,33}) \\
&\quad + g^{22}(h_{22,00} - h_{22,33}) - (g^{11}h_{11,3} + g^{22}h_{22,3})_{,3}] \\
&= g^{11}h_{11,00} + g^{22}h_{22,00} - g^{11}h_{11,33} - g^{22}h_{22,33} \\
&\quad + \frac{1}{2} [-(h_{11,0})^2 - (h_{22,0})^2 + (h_{11,3})^2 + (h_{22,3})^2] \\
&= (g^{11}h_{11,0} + g^{22}h_{22,0})_{,0} - (g^{11}h_{11,3} + g^{22}h_{22,3})_{,3} \\
&\quad + \frac{1}{2} [(h_{11,0})^2 + (h_{22,0})^2 - (h_{11,3})^2 - (h_{22,3})^2]. \tag{2.327}
\end{aligned}$$

この項の4次元体積積分を行う。ヤコビアンは $\sqrt{-g} \sim 1 - h_{11}^2/2$ であり、1
からのズレは作用積分に3次以上の高次の寄与しか与えない。したがって、
ヤコビアンは1として扱う。項12の最後から二行目の式の体積積分は以下
のようにガウスの定理を用いて時間及び空間の境界での重力波の領域への
出入りの差に還元でき、重力波が減衰せずに伝搬しているとすれば、差し引
きゼロとなる。

$$\begin{aligned}
&\int d^4x [(g^{11}h_{11,0} + g^{22}h_{22,0})_{,0} - (g^{11}h_{11,3} + g^{22}h_{22,3})_{,3}] \\
&= \int d^3x [(g^{11}h_{11,0} + g^{22}h_{22,0})]_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int d^3x [(g^{11}h_{11,3} + g^{22}h_{22,3})]_{z=-\infty}^{z=\infty}
\end{aligned}$$

$$= 0. \quad (2.328)$$

したがって、この項は作用積分への寄与を与えない。

次にリッチスカラー (2.326) の第3、4項目を計算する。ここでクリストッフエル記号は一次の微量であるメトリックの一階微分を含み、これらの項はクリストッフエル記号が二つ掛かっているため、メトリックの微分以外に生に現れるメトリックは0次の量として扱って良い。

$$\begin{aligned}
34 &= \eta^{00}(\Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\rho} - \Gamma_{\rho 0}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 0}^{\rho}) + g^{11}(\Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha}\Gamma_{11}^{\rho} - \Gamma_{\rho 1}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 1}^{\rho}) \\
&\quad + g^{22}(\Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha}\Gamma_{22}^{\rho} - \Gamma_{\rho 2}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 2}^{\rho}) + \eta^{33}(\Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha}\Gamma_{33}^{\rho} - \Gamma_{\rho 3}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 3}^{\rho}) \\
&= -\left(-\left(\frac{1}{2}h_{11,0}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}h_{22,0}\right)^2\right) + \frac{1}{2}h_{11,0}\frac{1}{2}(h_{11,0} + h_{22,0}) \\
&\quad - \frac{1}{2}h_{11,3}\frac{1}{2}(h_{11,3} + h_{22,3}) - 2 \times \frac{1}{2}h_{11,0}\frac{1}{2}h_{11,0} + 2 \times \frac{1}{2}h_{11,3}\frac{1}{2}h_{11,3} \\
&\quad + \frac{1}{2}h_{22,0}\frac{1}{2}(h_{11,0} + h_{22,0}) - \frac{1}{2}h_{22,3}\frac{1}{2}(h_{11,3} + h_{22,3}) - 2 \times \frac{1}{2}h_{22,0}\frac{1}{2}h_{22,0} \\
&\quad + 2 \times \frac{1}{2}h_{22,3}\frac{1}{2}h_{22,3} - \left(\frac{1}{2}h_{11,3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}h_{22,3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}[h_{11,0}h_{22,0} - h_{11,3}^2h_{22,3}] \\
&= \frac{1}{2}[-(h_{11,0})^2 + (h_{11,3})^2]. \\
&= -\frac{1}{4}[(h_{11,0})^2 + (h_{22,0})^2 - (h_{11,3})^2 - (h_{22,3})^2]. \quad (2.329)
\end{aligned}$$

最後の変形では $h_{22} = -h_{11}$ を用いた。

以上から作用積分に寄与を与えるリッチスカラーは以下ようになる。

$$R = \frac{1}{4}[(h_{11,0})^2 + (h_{22,0})^2 - (h_{11,3})^2 - (h_{22,3})^2]. \quad (2.330)$$

ここで以下のように定義されるテンソルプラスモードの振幅 Δ_+ を導入する。

$$\Delta_+ \equiv \sqrt{h_{11}^2 + h_{22}^2}c^2 = \sqrt{2}hc^2. \quad (2.331)$$

これを用いて、平坦な時空に重力波のプラスモードのみが存在する場合のアインシュタイン・ヒルベルト作用 (2.318) は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
I &= \int d^4x \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{4} ((\Delta_{+,0})^2 - (\Delta_{+,3})^2) \\
&= - \int d^4x \frac{\tilde{M}_{pl}^2}{4\hbar c} \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_+ \partial_\nu \Delta_+. \quad (2.332)
\end{aligned}$$

最後の変形では、共変な形即ちスカラー量であることが一目で分かる形に整理した。 \tilde{M}_{pl} は 4 節式 (4.103) で定義される換算プランク質量である。以上からテンソルモードのラグランジアンは以下のように与えられることが分かる。

$$L_{GW} = \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{4} (-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_+ \partial_\nu \Delta_+ - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_\times \partial_\nu \Delta_\times). \quad (2.333)$$

この形は massless で自由なスカラー場と本質的に同じ形である。オイラーラグランジ方程式から以下の発展方程式を得る。

$$\square \Delta_+ = 0. \quad (2.334)$$

ここで式 (2.331) で定義される h は strain と呼ばれ、重力波による空間の長さの変化率を表す量である。プラスモードのメトリックテンソルを $H_{+,\mu\nu}$ を用いて以下のように表すことができる。

$$(H_{+,\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.335)$$

これから h の一次のオーダーで反変テンソルが以下のように書ける。

$$(H_+^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.336)$$

これらから以下のスカラー量が定義できる。

$$H_{+,\mu\nu} H_+^{\mu\nu} = 2h^2. \quad (2.337)$$

したがって、strain 或いは Δ_+ はスカラー量である。

式 (2.333) で与えられるテンソルモードのラグランジアンは、ゼロ次が平坦な時空 \bar{x} 系でのものである。ラグランジアンはスカラー量であるから一般座標 x でのラグランジアンは以下のように書けるのは自明である。

$$L_{GW} = -\frac{1}{16\pi G} \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_+ \partial_\nu \Delta_+ + g^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_\times \partial_\nu \Delta_\times). \quad (2.338)$$

2.25 ゲージ変換

次の式で定義される座標の無限小変換をゲージ変換とよぶ。

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (2.339)$$

ここで ξ^μ は微少量である。摂動量のゲージ変換性をしらべる。簡単のため扱うモードの波数ベクトルが z 軸を向いているとする。ゲージ変換の内 $\xi^\mu = (\delta\tau, 0, 0, 0), (0, 0, 0, -i\delta x)$ はスカラーモードである。一方、 $\xi^\mu = (0, \delta x_1, \delta x_2, 0)$ はベクトルモードである。ゲージ変換にはテンソルモードは存在しない。スカラー、ベクトル、テンソルは独立なモードであり、スカラー摂動量は、ゲージ変換のスカラーモードにのみ、ベクトル摂動量は、ゲージ変換のベクトルモードにのみ影響を受ける。ゲージ変換のテンソルモードは存在しないため、摂動量のテンソルモードは、全てゲージ不変である。

摂動量を扱う上でゲージ変換性が重要である理由を説明する。例として密度揺らぎ $\delta\rho$ を取り上げる。密度 $\rho(t)$ で一様で膨張する宇宙を考える。ここで以下のようなゲージ変換を施す。

$$\bar{t} = t + \xi^0(x^i)$$

即ち場所毎に時計を遅らせたり進ませたりする。この操作により密度分布が $\bar{\rho}(\bar{t}(x^i))$ に変化する。ゲージ変換後は、場所場所で時計が狂っているわけだが、狂った時計を持たされた人々は、自分の時計が正しいと仮定して密度分布の測定を行う。彼らが $\bar{t}(x^i) = t$ の同時刻で密度分布を測定したとしよう。すると密度分布は一様では無く、揺らぎが発生して見える。即ち、 $\bar{t} = t$ と設定するという事は、狂う前の時計で $t = t - \xi^0$ の時刻での密度を狂っ

た時計をもった観測者は時刻 t の密度と取る事になる。

$$\bar{\rho}(\tilde{t}(x^i) = t) = \rho(t - \xi^0(x^i)) \sim \rho(t) - \xi^0(x^i)\dot{\rho}(t) \quad (2.340)$$

宇宙膨張により密度は減少しているので $\dot{\rho} < 0$ である。したがって $\xi^0(x^i) > 0$ の時狂った時計を持たされた観測者は自分の場所の密度が平均密度 $\rho(t)$ より大きいと観測する。即ち、正の密度揺らぎが存在するという測定結果をだす。このように場所によって時計の狂いがまちまちであるだけで本来密度揺らぎが存在しないのを見かけ上密度揺らぎが存在するように観測されてしまう。発生した見かけの密度揺らぎが $-\xi^0\dot{\rho}$ になるのは、物理的にも明らかである。膨張による密度の減少率は $\dot{\rho}$ である。ゲージ変換によって $\tilde{t} = t + \xi^0$ とするということは、時計を ξ^0 だけ進めるということであり、新しい時計での時刻 t は以前の時計の $t - \xi^0$ を指す事になる。従って、この場所での密度は ξ^0 だけ前の密度を指す事になり、その間に宇宙の平均密度が宇宙膨張で減少した $-\xi^0\dot{\rho}$ だけ高い密度になり、これが見かけの密度揺らぎとなる。ここで以下で定義される差分を Lie 微分と呼ぶ。

$$\delta^L \rho = \bar{\rho}(t) - \rho(t) \quad (2.341)$$

即ち Lie 微分は、ゲージ変換で発生する見かけの物理量の揺らぎである。

以下ではエネルギー運動量テンソルやメトリックテンソルのゲージ変換性を扱うのでまずは一般の二階のテンソル $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換性を求める公式を導く。ゲージ変換 $\tilde{x}^\sigma = x^\sigma + \xi^\sigma$ によって $\tilde{B}_{\mu\nu}$ に変換されたとする。二階の共変テンソルの変換性から以下の式を得る。

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\sigma) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} B_{\alpha\beta}(x^\sigma) \quad (2.342)$$

ゲージ変換の定義式から以下の式を得る。

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha \quad (2.343)$$

$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}$ は $\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}$ の逆行列である。従って

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \partial_\mu \xi^\mu) \begin{pmatrix} 1 + \partial_i \xi^i & -\partial_0 \xi^1 & -\partial_0 \xi^2 & -\partial_0 \xi^3 \\ -\partial_1 \xi^0 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_2 \xi^2 + \partial_3 \xi^3 & -\partial_1 \xi^2 & -\partial_1 \xi^3 \\ -\partial_2 \xi^0 & -\partial_2 \xi^1 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_1 \xi^1 + \partial_3 \xi^3 & -\partial_2 \xi^3 \\ -\partial_3 \xi^0 & -\partial_3 \xi^1 & -\partial_3 \xi^2 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \partial_0 \xi^0 & -\partial_0 \xi^1 & -\partial_0 \xi^2 & -\partial_0 \xi^3 \\ -\partial_1 \xi^0 & 1 - \partial_1 \xi^1 & -\partial_1 \xi^2 & -\partial_1 \xi^3 \\ -\partial_2 \xi^0 & -\partial_2 \xi^1 & 1 - \partial_2 \xi^2 & -\partial_2 \xi^3 \\ -\partial_3 \xi^0 & -\partial_3 \xi^1 & -\partial_3 \xi^2 & 1 - \partial_3 \xi^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であり、

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha \quad (2.344)$$

である。以上から二階のテンソルの Lie 微分は微小量の一次までで以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta^L B_{\mu\nu}(x^\sigma) &= \tilde{B}_{\mu\nu}(x^\sigma) - B_{\mu\nu}(x^\sigma) = \tilde{B}_{\mu\nu}(\bar{x}^\sigma) - B_{\mu\nu}(x^\sigma) - (\tilde{B}_{\mu\nu}(\bar{x}^\sigma) - \tilde{B}_{\mu\nu}(x^\sigma)) \\
&\sim (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha)(\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \xi^\beta) B_{\alpha\beta}(x^\sigma) - B_{\mu\nu}(x^\sigma) - \xi^\alpha \partial_\alpha B_{\mu\nu}(x^\sigma) \\
&= -\xi^\alpha \partial_\alpha B_{\mu\nu}(x^\sigma) - \partial_\mu \xi^\alpha B_{\alpha\nu}(x^\sigma) - \partial_\nu \xi^\beta B_{\mu\beta}(x^\sigma) \quad (2.345)
\end{aligned}$$

弱い重力場のメトリックテンソル (2.119) の場合、微小量の一次まででメトリックのミンコフスキーからのズレの部分のゲージ変換則は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) &= h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi^\alpha \eta_{\alpha\nu} - \partial_\nu \xi^\beta \eta_{\mu\beta} \\
&= h_{\mu\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \xi_{\mu,\nu} \quad (2.346)
\end{aligned}$$

ここでリー微分に現れる $-\xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}(x^\sigma)$ は、メトリックのゼロ次の座標微分がゼロであるため、微小量の二次以上の高次の摂動量となるため無視できることを用いた。ゲージ変換によりメトリックのトレースは以下のように変換される。

$$\tilde{h} = h - \partial_\mu \xi^\alpha \delta_\alpha^\mu - \partial_\mu \xi^\alpha \delta_\alpha^\mu = h - 2\partial_\mu \xi^\mu \quad (2.347)$$

2.26 弱い重力場のアインシュタイン方程式

弱い重力場の極限で一般のエネルギー運動量テンソルが生じる時空の歪みを求めるのに便利な形の弱い重力場の極限でのアインシュタイン方程式を導出する。メトリックを式 (2.119) のようにミンコフスキーとそれからの微小なズレを表す部分に分ける。微小量の一次まででリーマンテンソルは、式 (2.123) のように書ける。これに $\eta^{\alpha\mu}$ を掛けて縮約を取ることでリッチテンソルが以下のように求まる。

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta}{}^{\cdot\alpha} + h_{\alpha\beta,\nu}{}^{\cdot\alpha} - \square h_{\beta\nu} - h_{,\beta\nu}) \quad (2.348)$$

ここで $f_{,\alpha}{}^{\alpha} = \square f$ でダランベルシアンであること用い、トレースを $h_{\alpha}^{\alpha} = h$ のように h を用いて表した。リッチスカラーは以下のようになる。

$$R = h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h \quad (2.349)$$

以上からアインシュタインテンソルが以下のように求まる。

$$G_{\beta\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta}{}^{\cdot\alpha} + h_{\alpha\beta,\nu}{}^{\cdot\alpha} - \square h_{\beta\nu} - h_{,\beta\nu}) - \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}(h_{\alpha\mu}{}^{\cdot\alpha\mu} - \square h) \quad (2.350)$$

ゲージ変換 (2.346) を施した後のメトリック摂動 $\tilde{h}^{\mu\nu}$ でアインシュタインテンソルを書き表すと式 (2.350) の h を \tilde{h} に入れ替えただけのものになることを示す。式 (2.350) の右辺の h を \tilde{h} に入れ替えたとき現れるおつりの項は微小量の一次までとる近似で以下のようにリーチテンソルとリッチスカラーのおつりの足し算になる。

$$\delta G_{\beta\nu} = \delta R_{\beta\nu} - \eta_{\beta\nu} \delta R \quad (2.351)$$

まずリッチスカラーのおつりを計算する。

$$\begin{aligned} \delta R &= (-\partial_{\alpha}\xi^{\gamma}\eta_{\gamma\mu} - \partial_{\mu}\xi^{\gamma}\eta_{\gamma\alpha}){}^{\cdot\alpha\mu} + 2\square\partial_{\mu}\xi^{\mu} \\ &= -\xi^{\gamma}{}_{,\gamma\alpha}{}^{\cdot\alpha} - \xi^{\gamma}{}_{,\gamma\mu}{}^{\cdot\mu} + 2\square\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} = -\square\xi^{\gamma}{}_{,\gamma} - \square\xi^{\gamma}{}_{,\gamma} + 2\square\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.352)$$

したがって、リッチスカラーはゲージ不変である。スカラー量なので座標変換に対して不変であるのは当然の結果である。次にリッチテンソルのおつりを計算する。

$$\begin{aligned}\delta R_{\beta\nu} &= \frac{1}{2}(-\xi_{\alpha,\nu\beta}^{\cdot\alpha} - \xi_{\nu,\alpha\beta}^{\cdot\alpha} - \xi_{\alpha,\beta\nu}^{\cdot\alpha} - \xi_{\beta,\alpha\nu}^{\cdot\alpha} + \square\xi_{\beta,\nu} + \square\xi_{\nu,\beta} + 2\xi_{\alpha,\beta\nu}^{\cdot\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(-2\xi_{\alpha,\beta\nu}^{\cdot\alpha} - \square\xi_{\nu,\beta} - \square\xi_{\beta,\nu} + \square\xi_{\beta,\nu} + \square\xi_{\nu,\beta} + 2\xi_{\alpha,\beta\nu}^{\cdot\alpha}) \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.353)$$

したがって、リッチテンソルもゲージ不変量である。以上からアインシュタインテンソルは

$$\delta G_{\beta\nu} = \delta R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}\delta R = 0\quad (2.354)$$

でゲージ変換で生じる差額分は、アインシュタインテンソルに寄与を与えないことがわかる。したがって、ゲージ変換後のメトリック摂動を用いてアインシュタインテンソルは式 (2.350) と同じ形で表される。ゲージ変換によりエネルギー運動量テンソルも式 (2.345) にしたがって変換を受ける。弱い重力場の近似が有効であるということは、ゼロ次のエネルギー運動量テンソルはゼロであり、ゼロ次のメトリックテンソルがミンコフスキーメトリックで表される。メトリックの摂動は、物質の存在即ちノンゼロのエネルギー運動量テンソルの存在によって引き起こされるのであるから、ノンゼロのエネルギー運動量テンソルは摂動の一次の微小量である。式 (2.345) から分かるようにゲージ変換によって生じる差額分は、元の座標でのエネルギー運動量テンソルとゲージ変換量 ξ との積で現れる。これは微小量の2次のオーダーの量である。したがって、微小量の一次のオーダーでは、弱い重力場の重力源となる物質のエネルギー運動量テンソルはゲージ変換に対して不変である。以上の事から弱い重力場のアインシュタイン方程式の形はゲージ選択に依存しない。つまり、エネルギー運動量テンソルが与えられた時、アインシュタイン方程式の解として得られるメトリックは、一意には決まらずゲージ変換の自由度を持つことになる。言い換えると物理の内容を不変に保ったままゲージ変換によりメトリックの形を変えることが

できる。

次ように定義されるテンソルを用いてアインシュタインテンソルを書き換える。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.355)$$

このテンソルのトレースは以下のように $-h$ となる。

$$\bar{h}^{\mu}_{\mu} = h^{\mu}_{\mu} - 2h = -h$$

ここで微小量の二次以上は無視しトレースを $g^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} \sim \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu}$ と近似した。この為 $\bar{h}_{\mu\nu}$ はトレース反転テンソルと呼ばれる。定義式 (2.355) を逆に解くと以下の関係式をえる。

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \quad (2.356)$$

式 (2.356) をアインシュタインテンソル (2.350) に代入することでトレース反転テンソルを用いたアインシュタインテンソルの以下の表記を得る。

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\square\bar{h}_{\mu\nu} + \bar{h}_{\alpha\nu;\mu}^{\alpha} + \bar{h}_{\alpha\mu;\nu}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\gamma}_{;\gamma\alpha}) \quad (2.357)$$

ゲージ変換の自由度用いて、アインシュタインテンソルを扱いやすい形に整理できるゲージを選択する。ゲージ変換前後のメトリックに new, old の引数をつける。ゲージ変換 (2.346) によりメトリックの摂動は以下のように変換される。

$$h_{\mu\nu}^{(new)} = h_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} \quad (2.358)$$

トレースは以下のように変換される。

$$h^{(new)} = h^{(old)} - 2\partial_{\mu}\xi^{\mu} \quad (2.359)$$

反転トレーステンソルの定義から新しいゲージでの反転トレーステンソルと元のゲージの反転トレーステンソルは以下の関係で結ばれることが分かる。

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} = h_{\mu\nu}^{(new)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(new)}$$

$$\begin{aligned}
&= h_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (h^{(old)} - 2\partial_\alpha \xi^\alpha) \\
&= \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha
\end{aligned} \tag{2.360}$$

アインシュタインテンソルのダランベルシアン以外の項が邪魔である。これらは全てメトリックテンソルの発散を含んでいる。したがって、新しいゲージをメトリックの発散がゼロになるように選択すれば良い。式 (2.360) の発散をとると以下のようになる。

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(new),\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(old),\nu} - \square \xi_\mu \tag{2.361}$$

ここで ξ を以下の方程式の解になるように選択すれば、新しいゲージのメトリックの発散 (2.361) をゼロにできる。

$$\square \xi_\mu = \bar{h}_{\mu\nu}^{(old),\nu} \tag{2.362}$$

新しいゲージのメトリックが満たす条件

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 \tag{2.363}$$

をローレンツ・ゲージ条件と呼ぶ。以上から、ローレンツゲージの反転トレース・メトリック摂動が満たすアインシュタイン方程式が導出できた。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.364}$$

ここで $\bar{h}_{\mu\nu}$ は、条件 (2.363) を満たす。

トランスバース・トレースレスゲージ

節 2.21 で紹介したテンソルモードの表記式 (2.268) がどのようなゲージを選択したことに対応するか議論する。ローレンツゲージでの反転トレース・メトリックは、式 (2.364) を満たすため、真空中では以下の方程式を満たす。

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.365}$$

ローレンツ・ゲージを満たすゲージ変換に、次の方程式

$$\square \xi_\mu = 0 \tag{2.366}$$

を満たす ξ_μ を加えても変わらずローレンツ・ゲージ条件を満たす。すなわち式 (2.366) を満たす ξ_μ を加えても良い自由度がローレンツ・ゲージには残されている。この4つのゲージ自由度を使って、メトリック摂動を式 (2.364) まで還元できることを示す。ローレンツ・ゲージのメトリック摂動をこの自由度の範囲で変換したのち得られるメトリックは以下のようにかける。

$$\begin{aligned} h'_{\alpha\beta} &= h_{\alpha\beta}^{(new)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \\ \bar{h}'_{\alpha\beta} &= \bar{h}_{\alpha\beta}^{(new)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta} \xi_{,\mu}^\mu. \end{aligned} \quad (2.367)$$

ゲージ自由度の一つを適当に選択することで ξ_α を

$$\xi_{,\alpha}^\alpha = -\frac{1}{2} \bar{h}_\alpha^{(new)\alpha} \quad (2.368)$$

の条件を満たすように選択することができる。この時、新しいゲージでの反転トレーステンソルのトレースがゼロとなり、反転トレーステンソルの定義からメトリック摂動のトレースもゼロとなる。

$$\bar{h}'^\alpha_\alpha = -h'^\alpha_\alpha = 0 \quad (2.369)$$

以下では、方程式 (2.365) の平面波解の伝搬方向を x^3 軸にとる。したがって、4元波数ベクトルは $k_\mu = (-k, 0, 0, k)$ と与えられる。任意の等速直線運動する粒子の4元速度ベクトル U^μ を用意する。この4元速度を用いて、以下の条件を満たすように残りの3つのゲージ自由度を用いてゲージを選択することができる。

$$U^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.370)$$

この条件は異なる4つの ν に対して課せられた4つの条件であるが、その内一つは、ローレンツゲージ条件 (2.363) より

$$k^\nu (U^\mu \bar{h}_{\mu\nu}) = 0 \quad (2.371)$$

を満たすことから独立ではない。したがって、条件 (2.370) は3つの独立な条件を与える。ローレンツ変換によってこの粒子と一緒に運動する系にうつるとそこでは $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$ と書ける。この系では、条件 (2.370) から

まず以下の制限をえる。

$$\bar{h}_{00} = 0 \quad (2.372)$$

これとローレンツ条件から直ちに

$$\bar{h}_{03} = 0 \quad (2.373)$$

を得る。条件 (2.371) の残り二つから以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \bar{h}_{01} &= 0 \\ \bar{h}_{02} &= 0 \end{aligned} \quad (2.374)$$

ここまでの結果から新しいゲージでは、ゼロでない反転テンソル成分は \bar{h}_{ij} のみとなる。したがって、ローレンツゲージ条件 (2.363) より

$$-k\bar{h}^{0\alpha} + k\bar{h}^{z\alpha} = k\bar{h}^{z\alpha} = 0$$

が得られ、全ての α について

$$\bar{h}_{\alpha z} = \bar{h}_{z\alpha} = 0 \quad (2.375)$$

であることが導かれる。ゼロでない成分は $\bar{h}_{xx}, \bar{h}_{xy}, \bar{h}_{yx}, \bar{h}_{yy}$ の4つのみである。対称テンソルであることから

$$\bar{h}_{yx} = \bar{h}_{xy} = h_{\times} \quad (2.376)$$

である。更にトレースレスであることから

$$\bar{h}_{yy} = -\bar{h}_{xx} = -h_{+} \quad (2.377)$$

である。反転テンソルがトレースレスであることから $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$ である。したがって、このゲージでのメトリック摂動は以下のようにかける。

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.378)$$

このゲージをトランスバース・トレースレスゲージ、TTゲージと呼ぶ。トレースレスという呼び名の由来は自明であろう。トランスバースという呼

び名、波の伝搬方向に垂直な成分のみ持つ即ち横波であることからきている。テンソルモードの表記式 (2.268) は、TT ゲージを選択したことに対応していることがわかった。

第3章

ブラックホール

3.1 球対称星

3.1.1 シュワルツシルトの外部解

質量 M 、半径 a で静的で球対称な星の外部 ($r > a$) のアインシュタイン方程式の解を求める。対称性を考慮し、微小線素を3次元極座標を用いて以下のように書く。

$$ds^2 = -e^{2\psi}(cdt)^2 + e^{2\phi}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.1)$$

ここで ψ, ϕ は動径 r にのみ依存する関数である。星の外部なので空間は真空であり、ストレス・エネルギーテンソルは0である。メトリックテンソルは以下のようになる。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -e^{2\psi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

この逆行列は以下のようになる。

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -e^{-2\psi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

クリストッフェル記号を計算するとゼロでない成分は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \psi_{,r}, \Gamma_{00}^1 = \psi_{,r} e^{2\psi-2\phi}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \phi_{,r}, \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-2\phi}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-2\phi}, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

リッチテンソルの対角成分が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 0}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{\alpha 0}^\sigma \Gamma_{\sigma 0}^\alpha, \\ &= \partial_1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0, \\ &= e^{2(\psi-\phi)} \left[\psi_{,rr} + (\psi_{,r})^2 - \psi_{,r} \phi_{,r} + \frac{2}{r} \psi_{,r} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \partial_1 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{11}^\sigma - \Gamma_{\alpha 1}^\sigma \Gamma_{\sigma 1}^\alpha, \\ &= \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{01}^0 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{21}^2 - \partial_1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{31}^3 \\ &= -\psi_{,rr} + \psi_{,r} \phi_{,r} - (\psi_{,r})^2 + \frac{2}{r} \phi_{,r}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{\alpha 2}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{22}^\sigma - \Gamma_{\alpha 2}^\sigma \Gamma_{\sigma 2}^\alpha, \\ &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{32}^3, \\ &= 1 - e^{-2\phi} (1 - r \phi_{,r} + r \psi_{,r}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{\alpha 3}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{33}^\sigma - \Gamma_{\alpha 3}^\sigma \Gamma_{\sigma 3}^\alpha, \\ &= \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1, \\ &= \sin^2 \theta R_{22}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

これらをアインシュタイ方程式 (2.115) に代入し、外部解を扱っているので真空 ($T^{\mu\nu} = 0, T = 0$) であることを用いるとアインシュタイ方程式は $R_{\mu\nu} = 0$ となり、以下の3つの独立な方程式を得る。

$$\psi_{,rr} + (\psi_{,r})^2 - \psi_{,r}\phi_{,r} + \frac{2}{r}\psi_{,r} = 0, \quad (3.9)$$

$$-\psi_{,rr} + \psi_{,r}\phi_{,r} - (\psi_{,r})^2 + \frac{2}{r}\phi_{,r} = 0, \quad (3.10)$$

$$1 - e^{-2\phi}(1 - r\phi_{,r} + r\psi_{,r}) = 0. \quad (3.11)$$

式 (3.9)+(3.10) より以下の方程式を得る。

$$\psi_{,r} + \phi_{,r} = 0. \quad (3.12)$$

式 (3.12) を式 (3.11) に代入して整理すると以下の方程式を得る。

$$1 = e^{-2\phi} - 2r\phi_{,r}e^{-2\phi} = (re^{-2\phi})_{,r}. \quad (3.13)$$

方程式 (3.12) を解くと定数 b を用いて

$$\psi + \phi = b, \quad (3.14)$$

が得られる。方程式 (3.13) を解くと

$$\begin{aligned} re^{-2\phi} &= r - a, \\ e^{2\phi} &= \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

但し a は定数を得る。したがって、

$$e^{2\psi} = e^{2b}e^{-2\phi} = e^{2b} \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad (3.16)$$

を得る。

解に現れた不定定数 a, b を十分遠方 $r \rightarrow \infty$ で、ニュートンの万有引力の法則を表すメトリック (2.116) に一致せよという制約から決定できる。ここで $\Phi = -GM/r$ である。まず $g_{rr} \rightarrow 1 + 2GM/c^2r$ より a が以下のように求まる。十分遠方では

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \sim 1 + \frac{a}{r},$$

であるから $a = 2GM/c^2$ と求まる。次に $g_{00} \rightarrow -(1 - \frac{2GM}{c^2r})$ になれという条件から $b = 0$ と決定される。以上からシュワルツシルトの外部解が以下のように求まった。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.17)$$

ここで

$$r_{SH} \equiv \frac{2GM}{c^2} \sim 3 \left(\frac{M}{1M_\odot}\right) \text{km}, \quad (3.18)$$

で定義される半径をシュワルツシルト半径と呼ぶ。ここで $M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{g}$ は太陽の質量であり、太陽程度の質量の星のシュワルツシルト半径が大体 3km 程度であることを示している。

ニュートンの万有引力の法則を表すメトリック (2.116) は、中心が原点に一致する質量 M の球対称の星場合、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.19)$$

であり、シュワルツシルトメトリック (3.17) の無限遠極限

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

と完全には一致せず、方位角方向で違いが存在する。これは、 r, θ, ϕ が通常の 3次元デカルト座標と球面極座標の関係で結ばれる座標ではない事に起因している。通常の 3次元デカルト座標と球面極座標の関係で結ばれる球面極座標を以下の変数変換によって得る事ができる。次の関係式で新しい動径座標 \bar{r} を導入する。

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{r_{SH}}{4\bar{r}}\right)^2, \quad (3.20)$$

すると

$$1 - \frac{r_{SH}}{r} = \left[\frac{1 - \frac{r_{SH}}{4\bar{r}}}{1 + \frac{r_{SH}}{4\bar{r}}} \right]^2,$$

$$dr = d\bar{r} \left(1 - \left(\frac{r_{SH}}{4\bar{r}}\right)^2\right),$$

となる。これらを用いてシュワルツシルトメトリック (3.17) を書き換えると以下のようなになる。

$$ds^2 = - \left[\frac{1 - \frac{r_{SH}}{4\bar{r}}}{1 + \frac{r_{SH}}{4\bar{r}}} \right]^2 (cdt)^2 + \left(1 + \frac{r_{SH}}{4\bar{r}} \right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \quad (3.21)$$

このメトリックは無遠の極限で以下のようになる。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2\bar{r}} \right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2\bar{r}} \right) (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \quad (3.22)$$

ここで $x = \bar{r} \sin\theta \cos\phi$, $y = \bar{r} \sin\theta \sin\phi$, $z = \bar{r} \cos\theta$ によりデカルト座標と結びかるとすると無限遠極限でのシュワルツシルトメトリックが以下のように書ける。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2\bar{r}} \right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2\bar{r}} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.23)$$

これは確かにニュートン重力を与えるメトリック (3.19) と一致しており、シュワルツシルトメトリックが無遠でニュートン重力を再現できることが示された。但し、ここで導入した \bar{r} はシュワルツシルト半径の内側は記述できない。

シュワルツシルトメトリック (3.17) の幾何学的イメージを深めるため、 $r > r_{SH}$ でのシュワルツシルトメトリックの空間部分を再現する 3 次元空間内に埋め込まれた 2 次元曲面を紹介する。次の方程式で定義される 2 次元曲面を考える。

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ x &= r \cos\theta, \\ y &= r \sin\theta, \\ z^2 &= 4r_{SH}(r - r_{SH}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

この曲面内の微小線素は次のように与えられることは容易に確認できる。

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_{SH}}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (3.25)$$

この形は、シュワルツシルトメトリック (3.17) で $d\phi = 0$ とした時の空間部分と一致している。このメトリックが表す曲面を図 3.1 に示した。くびれたウエストの部分が $r = r_{SH}$ である。メトリック (3.25) で用いられている r, θ は、曲面 3.1 の各点を xy 平面内に落として (写像して) 2 次元極座標で

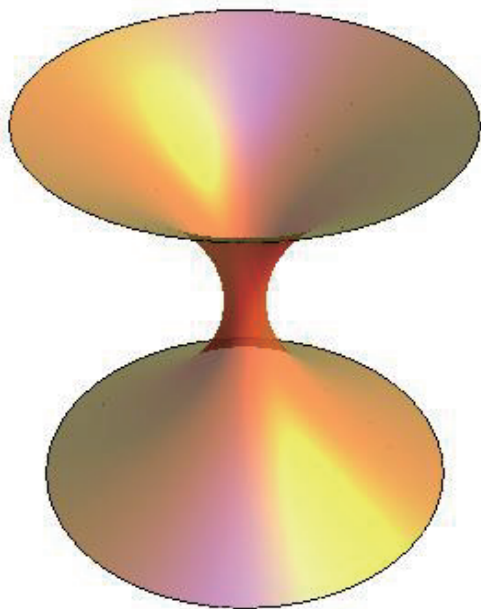


図 3.1 $r > r_{SH}$ に於ける Schwarzschild 時空の可視化。

表したものである。これを4次元空間に埋め込まれた3次元曲面に拡張したものは以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\
 x &= r \sin \theta \cos \phi, \\
 y &= r \sin \theta \sin \phi, \\
 z &= r \cos \theta, \\
 w^2 &= 4r_{SH}(r - r_{SH}).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

この時微小線素の長さは以下のように与えられ確かにシュワルツシルトメトリックの空間部分が再現されている。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_{SH}}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{3.27}$$

シュワルツシルトメトリックの $r \geq r_{SH}$ の空間部分は、空間 4 次元（空間だけで 4 次元 x, y, z, w ）に埋め込まれた図 3.1 の様な 3 次元曲面上の各点を x, y, z デカルト座標に落として、それらを 3 次元極座標で表したものであることが分かる。このように座標を選択することで r 一定の球面の面積が $4\pi r^2$ となる。実際のシュワルツシルト時空を表すのは、 $w \geq 0$ の部分のみであり、 $w < 0$ の下半分が接続しているわけではない。以下の節で述べるようにシュワルツシルト時空では、粒子は全て $r=0$ の特異点に吸い込まれてしまう。その為、ブラックホールと呼ばれる。この教科書では詳しくは述べないが $w < 0$ の時空は、 $w \geq 0$ が表す解の時間反転したものに対応しており、粒子が吐き出されることとなりホワイトホールと呼ばれる。図 3.1 で表したように w の正負の部分が接続した解が数学的には存在し得る。このような解が現す時空をワームホール、時空の虫食い孔と呼ぶ。ワームホールを利用すれば、ブラックホールで吸い込まれてホワイトホールから出る事で時空をワープすることが原理的には可能である。図 3.1 で現される時空を Einstein-Rosen bridge 或は Schwarzschild wormhole と呼ぶ。

3.1.2 時空の特異点

シュワルツシルト時空 (3.17) のリーマンテンソルの内ゼロで無い独立な成分を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} R_{110}^0 &= \Gamma_{01,1}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 \\ &= \psi_{,rr} + (\psi_{,r})^2 - \psi_{,r} \phi_{,r} \\ &= -\frac{r_{SH}/r^3}{(1 - \frac{r_{SH}}{r})}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} R_{220}^0 &= -\Gamma_{10}^0 \Gamma_{22}^1 = r\psi_{,r} e^{-2\phi} \\ &= \frac{r_{SH}}{2r}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} R_{330}^0 &= -\Gamma_{10}^0 \Gamma_{33}^1 = r\psi_{,r} \sin^2 \theta e^{-2\phi} \\ &= \frac{r_{SH}}{2r} \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$R_{212}^1 = \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2$$

$$= r\phi_{,r}e^{-2\phi} = -\frac{r_{SH}}{2r}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} R_{313}^1 &= \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^1\Gamma_{31}^3 \\ &= r\phi_{,r}\sin^2\theta e^{-2\phi} = -\frac{r_{SH}}{2r}\sin^2\theta, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} R_{323}^2 &= \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^2\Gamma_{23}^3 \\ &= -\sin^2\theta e^{-2\phi} + \sin^2\theta = \frac{r_{SH}}{r}\sin^2\theta, \end{aligned} \quad (3.33)$$

これからリッチテンソル、リッチスカラーを計算すると全てゼロ $R_{\mu\nu} = 0, R = 0$ となる。このことは、メトリック (3.17) は真空中のアインシュタイン方程式の解であることから当然期待される結果である。式 (3.28) で与えられる成分は、 $r = r_{SH}$ で発散する。しかし、このリーマンテンソルの対称性の性質で結ばれる成分 R_{010}^1 を計算すると

$$\begin{aligned} R_{010}^1 &= g^{11}R_{1010} = -g^{11}R_{0110} = -g^{11}g_{00}R_{110}^0 \\ &= \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right)^2 \left[-\frac{r_{SH}/r^3}{(1 - \frac{r_{SH}}{r})}\right] \\ &= -\left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) \frac{r_{SH}}{r^3}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

となり、 $r = r_{SH}$ での発散が消える。

節 3.1.4 で述べるように、 $r = r_{SH}$ でのメトリック (3.17) の特異性は、座標系の取り方に由来するものである。節 3.1.4 で説明するクルスカル・セッケル座標では $r = r_{SH}$ での特異性は現れない。時空の特異性は、座標系の取り方に依存しない量即ちスカラー量で調べる必要がある。しかし、上記のようにリッチスカラーはゼロとなり、時空の特異性を調べるには不適である。そのような量として、以下で定義されるクレッチマン不変量が適切である。

$$K = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (3.35)$$

この量はリーマンテンソルの内積の様な量であり、定義からスカラー量であることは自明であり、座標系の取り方に依存しない不変量である。リーマンテンソルの計算結果 (3.33) を用いて計算するとシュワルツシルトメトリックに於けるクレッチマン不変量が以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
K &= 4(R^{0110}R_{0110} + R^{0220}R_{0220} + R^{0330}R_{0330} + R^{1212}R_{1212}R^{1313}R_{1313} + R^{2323}R_{2323}) \\
&= \frac{12r_{SH}^2}{r^6} = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

全体に掛かる係数 4 は、リーマンテンソルの前二つの添字の入れ替えに対する反対称性から 2 個の場合（例えば 01 に対して 10）、それぞれに対して後ろ二つの添字の入れ替えに対する反対称性 2 個の場合があることから各組みと同じ値を与える組み合わせが $2 \times 2 = 4$ 通りあることから来ている。確かに $r = r_{SH}$ で特性を持たない。一方 $r = 0$ は特異点であることが分かる。

3.1.3 事象の地平線

シュワルツシルト半径の外から動径方向に沿って落下する質量 m の質点の運動を考察する。シュワルツシルト時空中の粒子の運動方程式の第 0 成分は式 (2.135) より以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
\frac{dU^0}{d\tau} &= -U^\alpha U^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^0, \\
&= -2U^0 U^1 \Gamma_{01}^0 = -2U^0 U^1 \psi_{,1} = -2U^0 \frac{d\psi}{d\tau}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

最後の等号では、 ψ が $x^1 = r$ にのみ依存することを用いて $U^1 \psi_{,1} = U^\mu \psi_{,\mu} = d\psi/d\tau$ であることを用いた。式 (3.37) の両辺に $e^{2\psi}$ を掛けて整理すると以下のように変形できる。

$$e^{2\psi} \frac{dU^0}{d\tau} + 2U^0 \frac{d\psi}{d\tau} e^{2\psi} = \frac{d}{d\tau} (U^0 e^{2\psi}) = 0. \tag{3.38}$$

これを積分すると以下のエネルギー保存則を得る。

$$U^0 e^{2\psi} = U^0 \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) = kc. \tag{3.39}$$

ここで k は積分定数であり、粒子の軌道に沿って保存する。4 元速度の内積が式 (1.56) で与えられることから U^1 が以下のように求まる。

$$-c^2 = g_{00}(U^0)^2 + g_{11}(U^1)^2 = -\left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right)(U^0)^2 + \frac{(U^1)^2}{1 - \frac{r_{SH}}{r}},$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-k^2 c^2 + (U^1)^2}{1 - \frac{r_{SH}}{r}}, \\
U^1 &= -c \left(k^2 - 1 + \frac{r_{SH}}{r} \right)^{1/2}. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

ここで粒子は落下運動をしているので動径速度は負を選択した。粒子は $r = R$ から初速ゼロで落下を始めたとし式 (3.40) に $r = R, U^1 = 0$ を代入すると積分定数が以下のように求まる。

$$k^2 - 1 = -\frac{r_{SH}}{R}. \tag{3.41}$$

$U^1 = dr/d\tau$ であることを利用して式 (3.40) から固有時間と粒子の動径座標との関係式を得る事ができる。

$$\begin{aligned}
\tau &= -\frac{1}{c} \int_R^r \frac{dr}{\left(-\frac{r_{SH}}{R} + \frac{r_{SH}}{r}\right)^{1/2}} = -\frac{1}{cr_{SH}^{1/2}} \int_R^r \frac{r^{1/2} dr}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/2}}, \\
&= \frac{R^{3/2}}{cr_{SH}^{1/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \sin 2 \left(\cos^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \right) \right]. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

二行目の等号では、

$$r = R \cos^2 \theta,$$

と変数変換を行なって積分を実行した。 $r \rightarrow 0$ の極限を取ると、半径 R から原点まで落下するのに要する固有時間が以下のように求まる。

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2} R \left(\frac{R}{2GM} \right)^{1/2}. \tag{3.43}$$

この結果は、シュワルツシルト半径の外から原点まで粒子が落下するのに要する時間は、粒子の乗った時計で測定すれば有限であることを示している。式 (3.42) を $r \ll R$ の極限でテイラー展開すると以下の結果を得る。

$$\tau = \frac{\pi}{2} R \left(\frac{R}{2GM} \right)^{1/2} - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{r_{SH}} \right)^{3/2} r_{SH}. \tag{3.44}$$

次に十分遠方の静止した観測者が観測したとき落下に要する時間がどうなるか調べる。この観測者が観測する落下速度は $v_r = dr/dt$ であり、固有時間と遠方の観測者の時間 t は以下の関係で結ばれる。

$$d\tau = dt \left[\left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) - \frac{v_r^2/c^2}{1 - \frac{r_{SH}}{r}} \right]^{1/2}. \quad (3.45)$$

式 (3.40)、(3.45) を用い、 $U^1 = dr/d\tau$ から以下の関係式を得る。

$$v_r \left[\left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) - \frac{v_r^2/c^2}{1 - \frac{r_{SH}}{r}} \right]^{-1/2} = -c \left(k^2 - 1 + \frac{r_{SH}}{r} \right)^{1/2}. \quad (3.46)$$

この式を v_r について解くと以下の結果を得る。

$$v_r = -\frac{c}{k} \left(k^2 - 1 + \frac{r_{SH}}{r} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{r_{SH}}{r} \right). \quad (3.47)$$

これから t と r の関係を決める積分方程式を得る。

$$\int dt = -\frac{k}{c} \int \frac{dr}{\left(\frac{r_{SH}}{r} - \frac{r_{SH}}{R}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right)}. \quad (3.48)$$

この積分を実行すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} t = & \left[\left(\frac{R}{2} + r_{SH} \right) \left(\frac{R}{r_{SH}} - 1 \right)^{1/2} \right] 2 \left(\cos^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \right) \\ & + \frac{R}{2} \left(\frac{R}{r_{SH}} - 1 \right)^{1/2} \sin 2 \left(\cos^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \right) \\ & + r_{SH} \ln \left| \frac{(R/r_{SH} - 1)^{1/2} + \tan \left(\cos^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \right)}{(R/r_{SH} - 1)^{1/2} - \tan \left(\cos^{-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \right)} \right|. \end{aligned} \quad (3.49)$$

$r \ll R$ の極限でテイラー展開すると以下の結果を得る。

$$t = \text{const} - \frac{2}{3} r_{SH} \left(\frac{r}{r_{SH}} \right)^{3/2} - 2 \left(\frac{r}{r_{SH}} \right)^{1/2} + \ln \frac{(r/r_{SH})^{1/2} + 1}{(r/r_{SH})^{1/2} - 1}. \quad (3.50)$$

式 (3.49) は正確な結果であるが計算が煩雑である。シュワルツシルト半径近辺で起こる物理の本質を調べるため以下の近似を行なう。粒子がシュワルツシルト半径近辺におり

$$\delta r = r - r_{SH} \ll r_{SH}, \quad (3.51)$$

であるとする。この近似の元で式 (3.48) は r_0 から r まで落下するのに要する時間が以下のように求まる。

$$t \sim -\frac{k}{c} \int \frac{d\delta r}{(\delta r/r_{SH})} = -\frac{kr_{SH}}{c} \ln\left(\frac{r-r_{SH}}{r_0-r_{SH}}\right) + \text{const.} \quad (3.52)$$

この結果は、粒子が遠方からシュワルツシルト半径に近づくには、無限の時間が掛かること、即ち十分遠方の観測者から観測すると粒子がシュワルツシルト半径に無限に近づくだけで横切って内側に入ることは無いことを示している。

シュワルツシルト半径の内側での粒子の運動について調べる。固有時間と dt, dr の関係式は以下の式で与えられる。

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) dt^2 - \frac{1/c^2}{1 - \frac{r_{SH}}{r}} dr^2. \quad (3.53)$$

内側では、 $1 - r_{SH}/r < 0$ となるため dt^2 の前の係数が負となり dr^2 の前の係数が正となる。 $d\tau^2$ は時間的即ち正で無ければならない。したがって、粒子が一箇所に留まっている $dr = 0$ というケースは起こりえない。一方で $dt = 0$ というケースはあり得る。この時 dr が時間の刻みの役割を担う。この節では詳しくは述べないが、 dr は常に負であり、粒子は初期条件の如何によらずシュワルツシルト半径内では、必ず原点に到達し、外に出てくる事が出来ない。粒子がでて来れないことを実感してもらうため、光について式 (3.53) を解いてみる。 $d\tau = 0$ であることを用いて解くと以下の結果を得る。

$$ct = \pm \left[-r + r_0 + r_{SH} \left(-\ln\left(1 - \frac{r}{r_{SH}}\right) + \ln\left(1 - \frac{r_0}{r_{SH}}\right) \right) \right]. \quad (3.54)$$

プラスは外側に向かって光が進んでいる場合、マイナスは内側に向かって進んでいる場合に対応している。この式から $r \rightarrow r_{SH}$ には、無限の時間（遠方の観測者の時計で測定）が掛かる事が分かる。遠方にいる観測者は、シュワルツシルト半径の内側で発した光を始め如何なる粒子もシュワルツシルト半径の外に出ることを観測することができない。即ち遠方の観測者にとってシュワルツシルト半径の内側は観測できないブラックな領域である。この性質からこのような天体をブラックホールと呼ぶ。またシュワルツシルト半径より内側からの情報を外側の観測者が引き出すことができないため、シュワルツシルト半径を事象の地平線 event horizon と呼ぶ。

3.1.4 クルスカル・スゼッケル座標

ブラックホールの地平面周辺を記述するのに遠方の観測者が定義した時刻 t 、動径 r は適していない。メトリックテンソルの成分がシュワルツシルト半径でゼロになったり発散したり、シュワルツシルト半径の内側で r が時間の役割を担うようになってきたりとおかしな事が起きたのは、座標の選択が適していなかった事から来ている。実際、シュワルツシルト半径では、曲率は有限値に留まり、特異性を持たない。曲率は時空に内在する物理的性質であり、座標系の取り方に依存しない性質である。また式 (3.53) から光の速度は

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right), \quad (3.55)$$

となり、光円錐の頂角がシュワルツシルト半径の外側からシュワルツシルト半径に近づくにしたがってきつくなり、尖った形になり、シュワルツシルト半径直近では、時間軸に平行な直線に収束して行く。粒子の軌跡は光円錐の内側に閉じ込められているので、光円錐が潰れてしまうことはブラックホール近辺での粒子の軌跡を調べる上で非常に都合が悪い。

上記のような不都合を解消するために以下の座標変換で定義される新しい座標を考える。これをクルスカル・スゼッケル座標と呼ぶ。

$$u = \left(\frac{r}{r_{SH}} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_{SH}} \cosh \frac{ct}{2r_{SH}}, \quad \text{for } r > r_{SH}, \quad (3.56)$$

$$v = \left(\frac{r}{r_{SH}} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_{SH}} \sinh \frac{ct}{2r_{SH}}$$

$$u = \left(1 - \frac{r}{r_{SH}}\right)^{1/2} e^{r/2r_{SH}} \sinh \frac{ct}{2r_{SH}}, \quad \text{for } r < r_{SH}, \quad (3.57)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{r_{SH}}\right)^{1/2} e^{r/2r_{SH}} \cosh \frac{ct}{2r_{SH}}$$

すると du, dv は $r > r_{SH}$ の領域で以下のように計算できる。

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial ct} c dt,$$

$$= \frac{e^{r/2r_{SH}}}{2r_{SH}} \left(\left[\left(\frac{r}{r_{SH}} - 1\right)^{-1/2} + \left(\frac{r}{r_{SH}} - 1\right)^{1/2} \right] \cosh \frac{ct}{2r_{SH}} dr + \left(\frac{r}{r_{SH}} - 1\right)^{1/2} \sinh \frac{ct}{2r_{SH}} c dt \right), \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
dv &= \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial ct} cdt, \\
&= \frac{e^{r/2r_{SH}}}{2r_{SH}} \left(\left[\left(\frac{r}{r_{SH}} - 1 \right)^{-1/2} + \left(\frac{r}{r_{SH}} - 1 \right)^{1/2} \right] \sinh \frac{ct}{2r_{SH}} dr + \left(\frac{r}{r_{SH}} - 1 \right)^{1/2} \cosh \frac{ct}{2r_{SH}} cdt \right), \tag{3.59}
\end{aligned}$$

これらから $du^2 - dv^2$ を計算すると以下ようになる。

$$du^2 - dv^2 = \frac{r}{4r_{SH}^3} e^{r/r_{SH}} \left[- \left(1 - \frac{r_{SH}}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_{SH}}{r}} \right]. \tag{3.60}$$

この結果からクルスカル・スゼッケル座標を用いるとシュワルツシルトメトリックが以下のように書ける事が分かる。

$$ds^2 = - \frac{4r_{SH}^3}{r} e^{-r/r_{SH}} (dv^2 - du^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{3.61}$$

ここで遠方の観測者の動径座標 r を残したのは、表記の煩雑さを省くため、 r は以下の式により u, v により指定される従属変数である。

$$\left(\frac{r}{r_{SH}} - 1 \right) e^{r/r_{SH}} = u^2 - v^2. \tag{3.62}$$

式 (3.62) から $r = r_{SH}$ は、 $u = \pm v$ であり、クルスカル・スゼッケル座標系では、 $\pm 45^\circ$ 傾いた原点を通る直線である。式 (3.61) から分かるように $r = r_{SH}$ においてもメトリックが発散したりゼロになるような特異な振る舞いは示さない。動径方向に進行する光即ち $d\theta = d\phi = 0$ のケースを取り上げると式 (3.61) よりクルスカル・スゼッケル座標系では光の世界線は以下の方程式で記述できる。

$$dv = \pm du. \tag{3.63}$$

したがって、光円錐は時空の至る所で頂角が 90° の円錐となる。粒子は、

$$d\tau^2 = \frac{4r_{SH}^3}{c^2 r} e^{-r/r_{SH}} (dv^2 - du^2) > 0, \tag{3.64}$$

の軌跡を動く。したがって、 $dv^2 > du^2$ であり、式 (3.63) で定義される光円錐の内側に粒子の軌跡は限られる。図 3.2 にクルスカル・スゼッケル座標を用いたブラックホール時空の様子を示した。原点を通る傾き 1 の直線即ち $v = u$ の直線が、シュワルツシルト半径の位置を表している。この直線は、

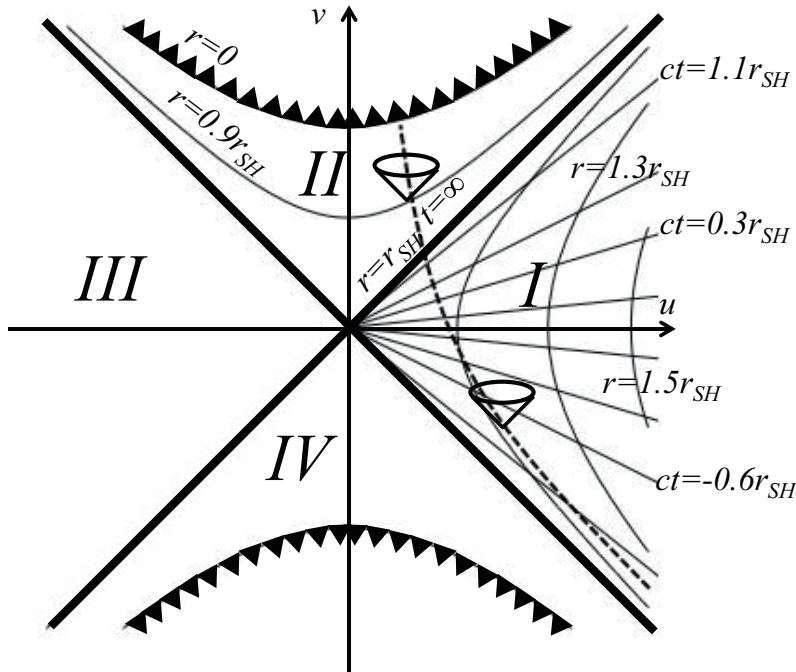


図 3.2 クルスカル・スゼッケル座標を用いたブラックホール時空。

遠方の観測者の時計で $t = \infty$ の事象の集合でもあり、遠方の観測者がこの地平面から情報を受けとるのに無限の時間を要することを表している。この直線と原点を通りこれと直交する直線により時空が4つの領域に分割される。この教科書では、領域 III と IV は扱わない。領域 I は、ブラックホール地平面の外の領域を表している。 r 一定の曲線が縦方向に伸びた双曲線で示されている。外側の双曲線ほどブラックホールから離れた位置に対応し、十分遠方では v 軸と平行になる。原点を通る直線は t 一定の事象の集合を表している。第 4 象限の $v = -u$ が $t = -\infty$ に対応し $v = u$ で $t = \infty$ に達するまで下から上へ時間が単調に増加している。領域 II は、ブラックホール地平面の内側を表している。 $r = 0.9r_{SH}$ と $r = 0$ でそれぞれ一定となる事象の集合が横に寝た双曲線で示されている。 $r = 0$ は時空の特異点であり、それを明示するため黒いギザギザをつけている。ブラックホールに落下する粒

子の世界線を破線で示した。地平面を通過し原点に吸い込まれている。光円錐をこの粒子の軌跡から2点選択して示している。この座標では光円錐はどこでも同じ形をしている。粒子の軌跡は光円錐の中を突っ切っている。この図から粒子が原点に吸い込まれるまでの時間は、粒子の固有時間で測定すれば有限であることが納得できるであろう。さらに、地平面の内側では、 r が減少する方向すなわち原点に吸い込まれる方向のみに粒子が運動することも納得できるであろう。

3.1.5 最終安定軌道

節 3.1.3 はブラックホールの原点に向かって真っすぐ落ちる粒子を扱ったが、実際にこのようなことが起きる確率は非常に小さく、原点と粒子の位置を結ぶ直線に対して粒子の速度の向きは少なからずズレを持っていると考えるのが自然である。言い方を変えると粒子は有限の衝突パラメータを持ってブラックホールに向かって落下するはずである。このような場合、粒子は有限の角運動量を持つ。この節では、有限の角運動量を持って落下する粒子の地平面周辺での運動を調べる。

粒子の運動方程式の時間成分は以下ようになる。

$$\frac{dU^0}{d\tau} = -2U^0U^1\psi_{,1} = -2U^0U^\mu\psi_{,\mu} = -2U^0\frac{d\psi}{d\tau}. \quad (3.65)$$

ここで ψ が r にのみに依存していることを使った。この結果は式 (3.37) と同じであり、したがって、保存則 (3.39) が成立する。式 (2.137) で示したように、メトリックが φ に依存しないため角運動量が保存し、粒子の運動は同一平面内に限られる。そこで粒子の運動する平面を xy 平面にとる。そうすることで $\theta = \pi/2$ で一定に保たれ、 $U^2 = 0$ であり、粒子の運動の動径方向からのズレは方位角 φ の変化を追えばよい。粒子の運動方程式の空間第3成分から以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dU^3}{d\tau} &= -2U^1U^3\Gamma_{13}^3 = -2\frac{1}{r}\frac{dr}{d\tau}U^3, \\ \frac{dr^2U^3}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

ここで $U^1 = dr/d\tau$ を用いた。式 (3.66) は、角運動量 (単位質量辺り) $\ell = r^2 U^3$ が保存する事を示している。4 元速度の内積が $-c^2$ になることから以下の式を得る。

$$\begin{aligned} -c^2 &= g_{00}(U^0)^2 + g_{11}(U^1)^2 + g_{33}(U^3)^2, \\ &= -\left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right)(U^0)^2 + (U^1)^2/(1 - r_{SH}/r) + r^2 \sin^2 \theta (U^3)^2, \\ &= -k^2 c^2/(1 - r_{SH}/r) + (U^1)^2/(1 - r_{SH}/r) + \sin^2 \theta \ell^2/r^2, \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= k^2 c^2 - \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right)\left(c^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

ここで以下のように定義される有効ポテンシャル \tilde{V} を導入する。

$$\tilde{V}^2 \equiv \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right)\left(c^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right). \quad (3.68)$$

式 (3.67) は、有効ポテンシャル \tilde{V} 中を力学的エネルギー kc を一定に保ちながら動径方向に運動する粒子の動径方向の速度の時間発展を決める方程式である。

有効ポテンシャルの性質を調べる事で粒子の角運動量の大きさに応じて、粒子の運動がどのようになるか知る事が出来る。有効ポテンシャルの極値を調べる。

$$\frac{d\tilde{V}^2}{dr} = 0,$$

より以下の方程式を得る。

$$r_{SH}c^2 r^2 - 2\ell^2 r + 3r_{SH}\ell^2 = 0. \quad (3.69)$$

この二次方程式は、判別式 $D = \ell^4 - 3c^2 r_{SH}^2 \ell^2$ が正の時二つの実解を持つ。この条件は、有効ポテンシャルが二つの実数解を持つ為の条件として、角運動量に対して以下の条件を課す。

$$\ell^2 > 3r_{SH}^2 c^2. \quad (3.70)$$

このような場合の例として $\ell^2 = (2.5r_{SH}c)^2$ の場合について有効ポテンシャルを図 3.3 に示した。横軸はシュワルツシルト半径で規格化した動径座標、縦軸は有効ポテンシャルあるいは粒子の力学的エネルギーの 2 乗である。

有効ポテンシャルはシュワルツシルト半径でゼロになる。シュワルツシル

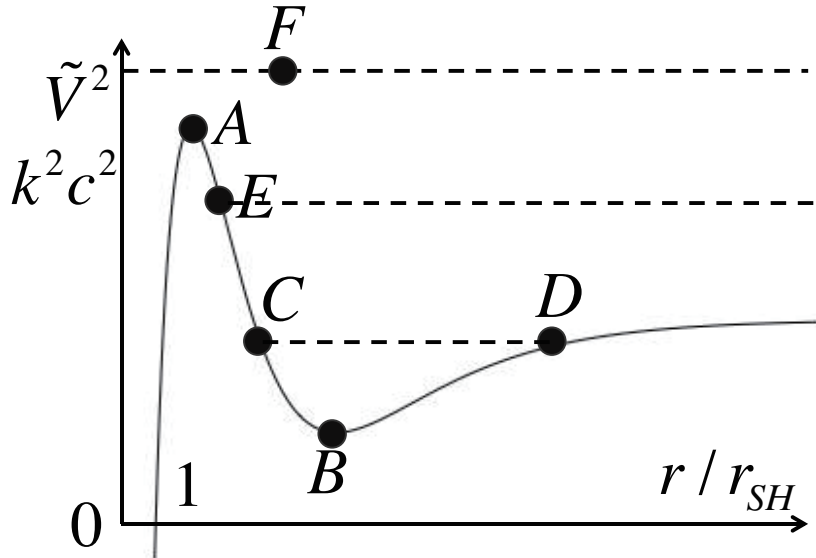


図 3.3 質量を持った粒子の有効ポテンシャル。

ト半径から離れると急激に増加し最大値を取る（点 A）。点 A より外側の点 B で最小値を取り、以後は単調に増加し c^2 に漸近する。点 A および B にいる粒子はその半径で円運動を行なう。しかし、点 A は不安定でありエネルギーと角運動量を保存したまま、少しでも半径が減少すればブラックホールに吸い込まれてしまい、少しでも半径が増加すれば無限遠まで飛び去ってしまう。安定な円軌道が実現できるのは点 B の位置のみである。粒子の力学的エネルギー kc は保存するので、粒子の軌跡はこの図では、水平な直線上に限定される。その例を破線で示した。ある瞬間点 C にいた粒子は、この場所で角運動量バリアーによって跳ね返され破線に沿って半径が増加し点 D に至る。点 D では、重力により引き戻され再び落下を始める。このようにこのエネルギーを持った粒子は、動径方向に振動しながらブラックホールの回りを周回する。点 E に到達した粒子は角運動量バリアーにより跳ね返され、無限遠まで飛び去る。点 F で示したエネルギーを持った粒子

は、無限遠からブラックホールに吸い込まれて原点に到達する。安定な円軌道が存在できる境界は $\ell^2 = 3r_{SH}^2 c^2$ の時であり、この時の有効ポテンシャルの極値の位置（この場合は変曲点の位置でもある）が

$$r_{LSO} = \frac{\ell^2}{r_{SH} c^2} = 3r_{SH}, \quad (3.71)$$

と求まる。これを最終安定軌道 (Last Stable Orbit) と呼ぶ。 $\ell^2 > 3r_{SH}^2 c^2$ の時表れる安定な円軌道の半径は、 r_{LSO} より大きい。したがって、 r_{LSO} が最もブラックホールの地平面に近い安定軌道の半径を与える。 $\ell < 3r_{SH}^2 c^2$ の時、有効ポテンシャルは半径の単調増加関数となり、全ての粒子がブラックホールに飲み込まれる事になる。

同様のことを光について考察する。重力場中の光子の運動方程式 (2.150) を扱う。時間成分から以下の式を得る。

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -2P^0 P^1 \Gamma_{01}^0 = -2P^0 P^1 \psi_{,1} = -2P^0 \frac{d\psi}{d\lambda}. \quad (3.72)$$

ここで ψ が r にのみ依存する事を用いて $P^1 \psi_{,1} = P^\mu \psi_{,\mu} = d\psi/d\lambda$ と光子の軌跡に沿った微分で置き換えられる事を用いた。両辺に $e^{2\psi}$ を掛けて積分すると以下の保存量を得る。

$$P^0 e^{2\psi} = -P^0 \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) = -\frac{\varepsilon}{c}. \quad (3.73)$$

ここで ε は無限遠の局所慣性系で測定した光子のエネルギーである。系の対称性から光子の軌道角運動量は保存し、光子の軌道は同一平面内に限られる。ここでも光子の軌道が $\theta = \pi/2$ の平面内にあると設定する。すると $P^2 = 0$ である。運動方程式の空間第3成分より以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dP^3}{d\lambda} &= -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} P^3, \\ \frac{dr^2 P^3}{d\lambda} &= 0, \\ r^2 P^3 &= \ell. \end{aligned} \quad (3.74)$$

始めの等号では $P^1 = dr/d\lambda$ を用いた。最後の式の ℓ は定数で、角運動量保存を表している。光子の4元運動量の内積がゼロであることから以下の関

係式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= g_{00}(P^0)^2 + g_{11}(P^1)^2 + g_{33}(P^3)^2, \\ &= -\frac{(\varepsilon/c)^2}{1-r_{SH}/r} + \frac{(P^1)^2}{1-r_{SH}/r} + \frac{\ell^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

これより以下の式を得る。

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2}. \quad (3.76)$$

そこで有効ポテンシャル

$$\tilde{V}^2 = \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2}, \quad (3.77)$$

を導入し光子の軌道運動の様子を調べる。有効ポテンシャルの極値を調べると角運動量の値によらず

$$r = \frac{3}{2}r_{SH}, \quad (3.78)$$

で最大値を持ち、他に極値を持たない事が分かる。この時有効ポテンシャルは最大値

$$\tilde{V}_{max}^2 = \frac{4}{27} \frac{c^2 \ell^2}{r_{SH}^2}, \quad (3.79)$$

をとる。有効ポテンシャルは、 $r = 3/2 \times r_{SH}$ を境に内側に向かっても外側に向かっても単調減少する。したがって、光子に対しては安定な軌道は存在しない。有効ポテンシャルの最大値以下のエネルギーを持った光子、即ち

$$\varepsilon < \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{c\ell}{r_{SH}}, \quad (3.80)$$

のエネルギーの光子が無限遠から到来すると有効ポテンシャルの角運動量バリアによって跳ね返され、再び無限遠に飛び去る。

3.1.6 重力赤方偏移

光子のエネルギー保存の式 (3.73) からブラックホール地平面近く $r = r_{SH} + \delta r$ ($\delta r \ll r_{SH}$) で放射された光の周波数を ν_0 とすると無限遠の観測

者に観測される周波数 ν が

$$\nu = \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) \nu_0 \sim \frac{\delta r}{r_{SH}} \nu_0 \ll \nu_0, \quad (3.81)$$

のように強烈な赤方偏移を受ける事が分かる。

3.1.7 水星の近日点移動

点源が作るニュートンの万有引力のもとで運動する質点は閉じた楕円軌道を運動する。しかし、実際の太陽系内の惑星の軌道は閉じた楕円軌道ではなく、一回転ごとに惑星が太陽に最も近づく軌道の位置、近日点、の移動が観測されている。近日点移動の量は、太陽に近い程大きく、水星で最も大きな値をとる。そのためまず水星の近日点移動の観測が相対論の検証に用いられた。19世紀半ばには、惑星の軌道の詳細な観測により、水星は100年で $575''$ の近日点移動を起こすことが分かっていた。この観測結果を受けて他の惑星の重力が水星の近日点移動に与える影響が計算された。それによると金星からの効果が $276.38''$ 、地球が $91.41''$ 、火星が $2.48''$ 、木星が $153.98''$ 、土星が $7.31''$ 、天王星が $0.14''$ 、海王星が $0.04''$ で総計 $531.74''$ となる。したがって、観測量の内、残り $43.26''$ が説明できないことが既に19世紀半ばには認識されていた。相対論の出現により、一般相対論の効果として見事にこの差額を説明できることが示された。以下では、相対論的效果による水星の近日点移動量を計算する。

まず点源が作るニュートン重力場中を運動する質点の運動について復習する。角運動量保存から質点の運動は、同一平面に限られる。この運動平面内の方位角を φ で表す。単位質量あたりの角運動量 ℓ 、は以下のように書け、これが保存する。

$$\ell = r^2 \dot{\varphi}. \quad (3.82)$$

動径方向の運動方程式は以下のように書ける。

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3}. \quad (3.83)$$

右辺の重力と遠心力がつり合った状態の時質点は円軌道を描く。この時の

半径 r_0 は、以下のように与えられる。

$$r_0 = \frac{\ell^2}{GM}. \quad (3.84)$$

円運動をする時の回転の角振動数を ω_c とすると $\ell = r_0^2 \omega_c$ である。したがって、式 (3.84) より以下関係式を得る。

$$\omega_c = \left(\frac{GM}{r_0^3} \right)^{1/2}. \quad (3.85)$$

これはケプラーの第3法則である。角運動量を一定に保ったまま質点の軌道半径を微小距離 δr ずらす。この時、運動方程式は以下のようなになる。

$$\delta \ddot{r} = -\frac{GM}{r_0^3} \delta r = -\omega_c^2 \delta r. \quad (3.86)$$

方程式 (3.86) から、円軌道からズレを生じると動径方向に振動することが分かる。この振動運動をエピサイクリック振動と呼び、その角振動数をエピサイクリック角振動数と呼ぶ。以下ではエピサイクリック角振動数を ω_{ep} と書く。方程式 (3.86) から、ニュートン点源重力場中では

$$\omega_{ep} = \omega_c, \quad (3.87)$$

であることを示している。即ち、円運動の周期と振動の周期が一致しており、軌道を一周した時丁度元の位置に戻る。言い換えると軌道が閉じる。

ここまでは、円軌道からのズレが微小の場合のみを扱ってきたが、ここではズレが有限な場合についてもニュートン重力場中では軌道が閉じることを示す。方程式 (3.83) の両辺に \dot{r} を掛けてエネルギー積分を行なうと以下のエネルギー保存則を得る。

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{\ell^2}{r^2} + 2\varepsilon. \quad (3.88)$$

ここで ε は、積分定数で単位質量辺りの質点の力学的エネルギーである。方程式 (3.82) と (3.88) より質点の軌道の動径と方位角の関係を与える以下の方程式を得る。

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2\varepsilon + 2GM/r - \ell^2/r^2}{\ell^2/r^4}. \quad (3.89)$$

この方程式を $u = 1/r$ を用いて書きかえると以下の方程式を得る。

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\left(u - \frac{GM}{\ell^2}\right)^2 + \frac{G^2M^2}{\ell^4} + \frac{2\varepsilon}{\ell^2}. \quad (3.90)$$

さらに $a = \sqrt{G^2M^2/\ell^4 + 2\varepsilon/\ell^2}$, $ay = u - GM/\ell^2$ と置くと以下の方程式を得る。

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 1 - y^2. \quad (3.91)$$

この方程式の解は以下のように与えられる。

$$y = \sin(\varphi + \delta). \quad (3.92)$$

ここで δ は、初期位相を表す定数である。この解は、方位角が 2π 変化すると y が元の値を取る、即ち元の動径の位置に戻ることを示している。言い換えると軌道が閉じること即ち近日点の位置が不変であることを示している。

次に相対論的な効果を取り入れた場合について考察する。測地線方程式の動径成分から以下の方程式をえる。

$$\begin{aligned} \frac{dU^1}{d\tau} &= -U^\alpha U^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^1 \\ &= -(U^0)^2 \Gamma_{00}^1 - (U^1)^2 \Gamma_{11}^1 - (U^3)^2 \Gamma_{33}^1 \\ &= -(U^0)^2 \psi_{,1} e^{2\psi-2\phi} - (U^1)^2 \phi_{,1} + (U^3)^2 r \sin^2 \theta e^{-2\phi} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} &= -\psi_{,1} (kc)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \phi_{,1} + \frac{\ell^2}{r^3} \left(1 - \frac{r_{SH}}{r}\right) \\ &= -\frac{GM}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} - \frac{3GM\ell^2}{c^2 r^4}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

上から4つ目の等号では、保存則 (3.39) を用いた。最後の等号では、保存則 (3.67) を用いた。この方程式は、式 (3.67) を固有時間で微分することでも得られる。ここで $\ell = r^2 U^3 = r^2 \dot{\phi}$ は単位質量あたりの角運動量である。ここで扱う問題は、弱い重量場中を運動する非相対論的運動をする粒子の運動であるため、固有時間と観測者の時間 t との違いは微小量である。そこで固有時間での微分を t での微分に置き換えて以下の時間発展方程式を得る。

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} - \frac{3\ell^2 GM}{c^2 r^4}. \quad (3.94)$$

方程式 (3.69) より円軌道の軌道半径は以下のように求まる。

$$r_0 = \frac{\ell^2}{2GM} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2}{\ell^2c^2}} \right) \sim \frac{\ell^2}{GM} \left(1 - \frac{3G^2M^2}{\ell^2c^2} \right). \quad (3.95)$$

非相対論的極限では $\frac{12G^2M^2}{\ell^2c^2} \ll 1$ であり、この極限でニュートン重力での円軌道の軌道半径 (3.84) を得る。円運動の角振動数を ω_c とすると $\ell = r_0^2 \omega_c$ である。方程式 (3.95) より、 ω_c が以下のように求まる。

$$\omega_c = \left(\frac{GM}{r_0^3} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3}{r_0} \frac{GM}{c^2} \right)^{1/2}. \quad (3.96)$$

角運動量を一定に保って、動径方向に微小距離 δr ズラした時の運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \ddot{r} &= - \left(\frac{3\ell^2}{r_0^4} - \frac{2GM}{r_0^3} - \frac{12GM}{c^2} \frac{\ell^2}{r_0^5} \right) \delta r, \\ &\sim - \frac{GM}{r_0^3} \left(1 - \frac{3}{r_0} \frac{GM}{c^2} \right) \delta r. \end{aligned} \quad (3.97)$$

したがって、動径方向の運動は以下のエピサイクリック角振動数での振動となる。

$$\omega_{ep} = \left(\frac{GM}{r_0^3} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{3}{r_0} \frac{GM}{c^2} \right)^{1/2} \sim \left(1 - \frac{3}{r_0} \frac{GM}{c^2} \right) \omega_c \quad (3.98)$$

振動の周期と円運動の周期の差が以下のように求まる。

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{ep}} - \frac{2\pi}{\omega_c} \sim \frac{6\pi}{r_0} \frac{GM}{c^2} \frac{1}{\omega_c}. \quad (3.99)$$

したがって、円運動の一周期後の近日点の方位角の移動量は以下のようになる。

$$\Delta \varphi = \omega_c \Delta t \sim \frac{6\pi}{r_0} \frac{GM}{c^2}. \quad (3.100)$$

この結果を水星に適用する。水星の軌道半径は 5.5×10^{12} cm であるから

$$\Delta \varphi \sim 5 \times 10^{-7} \text{ rad}. \quad (3.101)$$

水星の公転周期は、 7.6×10^6 sec なので、100 年間積算される水星の近日点

移動量は一回の公転でのズレ (3.101) に $2.0637 \times 10^5 \text{arcsec/rad}$ を掛けて arcsec に換算して 100 年間の公転回数を掛けることで $43.5''$ と得られる。この結果は、ニュートン重力理論だけではどうしても説明がつかない残差と見事に一致している。

3.2 自転する球対称星が作る時空

3.2.1 地球の自転による時空の歪み

地球のような球対称性のよい弱い重力源が自転することで生じる時空の歪みについて考察する。アインシュタイン方程式によれば、全てのエネルギーが重力源すなわち時空の歪みを生じさせる源となる。そこで地球の自転エネルギーが、どのような時空の歪みを生じさせるか調べる。地球の自転軸を x^3 軸すなわち z 軸にとる。簡単のため地球を一様密度 ρ を持ち角速度 Ω で剛体回転する半径 R 、質量 M の球とする。地球の自転は定常状態にあるとし、メトリックは時間によらないとする。地球内部のエネルギー運動量テンソルは以下のようにかける。ただし、圧力は静止質量エネルギーに比べて無視し、地球の重心は止まっているとする。メトリックのミンコフスキーからのズレは小さく、エネルギー運動量テンソルに現れるミンコフスキーからのズレを無視できる。4元速度は以下のように書ける。

$$(U^\mu) \sim (c, -y\Omega, x\Omega, 0) \quad (3.102)$$

したがって、エネルギー運動量テンソルの各成分は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} T^{00} &\sim \rho c^2 & T^{01} &\sim -\rho cy\Omega & T^{02} &\sim \rho cx\Omega & T^{03} &= 0 \\ T_{00} &\sim \rho c^2 & T_{01} &\sim \rho cy\Omega & T_{02} &\sim -\rho cx\Omega & T_{03} &= 0 \end{aligned}$$

T^{ij} 成分は、回転速度の二次の微小量であり、これらと比べて無視しえる量である。そこでこれらの成分はゼロとする。ローレンツゲージでの反転トレース・メトリックテンソルが満たす定常状態のアインシュタイン方程式 (2.364) は以下ようになる。

$$\Delta \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho c^2 \quad (3.103)$$

$$\Delta \bar{h}_{01} = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho c y \Omega \quad (3.104)$$

$$\Delta \bar{h}_{02} = \frac{16\pi G}{c^4} \rho c x \Omega \quad (3.105)$$

$$\Delta \bar{h}_{03} = 0 \quad (3.106)$$

$$\Delta \bar{h}_{ij} = 0 \quad (3.107)$$

これらの方程式の解は次の方程式で定義されるグリーン関数との畳み込みで表される。

$$\Delta G(\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{x}) \quad (3.108)$$

フーリエ積分表示を代入すると以下の式を得る。

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (-k^2) \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

よって

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^2}$$

であり、求めるグリーン関数は以下の積分を実行することで得られる。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 \frac{-1}{k^2} e^{ikr\mu} d\mu 2\pi \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 i r} \int_0^\infty dk \frac{1}{k} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k} dk \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (3.109)$$

したがって、方程式 (3.103) の地球の外部 ($r > R$) での解が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{16\pi G}{c^2} \rho \int_0^R dr' r'^2 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\mu}} \\ &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \int_0^R dr' \frac{r'^2}{-rr'} ((r-r') - (r+r')) = \frac{16\pi G}{c^2} \frac{\rho R^3}{r} \frac{1}{3} \\ &= \frac{4GM}{c^2 r} \end{aligned} \quad (3.110)$$

次に方程式 (3.104) を解く。そこで $r \gg R$ の極限すなわち観測者が星の表面から十分遠方にいる極限でグリーン関数の被積分関数を展開し、最低次をとると以下ようになる。

$$\begin{aligned}\bar{h}_{01} &\sim \frac{1}{4\pi} \frac{16\pi G}{c^3} \rho \Omega \int dx' dy' dz' y' \frac{1}{r} \left(1 + \frac{xx' + yy' + zz'}{r^2}\right) \\ &= \frac{4G}{c^3} \rho \Omega \frac{y}{r^3} \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi r'^2 (1 - \mu^2) \sin^2 \varphi \\ &= \frac{4\pi G}{c^3} \rho \Omega \frac{y}{r^3} \frac{4}{3} \frac{R^5}{5} = \frac{2GJy}{c^3 r^3}\end{aligned}\quad (3.111)$$

ここで二つ目の等号では、系の対称性から x', y', z' の奇数次の積分がゼロであることを用いた。最後の等号では、星の全角運動量 J が次の式で与えられることを用いた。

$$\begin{aligned}J &= \int_0^R r'^2 dr' \rho \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi (x'^2 + y'^2) \Omega \\ &= \frac{8\pi}{3} \rho \Omega \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} MR^2 \Omega\end{aligned}\quad (3.112)$$

同様に方程式 (3.105) の解は以下のように求まる。

$$\bar{h}_{02} \sim -\frac{2GJx}{c^3 r^3}\quad (3.113)$$

方程式 (3.106), (3.107) は以下の自明な解をもつ。

$$\bar{h}_{03} = 0\quad (3.114)$$

$$\bar{h}_{ij} = 0\quad (3.115)$$

したがって、反転トレースメトリックテンソルのトレースは

$$\bar{h} = \eta^{00} \bar{h}_{00} = -\frac{4GM}{c^2 r}\quad (3.116)$$

であり、関係式 (2.356) より自転する球対称星が作る時空の外部解を表すメトリック摂動が以下のもとなる。

$$h_{00} = \frac{2GM}{c^2 r}\quad (3.117)$$

$$h_{01} = \frac{2GJy}{c^3 r^3}\quad (3.118)$$

$$h_{02} = -\frac{2GJx}{c^3 r^3} \quad (3.119)$$

$$h_{ij} = \frac{2GM}{c^2 r} \delta_{ij} \quad (3.120)$$

座標系を (x, y, z) から (r, θ, ϕ) 極座標に変換するとメトリックは以下のように変換される。

$$\begin{aligned} h_{o\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi} h_{0\mu} = -r \sin \theta \sin \phi h_{01} + r \sin \theta \cos \phi h_{02} \\ &= -\frac{2GJ \sin^2 \theta}{c^3 r} \end{aligned} \quad (3.121)$$

以上より微小線素は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 - 2\frac{2GJ \sin^2 \theta}{c^3 r} cdt d\phi \\ &\quad + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (3.122)$$

$J=0$ 即ち自転していない星の時、このメトリックは、ニュートニアンメトリックに一致する。

3.2.2 慣性系の引きずり

節 3.2.1 で導出した、自転する球対称星の周囲を運動する粒子の運動を考察する。節 2.14 で示した結果から、メトリック (3.122) が時間 t と方位角 ϕ に依存しない為、このメトリックで記述される時空中を運動する粒子の 4 元速度の U_0 (単位質量あたりのエネルギー) と U_ϕ (単位質量あたりの星の自転軸の周りの角運動量) が保存する。以下 $U_0 = -\varepsilon/c$, $U_\phi = \ell$ を用いて表す。以下の議論に本質的な影響を与えないので、 $U_r = 0$, $U_\theta = 0$ とし、一定の緯度 ($\theta = \text{const.}$) の位置で自転軸上の一点を中心とした半径 $r \sin \theta$ の円運動をしているとする。このような運動は遠心力と重力が釣り合う赤道面で可能であるので、 $\theta = \pi/2$ とする。メトリック (3.122) の逆行列は、微小量の一次までで式 (2.121) から以下のように求まる。以下では、重力源が存在しない時のメトリックを \tilde{g} で表す。

$$\begin{aligned}
g^{00} &= \tilde{g}^{00} - \tilde{g}^{00} \tilde{g}^{00} h_{00} = -1 - \frac{2GM}{c^2 r} \\
g^{0\varphi} &= g^{\varphi 0} = \tilde{g}^{0\varphi} - \tilde{g}^{00} \tilde{g}^{\varphi\varphi} h_{0\varphi} = \frac{h_{0\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{2GJ}{c^3 r^3} \\
g^{rr} &= \tilde{g}^{rr} - \tilde{g}^{rr} \tilde{g}^{rr} h_{rr} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \\
g^{\theta\theta} &= \tilde{g}^{\theta\theta} - \tilde{g}^{\theta\theta} \tilde{g}^{\theta\theta} h_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2} r^2 \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \\
g^{\varphi\varphi} &= \tilde{g}^{\varphi\varphi} - \tilde{g}^{\varphi\varphi} \tilde{g}^{\varphi\varphi} h_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{(r^2 \sin^2 \theta)^2} \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)
\end{aligned} \tag{3.123}$$

これらより粒子の4元速度の反変成分が以下のようにもとまる。

$$\begin{aligned}
U^0 &= g^{00} U_0 + g^{0\varphi} U_\varphi \\
&= \left(-1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(-\frac{\varepsilon}{c}\right) - \frac{2GJ}{c^3 r^3} \ell \\
U^\varphi &= g^{\varphi 0} U_0 + g^{\varphi\varphi} U_\varphi \\
&= -\frac{2GJ}{c^3 r^3} \left(-\frac{\varepsilon}{c}\right) + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \ell,
\end{aligned} \tag{3.124}$$

4元速度の大きさが $U^\mu U_\mu = -c^2$ であることから微小量のゼロ次の近似で $\varepsilon \sim c^2$ であ理、以下これを用いる。ニュートン力学では、粒子の角運動量は遠心力と重力の釣り合いで決定される。ここでは、粒子の4元速度の動径成分が常にゼロになる場所、測地線方程式から動径方向の加速度がゼロになるところを求めることで決定する。粒子の4元速度の動径成分の測地線方程式は、微小量の一次までで以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{dU_r}{d\tau} &= \frac{1}{2} U^0 U^0 g_{00,r} + 2 \times \frac{1}{2} U^0 U^\varphi g_{0\varphi,r} + \frac{1}{2} U^\varphi U^\varphi g_{\varphi\varphi,r} \\
&\sim +\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 \left(-\frac{2GM}{c^2 r^2}\right) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\ell}{r^2} \left(-2\frac{2GJ}{r^2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{r^2}\right)^2 2r \\
&\sim \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 \left(-\frac{2GM}{c^2 r^2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{r^2}\right)^2 2r = 0
\end{aligned}$$

これより単位質量あたりの角運動量が得られる。

$$\ell \sim \pm (GM r)^{1/2} \tag{3.125}$$

ニュートン力学が適応できるとして重力 GM/r^2 と遠心力の ℓ^2/r^3 の釣り合いから求めた ℓ と式 (3.125) は一致している。ここで $cr^2 \gg \ell$ を用いて微小量の二次以上を無視した。

この粒子が星の周囲を一周するのにかかる周期に、星の自転と同じ向きに回転する場合即ち順行 (prograde) 運動 ($\ell > 0$) をする時と、自転に逆行 (retrograde) 運動 ($\ell < 0$) する時で差が生じることを示す。粒子の回転周期は以下のように角速度で 2π を割ることで計算できる。

$$T = \frac{2\pi}{d\varphi/dt}$$

角速度は、以下のように ℓ を用いて計算される。

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) \left(\frac{d\tau}{dt}\right) = \frac{U^\varphi}{U^0/c} = \frac{c(g^{\varphi\varphi}U_\varphi + g^{\varphi 0}U_0)}{g^{00}U_0 + g^{0\varphi}U_\varphi} \\ &\sim \frac{\ell}{r^2} \left(1 + \frac{2GJ}{c^2\ell r}\right) \end{aligned} \quad (3.126)$$

この結果は、ニュートン的な意味で粒子が角運動量を持たない $\ell = 0$ の場合でも、粒子が角速度 $2GJ/c^2r^3$ を持つことを示している。Prograde, retrograde それぞれの場合で角速度は以下ようになる。

$$\dot{\varphi}_{pro} = \frac{(GMr)^{1/2}}{r^2} \left(1 + \frac{2GJ}{c^2(GMr)^{1/2}r}\right) \quad (3.127)$$

$$\dot{\varphi}_{ret} = \frac{(GMr)^{1/2}}{r^2} \left(-1 + \frac{2GJ}{c^2(GMr)^{1/2}r}\right) \quad (3.128)$$

順行回転の角速度は星の自転に引きずられて早くなり、逆行回転の場合は遅くなる。これが慣性系の引きずり効果 (frame dragging) あるいは、理論的発見者の名前を冠して Lense-Thirring 効果と呼ばれる効果である。粒子の回転周期は順行運動の時の方が短くなり、差は以下ようになる。

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}_{ret}} - \frac{2\pi}{\dot{\varphi}_{pro}} \sim \frac{8\pi GJ}{c^2\ell^2} r = \frac{8\pi J}{c^2 M} \quad (3.129)$$

面白いことに周期の差は、星からの距離に依存せず星の自転角運動量と質量だけで決まる定数である。レーザー測距離装置を用いて二つの人工衛星の軌道を 11 年にわたって測定し、この効果を検証したことが 2004 年に発表

された。その後 Gravity Probe B と呼ばれる人工衛星実験により実験的に確認された。この効果は、天体の角運動量の測定に応用できる可能性がある。

3.2.3 カー・ブラックホール

全ての星は自転角運動量を持つ。星の終焉の残骸として中心部に取り残されるブラックホールも自転角運動量を持つと考えるのが自然である。実際、ブラックホール一歩手前の中性子星は、自転により非常に高速に回転しており、パルサーとして観測されている。この節では、自転角運動量を持つブラックホールの時空を記述するカー・メトリックについて考察する。質量 M 、自転角運動量 J のカー・ブラックホールの線素は以下の様に見える。

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} (cdt)^2 - 2a \frac{r_{SH} r \sin^2 \theta}{\rho^2} cdt d\phi \\ + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.130)$$

ここで

$$r_{SH} \equiv \frac{2GM}{c^2} \\ \Delta \equiv r^2 - r_{SH} r + a^2 \\ a \equiv \frac{J}{Mc} \\ \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.131)$$

この座標系は、ボイヤー・リンクスト座標と呼ばれる。条件 $a < r_{SH}$ の元 $r \gg r_{SH}$, $a \ll r$ の極限で、節 3.2.1 で導出したメトリックに還元される。角運動量ゼロ即ち $a = 0$ の時、シュワルツシルトメトリックに帰着する。

エルゴ領域

赤道面即ち $\theta = \pi/2$ で r 一定の円に接する方向に放出された光の軌跡は以下のヌルパスを通る。

$$0 = g_{00}(cdt)^2 + 2g_{0\phi} cdt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -c \frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm c \sqrt{\left(\frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{00}}{g_{\varphi\varphi}}} \quad (3.132)$$

光の角速度が式 (3.132) の様に得られる。 $g_{00} = 0$ となる面では、角速度は以下の二つの解を持つ。

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (3.133)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -c \frac{2g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \quad (3.134)$$

解 (3.134) は、ブラックホールの自転角運動量 J と同じ符号をもち、光がブラックホールの回転と同じ方向に引きずられることを示している。解 (3.133) は、ブラックホールの回転と逆方向に放出された光は全く動かないことを示している。光より早く動くことができる粒子は存在しないので、この境界面では全ての粒子がブラックホールと同じ方向に回転せざるを得ないことを示している。この境界面をエルゴ球と呼ぶ。エルゴ球の半径は、 $g_{00} = 0$ より以下の様に求まる。

$$r_{\text{ergsph}} = \frac{r_{SH} \pm \sqrt{r_{SH}^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}}{2} \quad (3.135)$$

地平面

カー・ブラックホールの地平面は $g_{rr} = \infty$ となる位置に現れる。これは $\Delta = 0$ となる位置であり、これを満たす半径として地平面の半径が以下の様に求まる。

$$r_+ = \frac{r_{SH} + \sqrt{r_{SH}^2 - 4a^2}}{2} \quad (3.136)$$

地平面は、エルゴ球より内側に存在する。

慣性系の引きずり

カー・メトリックは、方位角 φ に依存しない為、単位質量あたりの角運動量 U_φ が保存する。角運動量ゼロ即ち $U_\varphi = \ell = 0$ で、ブラックホールに

まっすぐ突っ込む粒子の角速度を計算すると以下の様になる。

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{cU^\varphi}{U^0} = c \frac{g^{0\varphi}}{g^{00}} \equiv \omega(r, \theta) \quad (3.137)$$

この結果は、軌道角運動量ゼロの粒子が、ブラックホールの自転による時空の引きずり効果で角速度を持つことを示している。引きずりによる回転の向きは、ブラックホールの自転の向きと同じで、与えられる角速度は式(3.137)である。

第4章

宇宙論

4.1 一様・等方宇宙

宇宙論とは、宇宙の始まりから現在更には未来に至までの進化を記述する学問分野である。コペルニクス以来、人間は宇宙の中で特別な存在では無い、という考えが現代科学を支える暗黙の了解事項になっている。1929年にハッブルによって遠方の銀河が全て我々から遠ざかっており、その後退速度が銀河までの距離に比例するという事実が発見された。これをハッブルの法則と呼ぶ。一つの解釈は我々が宇宙の中心に存在しており、全ての銀河が我々を中心に等方的に遠ざかっているというものである。しかし、この考えは我々を再び宇宙の中心に据えてしまい、コペルニクス以来培って来た思想に逆行するものである。現代宇宙論では、宇宙は等方だけでなく、一様であり、我々もそのような一様等方な宇宙の一箇所に存在しているに過ぎず特別な存在では無いという考えが採用されている。半径が膨張する球面に我々が住んでいる状態をイメージしてもらおうと、この思想の元ハッブルの法則を説明できることがイメージできるだろう。宇宙が一様で等方であるという仮定は、一時期宇宙原理 (Cosmological principle) と呼ばれていた。宇宙の果て (宇宙年齢の間に光が到達出来る最遠方) まで観測できるようになった現代において、宇宙が一様・等方であるということは仮定でも原理でも無く、観測的に確認された事実である。しかし、我々の周囲を

見渡すとどう見ても一様でも等方でも無い。例えば、これを読んでいるあなたと書いている私は、明らかに異なっていて非一様である。ここでいう一様等方とは、例えば宇宙の地平線（後の節で詳しく述べるが、宇宙年齢の間に光が到達できる距離と捉えてもらえばよく現在は約 100 億光年である）の 10 分の 1 程度のスケールで宇宙を 100 分割し、各分割領域の物質分布を均し物質密度を求めた時、各分割領域の密度の差が平均の密度に比べて無視出来る程小さい、ということを指している。このような場合、第 0 近似で宇宙の物質分布は一様・等方であるという近似を採用するのは妥当な選択である。節 4.1～節 4.9 では、0 次の宇宙論の序論となる内容を概説する。しかし、上記したように私とあなたは一様では無く、現在の宇宙は非一様で多様性に富んでいる。現代宇宙論では、これら非一様性の種は、宇宙創世記に宇宙の半径の指数関数的膨張が起きたインフレーション期の真空の量子ゆらぎにより仕込まれたと考える。このテキストは、相対論のテキストなので、節 4.10 以降では、量子ゆらぎによるテンソルモードの生成を取り上げる。

4.1.1 二次元球面

一様・等方時空を表現するロバートソン・ウォーカー計量の説明に入る前に、3次元空間に埋め込まれた2次元球面の性質を説明する。図 4.1 に半径 R の球面の一部を示した。この球面上に我々が住みついているとしよう。3次元空間に埋め込まれた2次元球面が、球面上に特別な点が存在せず一様等方な空間であることは自明であろう。球面は曲率を持っており曲がった空間である。曲がった空間上では、ユークリッド空間で慣れ親しんだ幾何学が使えず色々不便である。そこで球面上の点を xy 平面に射影し、球面上の点 $P(x,y,z)$ を xy 平面内の極座標 (r,θ) で表す。 (r,θ) は平面内で定義されているのでこれらに対してはユークリッド幾何学が適応出来る。 (r,θ) は以下のように定義される。

$$x = r \cos \theta, \quad (4.1)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (4.2)$$

$$z = \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (4.3)$$

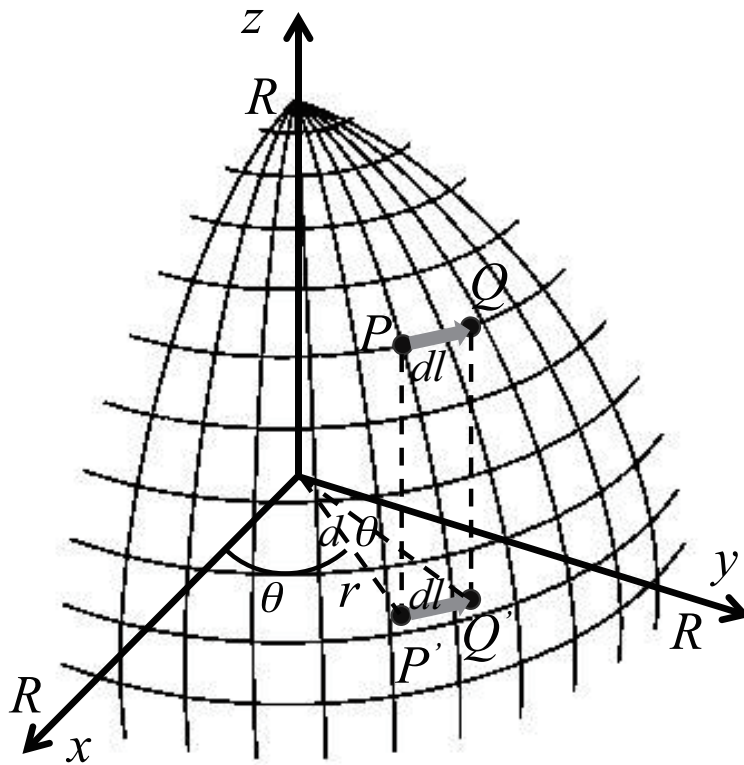


図 4.1 2次元球面。

点 P から微小距離 $d\ell$ 離れた球面上の点 $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ を考える。
 dx, dy, dz は以下のように与えられる。

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + \cos \theta d\theta,$$

$$dz = \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr. \quad (4.4)$$

これらを用いると PQ 間の微小線素の長さは極座標を用いて以下のように書ける。

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (4.5)$$

r の取る範囲は $0 \leq r \leq R$ である。 θ は、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ である。球面の上半分だけを扱う事にする。図 4.1 では、点 Q は点 P から経度に沿って角度 $d\theta$ 移動した点とした。したがって、 $dr = 0$ なので式 (4.5) から

$$d\ell = rd\theta, \quad (4.6)$$

である。図からも $d\ell$ は P'Q' 間の距離に等しく、これは xy 平面内でユークリッド幾何を使えば動径掛ける角度即ち $rd\theta$ であることが納得出来る。

球面のスカラー曲率を計算してみよう。メトリックテンソルは式 (4.5) から、以下のようになる。

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}}, & g_{r\theta} &= 0, \\ g_{\theta r} &= 0, & g_{\theta\theta} &= r^2. \end{aligned}$$

クリストッフェル記号は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{r/R^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}}, & \Gamma_{\theta r}^r &= 0, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)r, & \Gamma_{rr}^\theta &= 0, \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

リッチーテンソルの対角成分を求める。

$$\begin{aligned} R_{rr} &= R_{rrr}^r + R_{r\theta r}^\theta = R_{r\theta r}^\theta, \\ &= \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{rr}^\theta - \Gamma_{rr}^\theta \Gamma_{\theta r}^r - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta, \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \\ R_{\theta\theta} &= R_{\theta r \theta}^r + R_{\theta\theta\theta}^\theta = R_{\theta r \theta}^r, \\ &= \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$= \frac{r^2}{R^2}. \quad (4.9)$$

スカラー曲率が以下のように求まる。

$$R^{(2)} = g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} = \frac{2}{R^2}. \quad (4.10)$$

ここまでの議論を拡張して以下のメトリックを定義する。

$$d\ell^2 = \frac{1}{1-Kr^2}dr^2 + r^2d\theta^2. \quad (4.11)$$

ここで K は $+1, 0, -1$ の何れかを取る定数とする。 $K = +1$ が上の段落で扱った球面に対応する。ただし、 r は球の半径で規格化しており $0 \sim 1$ の範囲の値が許される。球面の例から分かるように球面上を例えば緯度線に沿って移動し続けると再びもとの位置に戻ってくる。このケースを空間が閉じていると呼ぶ。 $K = 0$ は平面である。球面の半径 $R \rightarrow \infty$ の極限と捉える事もできる。この時スカラー曲率はゼロである。このケースを空間が平坦であると呼ぶ。幾何学的なイメージを持つ事は困難だが数学的には、 $K = -1$ にメトリック (4.11) を拡張することができる。この時スカラー曲率は -2 、或は r を曲率半径で規格化しなければ $-2/R^2$ となる。この時、動径座標の取りうる範囲に制限がなくなり $0 \leq r \leq \infty$ の範囲の値を取ることが出来る。この時、緯度線に沿って移動し続けると元の位置から離れる一方で元の位置に戻ってくる事は無い。このケースを空間が開いていると呼ぶ。メトリック (4.11) で定義される空間は、スカラー曲率が至る所 K で一定であり、定曲率空間と呼ばれる。

4.1.2 ロバートソン・ウォーカー計量

一様・等方時空は、対称性が最も高い時空であり、maximally symmetric space と呼ばれる。この時、空間は空間曲率と対応する定数で特徴付けられる。詳しい証明は S.Weinberg の Gravitation and Cosmology などに譲るが、一様・等方宇宙を表すメトリックは以下のロバートソン・ウォーカー計量と呼ばれる計量で与えられる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 R_0^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (4.12)$$

ここで K は定数であり $d\Omega$ は微小立体角である。 $a(t)$ はスケールファクターで、宇宙膨張を表現する因子であり、現在の値が 1 になるように規格化する。また R_0 は、 $K = +1$ の時は、現在の宇宙の半径に対応するものである。一般の曲率の宇宙では、次の節の式 (4.20) で定義される二点間の固有距離 χ に掛けて得られる $R_0\chi$ が、この二点間の現在の宇宙での物理的な距離になるように定義された量である。実際の宇宙に適用する場合、多くの場合 $R_0 r$ を r とし、共同座標の動径を現在の宇宙における距離にして表す。この場合、閉じた宇宙及び開いた宇宙における曲率 K は $K = \pm 1/R_0^2$ と再定義される。以下この教科書では、 $R_0 r$ を r と再定義して扱い、ロバートソンウォーカー計量を

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (4.13)$$

と定義し曲率は $K = 0$ あるいは $K = \pm 1/R_0^2$ とする。 r, θ, ϕ は、4次元空間 (x, y, z, w) に埋め込んだ 3次元球面上の点の極座標表示ある。この 3次元球面の半径が R の時、 (x, y, z, w) と r, θ, ϕ は以下の関係式で結ばれる。

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \\ w &= \sqrt{R^2 - r^2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

この 3次元球面上で微小距離 $d\ell$ 離れた二点を考える。この二点を結ぶ線素ベクトルを (dx, dy, dz, dw) とすると

$$\begin{aligned} dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi, \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ dw &= \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr, \end{aligned}$$

となりこれらから $d\ell$ が以下のように求まる。

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.15)$$

このメトリックで表される空間のスカラー曲率を計算すると以下のように求まる。

$$R^{(3)} = \frac{6}{R^2}. \quad (4.16)$$

2次元球面の場合同様このメトリックを拡張して以下のようなメトリックを定義する。

$$d\ell^2 = \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.17)$$

ここで $K = -1, 0, +1$ の定数である。このメトリックで表される空間が、3次元の定曲率空間である。空間が一様等方ということは、幾何学的には空間曲率が場所によらず一定であると表現できる。したがって、一様等方な空間を表現するためにメトリック (4.17) を採用したものがロバートソン・ウオーカーメトリックである。 $K = +1$ の場合を閉じた宇宙、 $K = 0$ の場合を平坦な宇宙、 $K = -1$ の場合を開いた宇宙と呼ぶ。

4.1.3 共動座標・固有距離

ロバートソン・ウオーカー計量の r, θ, ϕ を共動座標 (Comoving coordinate) と呼ぶ。共動座標は、宇宙膨張に乗った座標系である。言い方を変えると番地のようなものであり、地球が膨張しても変わらない。(但し、地球が膨張する間、大陸移動や地殻変動は無いとする。) 節 4.1.1 で取り扱った2次元球面を例にとって共動座標について解説する。この例では、宇宙膨張によるスケールファクターの増加は、球の半径の増加に対応している。ここでは煩雑さを避けるため式 (4.12) のロバートソンウオーカー計量の定義を用いる。点 P 点 Q が球面上を動かないとするとこれらの点の方位角 θ は、球が膨張しても変わらない。方位角 θ は、例えば地球儀の経度に対応しており、地球儀を膨らませても描かれた各地点の経度が変わらない事は納得

できるだろう。図から分かるように PQ 間の共動座標系での物理的距離は

$$dl = rd\theta, \quad (4.18)$$

である。この関係はユークリッド空間で良く知られた関係式であり、この関係式が使えるようにするためにロバートソン・ウォーカー計量の共動座標部を式(4.17)のように3次元曲面を3次元平面に落とし込んだのである。(節4.1.1の2次元球面を2次元平面に落とし込んだ例の拡張)次に r の幾何学的意味について述べる。ロバートソン・ウォーカー計量では、球の半径で規格化した量であると述べた。宇宙が膨張つまり球の半径が増加しているとすると何時の球の半径で規格化したらよいか問題になる。宇宙論では現在($t = t_0$)の宇宙の半径 R_0 で規格化するというのが慣例になっており、この教科書でもそれに従う。したがって、スケールファクターは現在の値が1になるよう $a_0 = a(t_0) = 1$ と規格化される。図4.2に共動座標 r と共動座標系での物理的距離 χ の関係を示した。簡単の為 $\theta = 0$ つまり xz 平面内の円周上に2点P、Qをおいた。PQ間の物理的距離は $d\chi$ であり、対応する r の変化量は dr である。図より

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (4.19)$$

であることが分かる。これは式(4.17)で $d\theta = 0$ として得られる線素の長さからも求められる。点Oにいる観測者から点Pまでの共動座標系での物理的距離を χ とすると r との間の関係式は以下のようなになる。

$$\chi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \sin^{-1} r. \quad (4.20)$$

この χ は地球儀の緯度に対応するものである。但し、北極点を0度、南極点を180度としている。球が膨張しても共動座標 r が変わらないということは、球の半径が膨張しても点Pの緯度が不変で且つPQ間の緯度の差も不変であることと対応していることが分かる。開いた宇宙の場合、即ち $K = -1$ の場合についても χ と r の関係式を求めておく。

$$\chi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = \sinh^{-1} r. \quad (4.21)$$

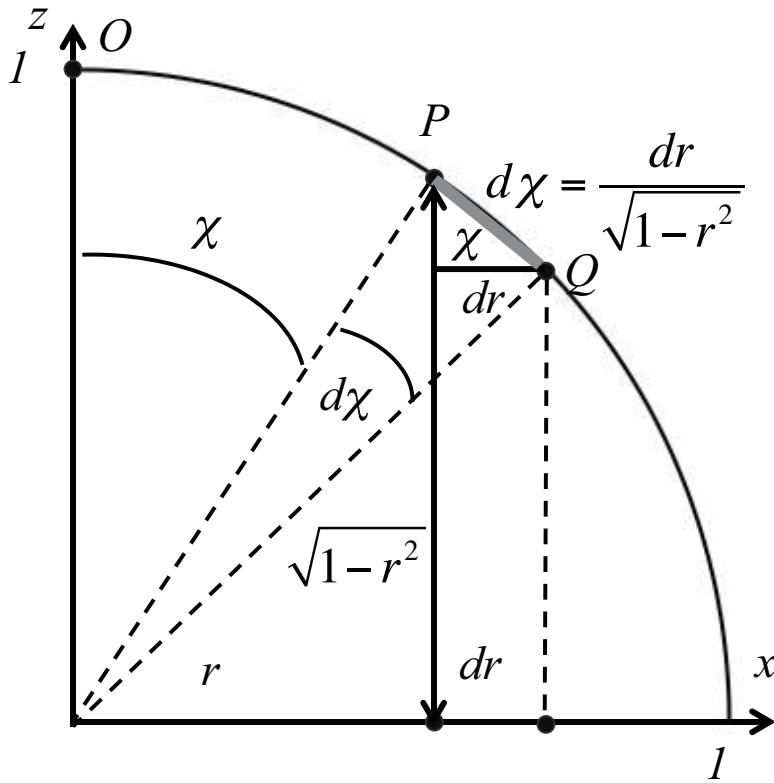


図 4.2 共動座標 r と共動座標系での物理的距離 χ 。

宇宙空間の2点間の実際の物理的距離を固有距離と呼ぶ。共動座標系の物理的距離から固有距離を求めるには、時刻 t の時の球の半径 $a(t)R_0$ を掛ければよい。緯度方向に χ 離れた2点間の固有距離は以下のように求まる。

$$d = a(t)R_0\chi. \quad (4.22)$$

同緯度地点にあり経度方向に θ 離れた2点間の固有距離は以下のように求まる。

$$d = a(t)R_0\theta. \quad (4.23)$$

4.1.4 宇宙論的赤方偏移

共動座標の原点にいる観測者に、その観測者から共動座標で r 離れた位置にある天体から放たれた光が届く過程を考える。光が放たれた時刻を t として観測者に届く時刻を t_0 とする。光はヌルパスを通るのでロバートソン・ウォーカー計量 (4.13) で $ds = 0$ とし、更に光は経線に沿って伝搬するので $d\theta = 0, d\phi = 0$ とすることで、光が走った共動座標系での物理距離を求める式が以下のように書ける。

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{c} \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}. \quad (4.24)$$

ここで光は r が減少する方向に伝搬することを考慮して右辺にマイナスをつけた。微小時間 dt 後に再び同じ場所から光が放たれたとし、それが観測者には $t_0 + dt_0$ に届いたとする。この光が走った共動座標系での物理距離を求める式が以下のように書ける。

$$\int_{t+dt}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{c} \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}. \quad (4.25)$$

共動座標系での観測者と天体の物理距離は変わらないから式 (4.24) と (4.25) の右辺は同じである。そこでこれらの差をとると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t+dt}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_t^{t+dt} \frac{dt}{a(t)}, \\ &\sim \frac{dt_0}{a(t_0)} - \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

最後の式変形では、 dt, dt_0 が非常に短く、それらの間の宇宙膨張による宇宙の半径の変化が無視出来るとして、それぞれの期間のスケールファクターが、それぞれの時刻のスケールファクターで一定であるとした。この式から情報が発信された時の時間間隔とそれが膨張する宇宙空間を伝搬して現在の観測者に届いた時の時間間隔の間に以下の関係があることが分かる。

$$dt_0 = \frac{a(t_0)}{a(t)} dt = (1+z)dt. \quad (4.27)$$

ここで z は

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (4.28)$$

で定義された情報が発信された時の宇宙の半径と観測された時の宇宙の半径の比であり宇宙論的赤方偏移 (Cosmological Redshift) と呼ばれる。 dt を光の周期とするとその光の振動数は $\nu = 1/dt$ であり波長は $\lambda = cdt$ であるから以下の関係式を得る。

$$\nu_0 = \frac{\nu}{1+z}, \quad (4.29)$$

$$\lambda_0 = (1+z)\lambda. \quad (4.30)$$

宇宙膨張により変化した宇宙の半径の比の分、光の波長が伸びることを示している。

4.2 フリードマン方程式

宇宙に静止した完全流体が満たしている場合の宇宙の進化を表すフリードマン方程式を導出する。静止した完全流体のストレス・エネルギーテンソルは式 (1.116) を一般座標に拡張して以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} (T_{\mu\nu}) &= \left((\rho c^2 + P) \frac{U_\mu U_\nu}{c} + P g_{\mu\nu} \right), \\ &= \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-Kr^2} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta P \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

これをアインシュタイン方程式に代入することで求める方程式が得られる。アインシュタイン方程式の左辺を計算する。まずクリストッフェル記号を求めるとゼロでない成分は以下になる。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}g_{11,0} = \frac{a\dot{a}/c}{1-Kr^2}, & \Gamma_{22}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}g_{22,0} = a\dot{a}r^2/c, \\
\Gamma_{33}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}g_{33,0} = a\dot{a}r^2\sin^2\theta/c, & \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}g_{11,0} = \frac{1}{c}\frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}g_{11,1} = \frac{Kr}{1-Kr^2}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1} = -(1-Kr^2)r, \\
\Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{33,1} = -(1-Kr^2)r\sin^2\theta, & \Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,0} = \frac{1}{c}\frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1} = \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}g^{22}g_{33,2} = -\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}g_{33,0} = \frac{1}{c}\frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}g_{33,1} = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}g_{33,2} = \cot\theta.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

これらを用いてリッチーテンソルの対角成分を求める。

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\alpha\Gamma_{00}^\alpha - \partial_0\Gamma_{\alpha 0}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha\Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{\alpha 0}^\sigma\Gamma_{\sigma 0}^\alpha, \\
&= -\partial_0(\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{30}^3) - (\Gamma_{10}^1)^2 - (\Gamma_{20}^2)^2 - (\Gamma_{30}^3)^2, \\
&= -\frac{3}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_\alpha\Gamma_{11}^\alpha - \partial_1\Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha\Gamma_{11}^\sigma - \Gamma_{\alpha 1}^\sigma\Gamma_{\sigma 1}^\alpha, \\
&= \partial_0\Gamma_{11}^0 - \partial_1(\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) + \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{11}^0(\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) - \Gamma_{01}^1\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{21}^2\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{31}^3\Gamma_{31}^3, \\
&= \frac{1}{1-Kr^2}\frac{1}{c^2}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2Kc^2),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\alpha\Gamma_{22}^\alpha - \partial_2\Gamma_{\alpha 2}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha\Gamma_{22}^\sigma - \Gamma_{\alpha 2}^\sigma\Gamma_{\sigma 2}^\alpha, \\
&= \partial_0\Gamma_{22}^0 + \partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{32}^3 + \Gamma_{22}^0(\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{22}^1(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{02}^2\Gamma_{22}^0 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{32}^3\Gamma_{32}^3, \\
&= \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha\Gamma_{33}^\alpha - \partial_3\Gamma_{\alpha 3}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha\Gamma_{33}^\sigma - \Gamma_{\alpha 3}^\sigma\Gamma_{\sigma 3}^\alpha, \\
&= \partial_0\Gamma_{33}^0 + \partial_1\Gamma_{33}^1 + \partial_2\Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0(\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2) + \Gamma_{33}^1(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) - \Gamma_{33}^2\Gamma_{23}^3 - \Gamma_{03}^3\Gamma_{33}^0 - \Gamma_{13}^3\Gamma_{33}^1, \\
&= \frac{r^2\sin^2\theta}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

スカラー曲率は以下のように求まる。

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} = \frac{6}{c^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2}\right). \tag{4.37}$$

この結果は、スケールファクターが時間依存しない時、定常3次元球面のスカラー曲率(4.16)と確かに一致している。以上の結果からアインシュタインテンソルの対角成分が以下のように求まる。

$$G_{00} = \frac{3}{c^2} \left(\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} \right), \quad (4.38)$$

$$G_{11} = \frac{1}{1-Kr^2} \frac{1}{c^2} (-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - Kc^2). \quad (4.39)$$

以上の結果をアインシュタイン方程式に代入するとスケールファクターに対する以下の発展方程式を得る。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2}, \quad (4.40)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right). \quad (4.41)$$

これらの二つの方程式をフリードマン方程式と呼び、宇宙膨張の様子を決定する方程式である。ハッブル定数 H を以下のように定義する。

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.42)$$

観測者からある天体までの距離を $d = a(t)R_0\chi$ と置くとその天体の宇宙膨張による後退速度は以下のようにハッブル定数を用いて表せる。

$$v = \dot{d} = \frac{\dot{a}}{a} a R_0 \chi = H d. \quad (4.43)$$

これは天体がその距離に比例した後退速度を持つというハッブルの法則に他ならない。現在のハッブル定数を H_0 とするとプランク衛星による測定結果が以下のように求まっている。

$$H_0 = 67.15 \pm 1.5 \text{ km/s/Mpc}. \quad (4.44)$$

ハッブル定数の逆数は宇宙年齢を与えるよい目安になり、ハッブルタイムと呼ばれる。

$$t_{H0} = \frac{1}{H_0} = 4.6 \times 10^{17} h_{0.67}^{-1} \text{ sec}. \quad (4.45)$$

ここで $h_{0.67}$ は

$$h_{0.67} = \frac{H_0}{67 \text{ km/s/Mpc}}, \quad (4.46)$$

で定義され、ハッブル定数依存性を明示的に示す為に用いる変数である。

今ではかなり高い精度でハッブル定数が測定されているが一昔前までは、50 から 100 の間の何れかというように大きな不定性があった。そこで、各研究者が選択したハッブル定数によって答えがバラツキ議論が発散することを防ぐためこのような変数を用いてハッブル定数依存性を明示的に示す事が慣例となっている。ハッブルタイムは宇宙膨張により宇宙の半径が変わったことが認識されるメアスを与える時間スケールである。逆にいうとこれより十分短い時間スケールであれば、宇宙の膨張の効果は無視出来る。ハッブルタイムの間に光が走る事ができる距離をハッブルレングスと呼ぶ。

$$\ell_{H0} = \frac{c}{H_0} = 1.38 \times 10^{28} \text{cm}. \quad (4.47)$$

これは現在の宇宙のサイズのメアスを与えるスケールである。

式 (4.40) を時間で微分して式 (4.41) を代入すると以下のようなエネルギー密度発展方程式を得る。

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0. \quad (4.48)$$

この式を以下のように整理すると

$$\frac{d}{dt}(\rho c^2 a^3) = -P \frac{d}{dt}(a^3), \quad (4.49)$$

となり断熱変化を仮定した時の熱力学第一法則、即ちエネルギー保存則に他ならない。アインシュタイン方程式はエネルギー保存則が成り立つように構築されているので当然の結果である。ここで断熱とは、ハッブルレングス内の各種類の粒子数が保存することを意味する。

4.3 宇宙の物資構成：物質・輻射・ダークエネルギー・ 曲率

臨界密度 ρ_{cr} を以下のように定義する。

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 8.44h_{0.67}^2 \times 10^{-30} \text{g/cm}^3. \quad (4.50)$$

臨界密度で宇宙の物質の平均密度を割ったものを密度パラメータ (density parameter) と呼ぶ。現在の宇宙を構成する物質の主たる成分は、物質（ダスト） ρ_M 、相対論的粒子（輻射：宇宙マイクロ波背景放射とニュートリノ背景放射） ρ_r 、暗黒エネルギー ρ_{DE} の3成分である。それぞれの密度パラメータを以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\Omega_{M0} &= \frac{\rho_M(t_0)}{\rho_{cr}}, \\ \Omega_{r0} &= \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_{cr}}, \\ \Omega_{DE0} &= \frac{\rho_{DE}(t_0)}{\rho_{cr}}.\end{aligned}\quad (4.51)$$

ここで添字の0は現在の密度パラメータという意味でつけている。相対論的粒子の内、宇宙マイクロ波背景放射は温度2.725Kの黒体放射であることが観測的に高い精度で示されており、そのエネルギー密度は質量密度換算で以下ようになる。

$$\rho_\gamma = 4.64 \times 10^{-34} \text{g/cm}^3. \quad (4.52)$$

ニュートリノが3世代であるとして全てを相対論的粒子として扱くと宇宙背景ニュートリノの現在のエネルギー密度は以下ようになる。

$$\rho_\nu = 3 \left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \rho_\gamma = 3.16 \times 10^{-34} \text{g/cm}^3. \quad (4.53)$$

したがって、相対論的粒子の密度パラメータは以下の値である。

$$\Omega_r = \frac{\rho_{CMB} + \rho_\nu}{\rho_{cr}} = 9.2 \times 10^{-5} h_{0.67}^{-2}. \quad (4.54)$$

最新の観測結果によると

$$\Omega_{M0} = 0.27, \quad (4.55)$$

$$\Omega_{DE0} = 0.73, \quad (4.56)$$

であり現在の宇宙はダークエネルギー優勢の時代である。

ダスト粒子からなる物質か、相対論的粒子からなる輻射か、暗黒エネルギーかを区別するのに以下の状態を方程式を導入する。

$$P = w\rho c^2. \quad (4.57)$$

物質は $w = 0$ 、輻射は $w = 1/3$ である。各成分についてエネルギー保存則 (4.48) を適応すると以下の結果を得る。

$$\rho_M = \rho_{M0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 = \rho_{M0} (1+z)^3, \quad (4.58)$$

$$\rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4 = \rho_{r0} (1+z)^4. \quad (4.59)$$

一般の w の場合は、

$$\rho_w = \rho_{w0} (1+z)^{3(1+w)}, \quad (4.60)$$

となる。但し $w \neq -1$ とした。フリードマン方程式 (4.41) より、 $w = -1/3$ の物質のみ宇宙に存在する時、宇宙は減速も加速をしなくなる。この時式 (4.60) より密度はスケールファクターの2乗に反比例する。フリードマン方程式 (4.40) に立返ると曲率 K の項が丁度スケールファクターの2乗に反比例している。そこで宇宙の曲率を密度で表現した ρ_K を以下のように定義する。

$$\rho_K \equiv -\frac{3Kc^2}{8\pi G} \frac{1}{a^2}. \quad (4.61)$$

ρ_K は、 $w = -1/3$ の物質と見なして扱うことも出来る。フリードマン方程式 (4.40) の中で曲率項が卓越しているという事は、物質（ダスト・輻射・暗黒エネルギー全て）の密度が非常に小さいことを意味する。つまり宇宙は空っぽで重力による加速も減速も起きないということである。宇宙の曲率の密度パラメータを以下のように定義する。

$$\Omega_{K0} = \frac{\rho_K(t_0)}{\rho_{cr}}. \quad (4.62)$$

暗黒エネルギーは宇宙を加速させる物質であり

$$w < -\frac{1}{3}, \quad (4.63)$$

を満たす未知の物質である。一つの候補としてアインシュタインによって導入された宇宙項がある。フリードマン方程式にしたがって宇宙が進化する

ると宇宙は減速しながら膨張し続けるか自重で潰れてしまう。宇宙の始まりや終りを仮定しなければならず、アインシュタインはこれが受け入れられなかった。そこで、物質の重力と丁度バランスする量斥力を働く項を導入し、宇宙の進化を食い止めようとした。アインシュタインは、アインシュタイン方程式 (2.112) に以下の修正を加えた。

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (4.64)$$

ここで Λ は定数で宇宙定数 Cosmological constant あるいはラムダ項と呼ばれる。メトリックテンソルの共変微分は恒等的にゼロなのでこの式の左辺の発散をとっても恒等的にゼロとなり、エネルギー保存則を破らない。宇宙項を右辺に移行し以下のように整理する。

$$\kappa^2 T_{00} - \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\rho c^2 + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right), \quad (4.65)$$

$$\kappa^2 T_{ij} - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) g_{ij}. \quad (4.66)$$

この式からラムダ項は、エネルギー密度

$$\rho_\Lambda c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad (4.67)$$

圧力

$$P = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad (4.68)$$

の物質と見なす事ができる。即ちラムダ項は $w = -1$ の物質の存在を仮定したことに対応している。定義から明らかのように ρ_Λ は時間によらない定数である。エネルギー保存則 (4.48) に $w = -1$ を代入してもエネルギー密度一定が導ける。もし、宇宙がラムダ項優勢であったならアインシュタイン方程式 (2.112) から宇宙が加速膨張することになる。暗黒エネルギーの可能性の一つにラムダ項の存在が考えられている。ラムダ項の密度パラメータを以下のように定義する。

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}}. \quad (4.69)$$

4.4 宇宙の半径の時間進化

フリードマン方程式を解いて宇宙の半径の時間進化を調べる。まず、宇宙が状態方程式 (4.57) を満たす一種類の物質で構成されているとする単純化した例についてフリードマン方程式 (4.40) の解を求めてみよう。 $K=0$ とする。エネルギー保存則 (4.61) をフリードマン方程式 (4.40) に代入して変形すると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho a^{3(1+w)}} \frac{1}{a^{(1+3w)/2}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0 a_0^{3(1+w)}} \frac{1}{a^{(1+3w)/2}}, \\ &= H_0 \frac{1}{a^{(1+3w)/2}}.\end{aligned}\quad (4.70)$$

最後の等号では、 $H_0^2 = (8\pi G/3)\rho_0$ であること $a_0 = 1$ であることを使った。 $w \neq -1$ の場合について解くと以下の解を得る。

$$a = \left(\frac{3(1+w)}{2}H_0\right)^{2/3(1+w)} t^{2/(3(1+w))}.\quad (4.71)$$

$w > -1/3$ の時、時間の指数部が 1 以下となり、スケールファクターの 2 階微分が負となり確かに減速膨張の解になっている。物質優勢の時 $w = 0$ であり

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3},\quad (4.72)$$

となり輻射優勢の時 $w = 1/3$ であり

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2},\quad (4.73)$$

となり、曲率優勢の時 $w = -1/3$ であり

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right),\quad (4.74)$$

となる。曲率優勢の時は、スケールファクターの 2 階微分がゼロになり確かに減速も加速もしない解になっている。宇宙年齢はハッブル定数と以下の関係で結ばれる。

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}. \quad (4.75)$$

$w > -1/3$ の時 $t_0 < 1/H_0$ である。宇宙が加速も減速もせずに進化して来た場合、ハッブル定数が時間によらず一定であり、ハッブルの法則 (4.43) より宇宙年齢は

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{1}{H_0}. \quad (4.76)$$

で求まる。 $w > -1/3$ の宇宙では、物質の重力により宇宙膨張は減速されて現在に至ったことになる。過去の膨張速度は、ハッブル定数一定を仮定して期待される速度より速かったことになる。その結果、現在の膨張速度に至るまでの期間がより短くて済むことになる。この為宇宙年齢が H_0^{-1} より短くなったのである。ラムダ項優勢の場合 $w = -1$ でありこの時、解は以下のようなになる。

$$a = e^{H_0 t}. \quad (4.77)$$

この解にしたがって指数関数的に半径が膨張する宇宙をド・ジッター宇宙モデル (de Sitter) と呼ぶ。

一般の物質構成の時の宇宙年齢とスケールファクターの関係を与える式を導く。ここでは、物質 $w = 0$ 、輻射 $w = 1/3$ 、曲率、ラムダ項 $w = -1$ から宇宙が構成されているとする。フリードマン方程式 (4.40) は以下のように変形できる。

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{K0}(1+z)^2). \quad (4.78)$$

現在の宇宙では Ω_{r0} が非常に小さく $z = 1000$ 程度までは式 (4.78) の中の輻射の寄与が無視し得る。 Ω_{r0} の項を無視し、 $\Omega_K = 0$ で更に $\Omega_\Lambda = 0, \Omega_{M0} = 1$ としたモデルすなわち物質だけで宇宙が平坦になっているモデルをアインシュタイン-ド・ジッターモデル (Einstein-de Sitter) と呼ぶ。ここで

$$\Omega_{K0} = 1 - \Omega_{M0} - \Omega_{r0} - \Omega_\lambda. \quad (4.79)$$

である。スケールファクターの微小変化を以下の関係を用いて z の微小変化に変換する。

$$da = -\frac{dz}{(1+z)^2}. \quad (4.80)$$

宇宙論的赤方偏移が z_1 から 0 まで変化する間の宇宙年齢の経過時間を求める式が以下のように求まる。

$$H_0 \int_{t_1}^{t_0} dt = - \int_{z_1}^0 \frac{dz}{(1+z) \sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{K0}(1+z)^2}}. \quad (4.81)$$

4.5 角径距離・輝度距離・固有体積

宇宙論的赤方偏移 z にある物理的スケール $d\ell$ の天体を観測した時、見かけの大きさが $d\theta$ (radian) であったとする。図 4.1 より宇宙膨張を考えなければ、これら二つの量は以下の関係式で結ばれる。

$$d\ell = rd\theta. \quad (4.82)$$

膨張宇宙の場合への拡張は、ロバートソン・ウォーカー計量 (4.13) で $dt = 0, dr = 0, d\phi = 0$ とすることでこれらの二つの量の関係式が得られる。

$$d\ell = a(t)rd\theta. \quad (4.83)$$

そこで角径距離 Angular diameter distance を以下のように定義する。

$$D_A(z) = \frac{r(z)}{1+z}. \quad (4.84)$$

r は z の単調増加関数である。したがって、 $z \ll 1$ の範囲では、遠くに行く程角径距離が長くなり、天体の見かけの大きさが小さくなる。しかし、 $z > 1$ になると r の増加が鈍り且つ分母の $1+z$ が効いて来て z が大きくなる程つまり遠くなる程角径距離が小さくなる。これは過去に遡る程宇宙が小さくなるため大きさが同じ天体が宇宙全体に占める割合が大きくなることに由来している。ここで r と z の関係式を求める。そこで天体から観測者までの光の伝搬を考える。ロバートソン・ウォーカー計量で $ds = 0, d\theta = d\phi = 0$ とすることで以下の関係式を得る。

$$\int_{r(z)}^0 \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = - \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a} = - \int_t^{t_0} \frac{cdt}{da} \frac{da}{a} = \int_t^{t_0} c \frac{1}{H} \frac{da}{a^2},$$

$$= \frac{c}{H_0} \int_z^0 \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2}}. \quad (4.85)$$

左辺は共同座標系での固有距離であり

$$\chi = K^{-1/2} \sin^{-1} K^{1/2} r(z), \quad K=+1, \quad (4.86)$$

$$= (-K)^{-1/2} \sinh^{-1} (-K)^{1/2} r(z), \quad K=-1. \quad (4.87)$$

$$= r(z), \quad K=0, \quad (4.88)$$

である。図 4.3 に様々な宇宙モデルに対する角径距離の赤方偏移依存性を

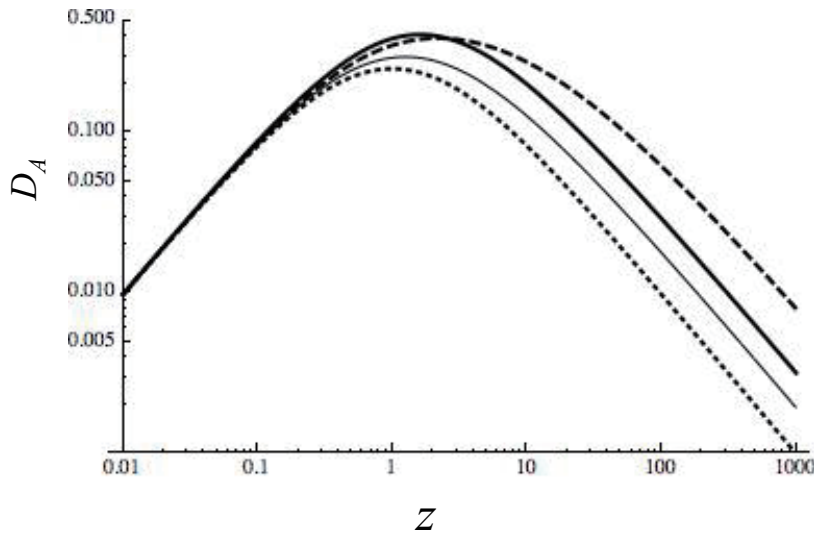


図 4.3 様々な宇宙モデルにおける角径距離の赤方偏移依存性。

示した。縦軸は c/H_0 を単位にした角径距離である。太い実線は、 $\Omega_{M0} = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ という現在の観測結果に近い物質構成の場合を示している。細い実線は同じ平坦な宇宙 $\Omega_K = 0$ の場合であるが、 $\Omega_{M0} = 1, \Omega_\Lambda = 0$ すなわちアインシュタインード・ジッターモデルを示した。破線で開いた宇宙 $\Omega_{M0} = 0.3, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_K = 0.7$ を、鎖線で閉じた宇宙 $\Omega_{M0} = 2, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_K = -1$ をそれぞれ示した。平坦な宇宙どうしても、大きな赤方偏移でアインシュタインード・ジッターの方が、多少距離が短くなっているが、曲率を変

えた事による変化より小さい。開いた宇宙では、距離が長くなり、同じ天体でも見かけの大きさが小さく見える。閉じた宇宙では逆に距離が短くなり見かけの大きさが大きく見える。

次に宇宙論的赤方偏移 z にある絶対光度 $L(\text{erg/s})$ の天体を観測した時のフラックスが $f(\text{erg/s/cm}^2)$ であったとする。宇宙膨張が無いとして、図 4.4 に球面上を伝搬する光の様子を示した。頂点 P にある光源から等方的に

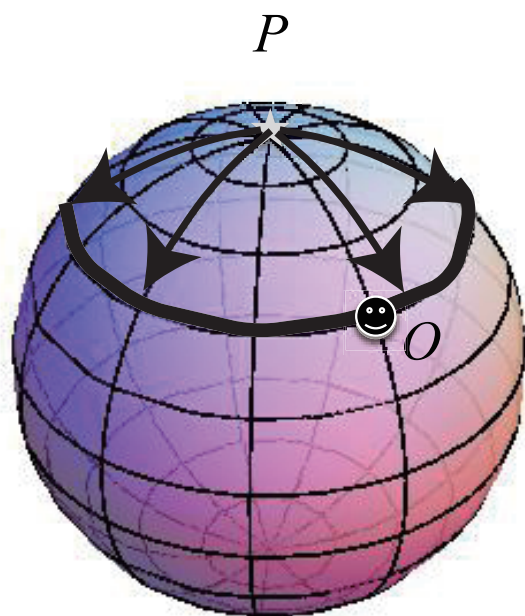


図 4.4 球面上を伝搬する光。

光が放たれている。光は球面に沿って伝搬し点 O の観測に届く。点 P を z

軸上に置き図 4.1 で定義したように 2 次元極座標を導入すると点 P を中心とした点 O を含む球面上の同心円の円周の長さは $2\pi r$ である。フラックス保存則から以下の関係式を得る。

$$L = 2\pi r f. \quad (4.89)$$

上記の話をも 3 次元球面上を伝搬する光に拡張するには、式 (4.89) の円周の長さを球の面積 $4\pi r^2$ に置き換えればよい。球の半径の膨張を考慮するために、まず r を $a_0 r$ に置き換えてる。しかし、これだけでは不十分である。式 (4.89) は単位時間辺り単位周波数辺りに光源から放射された光のエネルギーと光源を取り囲む閉じた曲線上に連続的に存在する仮想的観測者が取得する全エネルギーが等しいという、エネルギー保存則を表している。光源で放射が起きた時間間隔 dt_e の間に放射された光が観測者に観測される時間間隔 dt_o が式 (4.27) に示したように $1+z$ 倍に引き延ばされる。更に放射時の周波数 ν_e は式 (4.29) にしたがって ν_o に偏移する。簡単のための光源がこの周波数のみで光を放出する単色光源とすると観測者が受け取る光のエネルギー総量は $1/(1+z)$ に減少する。したがって、天体の絶対光度とフラックスを用いたエネルギー保存則は以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} \frac{L dt_e}{1+z} &= 4\pi a_0^2 r^2 f dt_o, \\ L &= 4\pi r^2 (1+z)^2 f. \end{aligned} \quad (4.90)$$

そこで輝度距離 luminosity distance を以下のように定義する。

$$D_L = r(1+z). \quad (4.91)$$

ここまでは光源は点源であると仮定して来た。光源即ち天体が有限の面積 dS をもっており、単位面積辺り単位立体角辺りの単位周波数、単位時間あたりの放射強度を I とし、これを表面輝度 Surface brightness と呼ぶ。表面輝度と絶対輝度は以下の関係式で結ばれる。

$$\begin{aligned} L &= 4\pi dSI, \\ dS &= D_A^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (4.92)$$

ここで $d\Omega$ は天体が空に張る見かけの面積である。これらから以下の式を

得る。

$$4\pi D_A^2 d\Omega I = 4\pi D_L^2 f.$$

ここでフラックスと表面輝度は $f = d\Omega I$ で結ばれる。したがって、天体近傍での表面輝度 I_v と観測される表面輝度 I の間には以下の関係がある。

$$I = \frac{1}{(1+z)^4} I_v. \quad (4.93)$$

このように遠方の天体の表面輝度は赤方偏移の4乗に反比例してドンドン暗くなる。これはトールマン効果と呼ばれている。4乗の由来の内訳は、宇宙が小さくなり像が引きのばされて明るさが薄まる効果で2乗、時間間隔・周波数間隔がそれぞれ引き延ばされる効果で1乗ずつである。天体観測の感度を決める要因の一つは、背景の明るさとのコントラストである。トールマン効果により遠方の天体程急激にコントラストがつけにくくなり観測し辛くなる。

奥行きが赤方偏移 z から $z+dz$ で微小立体角 $d\Omega$ の面で囲まれる領域の微小体積 dV は以下のように計算できる。

$$dV = ad\chi a^2 r^2 d\Omega = a^3 d\chi r^2 d\Omega. \quad (4.94)$$

これを固有体積要素と呼ぶ。共動座標部のみ抜き出した $d\chi r^2 d\Omega$ 共動体積 comoving volume と呼ぶ。 $d\chi$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} d\chi &= -\frac{cdt}{a} = -c \frac{dt}{da} \frac{da}{a}, \\ &= \frac{c}{H_0} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2}}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

4.6 粒子的地平線・事象の地平線

以下の式で粒子的地平線 particle horizon を定義する。

$$\ell_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt}{a} \quad (4.96)$$

これは宇宙開闢から現在までに光即ち粒子が進むことができる距離である。言い換えると現在までに情報を交換できた距離である。簡単のために $a \propto t^n$ とする。宇宙膨張の加速度は $\ddot{a} \propto n(n-1)t^{n-2}$ となる。したがって、 $n=1$ の時加速度がゼロとなり、 $n < 1$ の時減速膨張、 $n > 1$ の時加速膨張となる。式 (4.96) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \ell_p(t) &= \frac{1}{1-n} ct^n (t^{-n+1} - (t=0)^{-n+1}) \\ &= \frac{ct}{1-n} \quad \text{for } n < 1 \\ &= \infty \quad \text{for } n > 1 \end{aligned}$$

減速膨張時は、粒子的地平線は期待通り時間と共に伸びていき、情報交換出来る領域が増加していく。しかし、加速膨張時は、宇宙年齢が有限であるにも関わらず粒子的地平線は無窮大である。減速膨張する宇宙の粒子的地平

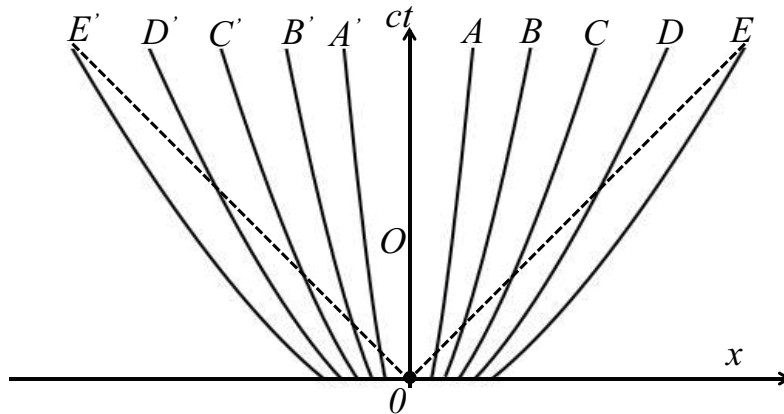


図 4.5 減速運動する粒子群との情報交換。

線が時間と共に伸びる様子を、図 4.5 を用いて解説する。ミンコフスキー座標の時空図中に減速運動をする粒子の世界線を示した。原点で静止している観測者と $t=0$ 以降で情報交換を行なうには、少なくとも $t=0$ の時原点から発した光が各粒子に届かなければならない。この光の世界線を破線で

示した。各粒子の世界線と破線の交点が時刻ゼロに原点から発した光が初めて各粒子に到達した時刻である。この交点までの距離が各時刻の粒子的地平線である。時間と共により遠方の粒子と情報交換が可能になる様子が分かる。一度光が届いた粒子の世界線は、その後常に二本の破線で囲まれた上側の領域すなわち光円錐の内側の領域に存在し、粒子的地平線の内側すなわち情報交換可能な領域に存在し続ける事が分かる。

以下の式で事象の地平線 event horizon を定義する。

$$\ell_p(t) = a(t) \int_t^{\infty} \frac{cdt}{a} \quad (4.97)$$

これはある時刻 t から以後無限の時間を掛けて到達できる距離である。 $a \propto t^n$ の時を例にとる。式 (4.97) は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \ell_p(t) &= \frac{1}{1-n} ct^n (t^{-n+1} - (t=0)^{-n+1}) \\ &= \frac{ct}{1-n} \quad \text{for } n > 1 \\ &= \infty \quad \text{for } n < 1 \end{aligned}$$

減速膨張時は、事象の地平線は期待通り無限大で、無限の時間を掛ければ宇宙の全ての領域と情報交換可能である。しかし、加速膨張時は、事象の地平線は有限になる。即ち時間を無限に掛けても情報交換できない領域が存在するのである。加速度膨張する宇宙では事象の地平線が現れる事を示すため、図 4.6 に異なる初期位置から初速度ゼロで同じ加速度で等加速度直線運動する様々な粒子の軌跡を示した。十分時間が経過した後、節 1.12 で調べたように、粒子の速度は光の速度に漸近していき、時空図上で傾きが 45 度の直線に近づく。破線で $t=0$ および $t=t_1$ に原点から発した光の世界線を示した。 $t=0$ に原点を発した光は、 $t=t_C$ に粒子 C の世界線と $t=t_D$ に粒子 D の世界線と交わり初めて情報交換が可能となる。粒子的地平線は期待通り時間の経過と共に伸びていく。しかし、 $t=\infty$ になっても粒子 E の世界線に漸近するだけで交わる事は無い (節 1.12 参照)。したがって、初期に粒子 E より遠方において同様の加速度運動する粒子とは無限の時間を掛けても情報交換をする事ができない。即ち時刻ゼロに原点にいる観測者にとって

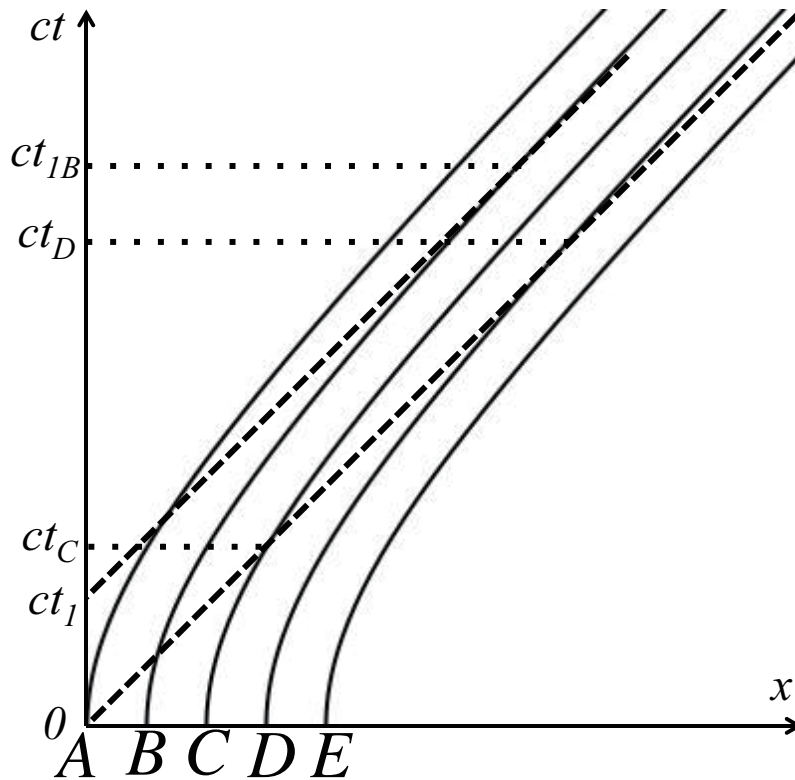


図 4.6 事象の地平線：加速運動する粒子群との情報交換。

粒子 E までの距離が、情報交換できる限界であり、これが事象の地平線である。時刻 $t = t_1$ に原点を発した光は、無限の時間を掛けても粒子 C の世界線に漸近するだけで交わる事は無い。したがって、時刻 $t = t_1$ に原点にいる観測者にとっての事象の地平線は粒子 C までの距離である。このように、共同座標での事象の地平線は時間の経過と共に短くなり、時間が経過すると遠方から順に見えなくなっていく。

最後にド・ジッター宇宙を取り上げる。粒子的地平線は以下のようになり、

$$e^{Ht} \int_0^t \frac{cdt}{e^{Ht}} = \frac{c}{H}(e^{Ht} - 1). \quad (4.98)$$

時間とともに指数関数的に増加する。事象の地平線は以下のようになる。

$$e^{Ht} \int_t^{\infty} \frac{cdt}{e^{Ht}} = \frac{c}{H}. \quad (4.99)$$

事象の地平線は、ハッブル半径で一定となり、二点間の距離が宇宙の指数関数的膨張により引き延ばされ、この半径を超えるとお互い情報交換が出来なくなる。

4.7 プランク時間・プランクエネルギー・プランク質量

宇宙膨張を記述する Friedmann 方程式は以下のように書ける。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

ここで $H = \dot{a}/a$ はハッブル定数、 a はスケールファクター、 ρ は宇宙の平均密度である。宇宙の地平線サイズの指標は Hubble length $\ell_H = c/H$ で与えられる。地平線は情報交換可能な領域のサイズであるから、Hubble length はその時の宇宙のサイズとみなすこともできる。Hubble length 内の物質の総質量は Friedmann 方程式を用いて以下のように書ける。

$$M_H = \frac{4\pi}{3} \ell_H^3 \rho = \frac{c^2}{2G} \ell_H$$

従って、Hubble length は、Hubble length 内の物質によって決まる Schwarzschild 半径、

$$\frac{2GM_H}{c^2}$$

と等しい。ある半径の領域内の全物質が形成する Schwarzschild 半径は、半径の3乗に比例して増加する。したがって、Hubble length を境に大きなスケールでは Schwarzschild 半径が領域の半径より大きくなり物理的意味を持つようになる。一方、小さなスケールでは Schwarzschild 半径が領域の半径より小さく物理的意味を持たない。Schwarzschild 半径が天体の半径より大きい場合、天体の重力場は一般相対論を用いて記述しなければならない。従って、Hubble length 以上のサイズをもった構造の進化を記述するには一

一般相対論を用いる必要がある。つまり Hubble length は一般相対論的效果が必要となるかどうかの目安を与えるスケールと考えることもできる。

宇宙の全静止質量エネルギーは $M_H c^2$ である。宇宙の質量が意味を持つためには、宇宙のエネルギーの不確定さが高々宇宙の全質量エネルギー程度、即ち $\Delta E < M_H c^2$ でなければならない。ハイゼンベルグの不確定性原理から宇宙の時間の不確定さ Δt は以下の式で与えられる。

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2 M_H c^2}$$

宇宙年齢の指標は Hubble length まで光速で宇宙が広がるまでに掛る時間 $t_{\text{age}} \sim \ell/c = 1/H$ で与えられる。この時間尺度を Hubble time と呼ぶ。宇宙年齢が意味を持つためには、量子力学的な宇宙の時間の不確定さが宇宙年齢以下でなければならない。このためには宇宙の全質量が以下の条件を満たさなければならない。

$$\frac{1}{H} = H^2 \left(\frac{c}{H} \right)^3 \frac{1}{c^3} = \frac{2GM_H}{c^3} \geq \frac{\hbar}{2M_H c^2}$$

$$M_H \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

そこで以下の式で定義される Planck mass を導入する。

$$M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.1767 \times 10^{-5} \text{g} = 1.22 \times 10^{19} \frac{1}{c^2} \text{GeV} \quad (4.100)$$

従って、量子力学的な時間の不確定さが宇宙年齢以下であるためには、宇宙の全質量が Planck 質量より大きい必要がある。この条件を宇宙の平均密度を用いて書き換えると以下のようなになる。

$$\rho c^2 < \frac{3}{8\pi(\hbar c)^3} \left(\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} c^2 \right)^4 = \frac{3}{8\pi(\hbar c)^3} (M_{pl} c^2)^4 \quad (4.101)$$

この式の右辺を以下の黒体輻射のエネルギー密度と比較する。

$$\frac{\pi^2}{15(\hbar c)^3} (k_B T)^4$$

上記の条件は、宇宙の温度がプランクエネルギー以下即ち $k_B T < M_{pl} c^2$ で

あると書きかえることができる。逆に宇宙の温度がプランクエネルギー以上になると宇宙年齢が量子力学的な時間の不確定さ以下になる。即ち古典的な理論で進化をたどれる限界が宇宙の温度がプランクエネルギーになるまでである。Planck time :

$$t_{pl} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ sec} \quad (4.102)$$

Reduced Planck mass

$$\tilde{M}_{pl} \equiv \frac{M_{pl}}{\sqrt{8\pi}} = 2.435 \times 10^{18} \frac{1}{c^2} \text{ GeV} \quad (4.103)$$

4.8 インフレーションモデル

平坦性問題について説明する。曲率は密度が $\rho_K = -\frac{3Kc^2}{8\pi G a_0^2} (1+z)^2$ で宇宙膨張とともに進化する物質と解釈することもできる。従ってある z の時の曲率の密度パラメータは以下のように書ける。

$$\Omega_K = \frac{\rho_K}{\rho_{cr}} = -\frac{Kc^2}{\dot{a}^2} = \frac{\dot{a}_0^2}{\dot{a}^2} \Omega_{K0} \quad (4.104)$$

輻射や物質のみから構成される宇宙では、これらの重力が引力であるため宇宙膨張は必ず減速膨張となる。従って過去に遡るほど \dot{a} が大きな値を持つ。式 (4.104) から、過去に遡るほど Ω_K が小さくなることが分かる。宇宙がプランクタイムから現在までずっと輻射優勢であったとすると $a = (t/t_0)^{0.5}$ であるので $\dot{a}_0^2/\dot{a}^2 = t/t_0 = (a/a_0)^2$ となる。また輻射の温度はプランクタイムから現在まで $Ta = T_0 a_0$ の関係で進化したとしてオーダーで間違わないのでこれを使うと

$$\Omega_K(t_{pl}) \sim \left(\frac{k_B T_0}{M_{pl} c^2} \right)^2 \Omega_{K0} \sim 10^{-62} \Omega_{K0} \quad (4.105)$$

となり、観測から $0 < |\Omega_{K0}| < O(1)$ であることを考慮するとプランクタイムにおいて宇宙の曲率を 62 桁以上の精度で 0 に近い値にファインチューニングされてなければ、宇宙は現在の姿でいられなかったことになる。即ちプランクタイムの頃とくらべて現在までに何桁も宇宙の半径が大きくなっ

たにも関わらず未だ観測的に宇宙が平坦であるように見えるためにはプランクタイム時に非常に高い精度で曲率が 0 に近い値になっていなければならないという問題である。表現を変えると $\Omega_K = 0$ の宇宙は、宇宙内の物質の重力で膨張が引き留められ何時か収縮に転じる場合と物質の重力が十分で無く永遠に膨張し続ける場合の境目の状態にあることになる。即ち、プランクタイムから十分時間がたったにも関わらずいまだ宇宙が永遠に膨張し続けるか何時か収縮に転じるのか判別不能であることは、プランクタイム時の膨張速度のファインチューニングを要求するという問題である。地球以外の天体が存在しない宇宙空間での地上からのロケットの打ち上げに例えると、ロケットが地球から非常に遠くまで到達したにも関わらずそこで測定したロケットの速度からロケットが脱出速度を超えているかいないのか判別が出来ないような測定結果になるためには打ち上げ時にロケットの速度を非常に高い精度で脱出速度に一致させて打ち上げなければならない、という問題である。

次に地平線問題について説明する。スタンダードビッグバンモデルでは宇宙は減速膨張していると考えられているので過去に行くほど粒子的地平線が小さくなる。一方観測的には、例えば宇宙の全ての方向から CMB の 2.73K の黒体放射であることなど地平線を越えたスケールで宇宙初期に情報が伝搬していないと説明できない事実が多数存在する。CMB は宇宙年齢が 38 万年の宇宙晴れ上がり時に放射されたものである。このころの粒子的地平線は我々から見込む角度にして高々 2 度である。したがって、2 度以上に離れた空からの CMB が同じ温度であるためには宇宙晴れ上がり時に粒子的地平線を越えたスケールで既に情報交換がされていなければならない。これが地平線問題である。

これらの問題は、宇宙初期に加速度膨張する時期が存在すれば解決する。時刻 t_i から加速度膨張の時期が始り十分長い時間が加速度膨張が継続したとすると、粒子的地平線は $l_p = ct^n t_i^{1-n} / (n-1)$ となり $t_i = 0$ の極限で発散する。即ち過去に全ての宇宙空間と情報交換できたこととなり地平線問題が解決する。また式 (4.104) から加速膨張の時は、過去ほど \dot{a} が小さいことになるので過去ほど Ω_K がでかくなり初期のファインチューニングの必要

がなくなり平坦性問題が解ける。

宇宙開闢間も無い初期にインフラトンと呼ばれるスカラー場 ϕ の真空のエネルギーが宇宙のエネルギー密度が優勢の時代があったとする。スカラー場の真空のエネルギー密度を $V(\phi)$ とする。第零近似でスカラー場のエネルギー密度は $V(\phi)$ で時間的に一定であると考ええる。宇宙の体積変化によらずエネルギー密度が不変というのが真空のエネルギーの特徴である。するとフリードマン方程式は以下ようになる。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{V(\phi)}{c^2}. \quad (4.106)$$

解はド・ジッターモデルで同じ $a \propto e^{Ht}$ となる。この指数関数的膨張期がインフレーション期である。図 4.7 にインフラトンの真空のエネルギーの模

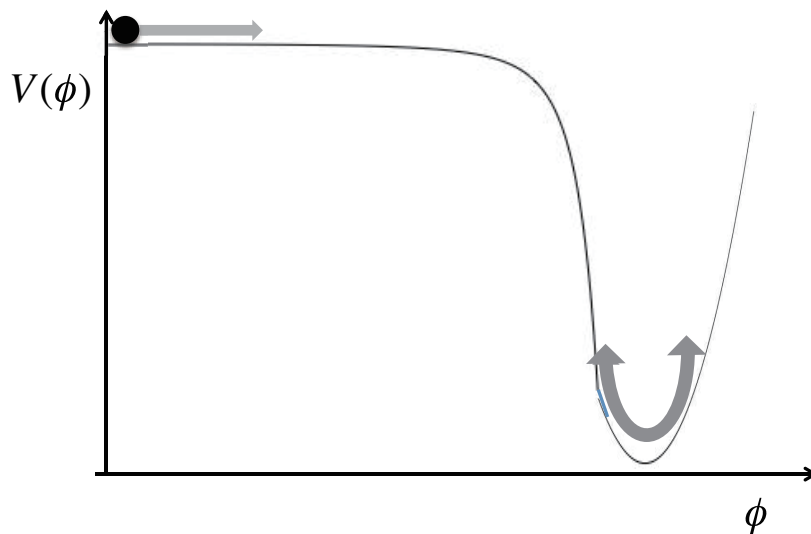


図 4.7 インフラトンポテンシャル（真空のエネルギー）とインフレーション中のインフラトン場の進化。

式図をインフラトン場の真空期待値 ϕ の関数として描いた。インフラトンポテンシャルは ϕ の単調減少関数だが 0 付近では、傾斜がなだらかでユックリ図の右方向に移動していく。この間は、 $V(\phi)$ の値はほぼ一定と見なし

て良く、 ϕ がこのポテンシャルの平坦な部分にいる間に指数関数的膨張即ちインフレーションが起きる。移動を続けると最後ポテンシャルの谷底に落ち単振動を始める。単振動時は、運動エネルギーの平均とポテンシャルエネルギーの平均が等しい。スカラー場の圧力は、運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いたものであるから単振動時スカラー場の圧力はゼロとなる。したがって、スカラー場がポテンシャルの谷底に落ちると減速膨張に転じる。この振動をしている間に真空のエネルギーから様々な粒子が生成され火の玉宇宙が実現される。この期間を宇宙の再加熱期と呼ぶ。この後の宇宙はスタンダードビッグバンモデルにしたがって進化する。研究者によって意見が異なる部分ではあるがこの教科書では、宇宙の再加熱終了時はホットビッグバンの始まりと呼ぶ事にする。即ちインフレーション期はビッグバン以前の宇宙ということになる。

4.8.1 Slow roll inflation

プランクタイム頃にスカラー場 ϕ が存在しそのエネルギーにより加速度膨張を引き起こされインフレーションが起きたとする。このスカラー場をインフラトンと呼ぶ。スカラー場は空間的に一様とするとスカラー場のエネルギー密度は $\rho c^2 = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + V$ と書ける。スカラー場のエネルギー密度が優勢であるとするフリードマン方程式は以下のように書ける。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2c^4} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{c^2} V \right] = \frac{\hbar c}{3\tilde{M}_{pl}^2} \left[\frac{1}{2c^4} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{c^2} V \right] \quad (4.107)$$

ここで $\tilde{M}_{pl} \equiv \sqrt{\hbar c / 8\pi G}$ は reduced Planck mass であり、曲率の効果は無視できるとした。この時、スカラー場の運動方程式以下のように書ける。スカラー場のエネルギー密度の内第1項が第2項より十分小さいとして扱える時、スカラー場の状態方程式を $P = w\rho c^2$ と書いた時の $-1 < w < -1/3$ であり加速度膨張が実現される。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (4.108)$$

Slow roll 近似とは、エネルギー密度の中の $\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2$ の項がポテンシャル

に対して十分小さく，さらにスカラー場の運動方程式中の第1項 $\dot{\phi}$ が他の項に比べて十分小さいとする近似である。以下のように二つの slow roll parameters を定義し，slow roll 近似が成立するための条件を議論する。

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2} \tilde{M}_{pl}^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (4.109)$$

$$\eta \equiv \tilde{M}_{pl}^2 \frac{V''}{V} \quad (4.110)$$

ここで V', V'' はそれぞれ ϕ による一回微分及び2回微分である。Slow roll 近似の元ではフリードマン方程式，スカラー場の方程式は以下のように近似できる。

$$H^2 \sim \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2} V \quad (4.111)$$

$$3H\dot{\phi} \sim -V' \quad (4.112)$$

スカラー場のエネルギー密度の第1項と第二項の比を計算する。

$$\frac{\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2}{V} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{V} \frac{V'^2}{9H^2} \sim \frac{1}{3} \frac{1}{2} \tilde{M}_{pl}^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (4.113)$$

したがって， ε が十分1より小さければスカラー場のエネルギー密度の第1項が第2項に比べて十分小さいとして扱える。式(4.111)を時間で微分すると以下の式を得る。

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2} V' \dot{\phi}$$

両辺に H を掛けて2で割ると以下の式を得る。

$$H^2 \dot{H} = \frac{1}{6\tilde{M}_{pl}^2} V' H \dot{\phi} \sim -\frac{1}{18\tilde{M}_{pl}^2} V'^2$$

最後の等号では式(4.112)を用いた。この式の両辺を H^4 で割ると以下の式を得る。

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \varepsilon \quad (4.114)$$

式(4.112)の両辺を時間で微分すると以下の式を得る。

$$3H\ddot{\phi} + 3\dot{H}\dot{\phi} = -V''\dot{\phi}$$

これからスカラー場の方程式 (4.108) の第1項と第2項の比が以下のように計算できる。

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \sim -\frac{V''}{9H^2} + \frac{1}{3}\varepsilon = -\frac{1}{3}\tilde{M}_{pl}^2 \frac{V''}{V} + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}(-\eta + \varepsilon) \quad (4.115)$$

したがって、 ε, η が共に十分1より小さければスカラー場の方程式の第1項を他の項と比べて十分小さいとして扱える。

4.9 インフレーションによる膨張率

インフレーション期間中に宇宙の半径が最低何倍拡大されなければいけないか求める。以下の式で e-folding を定義する。

$$N(t) = \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_{a(t)}^{a(t_{end})} \frac{da}{a} \quad (4.116)$$

これはインフレーション中のある時刻 t からインフレーションが終了する時刻 t_{end} までの間のスケールファクターの膨張率を指数で表現したものである。式 (4.106), (4.112) を用いて式 (4.116) の右辺を評価する。

$$N(t) = \int_t^{t_{end}} \frac{\dot{a}}{a} dt = \int_{\phi(t)}^{\phi(t_{end})} \frac{H^2}{H\dot{\phi}} d\phi = - \int_{\phi(t)}^{\phi(t_{end})} \frac{V}{V'} \frac{d\phi}{\tilde{M}_{pl}^2} \quad (4.117)$$

ここでインフレーションの終了時刻を

$$\varepsilon(\phi(t_{end})) = 1 \quad (4.118)$$

で定義する。

ここまでの議論でスローロールパラメータが1程度になる時期をインフレーションの終了時期とした。インフレーションの終了時期について少し議論する。スローロールパラメータが1程度になるとスカラー場のエネルギー密度及び圧力の内第一項が無視できなくなり、圧力はほぼゼロになる。従って、宇宙は減速膨張となる。つまりインフラトン場のエネルギーが支配的であってもこの時期は加速膨張をしていないためインフレーションが

終了したと考えるのである。インフレーション終了後、スカラー場のエネルギーが全て物質・輻射に変換されると考えている。スカラー場のエネルギーが全て物質や輻射に転換されると宇宙は非常に高温になるためこの時期を宇宙の再加熱 (reheating) 期と呼ぶ。

以下の式で事象の地平線 (event horizon) を定義する。

$$\ell_H = a(t) \int_t^{\infty} \frac{cdt}{a} \quad (4.119)$$

事象の地平線とはこれから無限の時間を掛けて情報交換を行うことが可能な距離のことである。スケールファクターの時間依存性を $a \propto t^n$ とすると加速度膨張の時は $n > 1$ であるから $\ell_H = 1/(n-1)ct$ となり有限の値をとる。即ち加速膨張する宇宙では情報交換可能な範囲が限られることになる。比較のため減速膨張の場合の事象の地平線を求めると $n < 1$ であるため無限大となり、無限の時間をかければ無限の範囲と情報交換が可能であるという常識的な結果となる。加速膨張の時の時を事象の地平線はハッブル半径 $c/H = ct/n$ を使って

$$\ell_H = \frac{n}{n-1} \frac{c}{H} \sim \frac{c}{H}$$

と書ける。即ち事象の地平線はハッブル半径程度である。また、事象の地平線を共動座標で書くと

$$r_H \equiv \frac{\ell_H}{a} \propto t^{1-n}$$

となり加速膨張の宇宙では時間と共に減少する。即ち加速膨張の宇宙では、観測できる領域言い換えると情報交換ができる領域が時間とともに狭くなることを示している。ある領域が共動座標上で静止しているとするこの領域の共動座標上の半径は一定値をとることとなる。従って、ある時刻では地平線内にあった領域もいつかは地平線の外にでることになる。

以下では、インフレーション中の時刻 t_λ の時に丁度地平線より長くなるスケール λ (共同スケール) を考える。したがって

$$a(t_\lambda)\lambda = \frac{c}{H(t_\lambda)}$$

である。ここで λ として現在の宇宙のハッブル半径を取ると

$$\lambda = \frac{1}{a_0} \frac{c}{H_0}$$

である。ここで a_0 は現在のスケールファクターでありこの教科書では 1 としているが便宜のためあらわに残した。これらの式から以下の式を得る。

$$\frac{a(t_\lambda)H(t_\lambda)}{a_0H_0} = 1$$

インフレーション終了と同時に宇宙再加熱が終了したとすると、この式の左辺はインフレーションが終了した時のスケールファクターを使って以下のように書ける。

$$\frac{a(t_\lambda)H(t_\lambda)}{a_0H_0} = \frac{a(t_\lambda)}{a(t_{end})} \frac{a(t_{end})}{a_0} \frac{H(t_\lambda)}{H_0}$$

第ゼロ近似で再加熱後現在までの間輻射のエントロピーが保存しているとしてよいので $a(t_{end})T_{end} = a_0T_0$ である。ここで $k_B T_0 \sim 2.73/(1.16 \times 10^4) \text{eV}$, $k_B T_{end} \sim 10^{16} \text{GeV}$ である。インフレーション中はスローロール近似が非常に良い精度で成り立っているとすると

$$H(t_\lambda)^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{V}{c^2} \sim \frac{8\pi}{3} G \frac{aT_{end}^4}{c^2}$$

である。一方現在のハッブル定数は以下のように書ける。

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{aT_0^4}{\Omega_\gamma c^2}$$

ここで $\Omega_\gamma = 5.4 \times 10^{-5} h_{0.73}^{-2}$, $a = 8\pi^5 k_B^4 / 15c^3 h^3$ であり、現在の宇宙は平坦であるとした。また輻射のエネルギー密度が $\rho a^4 = \text{一定}$ であることを使った。以上から e-folding 数が次のようにもとまる。

$$N(t_\lambda/a(t_\lambda)=c/H_0) = 61 \quad (4.120)$$

即ち、現在の宇宙のハッブル半径がインフレーション時にハッブル半径を超えてからインフレーションが終了するまでにスケールファクターは Exponential の 61 乗倍膨張したことになる。

図 4.8 にプランク時間 t_{pl} から現在 t_0 に至るまでの地平線と様々な構造の

スケールの進化を示した。縦軸が各宇宙年齢におけるある構造の物理的な固有長さを示している。例えば、 ℓ_0 は現在の宇宙の粒子的地平線であり、 t_0 の時 ℓ_0 となる実線は、

$$\ell_0(t) = a(t)\ell_0,$$

を表しており、現在の宇宙の果てまでの距離のプランク時間から現在に至までの進化を表している。プランク時間からインフレーション期が始まる時刻 t_i までの間は、減速膨張か或は全くの真空中で加速も減速もせず膨張していたと考えられる。この期間の、粒子的地平線は宇宙年齢にほぼ比例する形で増加する。その様子を破線でしめた。 $t = t_i$ にインフレーション期突入後インフレーション終了時 t_e までの期間は、事象の地平線が出現しその値は c/H でほぼ一定である。その様子を一点鎖線で示した。インフレーション終了後現在までは、殆どの期間減速膨張なので（現在の宇宙は加速度膨張しているが、ここでの議論の本質には無関係なので常に減速膨張とした）宇宙年齢に比例する形で粒子的地平線が伸びる。その様子を破線で示している。図から明らかなように、 $\ell_0(t)$ はインフレーション期に一旦事象の地平線より大きくなる。別の言い方をすると現在の宇宙のサイズが、インフレーション期に事象の地平線の外にでる。これを地平線脱出 horizon exit と呼ぶ。インフレーション終了後は、粒子的地平線の増加率の方が $\ell_0(t)$ の増加率より大きく、 t_0 の時ついに $\ell_0(t)$ が粒子的地平線以下になる。これを地平線再突入 horizon reentry と呼ぶ。現在の宇宙で観測される全ての天体のサイズは、当然 ℓ_0 より小さい。全ての宇宙の構造物は t_0 以降に horizon exit し、 t_0 より以前に horizon reentry する。例として、銀河のサイズに対応するスケールの時間進化を t_0 の時 ℓ_{gal} となる実線で示した。ここで ℓ_{gal} は現在の宇宙の平均物質密度 ρ_{gal} と銀河の質量 M_{gal} を用いて

$$M_{gal} = \frac{4\pi}{3} \ell_{gal}^3 \rho_{M0},$$

のように定義され、実際に観測されている銀河のサイズ $\sim 10\text{kpc}$ とは異なる。銀河の材料となった物質が分布している領域のサイズである。小さいスケールほどより後に horizon exit し、より早く horizon reentry する。式

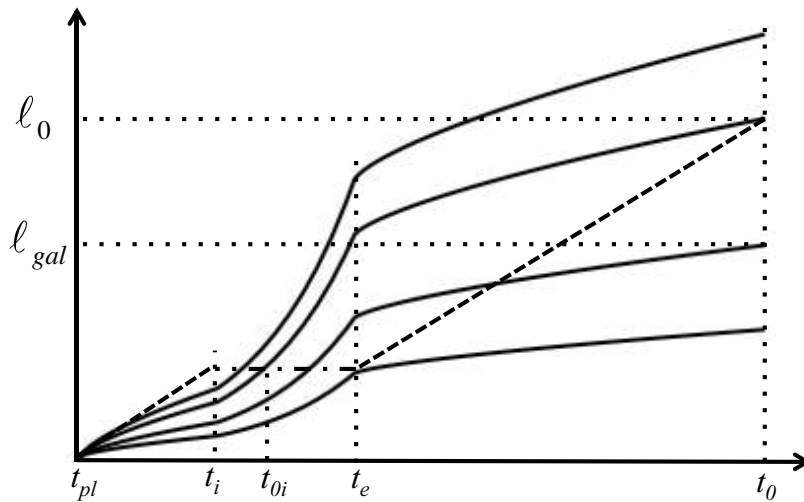


図 4.8 地平線脱出と地平線再突入。

(4.120) で示したインフレーション期間中の宇宙の膨張率は、 t_{i0} から t_e までの期間の宇宙の膨張率である。現在観測されている宇宙は、ハッブルサイズ程度でならしてみると一様等方であり、それを実現するために一度は全ての領域が情報交換できる領域内に存在していた時期があることが必要である。その為インフレーション開始時に現在の宇宙のサイズがその時の地平線より小さい必要がある。丁度地平線サイズと等しいとして導いた膨張率が式 (4.120) で示した膨張率である。言い換えるとインフレーション期の膨張率が式 (4.120) 以上であれば、地平線問題が解決される。インフレーション開始時に丁度現在の宇宙サイズがその時の地平線サイズと等しかったとするのは不自然であり、 $l_0(t)$ の horizon exit 以前にインフレーションが始まっていたと考えるのが自然である。そのような場合、現在観測出来る宇宙の果てより外にも我々の宇宙と同じ進化を続ける領域が存在することになる。一方でインフレーション期の経過時間は有限と考えられるので、我々の宇宙と同じ姿をした宇宙のサイズも有限である。つまり我々の宇宙には果てがあることになる。インフレーションの経過時間を観測的に測定することが出来れば宇宙の果てまでの距離を知る事ができる。

式 (4.104) をインフレーション開始時と終了時に適応し、式 (4.120) を用いるとインフレーション終了時の宇宙の曲率の密度パラメータ Ω_{Ke} が以下のように求まる。

$$\Omega_{Ke} = e^{2H(t_i - t_e)} \Omega_{Ki} < 10^{-53} \Omega_{Ki}. \quad (4.121)$$

ここで Ω_{Ki} はインフレーション開始時の曲率の密度パラメータでありオーダー1程度の値を持つと考えられるので、インフレーションは非常に高い精度で曲率がゼロ即ち宇宙が平坦であることを予言する。

4.10 重力場の量子化

重力場全体を量子する量子重力理論の開拓は、未だに最先端の研究課題であるが、ゼロ次の時空の摂動として現れる重力波を量子化し、重力子（グラビトン）によって構成されているとする理論的記述は可能である。テンソルモードのラグランジアン式 (2.338) は以下のものであった。

$$L = -\frac{1}{32\pi G} \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \Delta_+ \partial_\nu \Delta_+ + \partial_\mu \Delta_\times \partial_\nu \Delta_\times). \quad (4.122)$$

正準量子化の手続きにしたがって真空中の重力波場を量子化する。偏光状態を添え字 p で表す。 $p = +$ or \times を取る。 Δ_p の正準共役な運動量を π_p は以下のように定義される。

$$\pi_p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Delta}_p} = \frac{1}{32\pi G c^2} \dot{\Delta}_p \quad (4.123)$$

ハミルトニアンが以下のようにもとまる。

$$H = \sum_p \pi_p \dot{\Delta}_p - L = \sum_p \left(\frac{1}{2} 32\pi G \pi_p^2 c^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{32\pi G} (\vec{\nabla} \Delta_p)^2 \right). \quad (4.124)$$

一辺の長さ L 、体積 $V = L^3$ の領域内にテンソルモードが閉じ込められているとするとテンソルモードはフーリエ積分表示で以下のように表される。

$$\Delta_p(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} (q_{p,\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + q_{p,\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}). \quad (4.125)$$

q^\dagger は q のエルミート共役である。フーリエモードは周期境界条件を満たす

とし

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad i = x, y, z, n_i \text{ は整数}, \quad (4.126)$$

で与えられる。これから以下の関係式を得る。

$$\frac{1}{V} \int_V e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} d^3x = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}. \quad (4.127)$$

ここで $\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$ はクロネッカーのデルタである。この式の右辺第二項は、 Δ_p がエルミート演算子であるという要請を満たすように付け加えた。ここでテンソルモードは方程式 (2.334) を満たすことから角振動数と波数ベクトルは以下の分散関係式を満たす。

$$\omega_k = ck. \quad (4.128)$$

ここで ω_k は正とした。これから共役な運動量のフーリエ積分表示は以下のように表される。

$$\pi_p(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{32\pi Gc^2} \sum_{\vec{k}} (-i\omega_k q_{p,\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + i\omega_k q_{p,\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \quad (4.129)$$

これらからハミルトニアン of フーリエ積分表示は以下のようになる。

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2V} \int_V d^3x \sum_p \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left[\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} \left(\frac{1}{32\pi Gc^2} \right) \left(q_{p,\vec{k}} q_{p,\vec{k}'}^\dagger e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t + i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}} + q_{p,\vec{k}}^\dagger q_{p,\vec{k}'} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t - i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - q_{p,\vec{k}} q_{p,\vec{k}'} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t + i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}} - q_{p,\vec{k}}^\dagger q_{p,\vec{k}'}^\dagger e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t - i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \vec{k} \cdot \vec{k}' c^2 \left(q_{p,\vec{k}} q_{p,\vec{k}'}^\dagger e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t + i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}} + q_{p,\vec{k}}^\dagger q_{p,\vec{k}'} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t - i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - q_{p,\vec{k}} q_{p,\vec{k}'} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t + i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}} - q_{p,\vec{k}}^\dagger q_{p,\vec{k}'}^\dagger e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t - i(\vec{k} + \vec{k}')\cdot\vec{x}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{32\pi Gc^2} \right) \sum_p \sum_{\vec{k}} \omega_k^2 [2q_{p,\vec{k}} q_{p,\vec{k}}^\dagger + 2q_{p,\vec{k}}^\dagger q_{p,\vec{k}}] \\ &= \left(\frac{1}{32\pi Gc^2} \right) \sum_p \sum_{\vec{k}} \omega_k^2 [q_{p,\vec{k}} q_{p,\vec{k}}^\dagger + q_{p,\vec{k}}^\dagger q_{p,\vec{k}}]. \end{aligned} \quad (4.130)$$

最後の等号では関係式 (4.127) を用いて、一つ目の等号の第 1 行目と第 3 行目で $\vec{k}' = \vec{k}$ に第 2 行目と第 4 行目で $\vec{k}' = -\vec{k}$ として整理した。

テンソルモード (4.125) が、ハイゼンベルグの運動方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Delta_p}{\partial t} = [\Delta_p, H], \quad (4.131)$$

を満たすという条件から q, q^\dagger の交換関係を決める。ここで右辺のカギ括弧は二つの演算子の交換関係である。まず方程式 (4.131) の左辺を計算する。

$$i\hbar \dot{\Delta}_p = \frac{\hbar}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \omega_k (q_{p,\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} - q_{p,\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}). \quad (4.132)$$

フーリエスペクトルの間に以下の交換関係式が成り立つことを仮定する。ここでテンソルモードがスピン2の波であることから、量子化された場の単位である量子、グラビトンはスピンの $\pm 2\hbar$ のボーズ粒子である。ボーズ粒子性を保証するように演算子には交換関係を仮定する。

$$\begin{aligned} [q_{p,\vec{k}}, q_{p',\vec{k}'}] &= [q_{p,\vec{k}}^\dagger, q_{p',\vec{k}'}^\dagger] = 0, \\ [q_{p,\vec{k}}, q_{p',\vec{k}'}^\dagger] &= \frac{16\pi G c^2 \hbar}{\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{p,p'}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

すると右辺は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} [\Delta_p, H] &= \left(\frac{1}{32\pi G c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p'} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \omega_k^2 \left((q_{p',\vec{k}'} [q_{p,\vec{k}}, q_{p',\vec{k}'}^\dagger] + [q_{p,\vec{k}}, q_{p',\vec{k}'}^\dagger] q_{p',\vec{k}'}) e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right. \\ &\quad \left. + (q_{p',\vec{k}'}^\dagger [q_{p,\vec{k}}, q_{p',\vec{k}'}] + [q_{p,\vec{k}}, q_{p',\vec{k}'}] q_{p',\vec{k}'}^\dagger) e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \omega_k (q_{p,\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} - q_{p,\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}). \end{aligned} \quad (4.134)$$

この結果は、式 (4.132) と一致しており、フーリエ係数が交換関係 (4.133) を満たせば、テンソルモードはハイゼンベルグの運動方程式 (4.131) を満たすことが確認できた。ここで物理が分かりやくなるように以下の変換により q, q^\dagger を a, a^\dagger に置き換える。

$$\begin{aligned} a_{p,\vec{k}} &= \sqrt{\frac{\omega_k}{16\pi G \hbar c^2}} q_{p,\vec{k}}, \\ a_{p,\vec{k}}^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega_k}{16\pi G \hbar c^2}} q_{p,\vec{k}}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.135)$$

新しく導入された演算子は以下の交換関係を満たす。

$$[a_{p,\vec{k}}, a_{p',\vec{k}'}] = [a_{p,\vec{k}}^\dagger, a_{p',\vec{k}'}^\dagger] = 0,$$

$$[a_{p,\vec{k}}, a_{p',\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{p,p'}. \quad (4.136)$$

これらを用いてハミルトニアンを書き換えると以下ようになる。

$$H = \sum_p \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left(a_{p,\vec{k}}^\dagger a_{p,\vec{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.137)$$

この結果は、重力波はエネルギー $\hbar \omega_k$ を持った量子すなわちグラビトンの集まりであり、 a, a^\dagger はグラビトンの消滅・生成演算子であると解釈できることを示している。グラビトンの消滅・生成演算子を用いてテンソルモード Δ_p および共役な運動量のモード展開を書き直すと以下ようになる。

$$\Delta_p(\vec{x}, t) = \sqrt{32\pi G \hbar c^2} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V \omega_k}} (a_{p,\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{p,\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \quad (4.138)$$

$$\pi_p(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{32\pi G c^2}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2V}} (-i a_{p,\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} + i a_{p,\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \quad (4.139)$$

この結果からテンソルモードとその共役な運動量の間以下同時交換関係が成り立つことが容易に示せる。

$$[\Delta_p(\vec{x}, t), \pi_p(\vec{x}', t)] = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.140)$$

4.11 膨張宇宙におけるテンソルモードの進化

膨張宇宙におけるテンソルモードのラグランジアンは、式 (2.338) にロバートソン・ウオーカー計量を入れたものである。以下では、宇宙は平坦であるとする。メトリックは、以下のように与えられる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

オイラーラグランジ方程式より、偏光状態が p のテンソルモードの発展方程式が以下のように求まる。

$$0 = \nabla_\mu \frac{\partial L_{GW}}{\partial \partial_\mu \Delta_p} = -\frac{1}{32\pi G} \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \Delta_p),$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{32\pi G} [\partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \Delta_p) + \Gamma_{\sigma\mu}^\mu g^{\sigma\nu} \partial_\nu \Delta_p], \\
&= \frac{1}{32\pi G} \left[\frac{1}{c^2} \ddot{\Delta}_p - \Gamma_{0\alpha}^\alpha g^{00} \frac{1}{c} \dot{\Delta}_p - \frac{1}{a^2} \partial_i \partial^i \Delta_p - \Gamma_{i\mu}^\mu g^{ij} \partial_j \Delta_p \right], \\
&= \frac{1}{32\pi G} \left[\frac{1}{c^2} \ddot{\Delta}_p + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{c^2} \dot{\Delta}_p - \frac{1}{a^2} \vec{\nabla}^2 \Delta_p \right].
\end{aligned}$$

したがって、膨張する宇宙を伝播するテンソルモードの進化は以下の方程式で記述される。

$$\ddot{\Delta}_p + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{c^2} \dot{\Delta}_p - \frac{c^2}{a^2} \vec{\nabla}^2 \Delta_p = 0. \quad (4.141)$$

量子化されたテンソルモードは以下のように記述される。

$$\begin{aligned}
\Delta_p(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}} (w_{k_c}(t) a_{p, \vec{k}_c} e^{i\vec{k}_c \cdot \vec{x}} + w_{k_c}^*(t) a_{p, \vec{k}_c}^\dagger e^{-i\vec{k}_c \cdot \vec{x}}), \\
&= \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}} (w_{k_c}(t) a_{p, \vec{k}_c} + w_{k_c}^*(t) a_{p, -\vec{k}_c}^\dagger) e^{i\vec{k}_c \cdot \vec{x}}. \quad (4.142)
\end{aligned}$$

ここで \vec{k}_c は comoving wavenumber vector、 \vec{x} は comoving coordinate であり、 V_c は comoving volume で物理的な体積とは $V = a^3 V_c$ で結ばれる。これを方程式 (4.141) に代入することで w_{k_c} の満たすべき方程式として以下の方程式を得る。

$$\ddot{w}_{k_c} + 3H \dot{w}_{k_c} + \frac{k_c^2 c^2}{a^2} w_{k_c} = 0. \quad (4.143)$$

$H = \dot{a}/a$ はハッブル定数である。

4.12 インフレーション中の時空の量子ゆらぎによる宇宙背景重力波の生成

インフレーション中のスケールファクターの進化は良い近似でフリードマン方程式 (4.106) で記述される。ここではさらに簡単のためインフラトンのポテンシャルエネルギーが一定即ちハッブル定数が一定値 H_I をとるとする。この時、方程式 (4.143) の一般解が以下のように得られる。

$$w_{k_c} = A_{k_c} \left(i + \frac{k_c c}{a H_I} \right) e^{i \frac{k_c c}{a H_I}} + B_{k_c} \left(-i + \frac{k_c c}{a H_I} \right) e^{-i \frac{k_c c}{a H_I}}. \quad (4.144)$$

未定定数 A_{k_c}, B_{k_c} は、各モードの波長が十分ハッブル地平線 c/H_I より小さい時、即ち $k c/a H_I \gg 1$ の極限で解 (4.144) が平坦の時空での量子化されたテンソルモード (4.138) と一致しなければならないという条件から決定される。波長が subhorizon scale の任意の時刻を t_1 とする。この時刻からの経過時間が Hubble time より十分短い時刻 t までの進化を扱う。すなわち $H_I(t-t_1) \ll 1$ である。この時、スケールファクターは以下のように展開できる。

$$a(t) \sim a_1 + \dot{a}_1(t-t_1) = a_1(1 + H_I(t-t_1))$$

ここで $a_1 = a(t_1)$ で時刻 t_1 でのスケールファクターである。これから w_{k_c} の指数部を以下のように展開できる。

$$\frac{k_c c}{a(t)H} \sim \frac{k_c c}{a_1 H} - \frac{c k_c}{a_1} (t-t_1)$$

また subhorizon scale では $c k_c/a H \gg 1$ であることに注意して w_{k_c} の漸近形が以下ようになる。

$$w_{k_c} \sim \frac{c k_c}{a_1 H_I} \left(A_{k_c} e^{i \frac{c k_c}{a_1 H_I} + i \frac{c k_c}{a_1} t_1} e^{-i \frac{c k_c}{a_1} t} + B_{k_c} e^{-i \frac{c k_c}{a_1 H_I} - i \frac{c k_c}{a_1} t_1} e^{i \frac{c k_c}{a_1} t} \right). \quad (4.145)$$

さらにこの時、宇宙が膨張していることによる効果である w_{k_c} の満たす方程式 (4.143) の左辺第二項は無視でき、スケールファクターも定数として扱えるため、 w_{k_c} の満たす方程式は以下のような調和振動子の運動方程式と同じ形に還元できる。

$$\ddot{w}_{k_c} + \frac{k_c^2 c^2}{a_1^2} w_{k_c} = 0. \quad (4.146)$$

これから w_k の時間発展は、 $\omega_{k_1} = c k_c/a_1$ の単振動で表されることが分かる。一方、フラット時空での量子化されたテンソルモード式 (4.138) を comoving wave number k/a_1 を用いて書くと以下ようになる。

$$\Delta_p(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{32\pi G \hbar c^2}{2V \omega_{k_1}}} (a_{p, \vec{k}} e^{-i \omega_{k_1} t} + a_{p, -\vec{k}}^\dagger e^{i \omega_{k_1} t}) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (4.147)$$

ここで物理的な位置ベクトルを \vec{r} とすると $\vec{r} = a\vec{x}$ であり、 $\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}_c \cdot \vec{x}$ 、即ち位相は共動座標で表しても物理的座標で表しても変わらないという事実を用いた。この式と式 (4.145) の比較から未定係数が以下のように決まる。

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{H}{\omega_{k1}} e^{-i\delta_{k1}} \sqrt{\frac{32\pi G\hbar c^2}{2a_1^3 \omega_{k1}}} = H \sqrt{\frac{32\pi G\hbar}{2k_c^3 c}} e^{-i\delta_{k1}}, \\ B_k &= 0. \\ \delta_k &= \frac{\omega_{k1}}{H} + \omega_{k1} t_1 \end{aligned} \quad (4.148)$$

ここで、 $H(t-t_1) \ll 1$ から指数以外に現れる時間に依存する物理量は時刻 t_1 での量で近似したことを明示するため下付きの添字 1 を付けた。以上の結果からインフレーション中の量子化されたテンソルモードが以下のようにかけることが分かった。また以下では、波数は comoving wavenumber を用いることをデフォルトとし、添字の c を省いて単に \vec{k} と表記することにする。

$$\begin{aligned} \Delta_p(\vec{x}, t) &= H \sqrt{\frac{32\pi G\hbar}{2V_c c}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^{3/2}} \left[\left(i + \frac{kc}{aH} \right) e^{i\frac{kc}{aH} - i\delta_k} a_{\vec{k}} \right. \\ &\quad \left. + \left(-i + \frac{kc}{aH} \right) e^{-i\frac{kc}{aH} + i\delta_k} a_{-\vec{k}}^\dagger \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (4.149)$$

インフレーション中は激しい宇宙膨張により宇宙はほぼ真空状態にあると思われる。インフレーション中の真空 $|0\rangle$ を

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \quad (4.150)$$

を満たす状態とする。当然だが

$$\langle 0|\Delta_p(\vec{x}, t)|0\rangle = 0 \quad (4.151)$$

で揺らぎの振幅の真空期待値はゼロである。ここで $\langle 0|a_{\vec{k}}^\dagger = 0$ を使った。テンソルモードの量子揺らぎの分散値は以下のように与えられる。

$$\langle 0|\Delta_p(\vec{x}, t)^2|0\rangle = \frac{32\pi G\hbar H^2}{2cV_c} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^3} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{a^2 H^2} \right) \quad (4.152)$$

次に和から積分への置き換えを行う。それには以下の操作を行えば良い。

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V_c}{(2\pi)^3} d^3k. \quad (4.153)$$

興味あるスケールの揺らぎはインフレーション末期には、全て Hubble horizon より十分波長が長くなっている。そこで super horizon limit $a/k \gg c/H$ すなわち $ck/aH \ll 1$ を取る。その結果、興味あるスケールのみ含むテンソルモードの量子ゆらぎの分散値は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Delta_p(\vec{x}, t)^2 | 0 \rangle &= \frac{32\pi G \hbar c H^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^3} = 32\pi G \hbar c \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} \\ &= \frac{4(\hbar c)^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

テンソルモードの分散値は有限値をとる。すなわち、インフレーションモデルは時空の量子ゆらぎにより宇宙背景重力波（原子重力波）が生成されることを予言する。ここで一般に平均値がゼロの物理量 g の分散値をフーリエ成分の積分で表した時パワースペクトルを以下の式で定義する。

$$\langle g^2 \rangle = \int_0^\infty P_g(k) \frac{dk}{k} \quad (4.155)$$

ここでフーリエ成分の振幅は波数ベクトルの方向には依存しないとした。すなわちパワースペクトルとは、単位対数波数あたりに含まれるモードのパワーの分散値である。したがって、インフレーション中に時空の量子ゆらぎによって生成される原子重力波のパワースペクトルは以下の様に与えられ、

$$P_t = 2 \times \frac{4(\hbar c)^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \quad (4.156)$$

ファクター 2 は、2つの独立な偏光が存在することから来た。テンソルモードすなわち原子重力波のパワースペクトルは波長によらず一定となる。式 (4.111) から、インフレーション中のハッブル定数の自乗 H^2 は、インフラトンポテンシャルの絶対値に比例する。したがって、式 (4.156) の結果は、テンソルモードのパワースペクトルの大きさの測定結果からインフラトンポテンシャルの大きさ、すなわちインフレーションが始まった時期の宇宙の温度が分かる。

4.13 インフレーション期の揺らぎの生成過程概要

この節以降に記述する内容を本格的に学習したい方は、例えば <http://www.astr.tohoku.ac.jp/~hattori/CMBCosmology.pdf> を参照してください。インフレーション期間中に宇宙の半径は e^{61} 倍以上に広がる。結果としてインフレーション終了時は、宇宙はシワ一つないのっぺりしたほぼ一様な密度分布になっていることが期待される。そのままでは、現在の宇宙の物質分布の非一様性が説明出来ない。インフレーション期のインフラトン場の真空の揺らぎ粒子・反粒子の生成と消滅の過程を考える。つい生成されたインフラトン場のエネルギーの揺らぎを $\Delta\phi$ とすると対消滅するまでの寿命 Δt は不確定性関係から以下のように評価できる。

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta\phi}. \quad (4.157)$$

つい生成された揺らぎのペアが Δt 後に対消滅しようとした時、彼らが事象の地平線以上に引き離されてしまうと、対消滅することが出来ず実在かしてしまふ。この条件は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} c\Delta t &> \frac{c}{H}, \\ \Delta\phi &< \hbar H. \end{aligned} \quad (4.158)$$

エネルギーが $\hbar H$ 以下のインフラトン場の揺らぎ実在化することになる。これが物質分布のエネルギー密度の揺らぎになり、宇宙の構造形成の物質分布の揺らぎの起源である。スカラー場すなわちインフラトン場のラグランジアン (2.314) とテンソルモードのラグランジアン (2.338) の比較から質量が無視し得るほど小さい即ちスローロールパラメター η が十分1より小さい時、インフレーション中の真空の量子ゆらぎで生成されるスカラー場パワースペクトルが良い近似で以下のように書けることは自明であろう。

$$P_\phi = \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2. \quad (4.159)$$

4.14 スカラー曲率および密度の揺らぎのパワースペクトル

波数 k の揺らぎの存在に起因する式 (2.95) で定義される空間曲率の摂動を $R_k^{(3)}$ と書くと、定義に従って計算することで次の結果を得る。

$$R_k^{(3)} = \frac{4k^2}{a^2} \left(D + \frac{E}{3} \right) \quad (4.160)$$

ここで、式 (2.263) に習って、膨張宇宙でのメトリック摂動を以下のように表した。

$$ds^2 = a^2 \left(-(1+2A)d\tau^2 - 2B_i dt dx^i + [(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \right). \quad (4.161)$$

ここで、 τ は以下のように定義される conformal time である。

$$d\tau = \frac{dt}{a} \quad (4.162)$$

また光速は 1 とした。以下では

$$\phi \equiv D + \frac{1}{3}E \quad (4.163)$$

と置く。インフレーション中はスカラー場 ϕ の値が幾らであるかが時計代わりとして使える。ゲージを選択することで、 ϕ の値が同じになるように各場所の時計の進み具合を調整することができる。このようなゲージを total matter gauge (TM gauge) と呼ぶ。正のスカラー場の揺らぎ $\delta\phi$ が存在する場所を考える。 δt 間の宇宙膨張 $\Delta a = \dot{a}\delta t$ だけ揺らぎが存在した場所は宇宙の半径が大きくなっている。ここで $\delta t < 0$ に注意すると $\Delta a < 0$ であり、宇宙の半径は $|\Delta a|$ だけ小さくなっている。正の揺らぎが存在する場所では、宇宙の半径が平均的な場所が達する予定の a よりまだ $|\Delta a|$ だけ小さい内に同じ時刻になってしまうのである。その結果、空間曲率 $\Delta a/a$ が発生する。これを式で表すと以下ようになる。

$$\varphi = \frac{\dot{a}\delta t}{a} = -H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}_0} \quad (4.164)$$

インフラトンのパワースペクトル式 (4.159) を用いるとスカラー曲率のパワースペクトルが以下のように求まる。

$$P_\varphi(k) = \left(\frac{H_*}{\dot{\phi}_0}\right)^2 P_\phi(k) = \left(\frac{H_*}{\dot{\phi}_0}\right)^2 \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2. \quad (4.165)$$

ここで H_* は波数 k の揺らぎがホライズンの外に出た直後、即ち horizen exit の時刻 t_* でのハッブル定数であり、波数と関係式

$$\frac{a(t_*)}{k} = \frac{1}{H(t_*)}. \quad (4.166)$$

で結ばれる。スローロール近似でのゼロ次のスカラー場の温度変化率とインフラトンポテンシャルの関係式 (4.112) とフリードマン方程式 (4.111) およびスローロールパラメータ ε の定義式 (4.109) から $(H/\dot{\phi}_0)^2$ は以下のように変形できる。

$$\left(\frac{H}{\dot{\phi}_0}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^4} \left(\frac{V}{V'}\right)^2 = \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.167)$$

以上からスカラー曲率のパワースペクトルは以下のように書ける。

$$P_\varphi(k) = \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2. \quad (4.168)$$

パワースペクトル (4.168) が Horizen exit 時のハッブル定数で与えられる事から波数と波数の微分をスカラー場の微分に変換する関係式

$$\frac{d}{d\ln k} = \frac{\dot{\phi}_0}{H_*} \frac{d}{d\phi_0} \sim -\tilde{M}_{pl}^2 \frac{V'}{V} \frac{d}{d\phi_0}. \quad (4.169)$$

を用いてこの式を $\ln k$ で微分することで以下の手続きでスカラー揺らぎのパワースペクトルインデックス n の波数依存性が導出できる。

$$\frac{d\varepsilon}{d\ln k} = -\frac{\tilde{M}_{pl}^4}{2} \frac{V'}{V} \left(\frac{2V'V''}{V^2} - \frac{2V'^3}{V^3}\right) = -2\eta\varepsilon + 4\varepsilon^2. \quad (4.170)$$

$$\frac{d\ln H_*^2}{d\ln k} = -2\varepsilon. \quad (4.171)$$

$$n-1 \equiv \frac{d \ln P_\phi}{d \ln k} = 2\eta - 6\varepsilon. \quad (4.172)$$

これは、ゲージ不変な揺らぎの発展方程式から導いた結果と一致している。ところでスカラー曲率のスペクトルインデックスをわざわざ $n-1$ で定義した理由は以下のことによる。宇宙論では、伝統的に構造形成の密度揺らぎのパワースペクトルを

$$|\delta\rho_k|^2 \propto k^n \quad (4.173)$$

と定義する習慣がある。この定義と矛盾しないようにするため上記のように $n-1$ で定義したのである。ポアソン方程式から

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_N &= 4\pi G a^2 \delta\rho_k \\ \Phi_N &\propto k^{-2} \delta\rho_k \end{aligned}$$

となる。したがって、空間曲率のパワースペクトルは

$$\int d \ln k P_\Phi(k) \propto \int d \ln k k^3 k^{-4} |\delta\rho_k|^2 \propto \int d \ln k k^{n-1}$$

となり、 $n=1$ の時、空間曲率がスケールによらないスケール不変な量になる。インフレーションが考案される以前に密度揺らぎの初期条件として、空間曲率がスケール不変になるのが自然と考えて $n=1$ を提案した二人の物理学者の名前をとって $n=1$ のスペクトルを Harrison-Zel'dovich spectrum との呼ばれる。

スカラー曲率の揺らぎおよびテンソルモードの振幅は、波長がホライズンサイズより長い時、即ちインフレーション中に horizon exit してから horizon reentry するまでの間、時間に寄らず一定となる。因果律が保てないので freeze して変化しないのは期待通りの結果である。CMB に温度揺らぎが刻印される宇宙晴れ上がり時にまだ horizon reentry していない大きなスケールのスカラー曲率の振幅はインフレーション時に生成された値をほぼ保っており、インフラトン場の情報を直接引き出すことができる。詳しい計算によるとスーパーホライズンスケールの CMB 温度揺らぎとスカラー曲率の間に以下の関係が成り立つことが知られている。

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{obs} = -\frac{1}{5} \varphi(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \quad (4.174)$$

CMB 観測衛星 COBE に搭載された DMR という測定器が、史上初めて CMB 温度揺らぎを発見した。角度分解能が悪いことが幸いして、COBE-DMR が発見した温度揺らぎはスーパーホライズンスケールの温度揺らぎであり、式 (4.174) が適応できる。測定された温度揺らぎは、

$$\frac{\delta T}{T} = 6.24 \times 10^{-6} \quad (4.175)$$

であった。式 (4.174) を (4.168) に代入し CMB 温度揺らぎでスカラー曲率のパワースペクトルを書き表し、(4.175) を代入すると次のようにインフレーションが起こったエネルギースケールについて制限が課せられる。

$$\frac{V^{1/4}}{\epsilon^{1/4}} \sim 5 \times 10^{16} \text{GeV} \quad (4.176)$$

スカラーテンソル比 r を以下のように定義する。

$$r = \frac{P_T(k)}{P_\phi} = 16\epsilon. \quad (4.177)$$

式 (4.176) の結果をスカラーテンソル比を用いた式に書き換えると、スカラー・テンソル比とインフレーションのエネルギースケールを関係付ける以下の関係式を得る。

$$V^{1/4} \sim 2.5 \times 10^{16} r^{1/4} \text{GeV} \quad (4.178)$$

参考文献

宇宙論

0 次の宇宙論特にスタンダードビッグバン宇宙論についてこの教科書で触れたのはほんのサワリ程度でしか過ぎない。その豊かな内容について更に学習したい方には以下の文献がお勧めである。

[1] S.Weinberg, Gravitation and Cosmology (1972)

[2] S.Dodelson, Modern Cosmology (2003)

[3] S.Weinberg, Cosmology (2008)

星・銀河・銀河団・大規模構造の形成過程即ち 1 次の宇宙論に関しては文献 [2],[3] がお勧めである。インフレーション時の量子揺らぎの生成過程に関しては以下の文献も参考になると思う。

http://www.astr.tohoku.ac.jp/~hattori/hattori_cosmo.pdf

ブラックホール

星は自転している。星が潰れて収縮していく過程で角運動量が保存されれば、収縮して出来上がった天体が高速回転していると考えるのは妥当な仮定である。実際、中性子星が高速回転していることは、パルサーの存在により周知のことである。したがって、星が崩壊してブラックホールが出来るとするとブラックホールが高速回転している即ち大きな角運動量を持っていると考えるのが妥当である。角運動量の効果が無視出来ない時、空間球対称の仮定はもはや適応出来ず少なくとも軸対象な系として扱わなければ

ならない。角運動量を持ったブラックホールを記述するメトリックにカーメトリックがある。カーメトリックの詳細についてはこの教科書では触れなかった。カーメトリックの優れた入門的記述が以下の文献にある。

[4] B.Schutz, *A first course in general relativity* (1988)

江里口・二間瀬による、この文献の訳書がでている。

ウンルー効果等、曲がった空間の量子力学に関する代表的文献には以下のものがある。

[5] Birrell and Davies, *Quantum fields in curved space* (1982)

ブラックホール地平線近傍の真空の量子揺らぎを起源とする放射、ホーキング放射の物理、も現代物理学の主要な研究対象として発展し続けている。ホーキング放射過程の物理的解説は例えば文献 [4] にある。

相対論

相対論の優れた教科書は、多数あるが文献 [4] と以下の文献が相対論の普及（研究者への）および発展に尽くした二大文献と思う。文献 [4] の出現により、相対論に対する敷居が一気に低くなった。相対論を使いこなす物理学者の数の飛躍的増加に果たした役割は計り知れない。

[6] Charles W.Misner, Kip S.Thorne, John Archibald Wheeler, *Gravitation* (1970)

この本は、電話帳という別名を持つ 1279 頁からなる分厚い教科書である。相対論の辞典として側に置いておきたい本である。この教科書の出現は、相対論の教え方に大きな革命をもたらし、初学者にも取り付きやすい記述法を示した。ただし、いかんせん分量が初学者には取り付き難い。文献 [4] はこの文献の影響を強く受けて、且つ分量を初学者に取り付きやすいレベルに調整したものである。文献 [6] の著者の一人 Wheeler はブラックホールの名付け親である。著者の一人である Kip Thorne は、今回の重力波検出でノーベル賞が与えられるとしたら、その一人は彼が最有力と考えられている物理学者である。