

觀測的量子宇宙論

服部 誠

2020年6月30日

目次

第 1 章	ネーターの定理・スカラー場のエネルギー・モーメンタム テンソル	1
1.1	質点の運動	1
1.1.1	オイラー・ラグランジュ方程式	1
1.1.2	正準形式	3
1.1.3	ネーターの定理	4
1.2	場の解析力学	9
1.2.1	オイラー・ラグランジュ方程式	9
1.2.2	場のネーターの定理	12
1.2.3	スカラー場のエネルギー・運動量テンソル	15
第 2 章	場の量子論	19
2.1	生成・消滅演算子、ハイゼンベルグの運動方程式	19
2.1.1	ボーズ粒子系	19
2.1.2	フェルミ粒子系	23
2.1.3	ハイゼンベルグの運動方程式	24
2.2	輻射場の量子化	25
2.2.1	クーロンゲージ	25
2.2.2	輻射場のフーリエ積分表示	27
2.2.3	量子化された輻射場のエネルギー・運動量・角運動量	31
2.3	自由なスカラー場の量子化	34
2.3.1	自由なスカラー場のフーリエ積分表示	34

	2.3.2	量子化された自由なスカラー場のエネルギー・運動量	35
第 3 章		インフレーション	37
3.1		初期宇宙史	37
	3.1.1	プランクスケール	37
	3.1.2	地平線問題・平坦性問題	39
	3.1.3	Slow roll inflation	42
	3.1.4	インフレーションによる膨張率	44
第 4 章		揺らぎの生成	49
4.1		スカラー揺らぎ	49
	4.1.1	フーリエスペクトル	49
		Massless scalar field	52
		Scalar field with non zero mass simplified treatment	59
	4.1.2	Generation of Adiabatic perturbation via Inflation	60
	4.1.3	Scalar, vector, tensor decomposition of perturbation	62
	4.1.4	Gauge transformation of scalar perturbations	66
	4.1.5	Gauge invariant variables	71
	4.1.6	良く扱われるゲージ	72
	4.1.7	ゲージ不変なスカラー摂動の発展方程式	74
	4.1.8	スカラー場の揺らぎの発展方程式のゲージ不変形式	81
	4.1.9	Power spectrum of scalar perturbation	85
	4.1.10	スーパーホライズンスケールのスカラー摂動の進化	87
	4.1.11	CMB 観測との比較：スーパーホライズンスケール	92
	4.1.12	Late stage evolution of density contrast and CMB spectrum	100
4.2		テンソルモード	102
	4.2.1	揺らぎの生成とスペクトル	102
	4.2.2	進化	103

第 5 章	真空の進化	111
5.1	数学及び物理学的準備	111
5.1.1	数学的準備	111
5.1.2	シュレディンガー表示、ハイゼンベルグ表示、相互作用表示	115
5.1.3	コヒーレント状態	125
5.1.4	スクイーズド状態	132
5.2	テンソルモード	135
5.2.1	基本的事項のまとめ	135
5.2.2	シュレディンガー方程式の解として時間発展演算子を導出する試み	139
5.2.3	時間発展演算子の導出: $U = SR$	141
5.2.4	時間発展演算子の導出: $U = RS$	146
5.2.5	宇宙論的スクイーズド状態及び時間発展演算子の二つの分離法の物理的等価性	149
5.2.6	宇宙論的スクイーズド状態における粒子数の平均値、2乗平均値	152
5.2.7	スクイーズドパラメータの時間発展解概観	153
5.2.8	位相空間内でのスクイーズド状態の時間発展	154
5.2.9	量子もつれ状態	159
5.2.10	有限温度の効果	160
5.2.11	2 次のコヒーレンス	163
付録 A	相対論概説	165
付録 B	偏光 E、B モードとその電子散乱による生成	177

第 1 章

ネーターの定理・スカラー場のエネルギー・モーメントテンソル

1.1 質点の運動

1.1.1 オイラー・ラグランジュ方程式

質点の位置を一般化座標 $q_i(t)$ で表わす。質点の一つの場合は、 $i = x, y, z$ である。質点の速度 $\dot{q}_i(t)$ と $q_i(t)$ が張る 6 次元空間を位相空間と呼ぶ。質点の任意の運動は位相空間内の一本の軌跡として表される。位相空間内で $q_i(t), \dot{q}_i(t)$ は互いに一次独立である。これらの座標の関数であるラグランジアン (Lagrangian) は以下のように定義される。

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = T - V$$

ここで T は運動エネルギー、 V はポテンシャルエネルギーである。例としてポテンシャル場 $V(q_i)$ 中を非相対論的速度で運動する質量 m の質点のラグランジアンを下に書く。

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{q}_i^2 - V(q_i)$$

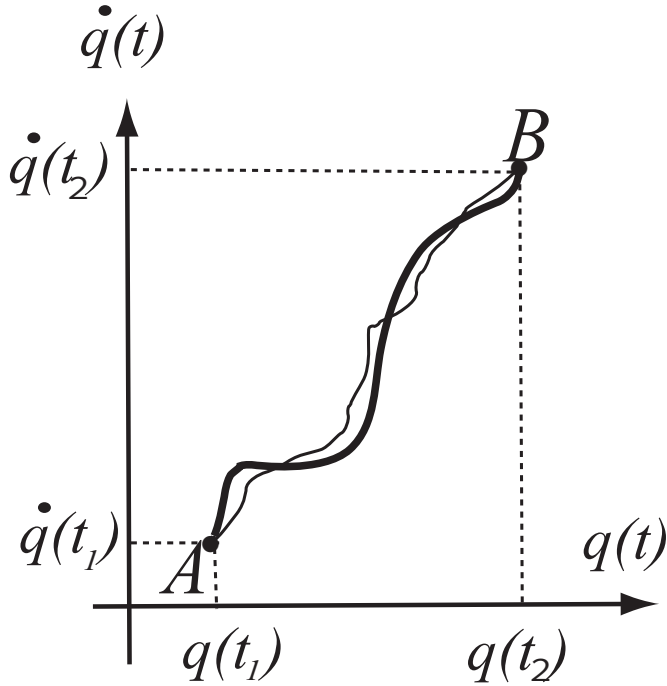


図 1.1 始点 A を時刻 t_1 に出発し終点 B に時刻 t_2 に到着する質点の位相空間中の軌跡。太い実線が物理法則に従って運動する質点の真の軌跡を示した。細い実線は始点と終点を固定して真の軌跡から任意の微量ズラした軌跡を示す。

作用積分 (action) を以下の式で定義する。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$$

最小作用の原理によれば、質点は作用が最少となる軌跡を通る。図 1.1 のように粒子の軌跡を物理法則に従って運動する場合を表す真の軌跡 $(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ から、始点と終点を固定して任意の微量ズラした場合 $(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t))$ の作用の変分量を微量の一次まで展開し計算する。

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t)) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right) \\
&= \left[\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta q_i(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t)
\end{aligned}$$

途中部分積分を行い、最後の等号では始点と終点を固定していること即ち $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ を用いた。最小作用の原理は $\delta I = 0$ であること、即ちこの式が任意の軌跡の変分 $\delta q_i(t)$ に対してゼロであることを主張する。従って最小作用の原理を満たすにはラグランジアンが以下の方程式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0 \quad (1.1)$$

1.1.2 正準形式

一般化運動量を次の式でラグランジアンから定義する。

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.2)$$

この式により定義される一般化運動量を用いて位相空間の座標を q_i, \dot{q}_i から q_i, p_i に変換する。一般化運動量と一般化座標の関数であるハミルトニアン (Hamiltonian) を以下の式で定義する。

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \quad (1.3)$$

一般化座標と一般化運動量を真の軌跡 q_i, p_i から任意の微少量ズラす。

$$q_i \rightarrow q_i + \eta_i, p_i \rightarrow p_i + \zeta_i$$

変分後のハミルトニアンを一次の微少量まで展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
H(q_i + \eta_i, p_i + \zeta_i) &= H(q_i, p_i) + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \zeta_i \right) \\
&= \sum_i \left(p_i \dot{q}_i + \zeta_i \dot{q}_i + p_i \dot{\eta}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i \right) - L(q_i, \dot{q}_i)
\end{aligned}$$

$$= H(q_i, p_i) + \sum_i (-\dot{p}_i \eta_i + \dot{q}_i \zeta_i)$$

一番目の等号では、左辺をテイラー展開した。上から二番目の等号ではハミルトニアン(1.3)の右辺を展開した。最後の等号では、ハミルトニアン(1.3)、オイラー・ラグランジュ方程式(1.1)及び一般化運動量の定義式(1.2)を用いた。この式が一番目の等号の左辺と最後の等号の左辺が任意の微少量 η_i, ζ_i に対して恒等的に等しくなければならず、このことからハミルトニアンが以下の方程式を見なければならぬ。

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (1.4)$$

この方程式をハミルトンの正準運動方程式と呼ぶ。

節 1.1.1 で扱ったポテンシャル場中を非相対論的速度で運動する質量 m の質点の場合を例として扱う。一般化運動量は以下のようなよく見なれた形になる。

$$p_i = m\dot{q}_i$$

ハミルトニアンは

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(q_i)$$

となりこれは質点の力学的エネルギーである。正準運動方程式は

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \frac{p_i}{m} = \dot{q}_i$$

となり、初めの式はポテンシャル場中の質点の運動方程式を二番目の式は速度を用いた一般化運動量の定義式を与える。

1.1.3 ネーターの定理

座標変換に対する系の対称性と保存量との関係を結ぶネーターの定理を導出する。以下のような一般の無限小座標変換を考える。

$$t' = t + \delta t(t)$$

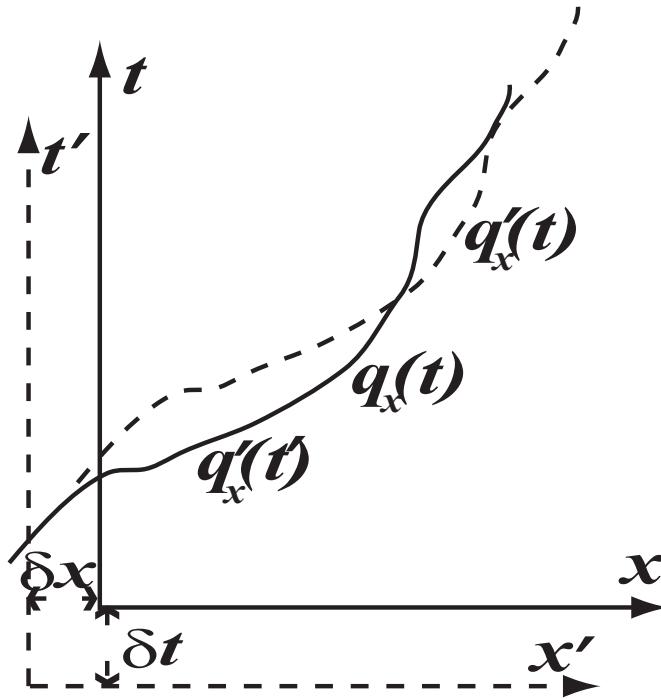


図 1.2 無限小座標変換 $t' = t + \delta t, x' = x + \delta x$ と質点の軌跡の x 成分（実線）の様子を示す．座標変換後の質点の軌跡を表す関数を元の座標 $t-x$ 座標系に持ってきたもの $q'_x(t)$ を破線で表わす．

$$x'_i = x_i + \delta x_i(t)$$

無限小量 $\delta t, \delta x_i$ は一般に時刻 t の関数でよい．以下の式で定義される微少量をリー（Lie）微分と呼ぶ．

$$\delta^L q_i(t) \equiv q'_i(t) - q_i(t) \quad (1.5)$$

リー微分は、座標変換による関数形の変化量を表すものである．図 1.2 にリー微分で比較している関数の様子を示す．リー微分は以下のように変形すると以後便利であり且つ物理的理解を助ける．

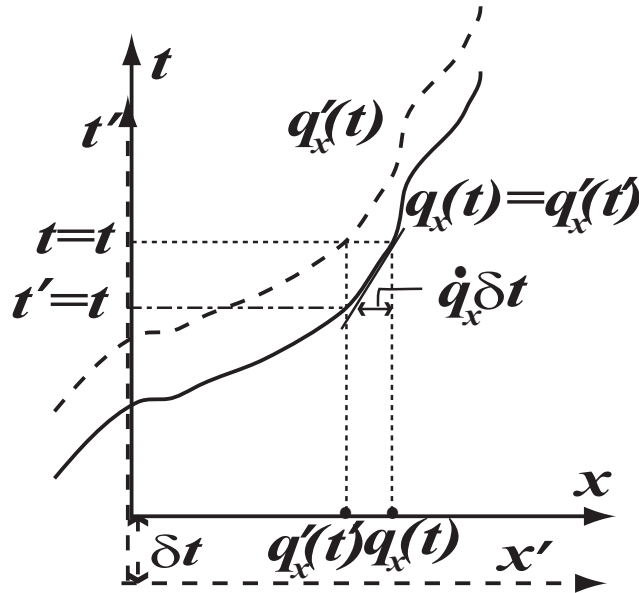


図 1.3 無限小座標変換 $t' = t + \delta t, \delta x_i = 0$ の場合のリー微分.

$$\delta^L q_i(t) = q'_i(t) - q'_i(t') + q'_i(t') - q_i(t) \tag{1.6}$$

$$= -\dot{q}'_i \delta t + \delta x_i(t) \tag{1.7}$$

最後の等号の右辺第二項は空間座標の変換によって生じたズレを表す．右辺第一項の物理的理解を助けるために時間原点のズレのみを行った場合、即ち $\delta x_i = 0$ のケースについて図 1.3 に示した．図から分かるように $q'_x(t)$ は、'系では時計が δt 進んでいるため時刻 t は元の座標では $t - \delta t$ のことである．従って、'系で時計が t をさす時の質点の位置はこれから δt 間に質点が進む距離 $\dot{q}_x \delta t$ だけ元の座標での時刻 t での位置より手前である．この事から

$$\delta^L q_x = -\dot{q}_x \delta t$$

となることが理解できる．これが式 (1.7) の右辺第一項の物理的意味である．

準備が整ったのでいよいよネーターの定理を導出する。座標変換に対する系の対称性という言葉の冒頭に述べた。数学的には、作用積分 I がある座標変換に対して不変である時その物理系はその座標変換に対して対称である、と言う。従って座標変換前後での作用積分の値を比較して差がゼロかどうかを調べればよいのである。作用積分の差は以下のように定義される。

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt' L\left(q_i'(t'), \frac{dq_i'(t')}{dt'}\right) - \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(q_i(t), \frac{dq_i(t)}{dt}\right)$$

微分を表す。ここで \cdot は t でのこの式に登場する $'$ 付きの変数を元の座標の変数で書き表す。

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{dt'}{dt} dt = (1 + \delta t) dt \\ q_i'(t') &= q_i(t) + \delta x_i(t) \\ \frac{dq_i'(t')}{dt'} &= \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} (q_i(t) + \delta x_i(t)) \\ &= (1 - \delta t)(\dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t)) \\ &= \dot{q}_i(t) - \delta t \dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t) \end{aligned}$$

一方リー微分の時間微分は以下のように書ける。

$$\delta^L \dot{q}_i(t) = -\ddot{q}_i \delta t - \dot{q}_i \delta t + \delta \dot{x}_i(t)$$

また、ラグランジアンは陽に時間に依存しないとし以下の式が成り立つとする。

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

以上を用いると作用積分の変分量が以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta t L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) + \sum_i \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta x_i(t) + \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i} (-\delta t \dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t)) \right) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d(\delta t L)}{dt} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \delta t \right) \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\delta t \dot{q}_i + \delta \dot{x}_i) \right) \end{aligned}$$

ここで以下の変形を行う。

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\dot{q}_i \delta t + \delta x_i) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\dot{q}_i \delta t + \delta x_i) \right) + \delta t \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \delta t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta x_i \right\}$$

この式を代入して δI の式を更に変形する.

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\delta t L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^L q_i \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta^L q_i$$

ここで式 (1.7) を用いてリー微分で書き換えた. 質点の軌跡はオイラー・ラグランジュ方程式を満たすため最後の項はゼロである. 従って, 考えている座標変化に対して系が対称の時, 即ち $\delta I = 0$ の時, 以下の式で定義される N が保存量 $dN/dt = 0$ となる.

$$N \equiv -\delta t L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^L q_i \tag{1.8}$$

この保存量をネーターカレント (Noether current) と呼びこれをネーターの定理と呼ぶ.

例としてまず無限小時間推進に対して系が対称な場合のネーターカレントを求める. この時

$$\begin{aligned} \delta t &= \varepsilon \\ \delta x_i &= 0 \end{aligned}$$

である. 但し ε は時間によらない定数とする. 従って,

$$\delta^L q_i = -\varepsilon \dot{q}_i$$

である. これらを式 (1.8) に代入すると以下の式を得る.

$$N = -\varepsilon L + \sum_i p_i \dot{q}_i \varepsilon = \varepsilon H$$

ここで一般化運動量とハミルトニアン of の定義式を用いた. 従って, 時間推進に対して系が対称な場合保存する量はハミルトニアン即ちエネルギーである.

次に無限小空間推進に対して系が対称な場合のネーターカレントを求める. 簡単のため x 軸方向のみの空間推進を考える. この時

$$\begin{aligned}\delta t &= 0 \\ \delta \vec{x} &= (\varepsilon, 0, 0) \\ \delta^L \vec{q} &= (\varepsilon, 0, 0)\end{aligned}$$

である。これらを式 (1.8) に代入すると以下の式を得る。

$$N = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \varepsilon = -\varepsilon p_x$$

ここで一般化運動量の定義式を用いた。従って系が x 方向の無限小座標推進に対して対称である時ネーターカレントは本質的に運動量の x 成分にマイナスを掛けたものとなり、即ち運動量の x 成分が保存する。

1.2 場の解析力学

1.2.1 オイラー・ラグランジュ方程式

質量 m 自由粒子のシュレディンガー方程式は、エネルギー E と運動量 p の関係式

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

をエネルギーと運動量の以下の関係で演算子に置き換えることで得られる。

$$\begin{aligned}E &\rightarrow i\hbar\partial_t, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \\ i\hbar\partial_t\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m^2}\nabla^2\psi\end{aligned}$$

ここで ψ は粒子の波動関数である。ここで採用したエネルギーと運動量の関係式は非相対論的運動をする粒子の関係であるため、シュレディンガー方程式も非相対論的の運動をする粒子についてのみ適応可能である。相対論的な場合にも適応可能な量子力学の方程式を得るには、相対論的なエネルギーと運動量の関係式

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

を演算子に置き換える必要がある。これから以下の式を得る。

$$\square\phi - \frac{4\pi^2}{\lambda_c^2}\phi = 0 \quad \text{or} \quad (1.9)$$

$$\square\phi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\phi = 0 \quad (1.10)$$

これをクライン・ゴードン方程式と呼ぶ。ここで

$$\square \equiv -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \nabla^2$$

はダランベルシアンで $\lambda_c \equiv h/mc$ は粒子のコンプトン波長である。以下ナチュラルユニットを用い $\hbar = c = 1$ とする。ナチュラルユニットを用いるとクライン・ゴードン方程式は以下のように書ける。

$$\square\phi - m^2\phi = 0$$

ダランベルシアン・質量ともにスカラー量であるので、場 ϕ が座標変換に対して不変即ちスカラー場であればクライン・ゴードン方程式は特殊相対論的に共変な方程式即ちローレンツ変換に対して不変な方程式となる。場 ϕ のスカラー関数 $V(\phi)$ で表わされるポテンシャルを導入しクライン・ゴードン方程式を以下のように書き換えても相対論的共変性は保たれる。

$$\square\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (1.11)$$

以後これをスカラー場の方程式として扱う。式 (1.10) は、 $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ の場合と捉える事ができる。このことからポテンシャル中場の量の二次の項を質量項 (mass term) と呼ぶ。ポテンシャルの前の符号は、場 ϕ が時間のみの関数の時式 (1.11) が以下のように書けることからポテンシャル場中の粒子の運動方程式との対応から決まっている。

$$\ddot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}$$

スカラー場 $\phi(x)$ とその 4 次元座標微分 $\partial_\mu\phi(x)$ の関数である $L(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$ をラグランジアン密度を導入する。ここで x は $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ の 4 次元座標を表す。また $\mu = 0, 1, 2, 3$ を取る。作用積分は以下のように定義する。

$$I = \int_{V_4} d^4x L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$$

積分領域 V_4 は 4 次元体積である。最小作用の原理は、以下のように表現できる。積分領域 V_4 をとり囲み境界を形成する 3 次元超曲面上のある固定した $\phi, \partial_\mu \phi$ に対して、場の方程式を満たす物理的場（以下真の場と呼ぶ）は作用積分を最小にする。場が真の場の値を取るとして、境界面を除く積分領域内でそこから任意の無限小量 $\eta(x)$ ズラした場合を考える。この変分操作による作用積分のズレは以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{V_4} d^4x (L(\phi + \eta, \partial_\mu \phi + \partial_\mu \eta) - L(\phi, \partial_\mu \phi)) \\ &= \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \eta + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \eta \right) \\ &= \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \eta + \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \eta \right] \end{aligned}$$

最後の等号の最後の項は、4 次元のガウスの定理を用いて V_4 の境界面上の面積分に置き換えることが出来、境界面上では場の値を固定即ち変分 η がゼロであることを用いて消すことができる。最小作用の原理は、任意の変分 η に対して $\delta I = 0$ であることを主張しており、このことから

$$0 = \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \eta$$

を得る。この式が任意の変分に対して成り立つためには、ラグランジアン密度は以下の式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} = 0 \quad (1.12)$$

これが場のオイラー・ラグランジュ方程式である。ここでは暗黙の内にアインシュタインの規約に従い、上付きと下付きの μ が同時に現れたら 0 から 3 まで縮約を取ることを仮定している。因みに $\partial_\mu \phi = \partial \phi / \partial x^\mu$ は上付き x^μ での微分であるため下付きである。一方 $\partial L / \partial \partial_\mu \phi$ は上付きである。従って、

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} = \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi}$$

である。スカラー場のラグランジアン密度の一般的形は以下の形で与えられる。

$$L = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi) \quad (1.13)$$

ここで $\eta^{\alpha\beta}$ はミンコフスキー計量で対角成分のみ $(-1, 1, 1, 1)$ の値を持つ 4×4 行列である。これをオイラー・ラグランジュ方程式 (1.12) に代入すると式 (1.11) が得られることが確かめられる。ラグランジアン密度を作る上で重要な指針の一つは、導かれる物理法則が座標系の取り方に依存しない即ち相対性原理を満たすようにするため、ローレンツ変換に対してスカラー量になるように作ることである。もちろん重力場中の曲がった空間では、一般座標変換に対してスカラーになるようにすればよい。

場の正準運動量は以下のように定義する。

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial L}{\partial \partial_t \phi(x)} \quad (1.14)$$

1.2.2 場のネーターの定理

以下の無限小座標変換に対する作用積分の変化量を調べる。

$$x'^\mu(x') = x^\mu + \delta x^\mu(x)$$

ここで無限小量 $\delta x^\mu(x)$ は4次元座標の関数である。この座標変換により場 $\phi(x)$ が以下のように変換されるとする。

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (1.15)$$

場の量のリー微分は以下のように定義される。

$$\delta^L\phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) \quad (1.16)$$

座標変換後の関数形を元の座標に持ってきてある時空点での間数値を元々の関数のさす間数値との差分をとる操作である。この式を変形する。

$$\begin{aligned} \delta^L\phi(x) &= \phi'(x) - \phi'(x') + \phi'(x') - \phi(x) \\ &= -\delta x^\alpha \partial_\alpha \phi'(x) + \delta\phi(x) \end{aligned}$$

最後の等号の第一項の $\phi'(x)$ の $\phi(x)$ からのズレは微量の一次であり、既に微量 δx^α が掛かっていることからその差を考慮することは微量の二次以上の差を生じるのみであり無視して差し支えない。したがって以下の式を得る。

$$\delta^L \phi(x) = -\delta x^\alpha \partial_\alpha \phi(x) + \delta \phi(x) \quad (1.17)$$

座標変換による作用積分の変化量は以下の式で計算される。

$$\delta I = \int_{V'_4} d^4 x' L(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) - \int_{V_4} d^4 x L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$$

左辺第一項の積分変数を以下の関係式を用いて x' から x に変換する。

$$d^4 x' = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} d^4 x$$

$\partial(x')/\partial(x)$ はヤコビアンであり微量の一次までで以下のように計算できる。

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1 + \partial_\nu \delta x^\nu$$

ヤコビアンは座標変換によりスケールが変化したことにより 4 次元空間中物理的に同じ微小領域の 4 次元体積の変化前後での変化率を表している。上の式の右辺第二項は、座標変換を表す 4 次元微小ベクトルの発散である。この発散量は座標変換による体積変化率であり、ヤコビアンが上記の式で書ける事は物理的にも当然の結果である。次の $'$ 系での場の量の 4 次元座標での微分を元の座標系の量で表わす。チェインルールを使って $'$ 系の座標微分は元の座標系の微分に次のように変換できる。

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu$$

ここで

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu$$

より $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$ を成分とする 4×4 行列は行列 $(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu})$ の逆行列である。座標変換の式よりこの行列の成分は以下のように計算できる。

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu}$$

この行列の逆行列を求めることで微量の一次までの精度で以下のように計算できる.

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu - \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu}$$

これらから以下の式を得る.

$$\begin{aligned} \partial'_\mu \phi'(x') &= \partial_\mu \phi(x) - \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \partial_\nu \phi(x) + \partial_\mu \delta \phi(x) \\ &= \partial_\mu \phi(x) + \partial_\mu \delta^L \phi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned}$$

以上を代入して作用積分の変化量を計算すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x (1 + \partial_\alpha \delta x^\alpha) \\ &\quad \times \left(L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} (\partial_\mu \delta^L \phi + \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi) \right) \\ &\quad - \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x L \\ &= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \left(\partial_\alpha \delta x^\alpha L + \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} (\partial_\mu \delta^L \phi + \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi) \right) \\ &= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) + \int_{V_4} d^4x \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta^L \phi - \delta x^\mu \partial_\mu L \right) \\ &= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) + \int_{V_4} d^4x \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta^L \phi - \delta x^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \partial_\mu \phi + \frac{\partial L}{\partial \nu \phi} \partial_\mu \partial_\nu \phi \right) \right) \\ &= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} - -\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta^L \phi \end{aligned}$$

場がオイラー・ラグランジュ方程式を満たす時作用積分の変分は以下のよ

うに書ける.

$$\delta I = \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \quad (1.18)$$

以上では、ラグランジアンが陽に 4 次元座標に依存しないとした.

系がある座標変換に対して不変 (対称) である時、その座標変換による作用積分の変化量はゼロである. 即ち式 (1.18) が任意の 4 次元体積 V_4 に対してゼロである. このことから系がある座標変換に対して不変であるとき次の式が成り立つことが分かる.

$$\partial_\mu N^\mu = 0 \quad (1.19)$$

$$N^\mu \equiv - \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \quad (1.20)$$

式 (1.20) で定義される 4 元ベクトルをネーター・カレントと呼び、式 (1.19) で表わされる保存則をネーターの定理と呼ぶ.

1.2.3 スカラー場のエネルギー・運動量テンソル

スカラー場は定義より任意の座標変換に対して不変な物理量である. 従って任意の無限小変換に対して、

$$\delta \phi(x) = 0$$

である.

まずスカラー場のエネルギー密度を求める. そこで無限小時間推進

$$\delta x^0 = \varepsilon$$

$$\delta x^i = 0$$

に付随したネーターカレントを求める. ここで $i = 1, 2, 3$ を取る. リー微分は次のようになる.

$$\delta^L \phi = -\varepsilon \dot{\phi}$$

従って、ネーターカレントは以下のようになる.

$$N^{00} = -\varepsilon L + \varepsilon \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \varepsilon \left(\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2) + V \right)$$

$$N^{0i} = \varepsilon \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \partial_i \phi} = -\varepsilon \dot{\phi} \partial^i \phi$$

ここでスカラー場のラグランジアンとして式(1.13)すなわち

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - V$$

を代入した。粒子の場合との対応から N^{00} がスカラー場のエネルギー密度であり、 N^{0i} がスカラー場のエネルギー流束とあると考える。

次にスカラー場の運動量密度を求める。そこで x 軸方向の無限小空間推進

$$\delta x^0 = 0$$

$$\delta x^1 = \xi$$

$$\delta x^2 = 0$$

$$\delta x^3 = 0$$

に付随したネーターカレントを求める。リー微分は次のようになる。

$$\delta^L \phi = -\xi \partial_1 \phi$$

従って、ネーターカレントは以下のようになる。

$$N^{10} = -\xi (-\partial^1 \phi \dot{\phi})$$

$$N^{11} = -\xi L + \xi \partial^1 \phi \frac{\partial L}{\partial \partial^1 \phi} = -\xi \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - V + (\partial^1 \phi)^2 \right)$$

$$N^{12} = \xi \partial^1 \phi \frac{\partial L}{\partial \partial^2 \phi} = -\xi \partial^1 \phi \partial^2 \phi$$

$$N^{13} = -\xi \partial^1 \phi \partial^3 \phi$$

粒子の時の対応から $-N^{10}$ をスカラー場の運動量の密度の x 成分とみなすことが出来る。他成分も同様にして求められる。

以上よりスカラー場のエネルギー・運動量テンソル ($T^{\mu\nu}$) が以下のように求まる。

$$\begin{array}{l}
(\dot{\phi}^2)^2 + V \\
\partial^1 \phi \\
\partial^2 \phi \\
\partial^3 \phi
\end{array}
\begin{array}{l}
-\dot{\phi} \partial^1 \phi \\
\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2) - V + (\partial^1 \phi)^2 \\
\partial^1 \phi \partial^2 \phi \\
\partial^1 \phi \partial^3 \phi
\end{array}
\begin{array}{l}
-\dot{\phi} \partial^2 \phi \\
\partial^1 \phi \partial^2 \phi \\
\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2) - V + (\partial^2 \phi)^2 \\
\partial^2 \phi \partial^3 \phi
\end{array}
\begin{array}{l}
-\dot{\phi} \partial^3 \phi \\
\partial^1 \phi \partial^3 \phi \\
\partial^3 \phi \partial^2 \phi \\
\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2) - V + (\partial^3 \phi)^2
\end{array}
\right) \quad (1.21)$$

ネーターの定理よりこれで定義される $(T^{\mu\nu})$ がエネルギー・運動量保存則

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

を満たすことは自明である。エネルギー・運動量テンソルは対称テンソルは以下のようにも書ける。

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \eta^{\nu\beta} \partial_\beta \phi + \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) \quad (1.22)$$

明らかなように対称テンソルである。完全流体のエネルギー・運動量テンソルとの対応から非対角要素が速度に関する項ととらえることができる。従って、場が一様即ち $\vec{\nabla} \phi = 0$ が静止した完全流体に対応する。従ってスカラー場のエネルギー密度・圧力は以下のように定義される。

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \quad (1.23)$$

$$P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V \quad (1.24)$$

一般座標変換に対して不変な形への拡張は自明であろう。

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - V(\phi) \right) \quad (1.25)$$

ここで $g^{\mu\nu}$ はメトリックテンソルであり、 ∇_μ は共変微分である。

最後にスカラー場のハミルトニアンとエネルギー・運動量テンソルの 00 成分と比較する。場の正準運動量の定義 (1.14) とスカラー場のラグランジアン密度 (1.13) からスカラー場のハミルトニアン密度は以下のように計算される..

$$H \equiv \pi \dot{\phi} - L = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2) + V \quad (1.26)$$

これは期待通り T^{00} と等しい。

第2章

場の量子論

2.1 生成・消滅演算子、ハイゼンベルグの運動方程式

2.1.1 ボーズ粒子系

以下で定義される二つの任意の演算子 (Operator) A, B の間の演算を演算子の交換関係と呼ぶ.

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (2.1)$$

また以下で定義される二つの任意の演算子 A, B の間の演算を演算子の反交換関係と呼ぶ.

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (2.2)$$

以下の交換関係を満たす演算子 a とそのエルミート共役 (Hermite Conjugate ; a を転置して複素共役を取ったもの) a^\dagger を定義する.

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.3)$$

$$[a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0 \quad (2.4)$$

これらの用いて以下の演算子を定義する.

$$N \equiv a^\dagger a \quad (2.5)$$

以下のこれらの演算子の性質調べる。状態を $|G\rangle$ が演算子 N の固有値が G の固有状態であるとする。

$$N|G\rangle = G|G\rangle \quad (2.6)$$

状態 $|G\rangle$ は規格化されており

$$\langle G|G\rangle = 1$$

を満たす。交換関係式 (2.3),(2.4) より N と a, a^\dagger の間の以下の交換関係式が成り立つことは容易に確かめられる。

$$[N, a] = Na - aN = -a \quad (2.7)$$

$$[N, a^\dagger] = Na^\dagger - a^\dagger N = a^\dagger \quad (2.8)$$

まず固有値 G が正の整数であることを示す。式 (2.6) の両辺に左から状態 $|G\rangle$ のエルミート共役な状態 $\langle G|$ を作用する。

$$\langle G|a^\dagger a|G\rangle = G$$

ここで $\langle G|a^\dagger$ は $a|G\rangle$ のエルミート共役であるのでこの式の左辺は状態 $a|G\rangle$ の大きさを計算する式である。従って左辺はゼロ以上の実数である。このことから固有値に対して以下の条件を得る。

$$G \geq 0 \quad (2.9)$$

即ち演算子 N の固有値はゼロ以上の実数である。式 (2.6) の両辺に左から a を作用する。

$$aN|G\rangle = aG|G\rangle = Ga|G\rangle$$

固有値 G は定数、即ち任意の演算子と交換可能な C 数 (古典的な数)、なので演算子 a と交換する。式 (2.7) を用いて $aN = Na + a$ をこの式の左辺に代入すると

$$(Na + a)|G\rangle = Ga|G\rangle$$

を得る。これから以下の式を得る。

$$Na|G\rangle = (G - 1)a|G\rangle \quad (2.10)$$

この結果は状態 $|G\rangle$ に a を作用して得られる新しい状態 $a|G\rangle$ は演算子 N の固有状態でありその固有値が $G-1$ であることを示している。この操作を m 回繰り返すことで以下の式を得る。

$$Na^m|G\rangle = (G-m)a^m|G\rangle$$

この式は $m > G$ なる m に対して $G-m < 0$ となり、条件式 (2.9) に反する可能性があることを示している。ある $m = m_0$ を境に $m_0 + 1 > G \geq m_0$ となるとする。

$$Na^{m_0}|G\rangle = (G-m_0)a^{m_0}|G\rangle$$

である。この式の両辺に左から a を作用して式変形をすると

$$Na^{m_0+1}|G\rangle = (G-m_0-1)a^{m_0+1}|G\rangle$$

となる。この式を状態 $a^{m_0+1}|G\rangle$ は演算子 N の固有値が $G-m_0-1$ の固有状態であることを示していると解釈すると条件式 (2.9) に反する。条件式 (2.9) に反しないためには

$$a^{m_0+1}|G\rangle = 0 \quad (2.11)$$

即ち固有値がゼロ以上の最低値をとる固有状態 $a^{m_0}|G\rangle$ に更に a を作用して得られる状態がゼロになる必要がある。逆にこうであれば状態 $|G\rangle$ に幾ら a を掛けても $m_0 + 1$ 回以上の場合状態がゼロになってしまい固有値が負になることを防ぐことができる。式 (2.11) に左から a^\dagger を作用すると以下の式を得る。

$$a^\dagger a^{m_0+1}|G\rangle = 0$$

左辺を変形すると以下の式を得る。

$$a^\dagger a a^{m_0}|G\rangle = N a^{m_0}|G\rangle = 0$$

正の最低固有値を持つ状態が存在するためには $a^{m_0}|G\rangle$ はゼロであってはならない。したがって、この式は状態 $a^{m_0}|G\rangle$ の固有値がゼロでなければならないこと即ち

$$G = m_0$$

でなければならないことを示している。以上より以下のことが示された。

- ・演算子 N の固有値は正の整数である。

- ・演算子 N の最低固有値は 0 であり、その固有状態に演算子 a を作用するとゼロになり状態が消える。

一つ目の性質から演算子 N は number operator と呼ばれる。演算子 N の最低固有値に対する固有状態を真空状態とよび規格化された真空状態を $|0\rangle$ で表わす。即ち

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (2.12)$$

$$N|0\rangle = 0|0\rangle \quad (2.13)$$

$$a|0\rangle = 0 \quad (2.14)$$

式 (2.6) に左から a^\dagger を作用し交換関係式 (2.8) を用いて変形すると以下の式を得る。

$$Na^\dagger|G\rangle = (G+1)a^\dagger|G\rangle \quad (2.15)$$

この結果は状態 $|G\rangle$ に a^\dagger を作用して得られる新しい状態 $a^\dagger|G\rangle$ は演算子 N の固有状態でありその固有値が $G+1$ であることを示している。

場を量子化する章で演算子 N は場の構成量子（例、輻射場ならフォトン）の数を求める演算子として扱う。例えば N の固有値 n の固有状態 $|n\rangle$ は、量子が n 個存在する状態と解釈する。演算子 a は式 (2.10) から、状態 $|n\rangle$ から量子を一つ消滅させる演算子と解釈することができるため消滅演算子と呼ばれる。逆に演算子 a^\dagger は式 (2.15) から、状態 $|n\rangle$ から量子を一つ生成する演算子と解釈することができるため生成演算子と呼ばれる。更に演算子 N の固有値が正の整数であれば何でもよく上限がないことは一つのある量子状態に入ることができる量子の数に対応する。したがって、交換関係式 (2.3)、(2.4) で定義される生成・消滅演算子はボーズ統計に従う量子の生成・消滅演算子として用いることができる。

最後に真空状態から規格化されたボーズ粒子系の n 量子状態 $|n\rangle$ を生成演算子を用いて記述する。

$$|n\rangle = C_n a^{\dagger n} |0\rangle$$

と書ける事は自明であろう。この状態の大きさは以下の式で計算される。

$$\begin{aligned}
\langle n|n \rangle &= |C_n|^2 \langle 0|a^n a^{\dagger n}|0 \rangle = |C_n|^2 \langle 0|a^{n-1} a a^\dagger a^{\dagger n-1}|0 \rangle \\
&= |C_n|^2 \langle 0|a^{n-1} (1 + a^\dagger a) a^{\dagger n-1}|0 \rangle \\
&= |C_n|^2 (\langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0 \rangle + \langle 0|a^{n-1} a^\dagger a a^\dagger a^{\dagger n-2}|0 \rangle) \\
&= |C_n|^2 (\langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0 \rangle + \langle 0|a^{n-1} a^\dagger (1 + a^\dagger a) a^{\dagger n-2}|0 \rangle) \\
&= |C_n|^2 (2 \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0 \rangle + \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger 2} a a^{\dagger n-2}|0 \rangle) \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= |C_n|^2 (n \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0 \rangle + \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n} a|0 \rangle) \\
&= n |C_n|^2 \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0 \rangle \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= n! |C_n|^2 \langle 0|0 \rangle = n! |C_n|^2 = 1
\end{aligned}$$

この結果から以下の結果を得る。

$$|n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} |0 \rangle \quad (2.16)$$

2.1.2 フェルミ粒子系

場を構成する基本量子のフェルミ統計に従う場合、ある一つの量子状態に2個以上の量子が入ることができない。フェルミ粒子系を扱う生成・消滅演算子は、以下の反交換関係により定義すればよいことを示す。

$$\{b, b^\dagger\} = 1 \quad (2.17)$$

$$\{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0 \quad (2.18)$$

反交換関係式(2.18)より以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
bb &= -bb = 0 \\
b^\dagger b^\dagger &= -b^\dagger b^\dagger = 0
\end{aligned}$$

ボーズ粒子径の場合と同様に number operator を $N \equiv b^\dagger b$ で定義すると以下の式を満たす.

$$NN = b^\dagger b b^\dagger b = b^\dagger (1 - b^\dagger b) b = N - b^\dagger b^\dagger b b = N$$

したがって

$$N(N-1) = 0 \quad (2.19)$$

である. この式の N の固有値が 0 または 1 であることを示している. したがって反交換関係式 (2.17)、(2.18) を満たす演算子をフェルミ統計に従う量子の生成・消滅演算子として用いることができる.

2.1.3 ハイゼンベルグの運動方程式

シュレディンガー方程式は以下のように書ける.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (2.20)$$

ハミルトニアン H が時刻に依存しない時、この方程式の解は、時刻 $t=0$ の時の状態 $|\psi(0)\rangle$ を用いて以下のように書ける.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

ここで $e^{-iHt/\hbar}$ 演算子が指数の肩に乗った量であるが以下の式で定義されるとき考えれば計算可能であろう.

$$e^{-iHt/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{iHt}{\hbar} \right)^n$$

ハミルトニアンがエルミート演算子即ち $H^\dagger = H$ であることに注意すれば、状態ベクトルのエルミート共役は以下のように書けることが分かる.

$$\langle \psi(t) | = \langle \psi(0) | e^{iHt/\hbar}$$

ある物理量を表す時間に依存しない演算子 A の期待値は $\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$ のように計算される. この式を以下のように変形する.

$$\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle$$

ここで A を時間に依存する演算子 $A(t)$ に以下の式によって変換する.

$$A(t) \equiv e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar}$$

すると物理量 A の期待値は $\langle \psi(0) | A(t) | \psi(0) \rangle$ と書け、時間依存性は演算子に押し付けられ状態は時間に依存しなくなる. 測定量である物理量の期待値さえ同じであれば、時間依存性が状態の方にあるが (シュレディンガー描像) 演算子の方にあるが (ハイゼンベルグ描像) どちらも構わない. 時間に依存する演算子 $A(t)$ を時間で微分すると以下の式を得る.

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{iH}{\hbar} A(t) - A(t) \frac{iH}{\hbar}$$

この結果を交換関係式を用いて整理した次の式をハイゼンベルグの運動方程式と呼ぶ.

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [A(t), H] \quad (2.21)$$

2.2 輻射場の量子化

2.2.1 クーロンゲージ

場の量子化の例として輻射場を取り上げる. Maxwell 方程式をまとめる.

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.23)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho \quad (2.24)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (2.25)$$

ここで ρ は電荷密度、 \vec{j} は電流密度である. 式 (2.25), (2.22) より 4 元ポテンシャル $A^\nu = (\phi, \vec{A})$ を用いて電場磁場が以下のように書ける.

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.26)$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (2.27)$$

式 (2.26)、(2.27) を式 (2.23) に代入すると以下の方程式を得る.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \text{grad} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.28)$$

古典的に輻射場を扱う場合は以下で定義されるローレンツゲージを取る.

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (2.29)$$

これは相対論的に共変な形である.

輻射場を量子化するには、以下に紹介するクーロンゲージを選択するのが一般である. 電磁場の4元ポテンシャルを用いた表現 (2.26)、(2.27) から4元ポテンシャルには以下のゲージ変換の自由度が残されている.

$$\vec{A}_{\text{new}} = \vec{A}_{\text{old}} + \text{grad} \psi \quad (2.30)$$

$$\phi_{\text{new}} = \phi_{\text{old}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.31)$$

ここで ψ は任意のスカラー関数である. ゲージ自由度の関数 ψ を以下の方程式の解となるように選択する.

$$\vec{\nabla}^2 \psi = -\text{div} \vec{A}_{\text{old}}$$

すると変換後の4元ポテンシャルはそれぞれ以下の方程式を満たす.

$$\text{div} \vec{A}_{\text{new}} = 0 \quad (2.32)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho \quad (2.33)$$

方程式 (2.33) の解は以下のようになる.

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.34)$$

ローレンツゲージを用いた時の解リエナー・ブィーフエルトポテンシャルと異なり、右辺に遅延時間が現れずポテンシャルを求めたい時刻と同時刻の密度分布のみでポテンシャルが決まるという形になっている. 式 (2.34) は静電場のポテンシャル即ちクーロン力場のポテンシャルと同じ形をしている. このようにスカラーポテンシャルがクーロン力場のポテンシャルと同じ形になることからこのゲージをクーロンゲージと呼ぶ. 真空中では電荷密度はゼロであるからクーロンゲージでは $\phi = 0$ となる. 従って、真空中のクー

ロンゲージは4元ポテンシャルが以下の条件を満たすゲージ選択である。

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0 \quad (2.35)$$

$$\phi = 0 \quad (2.36)$$

これらの条件から4元ポテンシャルの内独立な成分が二つであることになる。これは輻射場は二つの独立な偏光成分のみが独立なモードであることに対応している。また、輻射場の偏光方向とベクトルポテンシャル \vec{A} の方向が同じ方向になる。これを式(2.28)に代入すると真空中のクーロンゲージのベクトルポテンシャルが満たす方程式は以下のようになる。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (2.37)$$

クーロンゲージを用いると電場・磁場は以下の式で4元ポテンシャルから計算される。

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{c \partial t} \quad (2.38)$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (2.39)$$

2.2.2 輻射場のフーリエ積分表示

一辺の長さが L の立方体内の輻射場を考える。境界では周期境界条件を満たすとする。ベクトルポテンシャルのフーリエ積分表示は以下のように書ける。

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r q^{(r)}(\vec{k}, t) \vec{e}_{r, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (2.40)$$

ここで $V = L^3$ は領域の体積であり、 $\vec{e}_{r, \vec{k}}$ は偏光ベクトルであり二つの独立な成分を持ちその方向は波数ベクトルに依存する。周期境界条件より

$$\vec{A}(x+L, y, z, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$$

でなければならない。これから

$$\sum_{\vec{k}} \sum_r \vec{q}^{(r)}(\vec{k}, t) \vec{e}_{r, \vec{k}} e^{i(k_x(x+L)+k_y y+k_z z)} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \vec{q}^{(r)}(\vec{k}, t) \vec{e}_{r, \vec{k}} e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}$$

であり k_x に対して以下の条件が課せられる.

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L} \quad (2.41)$$

ここで n_x は整数. 同様に k_y, k_z に対しても以下の条件が課せられる.

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L} \quad (2.42)$$

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \quad (2.43)$$

したがって式 (2.40) 中の波ベクトルによる和を具体的に書くと以下のようになる.

$$\sum_{\vec{k}} = \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty}$$

以後の計算で度々登場する以下の式の計算を行う.

$$\int_0^L dx e^{i(k_x - k'_x)x} = \frac{1}{i(k_x - k'_x)} (e^{2\pi i(n_x - n'_x)} - 1) = 0 \quad \text{for } k_x \neq k'_x \\ = L \quad \text{for } k_x = k'_x$$

ここでは n_x, n'_x が整数であることを用いた. 他の成分も同様に計算でき以下の式を得る.

$$\frac{1}{V} \int d^3x e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.44)$$

ここで $\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} = \delta_{k_x, k'_x} \delta_{k_y, k'_y} \delta_{k_z, k'_z}$ は三つのクロネッカーのデルタの積である.

クーロンゲージでの真空中のベクトルポテンシャルが満たす方程式 (2.37) から以下の方程式を得る.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q^{(r)}(\vec{k}, t)}{\partial t^2} + k^2 q^{(r)}(\vec{k}, t) = 0$$

ここで k は波数ベクトルの大きさである. この解は、分散関係式

$$\omega_k = ck \quad (2.45)$$

を満たす ω_k を用いて以下のように書ける.

$$q^{(r)}(\vec{k}, t) = q_k^{(r)} e^{-i\omega_k t}$$

これを用いてクーロンゲージでのベクトルポテンシャルは以下のように書ける.

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \left(q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \vec{e}_{r, \vec{k}} \quad (2.46)$$

ここでベクトルポテンシャルが実数即ちエルミートであることが保障されるように整理した. 右辺の $q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ は, $q_{\vec{k}}^{(r)}$ のエルミート共役であるが, 量子化するまではただの複素共役である.

式 (2.46) を式 (2.38), (2.39) に代入し電場・磁場のフーリエ積分表示を計算すると以下ようになる.

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{i\omega_k}{c} \vec{e}_{r, \vec{k}} \left(q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \quad (2.47)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r i\vec{k} \times \vec{e}_{r, \vec{k}} \left(q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \quad (2.48)$$

体積 V 中の輻射場の全エネルギーは以下のように計算できる.

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x (E^2 + B^2) \quad (2.49)$$

これに式 (2.47), (2.48) を代入する. 計算が煩雑なので以下ではまず電場の自乗・磁場の自乗をそれぞれ分けて計算する.

$$\begin{aligned} \int_V d^3x E^2 &= \frac{1}{V} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_r \sum_{r'} \frac{\omega_k \omega_{k'}}{c^2} \vec{e}_{r, \vec{k}} \cdot \vec{e}_{r', \vec{k}'} \left(-q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')} e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x} - i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right. \\ &\quad \left. - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x} + i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right. \\ &\quad \left. + (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r)}) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x} + i(\omega_k - \omega_{k'})t} \right) \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k^2}{c^2} \left((q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \right. \\ &\quad \left. - q_{\vec{k}}^{(r)} q_{-\vec{k}}^{(r)} e^{-i2\omega_k t} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{-\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i2\omega_k t} \right) \end{aligned}$$

ここで式 (2.44) と $\omega_{-k} = \omega_k$ を用いた. 波数ベクトルと偏光ベクトルが直行することに注意して磁場の自乗を計算する.

$$\int_V d^3x B^2 = \frac{1}{V} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_r \sum_{r'} (\vec{k} \times \vec{e}_{r, \vec{k}}) \cdot (\vec{k}' \times \vec{e}_{r', \vec{k}'}) (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')} e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x} - i(\omega_k + \omega_{k'})t}$$

$$\begin{aligned}
& + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}+i(\omega_k+\omega_{k'})t} \\
& + (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r)}) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}+i(\omega_k-\omega_{k'})t} \\
= & \sum_{\vec{k}} \sum_r k^2 ((q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \\
& + q_{\vec{k}}^{(r)} q_{-\vec{k}}^{(r)} e^{-i2\omega_k t} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{-\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i2\omega_k t})
\end{aligned}$$

電場の自乗と比べると最後の二項の符号が逆になっておりキャンセルする。これは $(\vec{k} \times \vec{e}_{r,\vec{k}}) \cdot (-\vec{k}' \times \vec{e}_{r,-\vec{k}}) = -k^2$ であることからくる。ここで $\vec{e}_{r,-\vec{k}} = \vec{e}_{r,\vec{k}}$ となるように取った。これらの結果と分散関係式 (2.45) を用いると輻射場の全エネルギーは以下のように書ける。

$$U = \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k^2}{4\pi c^2} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \quad (2.50)$$

電磁場の全運動量は以下の式で定義される。

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3x \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.51)$$

電場と磁場の外積の項を取りだす。

$$\begin{aligned}
\int_V d^3x \vec{E} \times \vec{B} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_r \sum_{r'} \frac{\omega_k}{c} \vec{e}_{r,\vec{k}} \times (\vec{k}' \times \vec{e}_{r',\vec{k}}) ((q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')}) \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \\
& - q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')} e^{-i2\omega_k t} \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{i2\omega_k t} \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \\
& = \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k}{c} \vec{k} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \\
& - \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k}{c} (-\vec{k}) (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{-\vec{k}}^{(r)} e^{-i2\omega_k t} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{-\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i2\omega_k t}) \\
& = \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k}{c} \vec{k} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \\
& - \sum_{\vec{k}'} \sum_{r'} \frac{\omega_{k'}}{c} (\vec{k}') (q_{-\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')} e^{-i2\omega_{k'} t} + q_{-\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{i2\omega_{k'} t})
\end{aligned}$$

最後の二項を二つ目の等号では $\vec{k}' = -\vec{k}$ として計算し、三つ目の等号では $\vec{k} = -\vec{k}'$ として計算した。また、 $\omega_{-k} = \omega_k$ を用いた。最後の等号の和をとる変数はダミー変数であるので \vec{k}', r' から \vec{k}, r に変換しても問題ない。また、

$q_{\vec{k}}^{(r)} q_{-\vec{k}}^{(r)} = q_{-\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)}$ であり $q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{-\vec{k}}^{(r)\dagger} = q_{-\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ である。以上より最後の二項は二つ目の等号と三つ目の等号で符号が反転している。従って、最後の二項はゼロである。まとめると電磁場の全運動量は以下のように書ける。

$$\vec{M} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_{\vec{k}}}{4\pi c^2} \vec{k} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \quad (2.52)$$

電磁場の角運動量は各モード毎に以下の式で定義される。

$$\vec{L}_{r,\vec{k}} = (-1)^r \frac{1}{4\pi\omega_{\vec{k}}} \int_V d^3x \vec{E}_{\vec{k}} \times \vec{B}_{\vec{k}} \quad (2.53)$$

ここで右回り円偏光の時 $r=1$ を左回り円偏光 $r=2$ を取るように偏光ベクトルを選択し直した。従って、全運動量のフーリエ積分表示 (2.52) の和の中に $c/\omega_{\vec{k}}$ を掛けて和をとれば全各運動量が以下のようにもとまる。

$$\vec{L} = \sum_{\vec{k}} \sum_r (-1)^r \frac{1}{4\pi c} \vec{k} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \quad (2.54)$$

2.2.3 量子化された輻射場のエネルギー・運動量・角運動量

ハイゼンベルグの運動方程式 (2.21) にベクトルポテンシャルのフーリエ積分表示 (2.46) を代入し、これを満たすようにフーリエ係数 $q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ の満たすべき交換関係式を求める。ハミルトニアンはエネルギーであるから式 (2.50) で計算される全エネルギー U が輻射場のハミルトニアン H である。ハイゼンベルグの運動方程式 (2.21) の左辺は以下のように計算される。

$$\frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \omega_{\vec{k}} \left(q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_{\vec{k}}t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \vec{e}_{r,\vec{k}} \quad (2.55)$$

ベクトルポテンシャルのフーリエ係数の間に以下の交換関係を仮定する。

$$\left[q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] = \frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_{\vec{k}}} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} \quad (2.56)$$

$$\left[q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}'}^{(r')} \right] = \left[q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}, q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] = 0 \quad (2.57)$$

これから以下の式を得る。

$$\left[q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] = q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}$$

$$\begin{aligned}
&= q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} \\
&= q_{\vec{k}'}^{(r')} \left(\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} + q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} \right) - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} \\
&= \frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} q_{\vec{k}'}^{(r')} \\
[q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}, q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger}] &= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \\
&= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} \\
&= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} - \left(\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} \right) q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} \\
&= -\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} \\
[q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')}] &= q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)} \\
&= q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')} \\
&= q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - \left(-\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} + q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} \right) q_{\vec{k}'}^{(r')} \\
&= \frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} q_{\vec{k}'}^{(r')} \\
[q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}, q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')}] &= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \\
&= q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \\
&= q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} \left(-\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} + q_{\vec{k}'}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \right) - q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \\
&= -\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} q_{\vec{k}'}^{(r)\dagger}
\end{aligned}$$

これらを用いてハイゼンベルグの運動方程式 (2.21) の右辺は以下のように計算される。

$$-\frac{i}{\hbar} [\vec{A}(\vec{x}, t), H] = -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \omega_k (q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \vec{e}_{r,\vec{k}} \quad (2.58)$$

式 (2.55)、(2.58) より、ベクトルポテンシャルのフーリエ係数が交換関係式 (2.56)、(2.57) を満たすの演算子の時、ベクトルポテンシャルがハイゼンベルグの運動方程式を満たすことが示せた。

次の式で $a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ を定義する.

$$a_{\vec{k}}^{(r)} \equiv \sqrt{\frac{2\omega_{\vec{k}}}{4\pi\hbar c^2}} q_{\vec{k}}^{(r)} \quad (2.59)$$

$$a_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \equiv \sqrt{\frac{2\omega_{\vec{k}}}{4\pi\hbar c^2}} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \quad (2.60)$$

これらを交換関係式 (2.56)、(2.57) に代入すると以下の $a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ の間の交換関係式を得る.

$$\left[a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{r, r'} \quad (2.61)$$

$$\left[a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}'}^{(r')} \right] = \left[a_{\vec{k}}^{(r)\dagger}, a_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] = 0 \quad (2.62)$$

これから分かるように $a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ は場を構成する量子、輻射場の場合光子、の消滅・生成演算子である.

消滅・生成演算子の定義式 (2.59)、(2.60) を式 (2.50) に代入し交換関係式 (2.61)、(2.62) を用いることで輻射場のエネルギーは以下のように書ける.

$$U = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^{(r)\dagger} a_{\vec{k}}^{(r)} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.63)$$

右辺カッコの中の第一項は偏光状態 \vec{e}_r で波数ベクトルが \vec{k} の量子状態にある光子の数を固有値として持つ number operator である. 第二項は、真空のゼロ点振動であり無限の数の状態に対する和の結果発散を招く. 例として、偏光状態 \vec{e}_r で波数ベクトルが \vec{k} の量子状態に $n_{r, \vec{k}}$ 個フォトンが存在し、他の量子状態にはフォトンが入っていない状態 $|n_{r, \vec{k}}\rangle$ を取り上げる. この状態のエネルギーの期待値は以下ようになる. 但し、ゼロ点振動の分は省く.

$$\langle n_{r, \vec{k}} | U | n_{r, \vec{k}} \rangle = \hbar\omega_{\vec{k}} n_{r, \vec{k}}$$

この例から分かるように輻射場を構成する量子であるフォトン1個がエネルギー $\hbar\omega_{\vec{k}}$ を持つ.

式 (2.52) に対して同様の手続きを行うことで輻射場の運動量に対する以下の式を得る.

$$\vec{M} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \vec{k} \left(a_{\vec{k}}^{(r)\dagger} a_{\vec{k}}^{(r)} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar k a_{\vec{k}}^{(r)\dagger} a_{\vec{k}}^{(r)} \quad (2.64)$$

最後の等号では、ゼロ点振動に対応する項が波数ベクトル \vec{k} に対する等方的なベクトル和であることからゼロになることを用いた。同様に式 (2.54) から輻射場の角運動量に対する以下の式を得る。

$$\vec{L} = \sum_{\vec{k}} \sum_r (-1)^r \hbar \frac{\vec{k}}{k} \left(a_{\vec{k}}^{(r)\dagger} a_{\vec{k}}^{(r)} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \sum_r (-1)^r \hbar \frac{\vec{k}}{k} a_{\vec{k}}^{(r)\dagger} a_{\vec{k}}^{(r)} \quad (2.65)$$

右回り円偏光の時 $r=1$ 、左回り円偏光の時 $r=2$ を取る。これらからフォトンには、運動量 $\hbar \vec{k}$ を持ち、大きさが \hbar で向きが波数ベクトルと平行或いは反平行のスピン角運動量を持つ量子である。

2.3 自由なスカラー場の量子化

2.3.1 自由なスカラー場のフーリエ積分表示

自身及び他の場との非線形相互作用が無いスカラー場を自由粒子との対応で自由なスカラー場と呼び、運動方程式は式 (1.10) で表わされる。体積 V 中の自由なスカラー場のエネルギー即ちハミルトニアンは式 (1.26) を体積積分することで与えられる。

$$H = \int_V d^3x \left[\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \right] \quad (2.66)$$

ここでは単位系を natural unit から cgs gauss に戻した。スカラー場のフーリエ積分表示は以下のように書ける。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} q(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

スカラー場は周期境界条件を満たすとし波数ベクトルは条件式 (2.41)~(2.43) を満たす。これをスカラー場の方程式 (1.10) に代入することで以下の結果を得る。

$$\hbar \omega_k = \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2} \quad (2.67)$$

$$q(\vec{k}, t) = q_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t}$$

スカラー場が実関数即ちエルミートであるためことを考慮するとフーリエ積分表示は以下のように書ける。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(q_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} + q_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \quad (2.68)$$

これを式 (2.66) に代入すると以下の結果を得る。

$$H = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k^2}{c^2} (q_{\vec{k}} q_{\vec{k}}^\dagger + q_{\vec{k}}^\dagger q_{\vec{k}}) \quad (2.69)$$

途中クロネッカーの δ 、 $\delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}$ が掛かる項が現れるがこれらは $\omega_k^2 - k^2 c^2 - (mc/\hbar)^2$ で括ることができ、分散関係式 (2.67) からゼロとなる。

スカラー場の全運動量 \vec{M} は節 1.2.3 の結果から以下のように書ける。

$$\vec{M} = \int_V d^3x \left(-\frac{1}{c^2} \dot{\phi} \vec{\nabla} \phi \right) \quad (2.70)$$

ここで natural unit を cgs gauss 単位系に戻すことで $1/c$ が一つ掛かり、更にエネルギー・運動量テンソルの単位がエネルギーであるため運動量の単位と揃えるために c で割っている。これに式 (2.68) を代入すると以下の結果を得る。

$$\vec{M} = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{c^2} \vec{k} (q_{\vec{k}} q_{\vec{k}}^\dagger + q_{\vec{k}}^\dagger q_{\vec{k}}) \quad (2.71)$$

途中

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \omega_k \vec{k}' &= \sum_{\vec{k}} \omega_k (-\vec{k}) \\ &= \sum_{\vec{k}'} \omega_{-\vec{k}'} \vec{k}' = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \vec{k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を用いた。

2.3.2 量子化された自由なスカラー場のエネルギー・運動量

自由なスカラー場がハイゼンベルグの運動方程式

$$\dot{\phi} = -\frac{i}{\hbar}[\phi, H] \quad (2.72)$$

を満たすためにはフーリエ係数が次の交換関係を満たせば良い.

$$[q_{\vec{k}}, q_{\vec{k}'}^\dagger] = \frac{\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.73)$$

$$[q_{\vec{k}}, q_{\vec{k}'}] = [q_{\vec{k}}^\dagger, q_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (2.74)$$

次の式で $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$ を定義する.

$$a_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\frac{2\omega_k}{\hbar c^2}} q_{\vec{k}} \quad (2.75)$$

$$a_{\vec{k}}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{2\omega_k}{\hbar c^2}} q_{\vec{k}}^\dagger \quad (2.76)$$

これらを交換関係式 (2.73)、(2.74) に代入すると以下の $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$ の間の交換関係式を得る.

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.77)$$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (2.78)$$

これから分かるように $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$ はスカラー場を構成する量子の消滅・生成演算子である. 生成消滅演算子を用いて全エネルギー・全運動量を書き表すと以下の結果を得る.

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.79)$$

$$\vec{M} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \quad (2.80)$$

全運動量の計算では式 (2.64) の導出時と同様の議論により

$$\sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} \frac{1}{2} = 0$$

となることを用いた.

第 3 章

インフレーション

3.1 初期宇宙史

3.1.1 プランクスケール

宇宙膨張を記述する Friedmann 方程式は以下のように書ける。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

ここで $H = \dot{a}/a$ はハッブル定数、 a はスケールファクター、 ρ は宇宙の平均密度である。宇宙の地平線サイズの指標は Hubble length $\ell_H = c/H$ で与えられる。地平線は情報交換可能な領域のサイズであるから、Hubble length はその時の宇宙のサイズとみなすこともできる。Hubble length 内の物質の総質量は Friedmann 方程式を用いて以下のように書ける。

$$M_H = \frac{4\pi}{3}\ell_H^3\rho = \frac{c^2}{2G}\ell_H$$

従って、Hubble length は、Hubble length 内の物質によって決まる Schwarzschild 半径、

$$\frac{2GM_H}{c^2}$$

と等しい。ある半径の領域内の全物質が形成する Schwarzschild 半径は、半径の 3 乗に比例して増加する。したがって、Hubble length を境に大きなス

ケールでは Schwarzschild 半径が領域の半径より大きくなる物理的意味を持つようになる。一方、小さなスケールでは Schwarzschild 半径が領域の半径より小さく物理的意味を持たない。Schwarzschild 半径が天体の半径より大きい場合、天体の重力場は一般相対論を用いて記述しなければならない。従って、Hubble length 以上のサイズをもった構造の進化を記述するには一般相対論を用いる必要がある。つまり Hubble length は一般相対論的效果が必要となるかどうかの目安を与えるスケールと考えることもできる。

宇宙の全静止質量エネルギーは $M_H c^2$ である。宇宙の質量が意味を持つためには、宇宙のエネルギーの不確定さが高々宇宙の全質量エネルギー程度、即ち $\Delta E < M_H c^2$ でなければならない。ハイゼンベルグの不確定性原理から宇宙の時間の不確定さ Δt は以下の式で与えられる。

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2 M_H c^2}$$

宇宙年齢の指標は Hubble length まで光速で宇宙が広がるまでに掛る時間 $t_{\text{age}} \sim \ell/c = 1/H$ で与えられる。この時間尺度を Hubble time と呼ぶ。宇宙年齢が意味を持つためには、量子力学的な宇宙の時間の不確定さが宇宙年齢以下でなければならない。このためには宇宙の全質量が以下の条件を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} = H^2 \left(\frac{c}{H} \right)^3 \frac{1}{c^3} &= \frac{2GM_H}{c^3} \geq \frac{\hbar}{2M_H c^2} \\ M_H &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \end{aligned}$$

そこで以下の式で定義される Planck mass を導入する。

$$M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.1767 \times 10^{-5} \text{g} = 1.22 \times 10^{19} \frac{1}{c^2} \text{GeV} \quad (3.1)$$

従って、量子力学的な時間の不確定さが宇宙年齢以下であるためには、宇宙の全質量が Planck 質量より大きい必要がある。この条件を宇宙の平均密度を用いて書き換えると以下のようなになる。

$$\rho c^2 < \frac{3}{32\pi(\hbar c)^3} \left(\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} c^2 \right)^4 = \frac{3}{32\pi(\hbar c)^3} (M_{pl} c^2)^4 \quad (3.2)$$

この式の右辺を以下の黒体輻射のエネルギー密度と比較する。

$$\frac{\pi^2}{15(\hbar c)^3} (k_B T)^4$$

上記の条件は、宇宙の温度がプランクエネルギー以下即ち $k_B T < M_{pl} c^2$ であると書きかえることができる。逆に宇宙の温度がプランクエネルギー以上になると宇宙年齢が量子力学的な時間の不確定さ以下になる。即ち古典的な理論で進化をたどれる限界が宇宙の温度がプランクエネルギーになるまでである。Planck time :

$$t_{pl} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ sec} \quad (3.3)$$

Reduced Planck mass

$$\tilde{M}_{pl} \equiv \frac{M_{pl}}{\sqrt{8\pi}} = 2.435 \times 10^{18} \frac{1}{c^2} \text{ GeV} \quad (3.4)$$

3.1.2 地平線問題・平坦性問題

宇宙の物質分布をハッブルスケールでならした時、第ゼロ近似で一様等方と扱ってよい。この仮定は観測的根拠が得られる以前から存在し宇宙原理と呼ばれていた。宇宙原理を満たす時空は、定曲率空間により実現される。定曲率空間とは、時空の曲率が場所によらず至る所一定の空間である。例えば、3次元空間内の2次元球面は、球面上の全ての場所で曲率半径は一定であり、定曲率空間の例の一つである。4次元時空内での定曲率空間は以下で表わされるロバートソン・ウォーカー計量で表現できることが知られている。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{1}{1-Kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (3.5)$$

ここで $a(t)$ はスケールファクターと呼ばれ宇宙膨張による半径の増加を表す、 (r, θ, ϕ) は共動座標であり曲がった3次元定曲率空間を3次元デカルト座標に射影しそれを極座標であらわしたものである。 K が曲率を表し $K > 0$ は4次元空間内の3次元超球面を表し空間的に閉じた空間となる。 $K = 0$ は平坦な空間を表す。 $K < 0$ は空間に境界が存在しない開いた空間を表す。

スケールファクターの発展方程式は以下のフリードマン方程式で与えられる。

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{K0}(1+z)^2) \quad (3.6)$$

ここで $H = \dot{a}/a$ は時刻 t のハッブル定数で H_0 は現在のハッブル定数、 $1+z = a_0/a$ は宇宙論的赤方偏移で a_0 は現在のスケールファクターで以下では 1 とする、 Ω_{r0}, Ω_{m0} はそれぞれ相対論的粒子（輻射、質量ゼロのニュートリノ等）の現在の密度パラメータと非相対論的粒子（質量をもったニュートリノ等ダークマター、バリオン）の現在の密度パラメータ、 Ω_{K0} は曲率の現在の密度パラメータである。

平坦性問題について説明する。曲率は密度が $\rho_K = -\frac{3Kc^2}{8\pi G a_0^2} (1+z)^2$ で宇宙膨張とともに進化する物質と解釈することもできる。従ってある z の時の曲率の密度パラメータは以下のように書ける。

$$\Omega_K = \frac{\rho_K}{\rho_{cr}} = -\frac{Kc^2}{\dot{a}^2} = \frac{\dot{a}_0^2}{\dot{a}^2} \Omega_{K0} \quad (3.7)$$

輻射や物質のみから構成される宇宙では、これらの重力が引力であるため宇宙膨張は必ず減速膨張となる。従って過去に遡るほど \dot{a} が大きな値を持つ。式 (3.7) から、過去に遡るほど Ω_K が小さくなるのが分かる。宇宙がプランクタイムから現在までずっと輻射優勢であったとすると $a = (t/t_0)^{0.5}$ であるので $\dot{a}_0^2/\dot{a}^2 = t/t_0 = (a/a_0)^2$ となる。また輻射の温度はプランクタイムから現在まで $Ta = T_0a_0$ の関係で進化したとしてオーダーで間違わないのでこれを使うと

$$\Omega_K(t_{pl}) \sim \left(\frac{k_B T_0}{M_{pl} c^2} \right)^2 \Omega_{K0} \sim 10^{-62} \Omega_{K0} \quad (3.8)$$

となり、観測から $0 < \Omega_{K0} < O(1)$ であることを考慮するとプランクタイムにおいて宇宙の曲率を 62 桁以上の精度で 0 に近い値にファインチューニングされてなければ、宇宙は現在の姿でいらなかったことになる。即ちプランクタイムの頃とくらべて現在までに何桁も宇宙の半径が大きくなったにも関わらず未だ観測的に宇宙が平坦であるように見えるためにはプランクタイム時に非常に高い精度で曲率が 0 に近い値になっていなければならない

ないという問題である。表現を変えると $\Omega_K = 0$ の宇宙は、宇宙内の物質の重力で膨張が引き留められ何時か収縮に転じる場合と物質の重力が十分で無く永遠に膨張し続ける場合の境目の状態にあることになる。即ち、プランクタイムから十分時間がたったにも関わらずいまだ宇宙が永遠に膨張し続けるか何時か収縮に転じるのか判別不能であることは、プランクタイム時の膨張速度のファインチューニングを要求するという問題である。地球以外の天体が存在しない宇宙空間での地上からのロケットの打ち上げに例えると、ロケットが地球から非常に遠くまで到達したにも関わらずそこで測定したロケットの速度からロケットが脱出速度を超えているかいないのか判別が出来ないような測定結果になるためには打ち上げ時にロケットの速度を非常に高い精度で脱出速度に一致させて打ち上げなければならない、という問題である。

次に地平線問題について説明する。以下の式で粒子的地平線を定義する。

$$\ell_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt}{a} \quad (3.9)$$

これは宇宙開闢から現在までに光即ち粒子が進むことができる距離である。言い換えると現在までに情報を交換できる距離である。簡単のために $a \propto t^n$ とする。宇宙膨張の加速度は $\ddot{a} \propto n(n-1)t^{n-2}$ となる。したがって、 $n = 1$ の時加速度がゼロとなり、 $n < 1$ の時減速膨張、 $n > 1$ の時加速膨張となる。式 (3.9) は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \ell_p(t) &= \frac{1}{1-n} ct^n (t^{-n+1} - (t=0)^{-n+1}) \\ &= \frac{ct}{1-n} \text{ for } n < 1 \\ &= \infty \text{ for } n > 1 \end{aligned}$$

スタンダードビッグバンモデルでは宇宙は減速膨張していると考えられているので過去に行くほど粒子的地平線が小さくなる。一方観測的には、例えば宇宙の全ての方向から CMB の 2.73K の黒体放射であることなど地平線を超えたスケールで宇宙初期に情報が伝搬していないと説明できない事実が多数存在する。CMB は宇宙年齢が 38 万年の宇宙再電離時に放射され

たものである。このころの粒子的地平線は我々から見込む角度にして高々2度である。したがって、2度以上に離れた空からのCMBが同じ温度であるためには宇宙再電離時に粒子的地平線を越えたスケールで既に情報交換がされていなければならない。これが地平線問題である。

これらの問題は、宇宙初期に加速度膨張する時期が存在すれば解決する。時刻 t_i から加速度膨張の時期が始り十分長い時間が加速度膨張が継続したとすると、粒子的地平線は $\ell_p = ct^n t_i^{1-n}/(1-n)$ となり $t_i = 0$ の極限で発散する。即ち過去に全ての宇宙空間と情報交換できたこととなり地平線問題が解決する。また式(3.7)から加速膨張の時は、過去ほど \dot{a} が小さいことになるので過去ほど Ω_k がでかくなり初期のファインチューニングの必要がなくなり平坦性問題が解ける。初期の加速度膨張の時期がインフレーション期である。

スケールファクターの加速度を与えるもう一本のフリードマン方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) \quad (3.10)$$

宇宙のエネルギー密度を支配している物質の状態方程式を $P = w\rho c^2$ とおくと、加速度膨張が起きる条件は

$$w < -\frac{1}{3}$$

と書ける。

3.1.3 Slow roll inflation

プランクタイム頃にスカラー場 ϕ が存在しそのエネルギーにより加速度膨張が引き起こされインフレーションが起きたとする。このスカラー場をインフラトンと呼ぶ。スカラー場は空間的に一様とするとスカラー場のエネルギー密度は $\rho c^2 = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + V$ と書ける。スカラー場のエネルギー密度が優勢であるとするフリードマン方程式は以下のように書ける。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2c^4} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{c^2} V \right] = \frac{\hbar c}{3\tilde{M}_{pl}^2} \left[\frac{1}{2c^4} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{c^2} V \right] \quad (3.11)$$

ここで $\tilde{M}_{pl} \equiv \sqrt{\hbar c/8\pi G}$ は reduced Planck mass であり、曲率の効果は無視できるとした。この時、スカラー場の運動方程式以下のように書ける。スカラー場のエネルギー密度の内第1項が第2項より十分小さいとして扱える時、スカラー場の状態方程式を $P = w\rho c^2$ と書いた時の $-1 < w < -1/3$ であり加速度膨張が実現される。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.12)$$

Slow roll 近似とは、エネルギー密度の中の $\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2$ の項がポテンシャルに対して十分小さく、さらにスカラー場の運動方程式中の第1項 $\ddot{\phi}$ が他の項に比べて十分小さいとする近似である。以下のように二つの slow roll parameters を定義し、slow roll 近似が成立するための条件を議論する。

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2}\tilde{M}_{pl}^2 \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \quad (3.13)$$

$$\eta \equiv \tilde{M}_{pl}^2 \frac{V''}{V} \quad (3.14)$$

ここで V', V'' はそれぞれ ϕ による一回微分及び2回微分である。Slow roll 近似の元ではフリードマン方程式、スカラー場の方程式は以下のように近似できる。

$$H^2 \sim \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2} V \quad (3.15)$$

$$3H\dot{\phi} \sim -V' \quad (3.16)$$

スカラー場のエネルギー密度の第1項と第2項の比を計算する。

$$\frac{\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2}{V} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{V} \frac{V'^2}{9H^2} \sim \frac{1}{3} \frac{1}{2} \tilde{M}_{pl}^2 \left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \frac{1}{3}\varepsilon \quad (3.17)$$

したがって、 ε が十分1より小さければスカラー場のエネルギー密度の第1項が第2項に比べて十分小さいとして扱える。式(3.15)を時間で微分すると以下の式を得る。

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2} V'\dot{\phi}$$

両辺に H を掛けて 2 で割ると以下の式を得る。

$$H^2 \dot{H} = \frac{1}{6\tilde{M}_{pl}^2} V' H \dot{\phi} \sim -\frac{1}{18\tilde{M}_{pl}^2} V'^2$$

最後の等号では式 (3.16) を用いた。この式の両辺を H^4 で割ると以下の式を得る。

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \varepsilon \quad (3.18)$$

式 (3.16) の両辺を時間で微分すると以下の式を得る。

$$3H\ddot{\phi} + 3\dot{H}\dot{\phi} = -V''\dot{\phi}$$

これからスカラー場の方程式 (3.12) の第 1 項と第 2 項の比が以下のように計算できる。

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \sim -\frac{V''}{9H^2} + \frac{1}{3}\varepsilon = -\frac{1}{3}\tilde{M}_{pl}^2 \frac{V''}{V} + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}(-\eta + \varepsilon) \quad (3.19)$$

したがって、 ε, η が共に十分 1 より小さければスカラー場の方程式の第 1 項を他の項と比べて十分小さいとして扱える。

3.1.4 インフレーションによる膨張率

インフレーション期間中に宇宙の半径が最低何倍拡大されなければいけないか求める。以下の式で e-folding を定義する。

$$N(t) = \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_{a(t)}^{a(t_{end})} \frac{da}{a} \quad (3.20)$$

これはインフレーション中のある時刻 t からインフレーションが終了する時刻 t_{end} までの間のスケールファクターの膨張率を指数で表現したものである。式 (3.15), (3.16) を用いて式 (3.20) の右辺を評価する。

$$N(t) = \int_t^{t_{end}} \frac{\dot{a}}{a} dt = \int_{\phi(t)}^{\phi(t_{end})} \frac{H^2}{H\dot{\phi}} d\phi = - \int_{\phi(t)}^{\phi(t_{end})} \frac{V}{V'} \frac{d\phi}{\tilde{M}_{pl}^2} \quad (3.21)$$

ここでインフレーションの終了時刻を

$$\varepsilon(\phi(t_{end})) = 1 \quad (3.22)$$

で定義する。

ここまでの議論でスローロールパラメータが1程度になる時期をインフレーションの終了時期とした。インフレーションの終了時期について少し議論する。スローロールパラメータが1程度になるとスカラー場のエネルギー密度及び圧力の内第一項が無視できなくなり、圧力はほぼゼロになる。従って、宇宙は減速膨張となる。つまりインフラトン場のエネルギーが支配的であってもこの時期は加速膨張をしていないためインフレーションが終了したと考えるのである。インフレーション終了後、スカラー場のエネルギーが全て物質・輻射に変換されると考えている。スカラー場のエネルギーが全て物質や輻射に転換されると宇宙は非常に高温になるためこの時期を宇宙の再加熱 (reheating) 期と呼ぶ。

以下の式で事象の地平線 (event horizon) を定義する。

$$\ell_H = a(t) \int_t^\infty \frac{cdt}{a} \quad (3.23)$$

事象の地平線とはこれから無限の時間を掛けて情報交換を行うことが可能な距離のことである。スケールファクターの時間依存性を $a \propto t^n$ とすると加速度膨張の時は $n > 1$ であるから $\ell_H = 1/(n-1)ct$ となり有限の値をとる。即ち加速膨張する宇宙では情報交換可能な範囲が限られることになる。比較のため減速膨張の場合の事象の地平線を求めると $n < 1$ であるため無限大となり、無限の時間をかければ無限の範囲と情報交換が可能であるという常識的な結果となる。加速膨張の時の時を事象の地平線はハッブル半径 $c/H = ct/n$ を使って

$$\ell_H = \frac{n}{n-1} \frac{c}{H} \sim \frac{c}{H}$$

と書ける。即ち事象の地平線はハッブル半径程度である。また、事象の地平線を共動座標で書くと

$$r_H \equiv \frac{\ell_H}{a} \propto t^{1-n}$$

となり加速膨張の宇宙では時間と共に減少する。即ち加速膨張の宇宙では、

観測できる領域言い換えると情報交換ができる領域が時間とともに狭くなることを示している。ある領域が共動座標上で静止しているとするこの領域の共動座標上の半径は一定値をとることとなる。従って、ある時刻では地平線内にあった領域もいつかは地平線の外にでることになる。

以下では、インフレーション中の時刻 t_λ の時に丁度地平線より長くなるスケール λ (共同スケール) を考える。したがって

$$a(t_\lambda)\lambda = \frac{c}{H(t_\lambda)}$$

である。ここで λ として現在の宇宙のハッブル半径を取ると

$$\lambda = \frac{1}{a_0} \frac{c}{H_0}$$

である。ここで a_0 は現在のスケールファクターでありこの教科書では1としているが便宜のためあらわに残した。これらの式から以下の式を得る。

$$\frac{a(t_\lambda)H(t_\lambda)}{a_0H_0} = 1$$

インフレーション終了と同時に宇宙再加熱が終了したとすると、この式の左辺はインフレーションが終了した時のスケールファクターを使って以下のように書ける。

$$\frac{a(t_\lambda)H(t_\lambda)}{a_0H_0} = \frac{a(t_\lambda)}{a(t_{end})} \frac{a(t_{end})H(t_\lambda)}{a_0H_0}$$

第ゼロ近似で再加熱後現在まで間輻射のエントロピーが保存しているとしてよいので $a(t_{end})T_{end} = a_0T_0$ である。ここで $k_B T_0 \sim 2.73/(1.16 \times 10^4)\text{eV}$, $k_B T_{end} \sim 10^{16}\text{GeV}$ である。インフレーション中はスローロール近似が非常に良い精度で成り立っているとすると

$$H(t_\lambda)^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{V}{c^2} \sim \frac{8\pi}{3} G \frac{aT_{end}^4}{c^2}$$

である。一方現在のハッブル定数は以下のように書ける。

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{aT_0^4}{\Omega_\gamma c^2}$$

ここで $\Omega_\gamma = 5.4 \times 10^{-5} h_{0.73}^{-2}$, $a = 8\pi^5 k_B^4 / 15c^3 h^3$ であり、現在の宇宙は平坦であるとした。以上から e-folding 数が次のようにもとまる。

$$N(t_{\lambda/a(t_\lambda)=c/H_0}) = 61 \quad (3.24)$$

即ち、現在の宇宙のハッブル半径がインフレーション時にハッブル半径を超えてからインフレーションが終了するまでにスケールファクターは Exponential の 61 乗倍膨張したことになる。

因みにある共動半径がインフレーション時にハッブル半径即ち事象の地平線を超える時期を horizen exit と呼ぶ。一方、インフレーション終了後の減速膨張時には時間とともにより大きなスケールがハッブル半径即ち粒子的地平線以下になる。減速膨張時にあるスケールが地平線以下になる時期を horizen reentry と呼ぶ。

第4章

揺らぎの生成

4.1 スカラー揺らぎ

4.1.1 フーリエスペクトル

任意のスカラー量 $g(\vec{x}, t)$ のフーリエスペクトルは以下のように定義する。

$$g(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \hat{g}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (4.1)$$

ここで \vec{x} は共同座標での位置ベクトルで、物理的な距離で定義される位置ベクトル \vec{r} とは、スケールファクター $a(t)$ を介して $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ で結ばれる。インフレーションを駆動するスカラー場を以下ではインフラトンと呼ぶ。

インフラトンの零次パート $\phi_0(t)$ の進化の詳細は前章で述べた。零次パートは、空間的に一様等方である。インフラトンの揺らぎ $\delta\phi(\vec{x}, t)$ が満たす方程式は以下の方程式から得られる。

$$\square(\phi_0 + \delta\phi) - V'(\phi_0 + \delta\phi) = 0 \quad (4.2)$$

ゼロ次が $\square\phi_0 - V'(\phi_0) = 0$ を満たす事を用いると以下の方程式を得る。

$$\square\delta\phi - V''(\phi_0)\delta\phi = 0 \quad (4.3)$$

ここで

$$\square\delta\phi = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta\phi = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\partial_{\nu}\delta\phi \quad (4.4)$$

$$= g^{\mu\nu}(\partial_\mu \partial_\nu \delta\phi - \partial_\alpha \delta\phi \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \quad (4.5)$$

インフラトンに揺らぎが存在すれば、それに伴うエネルギー密度の揺らぎによりメトリックにも揺らぎが生じる。しかし、以下では簡単のため、メトリックの揺らぎは無視し、メトリックは以下の形で与えられるとする。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.6)$$

従って、ダランベルシアンを計算するのに必要なクリストッフェル記号の値は以下のようになる。

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \Gamma_{00}^i = 0, \Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij} \quad (4.7)$$

これからインフラトン場の揺らぎが満たす方程式は以下のようになる。

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\phi + V''\delta\phi = 0 \quad (4.8)$$

ここで得た方程式を断熱過程におけるエネルギー保存則からも導く事ができる。断熱過程におけるエネルギー保存則は次の式で表される。

$$\frac{dU}{dt} = -P\frac{dV}{dt}$$

ここで $U = \rho V$ は体積 V 内の全エネルギー、 P は圧力である。スカラー場をゼロ次と摂動の一次に分けると摂動量の一次まででエネルギー保存則は次のように書ける。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 + \dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} + V(\phi) \right) = -(\dot{\phi}_0^2 + 2\dot{\phi}_0\delta\dot{\phi}) \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

微小体積は $V = a^3 d^3x$ と書けるから、体積変化はスケールファクターの時間変化によるものと peculiar velocity の存在による固有体積の変化によるものの重ね合わせである。したがって体積変化率は

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 3\frac{\dot{a}}{a} + \text{div}\vec{v}$$

である。ここで $\text{div}\vec{v}$ の意味について考察してみる。問題をイメージしやすいように速度場が $\vec{v}(\vec{x}, t)$ で与えられる流体を考える。時刻 t において $\vec{x}(t) \sim \vec{x}(t) + d\vec{x}(t)$ の微小領域で囲まれる微小体積 $d^3\vec{x}(t)$ が微小時間 dt 後にどのようなようになるか考察する。流体要素の位置の変化は以下のよう書ける。

$$\begin{aligned}\vec{x}(t+dt) &= \vec{x}(t) + \vec{v}(\vec{x}(t), t)dt \\ \vec{x}(t+dt) + d\vec{x}(t+dt) &= \vec{x}(t) + d\vec{x}(t) + \vec{v}(\vec{x}(t) + d\vec{x}(t), t)dt\end{aligned}$$

よって

$$d\vec{x}(t+dt) = d\vec{x}(t) + (\vec{v}(\vec{x}(t) + d\vec{x}(t), t) - \vec{v}(\vec{x}(t), t))dt$$

右辺第二項に現れた位置による速度変化が体積の増加、減少の原因になる。従って微小体積の変化率は以下のように計算される

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\vec{x}(t+dt))}{\partial(\vec{x}(t))} &= \begin{vmatrix} 1 + \partial_x v_x dt & \partial_y v_x dt & \partial_z v_x dt \\ \partial_x v_y dt & 1 + \partial_y v_y dt & \partial_z v_y dt \\ \partial_x v_z dt & \partial_y v_z dt & 1 + \partial_z v_z dt \end{vmatrix} \\ &\sim 1 + \text{div} \vec{v} dt\end{aligned}$$

最後の式変形では微量の一次まで取った。従って、体積変化率は $\text{div} \vec{v}$ で与えられる。スカラー場のエネルギー運動量テンソルの結果から peculiar velocity は次のように与えられる。

$$\vec{v} = \frac{-\dot{\phi}_0 \frac{1}{a^2} \vec{\nabla} \delta \phi}{\rho_0 + P_0} = -\frac{\frac{1}{a^2} \vec{\nabla} \delta \phi}{\dot{\phi}_0}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{dV(\phi_0 + \delta \phi)}{dt} &= (V'(\phi_0) + V''(\phi_0) \delta \phi)(\dot{\phi}_0 + \delta \dot{\phi}) \\ &= V' \dot{\phi}_0 + V' \delta \dot{\phi} + V'' \delta \phi \dot{\phi}_0\end{aligned}$$

を用いるとエネルギー保存則から次の式を得る。

$$\begin{aligned}&\dot{\phi}_0(\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + V') \\ &+ \delta \dot{\phi}_0(\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + V') \\ &+ \dot{\phi}_0(\delta \ddot{\phi} + 3H\delta \dot{\phi} - \frac{1}{a^2} \Delta \delta \phi + V'' \delta \phi) = 0\end{aligned}$$

一行目の式からゼロ次解の満たす方程式が得られ、3行目の式から一次の摂動量が満たす方程式が得られる。一次の摂動量の方程式にラプラシアンが入ってくる理由は、縦波なので摂動量の振幅が圧縮率、膨張率に関係していることから来る。

Massless scalar field

以下では、簡単のため massless free field として扱い $V'' = 0$ とする。インフラトン場の揺らぎのフーリエ成分 $\delta\phi_k(t)$ が満たす方程式は

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k = 0 \quad (4.9)$$

となる。ここで $\delta\phi(t)$ は実関数であることから $\delta\phi_k$ は以下のように書ける。

$$\delta\phi_k = w_k(t)a_{\vec{k}} + w_k^*(t)a_{-\vec{k}}^\dagger \quad (4.10)$$

ここで $a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}}$ は生成消滅演算子であり、 w_k も $\delta\phi_k$ と同じ方程式を満たす。

ハッブル定数が時間によらず一定、即ち指数関数的に宇宙膨張が起きる時、その解は以下の様になる。

$$w_k = A \left(i + \frac{k}{aH} \right) e^{i\frac{k}{aH}t} \quad (4.11)$$

インフラトンの揺らぎ成分の振幅 A を、揺らぎの波長が Hubble horizon サイズより十分短い時、すなわち $a/k \ll 1/H$ の時、フラット時空での量子化されたスカラー場の式と一致せよ、という条件から求める。揺らぎの波長が subhorizon scale の任意の時刻を t_1 とする。この時刻からの経過時間が Hubble time より十分短い時刻 t を扱う。すなわち $H(t-t_1) \ll 1$ である。この時、スケールファクターは以下のように展開できる。

$$a(t) \sim a_1 + \dot{a}_1(t-t_1) = a_1(1 + H(t-t_1)) \quad (4.12)$$

ここで $a_1 = a(t_1)$ でそれぞれ時刻 t_1 のスケールファクターである。これから w_k の指数部を以下のように展開できる。

$$\frac{k}{a(t)H} \sim \frac{k}{a_1H} - \frac{k}{a_1}(t-t_1) \quad (4.13)$$

また subhorizon scale では $k/aH \gg 1$ であることに注意して w_k の漸近形が以下のようになる。

$$w_k \sim \frac{k}{a_1H} A e^{i\frac{k}{a_1H} + i\frac{k}{a_1}t_1} e^{-i\frac{k}{a_1}t} \quad (4.14)$$

一方、フラット時空での量子化された mass less free scalar field は 2.3.2 節から以下のように書けた。

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_p}} (a_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t} + a_{-\vec{p}}^\dagger e^{i\omega_p t}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (4.15)$$

ここで V は考えている領域の物理的体積、 \vec{r}, \vec{p} は物理的な位置ベクトル及び波数ベクトルであり共動座標形での量と $\vec{r} = a(t)\vec{x}, \vec{p} = \vec{k}/a(t)$ で結ばれる。また分散関係式は $\omega_p = p = k/a(t)$ である。インフレーション時の subhorizon scale のインフラトン場の揺らぎがこの式と一致するという条件から

$$A = \frac{H}{\omega_{1p}} e^{-i\delta_{1p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{1p}}} \quad (4.16)$$

を得る。ここで、 $H(t-t_1) \ll 1$ から指数以外に現れる時間に依存する物理量は時刻 t_1 での量で近似し、下付きの添字 1 を付けた。この式に現れた位相は次の式で与えられる。

$$\delta_{1p} = \frac{k}{a_1 H} + \frac{k}{a_1} t_1 \quad (4.17)$$

求まった振幅 A を代入し、物理体積と共動体積の間に $V = a(t)^3 V_c$ の関係がある事を利用するとインフラトン場の揺らぎが以下のように求まる。

$$\delta\phi(\vec{x}, t) = \frac{H}{\sqrt{2V_c}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^{3/2}} \left[\left(i + \frac{k}{aH} \right) e^{i\frac{k}{aH} - i\delta_{1p}} a_{\vec{k}} \right. \quad (4.18)$$

$$\left. + \left(-i + \frac{k}{a(t)H} \right) e^{-i\frac{k}{aH} + i\delta_{1p}} a_{-\vec{k}}^\dagger \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (4.19)$$

インフレーション中は激しい宇宙膨張により宇宙はほぼ真空状態にあると思われる。そこでインフレーション中の真空 $|0\rangle$ を

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \quad (4.20)$$

を満たす状態とする。すると当然だが

$$\langle 0|\delta\phi(\vec{x}, t)|0\rangle = 0 \quad (4.21)$$

で揺らぎの振幅の真空期待値はゼロである。ここで $\langle 0|a_{\vec{k}}^\dagger = 0$ を使った。

インフラトンの揺らぎの分散値は以下のように与えられる。

$$\langle 0 | \delta\phi(\vec{x}, t)^2 | 0 \rangle = \frac{H^2}{2V_c} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^3} \left(1 + \frac{k^2}{a^2 H^2} \right) \quad (4.22)$$

次に和から積分への置き換えを行う。それには以下の操作を行えば良い。

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V_c}{(2\pi)^3} d^3k \quad (4.23)$$

興味あるスケールの揺らぎはインフレーション末期には、全て Hubble horizon より十分波長が長くなっている。そこで super horizon limit $a/k \gg 1/H$ すなわち $k/aH \ll 1$ を取る。その結果、興味あるスケールのみ含むインフラトンの揺らぎは以下のように書ける。

$$\langle 0 | \delta\phi(\vec{x}, t)^2 | 0 \rangle = \frac{H^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^3} = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} \quad (4.24)$$

ここで一般に平均値がゼロの物理量 g の分散値をフーリエ成分の積分で表した時パワースペクトルを以下の式で定義する。

$$\langle g^2 \rangle = \int_0^\infty P_g(k) \frac{dk}{k} \quad (4.25)$$

ここでフーリエ成分の振幅は波数ベクトルの方向には依存しないとした。すなわちパワースペクトルとは、単位対数波数あたりに含まれるモードのパワーの分散値である。したがって、インフラトン場の揺らぎのパワースペクトルは以下の様に与えられ、

$$P_\phi = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \quad (4.26)$$

揺らぎの波長によらず一定となる。

ここまでの結果の物理的考察を試みる。真空の量子的揺らぎにより、インフラトン量子の対生成、対消滅が常に起きている。エネルギー ε の量子が対生成されたとする。この量子が対消滅するまでの寿命は不確定性原理から大凡 $\Delta t \sim \hbar/\varepsilon$ である。この期間お互いが離れることができる最大の距離は $c\Delta t$ である。これがインフレーション中のイベントホライズン c/H を超えてしまうと、もはや対消滅する事ができなくなる。真空の揺らぎで

生成された量子の内 $\varepsilon < \hbar H$ の条件を満たす量子は、この条件を満たし対消滅する事無く実在かしてしまふ。このことから真空の量子揺らぎで生成されたスカラー場の揺らぎの振幅がほぼ $\hbar H$ になることが納得できる。因にここでは一次的に c, \hbar を明示的に記述したが、メインの議論では1としていることに注意。

次に、ハッブル定数の時間依存性をスローロールパラメータの一次まで考慮した場合を扱う。共形時間 (Conformal time) を以下のように定義する。

$$d\tau = \frac{dt}{a} \quad (4.27)$$

Conformal time は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \tau - \tau_1 &= \int_{t_1}^t \frac{dt}{a} = \int_{a_1}^a \frac{da}{a^2 \dot{H}} \\ &= \left[-\frac{1}{a \dot{H}} \right]_{a_1}^a + \int_{a_1}^a \frac{da}{a} \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\dot{H}} \right) \\ &= -\frac{1}{a \dot{H}} + \frac{1}{a_1 \dot{H}_1} + \int_{a_1}^a \frac{da}{a \ddot{a}} \left(-\frac{\dot{H}}{\dot{H}^2} \right) \\ &= -\frac{1}{a \dot{H}} + \frac{1}{a_1 \dot{H}_1} + \int_{a_1}^a \frac{da}{a^2 \dot{H}} \varepsilon \\ &= -\frac{1}{a \dot{H}} + \frac{1}{a_1 \dot{H}_1} - \frac{\varepsilon}{a \dot{H}} + \frac{\varepsilon_1}{a_1 \dot{H}_1} + \int_{a_1}^a \frac{da}{a^2 \dot{H}} \left(-\frac{\dot{H}}{\dot{H}^2} \varepsilon + \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{H}} \right) \end{aligned}$$

二行目の等号では、部分積分を行った。また、 $\varepsilon = -\dot{H}/\dot{H}^2$ を使った。時間微分を $d/dt = \dot{\phi}_0 d/d\phi_0$ を用いてスカラー場のゼロ次の量の微分に置き換え、 ε の定義式の時間微分を行うと以下の式を得る。

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{M}_{pl}^2 \left(\frac{V''}{V^2} - \frac{V'^2}{V^3} \right) V' \dot{\phi}_0$$

ここでフリードマン方程式 $H^2 \sim V/3\tilde{M}_{pl}^2$ を時間微分することで得る以下の式 $V' \dot{\phi}_0 = 6\tilde{M}_{pl}^2 H \dot{H}$ を上の式に代入し変形すると以下の式を得る。

$$\dot{\varepsilon} = 2H(2\varepsilon - \eta)\varepsilon \quad (4.28)$$

従って、上で得られた τ の式の最後の積分の項は、スローロールパラメータの二次以上の寄与しか与えない。従ってスローロールパラメータの一次ま

での近似では Conformal time の時間変化は無視でき上の式は以下のように書ける。

$$\tau - \tau_1 = -\frac{1}{aH} + \frac{1}{a_1 H_1} + \varepsilon(\tau - \tau_1)$$

よって

$$\tau = -\frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{1}{aH} \quad (4.29)$$

スカラー場の揺らぎの満たす方程式に $w_k = u_k/a$ を代入すると u_k の満たす方程式は ε の一次までの近似で以下ようになる。

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{2+3\varepsilon}{\tau^2}\right) u_k = 0 \quad (4.30)$$

ここで更に $\xi = -k\tau$, $u_k = \sqrt{\xi} H_k(\xi)$ と置いてこの式に代入すると以下の方程式を得る。

$$\frac{d^2 H_k}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dH_k}{d\xi} + \left(1 - \frac{9/4 + 3\varepsilon}{\xi^2}\right) H_k = 0 \quad (4.31)$$

これはベッセルの微分方程式である。その次数 ν は $\nu = \sqrt{9/4 + 3\varepsilon} \sim 3/2 + \varepsilon$ である。この方程式の解は Bessel 関数 J_ν 、Neumann 関数 N_ν 、第一種、第二種の Hankel 関数 $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ である。従って、 w_k の一般解は以下のように書ける。

$$w_k = \frac{1}{a} \left[\alpha(k) \sqrt{\xi} H_\nu^{(1)}(\xi) + \beta(k) \sqrt{\xi} H_\nu^{(2)}(\xi) \right] \quad (4.32)$$

上記一般解に現れた不定定数を揺らぎの波長が十分 Hubble horizon より短い極限で、スカラー場の揺らぎが flat space time での量子化されたスカラー場の式と一致するという条件から決定する。Subhorizon limit では $\xi = -k\tau \sim k/aH \gg 1$ である。Hankel 関数は $\xi \rightarrow \infty$ の極限で以下のような漸近形を持つ。

$$H_\nu^{(1)}(\xi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp \left[i \left(\xi - (2\nu + 1) \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.33)$$

$$H_v^{(1)}(\xi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp\left[-i\left(\xi - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (4.34)$$

Subhorizen limit が適応できるある時刻 t_1 の近傍の時刻 t に於ける ξ は以下のように近似できる。

$$\xi \sim \frac{k}{a_1 H_1} - \frac{k}{a_1} (t - t_1)$$

これらを w_k の式に代入すると subhorizen limit で以下の式を得る。

$$\begin{aligned} w_k \sim & \frac{1}{a_1} [\alpha(k) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{k}{a_1}(t-t_1)} e^{i(\frac{k}{a_1 H_1} - \frac{\pi}{4}(2\nu+1))} \\ & + \beta(k) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{k}{a_1}(t-t_1)} e^{-i(\frac{k}{a_1 H_1} - \frac{\pi}{4}(2\nu+1))}] \end{aligned}$$

Flat space time での量子化された mass less scalar field の式と比較することで以下の式を得る。

$$\beta(k) = 0 \quad (4.35)$$

$$\alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sqrt{\frac{\pi}{4k}} e^{-i(\frac{k}{a_1 H_1} - \frac{\pi}{4}(2\nu+1))} \quad (4.36)$$

ここで $V_c = v/a_1^3$ は共動体積、 $\omega_p = p = k/a_1$ 、 $\vec{p} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{x}$ を用いた。以上から w_k は以下ようになる。

$$w_k = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sqrt{\frac{\pi}{4k}} e^{-i(\frac{k}{a_1 H_1} - \frac{\pi}{4}(2\nu+1))} \sqrt{\xi} H_v^{(1)}(\xi) \quad (4.37)$$

インフレーション中、揺らぎの波長は宇宙膨張によって horizen より十分長い波長まで引き延ばされる。super horizen limit $\xi = -k\tau \sim -k/aH \ll 1$ では以下ようになる。

$$H_v^{(1)} \rightarrow -i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-\nu}$$

従って

$$w_k \rightarrow \frac{H}{\sqrt{V_c}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{k^{3/2}} 2^{\nu-2} e^{i(\frac{-k}{a_1 H_1} + \frac{\pi}{2}(\nu-1/2))} \left(\frac{aH}{k}\right)^\nu \quad (4.38)$$

ここで $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ で $\Gamma(\nu)/\Gamma(3/2) \sim 1$ である。以上から massless ス

カラー場の揺らぎのパワースペクトルは以下のように求まる。

$$P_{\delta\phi_k}(k) = \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{a2H}{k}\right)^{2\varepsilon} \propto k^{-2\varepsilon} \quad (4.39)$$

パワースペクトルの波数依存性を別の方法で導くことでその物理的理解を深める。Super horizon limit で w_k の方程式は以下ようになる。

$$\ddot{w}_k + 3H\dot{w}_k \sim 0$$

宇宙はどの時代も膨張しているので $H > 0$ である。従ってこの方程式の解は、減衰解と $w_k = \text{const.}$ である。即ち、揺らぎは horizen exit 後、振幅は一定のまま保たれる。波数ベクトル k の揺らぎが、Horizen exit する時刻を t_* は

$$\frac{a(t_*)}{k} = \frac{1}{H(t_*)}$$

即ち $a_*H_*/k = 1$ で定義される。揺らぎの振幅が super horizon で一定になるので、良い近似で horizen exit 時の値でほぼ一定になるとしてよいだろう。従ってパワースペクトルは以下のように書ける。

$$P_{\delta\phi_k}(k) = \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\right)^2 \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \quad (4.40)$$

ここで H_* は horizen exit 時ハッブル定数である。実際 $H(t)^2 \sim (H_* + \dot{H}_*(t-t_*))^2 = H_*^2(1 - 2H_*\varepsilon(t-t_*))$ 、 $(a(t)/a_*)^{2\varepsilon} \sim e^{2\varepsilon H_*(t-t_*)} \sim 1 + 2H_*\varepsilon(t-t_*)$ からスローロールパラメターの一次までで $H^2 a^{2\varepsilon} \sim H_*^2 a_*^{2\varepsilon}$ でパワースペクトルの値は horizen exit 時の値でほぼ一定である。

パワースペクトルインデックス n は以下の式で計算できる。

$$n = \frac{d \ln P_{\delta\phi_k}(k)}{d \ln k} \quad (4.41)$$

ここで

$$\frac{d}{d \ln k} = \frac{\dot{\phi}_0}{H_*} \frac{d}{d\phi_0} \sim -\tilde{M}_{pl}^2 \frac{V'}{V} \frac{d}{d\phi_0}$$

これらから

$$\frac{d \ln H_*^2}{d \ln k} \sim -2\varepsilon$$

が得られ $n \sim -2\varepsilon$ となり上で求めたものと一致する。この導出法から massless scalar field の揺らぎのパワースペクトルの波数依存性は、以下の理由で生じると考えられる。インフラトン場のポテンシャルに有限の負の傾き ($\varepsilon > 0$) が存在するため、より大きな波数の即ちより短い波長の揺らぎが horizon exit する時のスカラー場のポテンシャル即ちハッブル定数の値が小さくなる。その為、 k の大きな揺らぎに対してパワースペクトルの値が小さくなる。

Scalar field with non zero mass simplified treatment

スカラー場の質量が有限の場合即ち $V'' \neq 0$ の場合を考える。この項は u_k の満たす方程式で $3a^2 H^2 \eta u$ の寄与を与える。スローロールパラメータの一次の近似で以下の寄与を与える。

$$\frac{3\eta}{\tau^2} u_k \quad (4.42)$$

従って、 H_k は $\nu = \sqrt{9/4 + 3\varepsilon - 3\eta} \sim 3/2 + \varepsilon - \eta$ のベッセルの微分方程式を満たす。このことからパワースペクトルの波数依存性は以下のようになる。

$$P_{\delta\phi_k}(k) \propto k^{-2\varepsilon+2\eta} \quad (4.43)$$

スカラー場のポテンシャルの二回微分が正即ち $\eta > 0$ の時、一階微分の効果を打ち消す方向に働く。二回微分が正ということは、ポテンシャルが下に凸ということである。ポテンシャルの一階微分が負つまりポテンシャルが下り坂の時は、二回微分が正ということは、坂の傾きが段々緩やかになって行く事になる。ようするにより短い波長の揺らぎが horizon exit する時のポテンシャルの減少量が減り、波長の違いによる差が小さくなる。一方、一階微分が正の時、スカラー場のゼロ次量は、初期に大きな値を持ちそこから小さな値に変化するように進化する。有限な正の値から原点に近づくように動くと考えればよい。この時、二回微分が正ということは、スカラー場が

原点に近づくに従って減少するポテンシャルの値の減少率を少なくする方向に働く。やはり一階微分の効果を打ち消す効果を持つ。このような状況はカオティックインフレーションモデルで実現される。

4.1.2 Generation of Adiabatic perturbation via Inflation

インフレーション期に生成される密度揺らぎが主に断熱揺らぎであることを示す。インフレーション期に生成されたスカラー場の揺らぎは興味あるスケールは全てスーパーホライズンスケールとなり、その振幅を凍結したままインフレーション終了時即ち宇宙再加熱の時期を待つ。インフレーション期間中にどのようなスケールの揺らぎがホライズンの外に出るのか調べるため、インフレーション終了直前に丁度その時のホライズンサイズだった波長が、現在ではどの程度の大きさになっているか調べる。インフレーションが起こるエネルギースケールを $T_{Inf} = 10^{16}\text{GeV}$ とする。不定ではあるが大きく外れていないと思われる。この時のハッブルホライズンは、

$$ct_{pl} \left(\frac{T_{pl}}{T_{Inf}} \right)^2 = 2.4 \times 10^{-27} \text{cm}$$

宇宙再加熱後、輻射のエントロピー保存が良い近似で成立していると考えてよいのでインフレーション終了直後のスケールファクター a_* と現在のスケールファクター a_0 の比は CMB の温度の比を使って

$$\frac{a_0}{a_*} = \frac{T_{Inf}}{T_0}$$

と書ける。従って、インフレーション終了直前に'ホライズンサイズと等しかったスケールの現在のスケールは、

$$ct_{pl} \left(\frac{T_{pl}}{T_{Inf}} \right)^2 \frac{T_{Inf}}{T_0} = 2.4 \times 10^{-27} \frac{10^{16} \times 10^9}{3.0 \times 10^{-4}} \sim 80 \text{cm}$$

となり非常に小さい。天文学的に興味ある全てのスケールが、インフレーション中にホライズンエクジットして、一度はスーパーホライズンスケールになり、後にホライズン再エントリーしたと考えてよい。

スカラー場の揺らぎの存在は、各場所毎のインフレーション終了時刻即

ち宇宙再加熱の時刻の揺らぎ δt_{reh} を生じる。

$$\delta t_{reh} = -\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}_0}$$

で与えられる。マイナス符号は、正の揺らぎがある時、平均より先に進んでおり早くインフレーションが終了することを反映している。宇宙再加熱時にインフレーションを引き起こしたスカラー場、インフラトン場から光、ニュートリノ、暗黒物質、バリオン等現在宇宙に存在する全ての物質が生成されたと考える。簡単のためその期間は一瞬とする。平均的な場所でのインフレーション終了時刻を \tilde{t}_{reh} とする。宇宙再加熱が終了した場所は、輻射優勢の宇宙として進化を始める。エネルギー密度 g_i のある物質が再加熱後 \dot{g}_i の割合で断熱的にエネルギー密度を減少させて行くとする。平均的な宇宙でインフレーション終了直後の減少率を \dot{g}_i と書く。インフレーション終了時刻が平均より δt_{reh} 遅れている場所では、周りが膨張によるエネルギー密度の減少を始めているのにまだ、エネルギー密度一定のままインフレーションを続けている事になる。従って、その場所が再加熱した後、周りより密度の高い領域として観測される。その大きさは以下の式で書ける。

$$\delta g_i = -\dot{g}_i \delta t_{reh} \quad (4.44)$$

ここで i は物質の種類の違いを表しており、この時全ての物質が一斉に生成されるため、

$$\frac{\delta g_1}{\dot{g}_1} = \frac{\delta g_2}{\dot{g}_2} = \dots = \frac{\delta g_n}{\dot{g}_n} \quad (4.45)$$

を満たす。これは、生成される揺らぎが断熱揺らぎであることを示している。断熱とは、ある物質を基準として選んだ時、その物質の単位エントロピーあたりの他の物質のエントロピーが場所によらず一定という意味である。言い方を変えると基準となる物質の粒子一個あたりの他の物質の粒子数が場所によらず一定という意味である。これは、再加熱が必ず同じ割合で物質を生成すると仮定している以上必ず成り立つ。エネルギー密度の揺らぎが場所によっては観測されるのは、偶々再加熱の時刻が、平均とズレていたためである。

上記の断熱揺らぎの条件を物質と輻射で具体的に調べてみる。物質と輻射の density contrast をそれぞれ δ_m, δ_r とする。 $\dot{\rho}_m = -3H\rho_m$ であり、 $\dot{\rho}_r = -4H\rho_r$ であるから

$$\frac{\rho_m \delta_m}{\dot{\rho}_m} = \frac{\rho_r \delta_r}{\dot{\rho}_r}$$

より

$$\frac{\delta_m}{3} = \frac{\delta_r}{4} \quad (4.46)$$

が物質と輻射の間の断熱揺らぎの条件となる。

4.1.3 Scalar, vector, tensor decomposition of perturbation

アインシュタイン方程式のソースタームであるエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の摂動及びメトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ の摂動を既約分解する。簡単の為摂動量を波数ベクトルが z 軸方向を向いた平面波とする。Conformal time を用いて固有距離は一般に以下のように書ける。

$$ds^2 = a^2(\tau) \{ -(1+2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + [(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \}$$

メトリックテンソルを以下のように置いた事になる。

$$g_{\mu\nu} = a^2(\tau) \begin{pmatrix} -(1+2A) & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 1+2D+2E_{11} & 2E_{12} & 2E_{13} \\ -B_2 & 2E_{21} & 1+2D+2E_{22} & 2E_{23} \\ -B_3 & 2E_{31} & 2E_{32} & 1+2D+2E_{33} \end{pmatrix}$$

ここで A を lapse function、 $B^i = (B_1, B_2, B_3)$ を shift vector と呼ぶ。摂動量の一次までで $\det(g_{\mu\nu}) = -a^8(\tau)(1+2A+2D \times 3)$ 従って、逆行列 $g^{\mu\nu}$ は摂動量の一次までで次の式で与えられる。

$$g^{\mu\nu} = -\frac{1-2A-6D}{a^2(\tau)} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1+6D & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & 1+2A+4D+2E_{22}+2E_{33} & -2E_{21} & -2E_{31} \\ B_2 & -2E_{12} & 1+2A+4D+2E_{11}+2E_{33} & -2E_{32} \\ B_3 & -2E_{13} & -2E_{23} & 1+2A+4D+2E_{11}+2E_{22} \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2(\tau)} \begin{pmatrix} -(1-2A) & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 1-2D-2E_{11} & -2E_{21} & -2E_{31} \\ -B_2 & -2E_{12} & 1-2D-2E_{22} & -2E_{32} \\ -B_3 & -2E_{13} & -2E_{23} & 1-2D-2E_{33} \end{pmatrix}$$

波数ベクトルを軸とした座標回転に対する摂動量の変換性により、既約分解できる。無限小回転に対して不変な量をスピンの摂動或はスカラー摂動と呼ぶ。座標を一回転した時、元に戻る回数が一回の摂動をスピンが1の摂動或はベクトル摂動と呼ぶ。座標を一回転した時、元に戻る回数が二回の摂動をスピンが2の摂動或はテンソル摂動と呼ぶ。 A, D はスカラー摂動である。Shift vector の内、波数ベクトルと平行成分、即ち縦波成分 $\vec{k} \cdot \vec{B}/k = B_3 = -iB$ はスカラー摂動である。一方、横波成分 $(B_1, B_2, 0)$ はベクター摂動である。 E_{ij} はメトリック摂動の空間成分のトレースレス部である。次の成分はスカラー摂動である。

$$E_{ij}^S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -2E \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

次の成分はベクトル摂動である。

$$E_{ij}^V = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_1 \\ 0 & 0 & E_2 \\ E_1 & E_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

次の成分はテンソル摂動である。

$$E_{ij}^T = \begin{pmatrix} E^+ & E^\times & 0 \\ E^\times & -E^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

エネルギー運動量テンソルは以下のように定義される。

$$T^{\mu\nu} \equiv (\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu} \quad (4.50)$$

ゼロ次では $\rho = \rho_0$ 、 $P = P_0$ 、 $\Sigma_{\mu\nu} = 0$ 、 $U^\mu = dx^\mu/d\lambda = (1/a, 0, 0, 0)$ 。非等方ストレス $\Sigma_{\mu\nu}$ は空間成分のみ持ち、これと速度の空間成分は摂動量としてのみ現れる。速度の摂動は以下の式で定義される。

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

流体の固有時間を λ とすると摂動の一次で次の式を得る。

$$\begin{aligned} d\lambda^2 &= -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -a^2(\tau) d\tau^2 \{ -(1+2A) - 2B_i v^i + [(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] v^i v^j \} \\ &\sim a^2(\tau) d\tau^2 (1+2A+2B_i v^i - v^2) \end{aligned}$$

よって

$$d\lambda = a(\tau) \sqrt{1+2A+2B_i v^i - v^2} d\tau = a(\tau) \left(1+A+B_i v^i - \frac{1}{2}v^2 \right) d\tau$$

Conformal time の刻み巾即ちラップを決定づける量が A なので lapse function と呼ばれる。摂動一次で $U^i = dx^i/d\lambda = v^i/a$ 、 $U^0 = (1-A-B_i v^i + v^2/2)/a$ である。ここで $v_i \equiv v^i$ と定義する。また $U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu$ より

$$U_i = a(\tau)(-B_i + v_i) \quad (4.51)$$

$$U_0 = -a(\tau)(1+A + \frac{1}{2}v^2) \sim -a(\tau) \quad (4.52)$$

この空間成分の式から Shift vector の存在は、時間軸が空間座標と直行していないため、時間軸と一緒に移動する観測者から観測すると shift vector との相対速度が速度として観測されることが分かる。片側の添字を下ろしたエネルギー運動量テンソルは $T_\nu^\mu = g_{\nu\alpha} T^{\mu\alpha}$ で定義される。従って以下の式を得る。

$$T_\nu^\mu = (\rho_0 + \delta\rho + P_0 + \delta P)U^\mu U_\nu + (P_0 + \delta P)\delta_\nu^\mu + \Sigma_\nu^\mu \quad (4.53)$$

$$T_0^0 = -(\rho_0 + \delta\rho) - (\rho_0 + P_0)(-B_i v^i + v^2) \sim -(\rho_0 + \delta\rho) \quad (4.54)$$

$$T_i^0 = (\rho_0 + P_0)(v_i - B_i) \quad (4.55)$$

$$T_0^i = -(\rho_0 + P_0)v_i \quad (4.56)$$

$$T_j^i = (P_0 + \delta P)\delta_{ij} + \Sigma_j^i \quad (4.57)$$

$\delta\rho$ 、 δP はスカラー摂動である。速度の摂動の内、波数ベクトルと平行成分、即ち $\vec{k} \cdot \vec{v}/k = -iV$ はスカラー摂動である。一方速度ベクトルの内横波成分、 $\vec{v} = (V_1, V_2, 0)$ はベクトル摂動である。非等方ストレステンソルは、トレースレスである。共変テンソルは $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha$ で定義され各成分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} T_{00} &= g_{00} T_0^0 = a^2(1+2A)(\rho_0 + \delta\rho) = a^2(\rho_0 + 2A\rho_0 + \delta\rho) \\ T_{0i} &= g_{00} T_i^0 + g_{0j} T_j^i = -a^2(\rho_0 + P_0)(v_i - B_i) - a^2 B_j P_0 \delta_{ij} \\ T_{ij} &= g_{i0} T_j^0 + g_{ik} T_j^k = a^2[(1+2D)\delta_{ik} + 2E_{ik}][P_0 + \delta P]\delta_j^k + \Sigma_j^k] \\ &= a^2(P_0 \delta_{ij} + (2DP_0 + \delta P)\delta_{ij} + 2P_0 E_{ij} + \Sigma_{ij}) \end{aligned}$$

次の成分はスカラー摂動である。

$$\Sigma_{ij}^S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & -2\Sigma \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

次の成分はベクトル摂動である。

$$\Sigma_{ij}^V = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Sigma_1 \\ 0 & 0 & \Sigma_2 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

次の成分はテンソル摂動である。

$$\Sigma_{ij}^T = \begin{pmatrix} \Sigma^+ & \Sigma^\times & 0 \\ \Sigma^\times & -\Sigma^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

4.1.4 Gauge transformation of scalar perturbations

次の式で定義される座標の無限小変換をゲージ変換とよぶ。

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (4.61)$$

ここで ξ^μ は微少量である。摂動量のゲージ変換性をしらべる。簡単のため扱うモードの波数ベクトルが z 軸を向いているとする。ゲージ変換の内 $\xi^\mu = (\delta\tau, 0, 0, 0), (0, 0, 0, -i\delta x)$ はスカラーモードである。一方、 $\xi^\mu = (0, \delta x_1, \delta x_2, 0)$ はベクトルモードである。ゲージ変換にはテンソルモードは存在しない。スカラー、ベクトル、テンソルは独立なモードであり、スカラー摂動量は、ゲージ変換のスカラーモードにのみ、ベクトル摂動量は、ゲージ変換のベクトルモードにのみ影響を受ける。ゲージ変換のテンソルモードは存在しないため、摂動量のテンソルモードは、全てゲージ不変である。

摂動量を扱う上でゲージ変換性が重要である理由を説明する。例として密度揺らぎ $\delta\rho$ を取り上げる。密度 $\rho(t)$ で一様で膨張する宇宙を考える。ここで以下のようなゲージ変換を施す。

$$\tilde{t} = t + \xi^0(x^i)$$

即ち場所毎に時計を遅らせたり進ませたりする。この操作により密度分布が $\tilde{\rho}(\tilde{t}(x^i))$ に変化する。ゲージ変換後は、場所場所で時計が狂っているわけだが、狂った時計を持たされた人々は、自分の時計が正しいと過程して密度分布の測定を行う。彼らが $\tilde{t}(x^i) = t$ の同時刻で密度分布を測定したとしよう。すると密度分布は一様では無く、揺らぎが発生して見える。即ち、 $\tilde{t} = t$ と設定するという事は、狂う前の時計で $t = t - \xi^0$ の時刻での密度を狂った時計をもった観測者は時刻 t の密度と取る事になる。

$$\tilde{\rho}(\tilde{t}(x^i) = t) = \rho(t - \xi^0(x^i)) \sim \rho(t) - \xi^0(x^i)\dot{\rho}(t) \quad (4.62)$$

ここで宇宙膨張に密度は減少しているので $\dot{\rho} < 0$ 、したがって $\xi^0(x^i) > 0$ の時狂った時計を持たされた観測者は自分の場所の密度が平均密度 $\rho(t)$ より

大きいと観測する。即ち、正の密度揺らぎが存在するという測定結果をだす。このように場所によって時計の狂いがまちまちであるだけで本来密度揺らぎが存在しないのに見かけ上密度揺らぎが存在するように観測されています。このように結果が観測者即ち座標系に依存しないようにするためにゲージ変換に対して不変な量を定義し、扱うひつようがある。発生した見かけの密度揺らぎが $-\xi^0 \dot{\rho}$ になるのは、物理的にも明らかである。膨張による密度の減少率は $\dot{\rho}$ である。ゲージ変換によって $\tilde{t} = t + \xi^0$ とすることは、時計を ξ^0 だけ進めるということであり、新しい時計では時刻 t は以前の時計の $t - \xi^0$ を指す事になる。従って、密度は ξ^0 だけ前の密度を指す事になり、その間に宇宙膨張で減少した $-\xi^0 \dot{\rho}$ だけ高い密度になり、これが見かけの密度揺らぎとなる。ここで以下で定義される差分を Lie 微分と呼ぶ。

$$\delta^L \rho = \tilde{\rho}(t) - \rho(t) \quad (4.63)$$

即ち Lie 微分は、ゲージ変換で発生する見かけの物理量の揺らぎである。

以下ではエネルギー運動量テンソルやメトリックテンソルのゲージ変換性を扱うのでまずは一般の二階のテンソル $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換性を求める公式を導く。ゲージ変換 $\tilde{x}^\sigma = x^\sigma + \xi^\sigma$ によって $\tilde{B}_{\mu\nu}$ に変換されたとする。二階の共変テンソルの変換性から以下の式を得る。

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\sigma) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} B_{\alpha\beta}(x^\sigma) \quad (4.64)$$

ゲージ変換の定義式から以下の式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha \quad (4.65)$$

$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}$ は $\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}$ の逆行列である。従って

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \partial_\mu \xi^\mu) \begin{pmatrix} 1 + \partial_i \xi^i & -\partial_0 \xi^1 & -\partial_0 \xi^2 & -\partial_0 \xi^3 \\ -\partial_1 \xi^0 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_2 \xi^2 + \partial_3 \xi^3 & -\partial_1 \xi^2 & -\partial_1 \xi^3 \\ -\partial_2 \xi^0 & -\partial_2 \xi^1 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_1 \xi^1 + \partial_3 \xi^3 & -\partial_2 \xi^3 \\ -\partial_3 \xi^0 & -\partial_3 \xi^1 & -\partial_3 \xi^2 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \partial_0 \xi^0 & -\partial_0 \xi^1 & -\partial_0 \xi^2 & -\partial_0 \xi^3 \\ -\partial_1 \xi^0 & 1 - \partial_1 \xi^1 & -\partial_1 \xi^2 & -\partial_1 \xi^3 \\ -\partial_2 \xi^0 & -\partial_2 \xi^1 & 1 - \partial_2 \xi^2 & -\partial_2 \xi^3 \\ -\partial_3 \xi^0 & -\partial_3 \xi^1 & -\partial_3 \xi^2 & 1 - \partial_3 \xi^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であり、

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha \quad (4.66)$$

である。以上から二階のテンソルの Lie 微分は以下ようになる。

$$\delta^L B_{\mu\nu}(x^\sigma) = \tilde{B}_{\mu\nu}(x^\sigma) - B_{\mu\nu}(x^\sigma) \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned}
&= -\xi^\sigma \partial_\sigma B_{\mu\nu}(x^\sigma) - \partial_\mu \xi^\alpha B_{\alpha\nu}(x^\sigma) - \partial_\nu \xi^\beta B_{\mu\beta}(x^\sigma) \\
&\quad (4.68)
\end{aligned}$$

以下では、スカラー摂動量のゲージ変換性を調べる。ゲージ変換のスカラーモードのみ扱う。即ち、 $\xi^\mu = (\delta\tau, 0, 0, -i\delta x)$ である。まずメトリックテンソルのスカラー摂動の変換性を成分毎に調べる。

g_{00}

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{00} &= g_{00} - \partial_0 \xi^\beta g_{0\beta} - \partial_0 \xi^\alpha g_{0\alpha} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{00} \\
&= -a^2(1+2A) + 2\delta\tau' a^2(1+2A) + 2i\delta x' a^2(-B_3) + \delta\tau(a^2(1+2A))' - i\delta x(a^2(1+2A))_{,3}
\end{aligned}$$

$$\tilde{A} = A - \delta\tau' - \frac{a'}{a} \delta\tau = A - \delta\tau' - aH\delta\tau \quad (4.69)$$

ここで ∂_0 は τ での微分でありプライムで表した、 $_{,3}$ は x_3 での偏微分を表す。最後の等号では、 $\partial_0 a = a^2 H$ を用いた。

g_{0i}

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{03} &= g_{03} - \partial_0 \xi^\beta g_{3\beta} - \partial_3 \xi^\alpha g_{0\alpha} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{03} \\ &= g_{03} - \partial_0 \xi^3 g_{33} - \partial_3 \xi^0 g_{00}\end{aligned}$$

$$\tilde{B} = B + \delta x' + k \delta \tau \quad (4.70)$$

ここで $\partial_3 \delta \tau = ik \delta \tau$ を使った。

g_{ij}

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= g_{ij} - \partial_i \xi^\beta g_{j\beta} - \partial_j \xi^\alpha g_{i\alpha} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{ij} \\ &= g_{ij} - \partial_i \xi^k g_{jk} - \partial_j \xi^k g_{ik} - \xi^0 \partial_0 g_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2[(1+2\tilde{D})\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{ij}] &= a^2[(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] \\ &\quad - \partial_i(-i\delta x)a^2\delta_{j3} - \partial_j(-i\delta x)a^2\delta_{i3} - \delta\tau 2aa'\delta_{ij} \\ &= a^2[(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] \\ &\quad - k\delta xa^2\delta_{i3}\delta_{j3} - k\delta xa^2\delta_{j3}\delta_{i3} - \delta\tau 2aa'\delta_{ij}\end{aligned}$$

$$\tilde{E} = E + k\delta x \quad (4.71)$$

$$\tilde{D} = D - \frac{k}{3}\delta x - aH\delta\tau \quad (4.72)$$

次にエネルギー運動量テンソルのゲージ変換性を調べる。

T_{00}

$$2\tilde{A}\rho_0 + \delta\tilde{\rho} = 2A\rho_0 + \delta\rho - 2\delta\tau'\rho_0 - 2\delta\tau aH\rho_0 - \delta\tau\rho'_0$$

$$\delta\tilde{\rho} = \delta\rho - \rho'_0\delta\tau \quad (4.73)$$

T_{0i}

$$-a^2(\rho_0 + P_0)(\tilde{v}_3 - \tilde{B}_3) - a^2 P_0 \tilde{B}_3 = -a^2(\rho_0 + P_0)(v_3 - B_3) - a^2 P_0 B_3 - \delta x'_3 a^2 P_0 - \delta\tau_{,3} a^2 \rho_0$$

$$\tilde{V} = V + \delta x' \quad (4.74)$$

ゲージ変換の定義から \tilde{x} 系の原点 $\tilde{x}=0$ は $x=-\delta x$ であり、 x 系に対して速度 $-\delta x'$ で運動していることになる。速度のスカラーモードは、相對運動の方向と一致しており、速度のスカラーモードのゲージ変換の変換式は、相對速度 $-\delta x'$ で運動する座標系に移ったときの速度の変換即そのものになっている。

T_{ij}

$$a^2(P_0\delta_{ij} + (2\tilde{D}P_0 + \delta\tilde{P})\delta_{ij} + 2P_0\tilde{E}_{ij} + \tilde{\Sigma}_{ij}) = a^2(P_0\delta_{ij} + (2DP_0 + \delta P)\delta_{ij} + 2P_0E_{ij} + \Sigma_{ij}) \\ - \partial_i \xi^k a^2 P_0 \delta_{kj} - \partial_j \xi^k a^2 P_0 \delta_{ik} - \xi^0 (2aa' P_0 + a^2 P'_0) \delta_{ij}$$

$$(2\tilde{D}P_0 + \delta\tilde{P})\delta_{ij} + 2P_0\tilde{E}_{ij} + \tilde{\Sigma}_{ij} = (2DP_0 + \delta P)\delta_{ij} + 2P_0E_{ij} + \Sigma_{ij} \\ - k\delta x P_0 \delta_i^3 \delta_j^k \delta_{kj} - k\delta x P_0 \delta_j^3 \delta_i^k \delta_{ik} - \delta\tau(2aHP_0 + P'_0)\delta_{ij}$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma \quad (4.75)$$

$$\delta\tilde{P} = \delta P - \delta\tau P'_0 \quad (4.76)$$

$\delta\phi$

$\rho = 1/2\dot{\phi}^2 + V = 1/2a^2\phi'^2 + V$ および $P = 1/2\dot{\phi}^2 - V = 1/2a^2\phi'^2 - V$ と置き $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ を代入して微少量の一次までとり $\delta\rho$ と δP のゲージ変換性を用いると次の式を得る。ここでスカラー場のエネルギーにはスカラー場の空間微分の二乗の項が含まれているが、スカラー場のゼロ次項は空間的に一様なのでこの項は微少量の二次からしか寄与しない。その為この項の存在を無視して扱った。

$$\delta\tilde{\phi} = \delta\phi - \phi'_0 \delta\tau \quad (4.77)$$

波数 k の揺らぎの存在に起因する空間局率の摂動を $R_k^{(3)}$ と書くと、定義に従って計算することで次の結果を得る。

$$R_k^{(3)} = \frac{4k^2}{a^2} \left(D + \frac{E}{3} \right) \quad (4.78)$$

以下では

$$\varphi \equiv D + \frac{1}{3}E \quad (4.79)$$

と置く。この量のゲージ変換性は次のようになる。

$$\tilde{\varphi} = \varphi - aH\delta\tau \quad (4.80)$$

4.1.5 Gauge invariant variables

スカラー摂動量のゲージ不変変数の組み合わせをまとめる。

Bardeen variable ζ

$$\zeta \equiv \varphi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho}{\rho_0 + P_0} \quad (4.81)$$

ここでエネルギー保存則 $\rho'_0 = -3aH(\rho_0 + P_0)$ を用いた。

Entropy perturbation ΔP

$$\Delta P \equiv \delta P - \frac{P'_0}{\rho'_0} \delta\rho \quad (4.82)$$

これがエントロピー摂動と呼ばれる理由を説明する。考えている物質が状態方程式 $P = P(\rho)$ を満たすとする。密度と圧力を断熱的に変化させた時

$$\dot{P} = \frac{dP}{d\rho} \dot{\rho}$$

となる。これを用いてエントロピー摂動は以下のように書ける。

$$\Delta P = \left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{dP}{d\rho} \right) \delta\rho \quad (4.83)$$

従って、扱っている摂動が断熱的であれば、 $\frac{\delta P}{\delta\rho} = \frac{dP}{d\rho}$ であれば $\Delta P = 0$ である。一方 $\Delta P \neq 0$ の時は、摂動はエントロピー一定を保たずに与えられたことになる。即ちエントロピーに摂動が与えられたことになる。

Velocity perturbation V_s

$$V_s \equiv V - \frac{E'}{k} \quad (4.84)$$

Scalar field perturbation $\Delta\phi$

$$\Delta\phi \equiv \delta\phi + \frac{1}{k} \left(B - \frac{E'}{k} \right) \phi_0' \quad (4.85)$$

Sasaki-Mukhanov variable Q

$$Q \equiv \delta\phi - \frac{\phi_0'}{aH} \varphi = \delta\phi - \frac{\dot{\phi}_0}{H} \varphi \quad (4.86)$$

4.1.6 良く扱われるゲージ

以下では、時間軸を *threading* と呼び、時間一定面を *slicing* と呼ぶ。

Conformal Newtonian gauge

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\Psi_N) d\tau^2 + (1 - 2\Phi_N) \delta^{ij} dx_i dx_j] \quad (4.87)$$

即ち

$$A_N \equiv \Psi_N \quad (4.88)$$

$$D_N \equiv -\Phi_N \quad (4.89)$$

$$B_N = E_N = 0 \quad (4.90)$$

$$R_{kN}^{(3)} = -4 \frac{k^2}{a^2} \Phi_N \quad (4.91)$$

このゲージでは、*slicing* と *threading* が直行している。

Total matter gauge $\delta\phi = 0$

Conformal Newtonian gauge から出発し、scalar 場の comoving gauge に移行する過程を考える。*Slicing* と *threading* を Conformal Newtonian gauge のまま保存して、*thread* を傾け *thread* の方向をスカラー場の運動方向と一致させる座標系に変形する。具体的には conformal Newtonian gauge から $\delta\phi = 0$ となるように以下のゲージ変換を施す。

$$\delta x = 0 \quad (4.92)$$

$$\delta\tau = \frac{V_N}{k} \quad (4.93)$$

この結果 total matter gauge ではメトリックは以下のようになる。

$$\Psi_{TM} = \Psi_N - \frac{V'_N}{k} - aH \frac{V_N}{k} \quad (4.94)$$

$$B_{TM} = V_N \quad (4.95)$$

$$D_{TM} = -\Phi_N - aH \frac{V_N}{k} \quad (4.96)$$

$$E_{TM} = 0 \quad (4.97)$$

当然だがゲージ不変な変数はこのゲージ変換前後で関数系を変えない。物質のストレステンソルがこのゲージ変換でどのように変換されるか調べる。

$$V_{TM} = V_N \quad (4.98)$$

$$\delta\rho_{TM} = \delta\rho_N - \rho'_0 \frac{V_N}{k} \quad (4.99)$$

$$\delta P_{TM} = \delta P_N - P'_0 \frac{V_N}{k} \quad (4.100)$$

Spatially flat gauge (slicing) $D = 0, E = 0$ したがって、 $\phi = 0$ である。ゲージ変換のスカラーモード $\delta\tau, \delta x$ の二つ自由度使って、スカラーモード $A, B, D, E, \delta\phi$ の内 $D = E = 0$ としたと考えれば良い。

$$Q = \delta\phi \quad (4.101)$$

メトリックテンソルは以下のようになる。

$$ds^2 = a^2[-(1+2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + \delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (4.102)$$

よって

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(1+2A) & g_{0i} &= -a^2 B_i & g_{ij} &= a^2 \delta_{ij} \\ g^{00} &= -\frac{1}{a^2}(1-2A) & g^{0i} &= -\frac{B_i}{a^2} & g^{ij} &= \frac{1}{a^2} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Comoving gauge (slicing)

スカラー場の運動量が0となるゲージである。

$$T_i^0 = -\frac{1}{a^2} \phi'_0 \partial_i \delta\phi = 0 \quad (4.104)$$

従って、 $\partial_i \delta\phi = 0$ となりスカラー場の揺らぎは空間的に一様となる。空間的な凸凹成分を揺らぎと定義しているので、このゲージでは

$$\delta\phi = 0 \quad (4.105)$$

となり

$$Q = -\frac{\dot{\phi}_0}{H} \phi \quad (4.106)$$

以上から Spatially flat ゲージでのスカラー場の揺らぎ $\delta\phi_{SPF}$ と TM ゲージでの空間曲率の揺らぎ φ_{TM} の間に次の関係がある事がわかる。

$$\varphi_{TM} = -H \frac{\delta\phi_{SPF}}{\dot{\phi}_0} = \frac{\dot{a}\delta t}{a} \quad (4.107)$$

ここで $\delta t = -\delta\phi_{SPF}/\dot{\phi}_0$ である。インフレーション中はスカラー場 ϕ の値が幾らであるかが時計代わりとして使える。TM ゲージに設定するとは、 ϕ の値が同じになるように各場所の時計の進み具合を調整するように取りなさいという意味である。これは TM ゲージとは、 $\delta\phi = 0$ となるように選択したゲージであるという定義の別の言い方であることは自明と思われる。Spatially flat ゲージにおいて、正のスカラー場の揺らぎ $\delta\phi$ が存在する場所を考える。Spatially flat ゲージに於いて、0 次解通りに時計が進行する場所と比べて時刻の遅れ δt は負である。つまり時計は進んでいる事になる。Spatially flat ゲージでは by definition で空間曲率はゼロである。TM ゲージに移るとこの δt 間の宇宙膨張 $\Delta a = \dot{a}\delta t$ だけ揺らぎが存在した場所は宇宙の半径が大きくなっている。ここで $\delta t < 0$ に注意すると $\Delta a < 0$ であり、宇宙の半径は $|\Delta a|$ だけ小さくなっている。つまり TM ゲージでは、正の揺らぎが存在する場所では、宇宙の半径が平均的な場所が達する予定の a よりまだ $|\Delta a|$ だけ小さい内に同じ時刻になってしまうのである。その結果、TM ゲージでは空間曲率 $\Delta a/a$ が発生する。

4.1.7 ゲージ不変なスカラー摂動の発展方程式

以下の計算の土台となるクリストッフェル記号の全ての成分を導出する。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}(g^{00}g_{00,0} + g^{0i}(g_{i0,0} + g_{i0,0} - g_{00,i})) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}(1-2A)(2aa'(1+2A) + a^2 2A')\right) \\
&= \frac{a'}{a} + A' \\
\Gamma_{i0}^0 &= \frac{1}{2}(g^{00}g_{00,i} + g^{0j}(g_{ji,0} + g_{j0,i} - g_{i0,j})) \\
&= A_{,i} - \frac{a'}{a}B_i = i\delta_{i3}(kA + \frac{a'}{a}B) \\
\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}(g^{00}(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) + g^{0k}(g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})) \\
&= \frac{a'}{a}\delta_{ij} + \frac{1}{2}(B_{i,j} + B_{j,i}) - 2\frac{a'}{a}A\delta_{ij} \\
&= \frac{a'}{a}\delta_{ij} + kB\delta_{i3}\delta_{j3} - 2\frac{a'}{a}A\delta_{ij} \\
\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}(g^{i0}g_{00,0} + g^{ij}(2g_{j0,0} - g_{00,j})) \\
&= -\frac{a'}{a}B_i - B'_i + A_{,i} = i\delta_{i3}\left(\frac{a'}{a}B + B' + kA\right) \\
\Gamma_{j0}^i &= \frac{1}{2}(g^{i0}g_{00,j} + g^{ik}(g_{kj,0} + g_{k0,j} - g_{j0,k})) \\
&= \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \frac{1}{2}(B_{i,j} - B_{j,i}) + D'\delta_{ij} + E'_{ij} = \frac{a'}{a}\delta_{ij} + D'\delta_{ij} + E'_{ij} \\
\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}(-g^{i0}g_{jk,0}) + \frac{1}{2}g^{i\ell}(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}) \\
&= \frac{a'}{a}B_i\delta_{jk} + (D_{,j}\delta_{ik} + D_{,k}\delta_{ij} - D_{,i}\delta_{jk}) + (E_{ik,j} + E_{ij,k} - E_{jk,i}) \\
&= -i\frac{a'}{a}B\delta_{jk}\delta_{i3} + (D_{,j}\delta_{ik} + D_{,k}\delta_{ij} - D_{,i}\delta_{jk}) + (E_{ik,j} + E_{ij,k} - E_{jk,i}) \quad (4.108)
\end{aligned}$$

良く出てくる縮約も以下にまとめておく。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0\mu}^\mu &= 4\frac{a'}{a} + A' + 3D' \\
\Gamma_{i\mu}^\mu &= A_{,i} + 3D_{,3}\delta_{i3} = ik(A + 3D)\delta_{i3} \quad (4.109)
\end{aligned}$$

以下では、spatial flat gauge を選択する、エネルギー-運動量保存則からスカラー場の揺らぎの発展方程式を導く。

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\beta}^\mu T_\nu^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta T_\beta^\mu = 0 \quad (4.110)$$

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi + \delta_\nu^\mu \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V \right) \quad (4.111)$$

を用いる。エネルギー運動量テンソルの各成分を求める。

$$T_0^0 = - \left[\frac{1}{2a^2} \phi_0'^2 + V(\phi_0) - \frac{A}{a^2} \phi_0'^2 + \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi' + V' \delta\phi \right] \quad (4.112)$$

$$T_i^0 = -\frac{1}{a^2} \phi_0' \partial_i \delta\phi = -ik \frac{1}{a^2} \phi_0' \delta\phi \delta_{i3} \quad (4.113)$$

$$T_0^i = -\frac{B_i}{a^2} \phi_0'^2 + \frac{1}{a^2} \phi_0' \partial_i \delta\phi = \frac{i}{a^2} (B\phi_0'^2 + k\phi_0' \delta\phi) \delta_{i3} \quad (4.114)$$

$$T_j^i = \delta_j^i \left(\frac{\phi_0'^2}{2a^2} - V(\phi_0) + \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi' - \frac{A}{a^2} \phi_0'^2 - V' \delta\phi \right) \quad (4.115)$$

したがって

$$\delta\rho_\phi = -\frac{A}{a^2} \phi_0'^2 + \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi' + V' \delta\phi \quad (4.116)$$

$$\delta P_\phi = \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi' - \frac{A}{a^2} \phi_0'^2 - V' \delta\phi \quad (4.117)$$

保存則の第ゼロ成分は次のようになる。

$$(T_0^0)' + \partial_i T_0^i + \Gamma_{0\mu}^\mu T_0^0 + \Gamma_{i\mu}^\mu T_0^i - \Gamma_{00}^0 T_0^0 - \Gamma_{0i}^0 T_0^i - \Gamma_{00}^i T_0^0 - \Gamma_{0j}^i T_0^j = 0$$

$$\begin{aligned} 0 = & -(\rho_0 + \delta\rho)' - \frac{k}{a^2} (B\phi_0'^2 + k\phi_0' \delta\phi) - (4\frac{a'}{a} + A')(\rho_0 + \delta\rho) \\ & + (\frac{a'}{a} + A')(\rho_0 + \delta\rho) - 3\frac{a'}{a} (P_0 + \delta P) \end{aligned}$$

摂動一次量の満たす方程式は以下のようになる。

$$0 = -\delta\rho' - \frac{k}{a^2} (B\phi_0'^2 + k\phi_0' \delta\phi) - 3\frac{a'}{a} (\delta\rho + \delta P)$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta\rho' = & -\frac{A'}{a^2} \phi_0'^2 - \frac{2A}{a^2} \phi_0'' \phi_0' + \frac{2a'}{a^3} A \phi_0'^2 \\ & + \frac{\phi_0''}{a^2} \delta\phi' + \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi'' - \frac{2a'}{a^3} \phi_0' \delta\phi' \\ & + V'' \phi_0' \delta\phi + V' \delta\phi' \end{aligned}$$

ゼロ次解が満たす方程式は以下のように求まる。

$$\phi_0'' + 2aH\phi_0' + a^2V' = 0 \quad (4.118)$$

以上より

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + (a^2V'' + k^2)\delta\phi \\ &\quad - A'\phi_0' + 2a^2AV' + kB\phi_0' \end{aligned} \quad (4.119)$$

次にアインシュタイン方程式から *spatially flat gauge* でのメトリックのスカラー成分の満たす方程式を導出する。エネルギー運動量テンソルの縮約を求める。

$$T = T_\mu^\mu = -\rho_0 + 3P_0 - \delta\rho + 3\delta P$$

リッチテンソルをクリストッフエルから計算する公式を挙げておく。

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma$$

R_{00}

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma_{00,\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha,0}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{0\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\sigma \\ &= \left(\frac{a'}{a} + A'\right)' + i\partial_3 \left(\frac{a'}{a}B + B' + kA\right) - \left(4\frac{a'}{a} + A'\right)' \\ &\quad + \left(4\frac{a'}{a} + A'\right) \left(\frac{a'}{a} + A'\right) + iA_{,3} \left(\frac{a'}{a}B + B' + kA\right) \\ &\quad - \left(\frac{a'}{a} + A'\right)^2 - \left(\frac{a'}{a}\delta_{ij}\right)^2 \\ &= -3\frac{a''}{a} + 3\frac{a'^2}{a^2} \\ &\quad + 3aHA' - k^2A - kaHB - kB' \end{aligned} \quad (4.120)$$

アインシュタイン方程式の右辺を求める。

$$\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} &= g_{0\mu}T_0^\mu - \frac{1}{2}Tg_{00} \\ &= -a^2(1+2A)(-\rho_0 - \delta\rho) \\ &\quad + \frac{1}{2}a^2(1+2A)(-\rho_0 - \delta\rho + 3P_0 + 3\delta P) \\ &= \frac{a^2}{2}(\rho_0 + 3P_0) + \frac{a^2}{2}(\delta\rho + 3\delta P) + a^2A(\rho_0 + 3P_0) \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2}(\rho_0 + 3P_0) + 2\phi'_0 \delta\phi' - a^2 V' \delta\phi - 2a^2 VA \quad (4.121)$$

アインシュタイン方程式の 00 成分から以下の方程式を得る。ゼロ次

$$-3\frac{a''}{a} + 3\frac{a'^2}{a^2} = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \frac{a^2}{2}(\rho_0 + 3P_0) \quad (4.122)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G(\rho_0 + 3P_0) \quad (4.123)$$

一次

$$\begin{aligned} & 3aHA' - k^2 A - kaHB - kB' \\ &= \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} (2\phi'_0 \delta\phi' - a^2 V' \delta\phi - 2a^2 VA) \end{aligned} \quad (4.124)$$

R_{0i}

$$\begin{aligned} R_{0i} &= \Gamma_{0i,\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha,i}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \Gamma_{0i}^\sigma - \Gamma_{i\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\sigma \\ &= i\delta_{i3} \left[2k\frac{a'}{a}A + \frac{a''}{a}B + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 B \right] \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} T_{0i} - \frac{1}{2}Tg_{i0} &= g_{00}T_i^0 + g_{0j}T_i^j - \frac{1}{2}Tg_{0i} \\ &= -a^2(1+2A) \left(-\frac{1}{a^2}ik\phi'_0 \delta\phi \delta_{i3} \right) - a^2 B_i P_0 + \frac{1}{2}a^2 B_i (-\rho_0 + 3P_0) \\ &= ik\phi'_0 \delta\phi \delta_{i3} + \frac{a^2}{2} B_i (-\rho_0 + P_0) \\ &= ik\phi'_0 \delta\phi \delta_{i3} - i\frac{a^2}{2} B(-\rho_0 + P_0) \delta_{i3} \\ &= ik\phi'_0 \delta\phi \delta_{i3} + ia^2 BV \delta_{i3} \end{aligned} \quad (4.127)$$

Spatially flat gauge では $D = E = 0$ であることを使って、アインシュタイン方程式から以下の式を得る。

$$2ik\frac{a'}{a}A + i\frac{a''}{a}B + i\left(\frac{a'}{a}\right)^2 B = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} (ik\phi'_0 \delta\phi + ia^2 BV) \quad (4.128)$$

ここでアインシュタイン方程式の ij 成分のゼロ次で得られる次の方程式と

$$3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \rho_0 \quad (4.129)$$

と式 (4.123) から次の式を得る。

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} (\rho_0 - P_0) = \frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} V \quad (4.130)$$

従って、03 のアインシュタイン方程式から導かれた摂動一次量の方程式の内、 B の係数はゼロ次のアインシュタイン方程式を満たすため消える。残量は以下の式である。

$$2\frac{a'}{a}A = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \phi'_0 \delta\phi \quad (4.131)$$

R_{ij}

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \Gamma_{ij,\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma \Gamma_{ij}^\sigma - \Gamma_{j\sigma}^\sigma \Gamma_{\alpha i}^\sigma \\ &= \Gamma_{ij,0}^0 + \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha + \Gamma_{\alpha 0}^\alpha \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{\alpha k}^\alpha \Gamma_{ij}^k \\ &\quad - \Gamma_{j0}^0 \Gamma_{\alpha i}^\alpha - \Gamma_{jk}^k \Gamma_{\alpha i}^\alpha - \Gamma_{j0}^l \Gamma_{li}^0 - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^k \\ &= \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) \delta_{ij} - 2A \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) \delta_{ij} - \frac{a'}{a} A' \delta_{ij} \\ &\quad + k^2 A \delta_{i3} \delta_{j3} + 2k \frac{a'}{a} B \delta_{i3} \delta_{j3} + k \frac{a'}{a} B \delta_{ij} + kB' \delta_{i3} \delta_{j3} \end{aligned} \quad (4.132)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} &= g_{i\mu} T_j^\mu - \frac{1}{2} T g_{ij} \\ &= a^2 (P_0 + \delta P) \delta_{ij} \\ &\quad - \frac{a^2}{2} (-\rho_0 + 3P_0 - \delta\rho + 3\delta P) \delta_{ij} \\ &= \frac{a^2}{2} (\rho_0 - P_0) \delta_{ij} + a^2 V' \delta\phi \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.133)$$

よってゼロ次

$$\left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\rho_0 - P_0) \quad (4.134)$$

一次

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} V' \delta\phi \delta_{ij} &= -2A \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) \delta_{ij} \\ &\quad - \frac{a'}{a} A' \delta_{ij} + k^2 A \delta_{i3} \delta_{j3} \\ &\quad + 2k \frac{a'}{a} B \delta_{i3} \delta_{j3} + k \frac{a'}{a} B \delta_{ij} + kB' \delta_{i3} \delta_{j3} \end{aligned} \quad (4.135)$$

トレースを取ると

$$\begin{aligned} \frac{3a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} V' \delta\phi &= -6 \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) A - 3 \frac{a'}{a} A' \\ &\quad + k^2 A + 5k \frac{a'}{a} B + kB' \end{aligned} \quad (4.136)$$

以上の結果を $a' = a^2 H$, $a'' = 2a^3 H^2 + a^3 \dot{H}$ を用いて整理する。

$$\begin{aligned} \frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 &= a^2(3H^2 + \dot{H}) \\ &= \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\rho_0 - P_0) = \frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} V \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = a^2 \frac{\ddot{a}}{a} = -a^2 \frac{4\pi}{3} G(\rho_0 + 3P_0) \quad (4.138)$$

上の式から下の式を引くと

$$H^2 = \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2} \rho_0 = \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{1}{2a^2} \phi_0'^2 + V\right) \quad (4.139)$$

(4.137) より

$$3H^2 + \dot{H} = \frac{V}{\tilde{M}_{pl}^2} \quad (4.140)$$

(4.137) と (4.140) より

$$\dot{H} = -\frac{1}{2a^2} \frac{\phi_0'^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \quad (4.141)$$

この式を conformal time で微分すると

$$\begin{aligned} \ddot{H} &= -\frac{\phi_0''\phi_0'}{a^3\tilde{M}_{pl}^2} + \frac{H}{a^2} \frac{\phi_0'^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \\ &= \frac{2\phi_0''}{a\phi_0'} \dot{H} - 2H\dot{H} \end{aligned} \quad (4.142)$$

スカラー場のゼロ次満たす方程式から

$$V' = -\frac{1}{a^2} (\phi_0'' + 2aH\phi_0') \quad (4.143)$$

一次の摂動量の方程式

$$\begin{aligned} 3\frac{H}{a}A' - \left(\frac{k}{a}\right)^2 A - \frac{k}{a}HB - \frac{k}{a^2}B' \\ = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{2\phi_0'\delta\phi'}{a^2} - V'\delta\phi - 2VA \right) \end{aligned} \quad (4.144)$$

$$2HA = \frac{1}{a\tilde{M}_{pl}^2} \phi_0'\delta\phi \quad (4.145)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{\tilde{M}_{pl}^2} V'\delta\phi = -6(3H^2 + \dot{H})A - 3\frac{H}{a}A' \\ + \left(\frac{k}{a}\right)^2 A + 5\frac{k}{a}HB + \frac{k}{a^2}B' \end{aligned} \quad (4.146)$$

$$\begin{aligned} \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + (a^2V'' + k^2)\delta\phi \\ - A'\phi_0' + 2a^2AV' + kB\phi_0' = 0 \end{aligned} \quad (4.147)$$

4.1.8 スカラー場の揺らぎの発展方程式のゲージ不変形式

Spatially flat gauge では、ゲージ不変量即ち佐々木ームハノフ変数 Q が、スカラー場の揺らぎのみとなる。従って、spatially flat ゲージでのスカラー

場の揺らぎの発展方程式を求めれば、それが佐々木ームハノフ変数の発展方程式となる。そこで以下 spatially flat ゲージでのスカラー場の揺らぎの発展方程式を求める。前節で得られた結果を用いてゲージ不変なスカラー場の揺らぎ即ち佐々木ームハノフ変数の発展方程式を導く。(4.141) より

$$A = \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \frac{1}{aH} \phi'_0 \delta\phi = -a \frac{\dot{H}}{H} \frac{\delta\phi}{\phi'_0} \quad (4.148)$$

(4.144) と (4.146) を足すと

$$\frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{\phi'_0 \delta\phi'}{a^2} + V' \delta\phi - VA \right) = -3(3H^2 + \dot{H})A + 2\frac{k}{a} HB$$

左辺第一項は (4.141) より

$$\frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \frac{\phi'_0 \delta\phi'}{a^2} = \frac{\phi_0'^2}{2a^2 \tilde{M}_{pl}^2} 2\delta\phi' = -2\dot{H} \frac{\delta\phi'}{\phi'_0}$$

(4.140) の両辺を conformal time で微分すると

$$\frac{V'}{\tilde{M}_{pl}^2} \phi'_0 = 6aH\dot{H} + a\ddot{H} \quad (4.149)$$

これを左辺第二項に用いる。左辺第三項は式 (4.140) より

$$-\frac{V}{\tilde{M}_{pl}^2} A = -(3H^2 + \dot{H})A$$

以上を代入すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} 2\frac{k}{a} HB &= -2\dot{H} \frac{\delta\phi'}{\phi'_0} + (6aH\dot{H} + a\ddot{H}) \frac{\delta\phi}{\phi'_0} \\ &\quad + 2(3H^2 + \dot{H})A \end{aligned}$$

さらに (4.148) を代入すると

$$2\frac{k}{a} HB = -2\dot{H} \frac{\delta\phi'}{\phi'_0} + a\ddot{H} \frac{\delta\phi}{\phi'_0} - 2a \frac{\dot{H}^2}{H} \frac{\delta\phi}{\phi'_0}$$

したがって

$$\frac{k}{a} B = -\frac{\dot{H}}{H} \frac{\delta\phi'}{\phi'_0} + a \frac{\delta\phi}{\phi'_0} \left(\frac{\ddot{H}}{2H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} \right) \quad (4.150)$$

スカラー場の揺らぎの発展方程式を次のように整理する。

$$\begin{aligned} \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + (a^2V'' + k^2)\delta\phi \\ = A'\phi'_0 - 2AV' - kB\phi'_0 \end{aligned} \quad (4.151)$$

式 (4.148) の両辺を conformal time で微分する。

$$\begin{aligned} A' &= -a\frac{\dot{H}}{H\phi'_0}\delta\phi' + a\frac{\dot{H}}{H}\frac{\phi''_0}{\phi_0^2}\delta\phi \\ &\quad + a^2\frac{\dot{H}^2}{H^2\phi'_0}\delta\phi - a^2\frac{\ddot{H}}{H\phi'_0}\delta\phi - a^2\frac{\dot{H}}{\phi'_0}\delta\phi \end{aligned} \quad (4.152)$$

式 (4.151) の右辺は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} (r.h.s.) &= \phi'_0\left[-a\frac{\dot{H}}{H\phi'_0}\delta\phi' + a\frac{\dot{H}}{H}\frac{\phi''_0}{\phi_0^2}\delta\phi\right. \\ &\quad \left.+ a^2\frac{\dot{H}^2}{H^2\phi'_0}\delta\phi - a^2\frac{\ddot{H}}{H\phi'_0}\delta\phi - a^2\frac{\dot{H}}{\phi'_0}\delta\phi\right] \\ &\quad - 2a^2\left(-a\frac{\dot{H}}{H\phi'_0}\right)\left(-\frac{1}{a^2}(\phi''_0 + 2aH\phi'_0)\right)\delta\phi \\ &\quad - a\phi'_0\left(-\frac{\dot{H}}{H}\frac{\delta\phi'}{\phi'_0} + a\frac{\delta\phi}{\phi'_0}\left(\frac{\dot{H}}{2H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2}\right)\right) \\ &= a^2\left[-\frac{\dot{H}}{aH}\frac{\phi''_0}{\phi'_0} + 2\frac{\dot{H}^2}{H^2} - \frac{3\dot{H}}{2H} - 5\dot{H}\right]\delta\phi \end{aligned}$$

式 (4.142) を用いると

$$(r.h.s.) = -2a^2\left(3\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} + \frac{\dot{H}}{H}\right)\delta\phi \quad (4.153)$$

となる。以上からゲージ不変なスカラー場の揺らぎの発展方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + k^2\delta\phi \\ + a^2\left(V'' + 2\left(3\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} + \frac{\dot{H}}{H}\right)\right)\delta\phi = 0 \end{aligned} \quad (4.154)$$

最後の項は Klein-Golden 方程式の mass term に相当するので

$$m^2 \equiv V'' + 2\left(3\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} + \frac{\dot{H}}{H}\right) \quad (4.155)$$

とおく。ここで

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{H}}{H} \right) &= a^3 \frac{\ddot{H}}{H} + 3a^2 \dot{a} \frac{\dot{H}}{H} - a^3 \frac{\dot{H}^2}{H^2} \\ &= a^3 \left(\frac{\ddot{H}}{H} + 3\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{H}}{H} \right) &= -\frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{\phi}_0^2}{H} \right)\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\delta\phi'' + 2aH\delta\phi' \\ + a^2 \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + V'' - \frac{1}{a^3 \tilde{M}_{pl}^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{\phi}_0^2}{H} \right) \right] \delta\phi = 0\end{aligned}\quad (4.156)$$

Mass term を更に変形する。

$$\begin{aligned}V'' &= -\frac{d}{d\phi_0} \left[\frac{1}{a^2} (\phi_0'' + 2Ha\phi_0') \right] \\ &= -\frac{d\tau}{d\phi_0} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{a^2} (\phi_0'' + 2Ha\phi_0') \right] \\ &= -\frac{1}{a^2} \left[\frac{\phi_0'''}{\phi_0'} - 2H^2 a^2 + 2aH' \right] \\ m^2 &= \frac{1}{a^2} \left[-\frac{\phi_0'''}{\phi_0'} + 2H^2 a^2 - 2\frac{H'^2}{H^2} + 4\frac{H'}{H} \frac{\phi_0''}{\phi_0'} \right]\end{aligned}\quad (4.157)$$

更に $u = a\delta\phi$ において以下の式を使って変数変換する。

$$\begin{aligned}u' &= a^2 H \delta\phi + a \delta\phi' \\ u'' &= a \delta\phi'' + 2a^2 H \delta\phi' + (a^2 H' + 2a^3 H^2) \delta\phi \\ u'' - (a^2 H' + 2a^3 H^2) \delta\phi + a^3 \left(\frac{k}{a} \right)^2 \delta\phi \\ + a \left[-\frac{\phi_0'''}{\phi_0'} + 2H^2 a^2 - 2\frac{H'^2}{H^2} + 4\frac{H'}{H} \frac{\phi_0''}{\phi_0'} \right] \delta\phi &= 0 \\ u'' + \left[k^2 - \frac{\phi_0'''}{\phi_0'} - aH' - 2\frac{H'^2}{H^2} + 4\frac{H'}{H} \frac{\phi_0''}{\phi_0'} \right] u &= 0\end{aligned}$$

ここで

$$z \equiv \frac{\phi_0'}{H} \quad (4.158)$$

とおき

$$H'' = 2 \frac{\phi_0''}{\phi_0'} H' - a H H' \quad (4.159)$$

$$\frac{1}{z} z'' = \frac{\phi_0'''}{\phi_0'} - 2 \frac{H'}{H} \frac{\phi_0''}{\phi_0'} - \frac{H''}{H} + 2 \frac{H'^2}{H^2} \quad (4.160)$$

を使って変形すると以下の式を得る。

$$u'' + \left[k^2 - \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2} \right] u = 0 \quad (4.161)$$

Spatially flat ゲージでは $Q = \delta\phi$ であったので以下の式がゲージ不変量 $P \equiv aQ$ の満たす方程式である。

$$P'' + \left[k^2 - \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2} \right] P = 0 \quad (4.162)$$

4.1.9 Power spectrum of scalar perturbation

スローロール近似の一次までで

$$\frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2} \sim \frac{2 - 3\eta + 9\varepsilon}{\tau^2}$$

と書ける。従って、(4.160) は次数

$$v \sim \frac{3}{2} - \eta + 3\varepsilon \quad (4.163)$$

のベッセル方程式である。佐々木-ームハノフ変数のパワースペクトルは以下のように書ける。

$$P_Q(k) = (2H)^{6\varepsilon - 2\eta} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\Gamma(v)}{\Gamma(3/2)} \right)^2 \left(\frac{k}{a} \right)^{-6\varepsilon + 2\eta} \quad (4.164)$$

ここまでは計算をし易くする為に spatially flat ゲージで扱ってきた。しかし、実際の物理を見るには、 $Q = \varphi$ となる TM ゲージを扱うのが便利で

ある。TM ゲージでの spatial curvature は spatially flat ゲージで求めたスカラー場の揺らぎと次の関係で結ばれる。

$$\varphi_{TM} = -\frac{H}{\dot{\phi}_0} \delta\phi_{SF} \quad (4.165)$$

従って空間曲率のパワースペクトルは次のように求まる。

$$P_\varphi(k) = (2H)^{6\varepsilon-2\eta} \left(\frac{H}{\dot{\phi}_0}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\right)^2 \left(\frac{k}{a}\right)^{-6\varepsilon+2\eta} \quad (4.166)$$

(4.144),(4.146) 等を用いると以下のようなになる。

$$P_\varphi(k) \sim \frac{1}{24\pi^2 \tilde{M}_{pl}^4} \frac{V}{\varepsilon} \left(\frac{k}{2aH}\right)^{-6\varepsilon+2\eta} \sim \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.167)$$

ここで

$$\frac{d\varepsilon}{d\ln k} = -2\varepsilon\eta + 4\varepsilon^2 \quad (4.168)$$

を用いるとスペクトルインデックス n は以下のように求まる。

$$n-1 \equiv \frac{d\ln P_\varphi}{d\ln k} = 2\eta - 6\varepsilon \quad (4.169)$$

これは、ゲージ不変な揺らぎの発展方程式から導いた結果と一致している。ところでスカラー曲率のスペクトルインデックスをわざわざ $n-1$ で定義した理由は以下のことによる。宇宙論では、伝統的に構造形成の密度揺らぎのパワースペクトルを

$$|\delta\rho_k|^2 \propto k^n \quad (4.170)$$

と定義する習慣がある。この定義と矛盾しないようにするため上記のように $n-1$ で定義したのである。ポアソン方程式から

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_N &= 4\pi G a^2 \delta\rho_k \\ \Phi_N &\propto k^{-2} \delta\rho_k \end{aligned}$$

となる。したがって、空間曲率のパワースペクトルは

$$\int d\ln k P_\Phi(k) \propto \int d\ln k k^3 k^{-4} |\delta\rho_k|^2 \propto \int d\ln k k^{n-1}$$

となり、 $n=1$ の時、空間曲率がスケールによらないスケール不変な量になる。インフレーションが考案される以前に密度揺らぎの初期条件として、空間曲率がスケール不変になるのが自然と考えて $n=1$ を提案した二人の物理学者の名前をとって $n=1$ のスペクトルを Harrison-Zel'dovich spectrum と呼ぶこともある。

4.1.10 スーパーホライズンスケールのスカラー摂動の進化

インフレーション後の揺らぎの進化を扱うには、Conformal Newtonian ゲージが馴染みが深く物理的に扱い易い。そこで Conformal Newtonian ゲージでのスカラー摂動の進化の方程式を求める。メトリックは次のように書ける。

$$g_{00} = -a^2(1+2\Psi)g_{0i} = 0g_{ij} = a^2(1-2\Phi)\delta_{ij}$$

$$g^{00} = -\frac{1}{a^2}(1-2\Psi)g^{0i} = 0g^{ij} = \frac{1}{a^2}(1+2\Phi)\delta^{ij}$$

クリストッフェルの全ての成分をまとめる。

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} = \frac{a'}{a} + \Psi'$$

$$\Gamma_{i0}^0 = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i} = \Psi_{,i} = ik\Psi\delta_{i3}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(-g_{ij,0}) = \left(\frac{a'}{a}(1-2\Psi_N - 2\Phi_N) - \Phi'_N\right)\delta_{ij}$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{ii}(-g_{00,i}) = \Psi_{,i} = ik\Psi\delta_{i3}$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{ii}g_{ij,0} = \left(\frac{a'}{a} - \Phi'\right)\delta_j^i$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{ii}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}) = -\Phi_{,k}\delta_{ij} - \Phi_{,j}\delta_{ik} + \Phi_{,i}\delta_{jk} = ik\Phi(-\delta_{k3}\delta_{ij} - \delta_{j3}\delta_{ik} + \delta_{i3}\delta_{jk})$$

$$\Gamma_{i0}^i = 3\left(\frac{a'}{a} - \Phi'\right)$$

$$\Gamma_{ji}^i = -3ik\Phi_N\delta_{j3}$$

$$\Gamma_{0\alpha}^\alpha = 4\frac{a'}{a} - 3\Phi'_N + \Psi'_N$$

$$\Gamma_{i\alpha}^\alpha = (-3ik\Phi_N + ik\Psi_N)\delta_{i3}$$

エネルギー運動量テンソルの各成分は次のように書ける。

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\rho_0 - \delta\rho \\ T_i^0 &= (\rho_0 + P_0)v_i \\ T_0^i &= -(\rho_0 + P_0)v_i \\ T_j^i &= (P_0 + \delta P)\delta_j^i + \Sigma_j^i \end{aligned}$$

物質の状態方程式を

$$P_0 = w\rho_0 \quad (4.171)$$

で表す。また、density contrast を以下のように定義する。

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_0} \quad (4.172)$$

エネルギー保存則 $\nabla_\mu T_0^\mu = 0$ より次の式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu T_0^\mu = T_{0,0}^0 + \Gamma_{0\sigma}^0 T_0^\sigma - \Gamma_{00}^\sigma T_\sigma^0 + T_{0,i}^i + \Gamma_{i\sigma}^i T_0^\sigma - \Gamma_{i0}^\sigma T_\sigma^i \\ &= -\rho_0' - \delta\rho' - k(1+w)\rho_0 V_N - 3(aH - \Phi')\rho_0 - 3aH\delta\rho - 3(aH - \Phi')P_0 - 3aH\delta P \end{aligned}$$

ゼロ次

$$\rho_0' + 3aH(1+w)\rho_0 = 0 \quad (4.173)$$

一次

$$\delta\rho' + k(1+w)\rho_0 V_N - 3\Phi_N'(1+w)\rho_0 + 3aH(\delta\rho + \delta P) = 0 \quad (4.174)$$

$$\delta_N' + k(1+w)V_N - 3(1+w)\Phi_N' - 3aHw\delta_N + 3aH\frac{\delta P_N}{\rho_0} = 0 \quad (4.175)$$

この方程式は以下のような微小体積 V 内のエネルギー保存則からも導ける。

Conformal Newtonian ゲージでは

$$V = a^3(1 - 2\Phi_N)^{3/2}d^3x$$

である。体積の時間変化率は次の3つの項に分解される。宇宙膨張による寄与、つまりスケールファクターの時間微分から来る寄与。メトリックの揺

らぎの時間変化による寄与、つまり Φ の時間変化による寄与。体積の境界が共動座標に対し相対運動を持つことによる寄与、つまり peculiar velocity の存在による寄与。最後の寄与は $div\vec{v}$ で表す事が出来る。エネルギー保存則は次のように書ける。

$$\frac{d(\rho_0 + \delta\rho)V}{dt} + (P_0 + \delta P)\frac{dV}{dt} = 0$$

上記のことを考慮すると

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 3\frac{\dot{a}}{a} - 3\dot{\Phi} + div\vec{v}$$

となり、これを微小体積 V 内のエネルギー保存則に適応すると以下の式を得る。

$$\delta\dot{\rho} + 3H\delta\rho - 3\rho_0(1+w)\dot{\Phi} + kV_N(1+w)\rho_0 + 3H\delta P = 0 \quad (4.176)$$

確かに (4.172) と一致する結果を得た。

次に運動量保存則を扱う。

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_0 T_i^0 + \nabla_j T_i^j = T_{i,0}^0 + \Gamma_{\sigma 0}^0 T_i^\sigma - \Gamma_{0i}^\sigma T_\sigma^0 \\ &\quad + T_{i,j}^j + \Gamma_{\sigma j}^j T_i^\sigma - \Gamma_{ji}^\sigma T_\sigma^j \\ &= ((\rho_0 + P_0)v_i)' + \delta P_{,i} + \Sigma_{i,j}^j + \frac{a'}{a}(\rho_0 + P_0)v_i + ik\Psi(\rho_0 + P_0)\delta_{i3} - \frac{a'}{a}(\rho_0 + P_0)v_i \\ &\quad + 3\frac{a'}{a}(\rho_0 + P_0)v_i\delta_{i3} - \frac{a'}{a}(\rho_0 + P_0)v_i \end{aligned}$$

今スカラーモードにのみ興味があるので $i = 3$ として以下の方程式を得る。

$$V_N' + aH(1-3w)V_N + \frac{w'}{1+w}V_N - k\Psi_N - \frac{k\delta P}{(1+w)\rho_0} + \frac{2}{3}\frac{k\Sigma}{(1+w)\rho_0} = 0 \quad (4.177)$$

次にアインシュタイン方程式からメトリックの揺らぎが満たす方程式を求める。エネルギー運動量テンソルのトレースを求める。

$$T = -\rho_0 - \delta\rho + 3P_0 + 3\delta P$$

$$R_{00} = -3\frac{a''}{a} + 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - k^2\Psi_N + 3\Phi_N'' + 3aH(\Psi_N' + \Phi_N')$$

$$g_{00}(T_0^0 - \frac{1}{2}T) = \frac{a^2}{2}(\rho_0 + 3P_0 + \delta\rho + 3\delta P + 2\Psi(\rho_0 + 3P_0))$$

0次

$$\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -\frac{a^2}{6\tilde{M}_{pl}^2}(\rho_0 + 3P_0) \quad (4.178)$$

一次

$$-k^2\Psi_N + 3\Phi_N'' + 3aH(\Psi_N' + \Phi_N') = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\delta\rho + 3\delta P + 2\Psi(\rho_0 + 3P_0))$$

$$(4.179)$$

 R_{ij}

$$R_{ij} = \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)\delta_{ij} - 2\left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)(\Psi_N + \Phi_N)\delta_{ij}$$

$$+ k^2(\Psi_N - \Phi_N)\delta_{i3}\delta_{j3} - k^2\Phi_N\delta_{ij} - \Phi_N''\delta_{ij} - \frac{a'}{a}(\Psi_N' + 5\Phi_N')\delta_{ij}$$

0次

$$\left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\rho_0 - P_0) \quad (4.180)$$

一次 $i = j = 2$

$$-2\left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)(\Psi_N + \Phi_N) - k^2\Phi_N - \Phi_N'' - \frac{a'}{a}(\Psi_N' + 5\Phi_N')$$

$$= \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\delta\rho - \delta P + \frac{2}{3}\Sigma - 2\Phi(\rho_0 - P_0))$$

 $i = j = 3$

$$k^2(\Psi_N - \Phi_N) - 2\left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)(\Psi_N + \Phi_N) - k^2\Phi_N - \Phi_N'' - \frac{a'}{a}(\Psi_N' + 5\Phi_N')$$

$$= \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\delta\rho - \delta P - \frac{4}{3}\Sigma - 2\Phi(\rho_0 - P_0))$$

下の式から上の式を引くと

$$k^2(\Psi_N - \Phi_N) = -\frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \Sigma \quad (4.181)$$

よって、非等方ストレス Σ がゼロの時 $\Psi_N = \Phi_N$ となる。 R_{30}

$$2ik\Phi'_N + 2\frac{a'}{a}ik\Psi_N = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2}(\rho_0 + P_0)a^2iV \quad (4.182)$$

$$\Phi'_N + aH\Psi_N = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}\rho_0(1+w)\frac{V}{k} \quad (4.183)$$

空間部の対角成分の和を取ると

$$\begin{aligned} & -3k^2\Phi_N + k^2(\Psi_N - \Phi_N) - 3\Phi''_N - 3aH(\Psi'_N + 5\Phi'_N) \\ & = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}[6(\rho_0 - P_0)\Psi_N + 3(\delta\rho - \delta P)] \end{aligned}$$

これと (00) 成分の和をとり (30) 成分の結果を用いると以下の結果を得る。

$$k^2\Phi_N = -\frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}\rho_0[\delta_N + 3aH(1+w)\frac{V_N}{k}] \quad (4.184)$$

これで Bardeen 変数の満たす方程式を導く準備が整った。Bardeen 変数の conformal time での一階微分に (4.173) を代入する。以下非等方ストレスは無視出来るとする。

$$\zeta' = -\Phi'_N + \frac{\delta'_N}{3(1+w)} = -\frac{k}{3}V_N - \frac{aH}{1+w}\frac{\Delta P}{\rho_0}$$

インフレーション時に生成される揺らぎは主に断熱揺らぎであるので $\Delta P = 0$ とし、この式をさらに conformal time で微分し、 $w' = 0$ として、(4.175) を代入すると

$$\zeta'' = -\frac{k}{3}\left[\frac{kw}{1+w}\left(\delta_N + 3aH(1+w)\frac{V_N}{k}\right) - aHV_N + k\Psi_N\right]$$

この式は (4.182) を用いると以下のように書き換えられる。

$$\zeta'' = -\frac{k}{3}\left[k\frac{w}{1+w}\left(-\frac{2}{3}\frac{k^2}{a^2H^2}\Phi_N\right) - aHV_N + k\Phi_N\right]$$

$$= -aH\zeta' + \frac{1}{3}k^2\Phi_N \left(-1 + \frac{2}{3} \frac{w}{1+w} \frac{k^2}{a^2H^2} \right) \quad (4.185)$$

この方程式のスーパーホライズン極限の解を求める。(4.182) は次のように書き換えられる。

$$\Phi_N = -\frac{3}{2} \left(\frac{aH}{k} \right)^2 \left[\delta_N + 3aH(1+w) \frac{V_N}{k} \right]$$

スーパーホライズン極限では $aH/k \gg 1$ なので Bardeen 変数が満たす方程式は次のようになる。

$$\ddot{\zeta} + 2H\dot{\zeta} = 0$$

宇宙膨張を支配する物質の状態方程式を $P_0 = w\rho_0$ とすると $H = 2/(3(1+w)t)$ となるので $\zeta = t^n$ を代入すると $n = 0, (3w-1)/3(1+w)$ の二つの解を得る。後者は $-1 < w < 1/3$ である限り減衰解である。前者は、一定値をたもつ解である。したがって、ホライズンサイズより長い波長の揺らぎでは、 $\zeta \rightarrow const.$ となる。因果律が無いので、現状維持のまま変化出来ないと考えれば納得できる結果である。

4.1.11 CMB 観測との比較：スーパーホライズンスケール

CMB は、宇宙再結合期に物質の中性化が急激に進み、CMB 光子に対する光学的厚みが 1 を切った時期に発せられた電磁波である。これを最終散乱面 (last scattering surface) と呼ぶ。最終散乱面は、バリオンのイオン化率が約 0.01 になった頃である。COBE によってなされた宇宙最終散乱面 CMB においてスーパーホライズンスケールの温度異方性の観測との比較を行う。スーパーホライズンスケールでは、因果律が保てないため、音波のような振動モードは現れない。このスケールでの CMB の温度異方性は、以下の二つの効果の重ね合わせで現れる。インフレーション時に生成された密度揺らぎの主成分は、断熱的である。従って、物質密度が濃いところは、断熱条件を満たすように輻射密度も濃くなっている。このようにスーパーホライズンスケールであっても最終散乱面で既に CMB の温度揺らぎが刻印されている。これが物質から解放され観測者に届くまでには、インフレーション時

にそこに刻まれた重力ポテンシャルを這い上がってくる（降りてくる）必要があり、これにより光子はエネルギーを失う（得る）。これを Sachs-Wolfe 効果と呼ぶ。この小節では、この効果の定量評価を行う為の準備を行い、観測との比較を行う。

Spatially flat ゲージで導出したインフレーション時の生成されたスカラー場の揺らぎが、TM ゲージに移行することで全て空間曲率の揺らぎに置き換える事ができる。Bardeen 変数はゲージ不変量なので、TM ゲージでもこの量はスーパーホライズンスケールで保存量となる。重力ポテンシャルだけは、Newtonian ゲージの量を引き続き使用し、TM ゲージの物理量へ変換する。以下、簡単のため TM ゲージの物理量を引数無しで表す。

$$\delta = \delta_N + 3aH(1+w)\frac{V_N}{k} \quad (4.186)$$

$$\delta P = \delta P_N + 3aHw(1+w)\rho_0\frac{V_N}{k} - w'\rho_0\frac{V_N}{k} \quad (4.187)$$

$$V = V_N \quad (4.188)$$

非等方ストレスはゼロと仮定すると TM ゲージで摂動量の満たす方程式を得る。

$$\delta' = 3aHw\delta - (1+w)kV \quad (4.189)$$

$$V' = -aHV + \frac{\delta P}{(1+w)\rho_0} + k\Psi_N \quad (4.190)$$

$$k^2\Phi_N = -4\pi G a^2 \rho_0 \delta \quad (4.191)$$

$$\Psi_N = \Phi_N \quad (4.192)$$

$$\varphi = -\Phi_N - \frac{aH}{k}V \quad (4.193)$$

$$\zeta = -\Phi_N - \frac{aH}{k}V + \frac{1}{3}\frac{\delta}{1+w} \quad (4.194)$$

ポアソン方程式から以下の関係式を得る。

$$\delta = -\frac{2}{3}\frac{k^2}{a^2H^2}\Phi \quad (4.195)$$

これから TM ゲージでは、スーパーホライズン極限では、 $|\delta| \ll |\Phi_N|$ であり、 $\zeta \sim \varphi$ であることが分かる。つまり TM ゲージの空間曲率の揺らぎは

波長はホライズンより長い時、保存する事になる。

(4.187) を conformal time から t の微分に変換し、(4.189) を δ について解き両辺を時間微分し、エネルギー保存則のゼロ次の方程式と TM ゲージでの空間曲率の定義式 (4.191) を使用すると以下の式を得る。

$$\dot{\Phi} + \frac{5+3w}{2}H\Phi = -\frac{3}{2}(1+w)H\varphi \quad (4.196)$$

以下スーパーホライズンスケールの揺らぎを扱う。従って

$$\varphi = \text{constant} \quad (4.197)$$

インフレーション中では、 $w = -1$ で $H = \text{constant}$ なので解は以下のようになる。

$$\Phi = \Phi_0 e^{-Ht}$$

したがってポテンシャルはディケーする。一般の状態方程式の場合スケールファクターの時間依存性は

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

となる。これから一般の状態の時の Φ_N の方程式は以下のようになる。

$$\dot{\Phi}_N + \frac{5+3w}{3(1+w)}\frac{1}{t}\Phi_N = -\frac{1}{t}\varphi \quad (4.198)$$

解は

$$\Phi_N \propto t^{-\frac{5+3w}{3(1+w)}}$$

の decay モードと

$$\Phi_N = -\frac{3(1+w)}{5+3w}\varphi \quad (4.199)$$

の特解の重ね合わせとなる。ディケーモードは消えてしまうので興味が無い。これよりポテンシャルと空間曲率との間には、radiation dominant の時 $w = 1/3$

$$\Phi_N = -\frac{2}{3}\varphi \quad (4.200)$$

matter dominant の時 $w = 0$

$$\Phi_N = -\frac{3}{5}\varphi \quad (4.201)$$

という関係があることになる。

COBE DMR で見つかった温度揺らぎは四重極モーメントの標準偏差値として

$$Q_{rms} = 17.1 \pm 1.5 \mu\text{K} \quad (4.202)$$

であった即ち

$$\frac{\delta T}{T} = 6.24 \times 10^{-6} \quad (4.203)$$

である。COBE で温度ゆらぎを測定したスケールは、宇宙再結合時スーパーホライズンスケールであるから、COBE で測定された温度揺らぎは、インフレーション期に刻まれた断熱揺らぎ成分と Sachs-Wolfe 効果によるものの重ね合わせである。以下ではこれらにより、再結合時のスカラー曲率の揺らぎの振幅と CMB 温度揺らぎの振幅がどういう関係で結ばれるかと調べる。

まずは Sachs-Wolfe 効果について説明する。Newtonian ゲージ

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + a^2(1-2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (4.204)$$

を用いて (A.47) を計算し、膨張宇宙を伝搬する間の重力による光子のエネルギーの変化を導く方程式を求める。光子の周波数は局所慣性系で定義する。即ち

$$h\nu \equiv \frac{d\bar{x}^0}{d\lambda} \quad (4.205)$$

である。これを $\varepsilon = h\nu$ で表す。局所慣性系では $\tilde{P}_0 = \eta_{00}\tilde{P}^0 = -\varepsilon$ である。一般座標への変換は次の式でできる。

$$P_0 = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^0} \tilde{P}_\mu$$

変換係数は、局所慣性系から一般座標系へのメトリックテンソルの変換により得られる。

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -(1+2\Psi) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^0} \eta_{\mu\nu} \\
g_{0i} &= 0 = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^i} \eta_{\mu\nu} \\
g_{ij} &= a^2(1-2\Phi)\delta_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^j} \eta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

これを解くとしたがって、ホライズンサイズより長い波長の揺らぎでは、 $\zeta \rightarrow const.$ となる。因果律が無いので、現状維持のまま変化出来ないと考えれば納得できる結果である。次の解を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} &= (1+\Psi), \quad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^0} = 0 \\
\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^i} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = a(1-\Phi)\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{4.206}$$

したがって P_0 は

$$P_0 = -(1+\Psi)\varepsilon \tag{4.207}$$

で与えられる。簡単のため光子の進行方向を x_1 方向とし、重力レンズ効果による経路の曲がりか小さく、直進すると近似する。(A.47) から次の方程式を得る。

$$\begin{aligned}
-\frac{d(1+\Psi)\varepsilon}{dx^0} &= \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,0} \frac{P^\alpha P^\beta}{P^0} = \frac{1}{2} \left(g_{00,0}P^0 + g_{11,0} \frac{(P^1)^2}{P^0} \right) \\
&= \frac{1}{P^0} (-\dot{\Psi}(P^0)^2 - a^2\dot{\Phi}(P^1)^2 + H(1-2\Phi)a^2(P^1)^2)
\end{aligned}$$

ここで

$$0 = g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -(1+2\Psi)(P^0)^2 + a^2(1-2\Phi)(P^1)^2$$

を用いて $a^2(P^1)^2$ を消去すると次の式を得る。

$$-\frac{d(1+\Psi)\varepsilon}{dx^0} = -(\dot{\Psi} + \dot{\Phi})P^0 + H(1+2\Psi)P^0$$

$P^0 = g^{00}P_0 = -(1-2\Psi)P_0 = (1-\Psi)\varepsilon$ を代入して整理すると次の式を得る。

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} - H$$

$$\frac{1}{a\varepsilon} \frac{da\varepsilon}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (4.208)$$

最後の等式では、今扱っている宇宙再結合時以降は、 $\Psi = \Phi$ であることを使ってまとめた。この式の右辺第一項は、重力場中を光子が運動する。右辺第二項は、光子が旅する途中で重力ポテンシャルが時間変化することで光子のエネルギー変化を生じる効果を示す。これらの物理を直感的に分かり易くするため、質量 m の非相対論的粒子の重力場中の運動で対応付けを行う。粒子の運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\vec{\nabla}\Phi$$

このエネルギー積分を行うと

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

ここで $\varepsilon = v^2/2$ は単位質量あたりの運動エネルギー。右辺第一項は、スタート地点と終点での重力ポテンシャルの差額分が粒子の運動エネルギーになる効果を表している。第二項は、粒子の運動中に重力ポテンシャルの時間変化があった場合、それが粒子のエネルギーの増減に与える効果を表している。例として月の重力による人工衛星の散乱を考える。月が静止している場合、散乱前後で人工衛星のエネルギーの増減は無い。しかし、動いている月の運動を追う方向に人工衛星が突っ込んだ場合（追突）、衛星が月の近傍を回って月の重力で散乱される過程で月は衛星に近づいてくる。言い方を変えると衛星にとっての月の重力ポテンシャルが突っ込んだときより出て行くときの方が深くなる。その為、散乱により衛星のエネルギーは失われる。逆に衝突の場合は、散乱後衛星のエネルギーが増える。この原理を利用した、人工衛星の加速法をスイングバイ航法と呼ぶ。即ち、右辺第二項は、スイングバイによる衛星の加速効果を表している。

重力場中を伝搬する光子のエネルギーの変化率は、光子のエネルギーによらず一定である。従って、黒体放射である CMB は、重力ポテンシャルの揺らぎの効果によりプランク分布の形を保ち、温度が変化するのみである。その温度変化率は、光子のエネルギー変化率と等しい。CMB の温度異方性を

インフレーション時に刻印された断熱揺らぎ成分 (intrinsic 項) $\Theta_0(t_{ls}, \vec{x}_{ls}, \vec{n})$ と最終散乱面 (last scattering surface) から放出後観測者に届くまでの間に受けた効果 $(\delta T/T)_{jour}$ に分ける。ここで t_{ls} は最終散乱面の宇宙年齢、 \vec{x}_{ls} は観測者を原点して CMB が放出された最終散乱面の場所までの共同座標での位置ベクトル、 \vec{n} はその方向余弦である。

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{jour} = \frac{\delta(a\varepsilon)}{a\varepsilon} = \Phi(\vec{x}_{ls}, t_{ls}) - \Phi(\vec{0}, t_0) + 2 \int_{t_{ls}}^{t_0} \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} dt \quad (4.209)$$

右辺第一項、第二項が重力赤方偏移効果であり、最終散乱面で放出された時の重力ポテンシャルと観測者の場所での重力ポテンシャルの差が、温度増加率となっている。例えば、ポテンシャルの深い所から放たれた CMB は、この式から温度が低くなることが分かる。これは、エネルギーの一部を重力ポテンシャルの坂を登ることに費やすことで、CMB 光子のエネルギーが減少したためと考えれば良い。第三項は Integrated Sachs-Wolfe 効果と呼ばれる効果でありここでは無視する。

次に Intrinsic 項の値を評価する。断熱条件より、輻射場のエネルギー密度の揺らぎの相対値 δ_r^N と物質の密度の揺らぎの相対値 δ_m^N の間には以下の関係が成り立つ。以下、添字の N は Conformal Newtonian ゲージで定義された量であることを示す。

$$\frac{\delta_r^N}{4} = \frac{\delta_m^N}{3} \quad (4.210)$$

ここで新たな変数 $\Theta \equiv \delta T/T$ を導入する。輻射場 (CMB) のエネルギー密度は温度の 4 乗に比例するため intrinsic な温度揺らぎは

$$\Theta_0^N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}, \vec{n}) = \frac{\delta_r^N}{4} = \frac{\delta_m^N}{3} \quad (4.211)$$

と書ける。計算の見通しを良くするため TM ゲージに移る。最終散乱面は物質優勢期 ($w = 0$) であるため

$$\delta_m = \delta_m^N + 3 \frac{aH}{k} V \quad (4.212)$$

速度の揺らぎの実感発展は次の方程式の解として得られる。

$$V' + aHV = \frac{d}{dt}(aV) = k\Phi_N \quad (4.213)$$

ここで Φ_N は (4.197) から波長がホライズンサイズより長い間は、一定値を取る。宇宙膨張が進み、揺らぎの波長が何時かはホライズンサイズより短くなる。ホライズン再エントリーと呼ぶ。今、物質優勢期を扱っているので、後で示す様にホライズン再エントリー後も Φ_N は時間によらず定数となる。(4.211) を Φ_N が定数として解くと次の式をえる。

$$V = t \frac{k}{a} \Phi_N = \frac{2}{3} \frac{k}{aH} \Phi_N \quad (4.214)$$

ここで、物質優勢で宇宙が平坦 $\Omega_m = 1$ として $a \propto t^{2/3}$, $t = 2/3H$ を使った。(4.209) に代入すると

$$\begin{aligned} \Theta_0^N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) &= \frac{1}{3} \left(\delta_m - 3 \frac{aH}{k} V \right) = \frac{1}{3} \delta_m(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) - \frac{2}{3} \Phi_N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \\ &\sim -\frac{2}{3} \Phi_N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \end{aligned} \quad (4.215)$$

最後の変形では、最終散乱面ではまだスーパーホライズンであるので、ポテンシャル項に比べて密度揺らぎのコントラストは十分小さく無視できることを使った。最終散乱面で重力ポテンシャルが深い所では、intrinsic な温度揺らぎは正になることを示している。ポテンシャルが深いところは、物質も輻射もより集まっている所であり、圧縮により温度が上がっているのである。我々はポテンシャルゼロの地点に住んでいるとすると、観測される温度揺らぎはポテンシャルの揺らぎの次の式で結ばれる。

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{obs} = \frac{1}{3} \Phi_N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \quad (4.216)$$

(4.199) から空間曲率の揺らぎとスーパーホライズンスケールで観測された CMB 温度揺らぎの振幅との間に次の関係式が得られる。

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{obs} = -\frac{1}{5} \phi(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \quad (4.217)$$

(4.215) を (4.165) に代入し CMB 温度揺らぎでスカラー曲率のパワースペクトルを書き表し、(4.201) を代入すると次のようにインフレーションが起こったエネルギースケールについて制限が課せられる。

$$\frac{V^{1/4}}{\epsilon^{1/4}} = 6.5 \times 10^{16} \text{GeV} \quad (4.218)$$

CMB が放たれる宇宙再結合時は物質優勢期なので (4.193) と (4.198) から

$$\delta = \frac{2}{5} \frac{k^2}{a^2 H^2} \varphi \quad (4.219)$$

従ってスカラー曲率のパワースペクトルから宇宙再結合時にまだスーパーホリズンスケールにある長波長の揺らぎの density contrast のパワースペクトルが以下のように求まる。

$$P_\delta = \left(\frac{k}{aH} \right)^4 \delta_H^2 \quad (4.220)$$

$$\delta_H^2 \equiv \frac{4}{25} P_R \quad (4.221)$$

ここで δ_H は $k = a_0 H_0$ の揺らぎの振幅である。これらから COBE の観測で得られた温度揺らぎの四重極モーメントの値から、密度揺らぎの振幅の COBE normalization の値を得る。

$$\delta_H(k_{pivot}) = 1.91 \times 10^{-5} \quad (4.222)$$

$$k_{pivot} = 7.5 a_0 H_0 \quad (4.223)$$

ここでは $n = 1$ を仮定した。

4.1.12 Late stage evolution of density contrast and CMB spectrum

式 (4.211) を解く時、 Φ_N が時間に依存しないとした。この仮定が、物質のみで宇宙が平坦になっている場合、正しいことを示す。また、実際の宇宙は、現在はダークエネルギーが支配的であることが分かっている。そのことが、CMB スペクトルにどのように現れるかについて論じる。

現在我々が観測できる物は全て現在の宇宙のホライズンサイズより短いスケールの物だけである、つまり、我々の観測対象となりうるものは、宇宙進化の何処かの時期にホライズン再エントリを果たしていることになる。我々が観測する CMB は、放出された時期は、 $z = 1100$ 程度と非常に初期であるが、その後様々な時代の宇宙空間を伝わって $z = 0$ の我々まで届いてい

る。途中の構造形成の時間依存性によっては、Sachs-Wolfe 効果の定量評価に修正が必要であるかもしれず又、Integrated Sachs-Wolfe 効果も無視出来ないかもしれない。そこで物質優勢で $\Omega_m = 1$ の宇宙に限って、サブホライズンスケールの揺らぎ ($aH/k \ll 1$) の進化を調べる。物質優勢期では、物質の平均密度が輻射の平均密度より圧倒的に大きいため、エネルギー密度の揺らぎも物質が支配的である。ここでは最終散乱面以降を扱うので、輻射の圧力は無視出来る。従って、揺らぎの発展方程式中圧力揺らぎは落とす事ができる非等方ストレスの存在も無視する。サブホライズンの揺らぎに対してポアソン方程式 (4.182) は以下のように近似できる。

$$k^2 \Phi = -\frac{3}{2} a^2 H^2 \delta \quad (4.224)$$

これは慣れ親しんだポアソン方程式である。Density contrast の発展方程式 (4.173)、peculiar velocity の発展方程式 (4.175) はそれぞれ以下のように近似出来る。

$$\begin{aligned} \delta' + kV &= 0 \\ V' + aHV - k\Psi &= 0 \end{aligned}$$

ここでサブホライズンスケールでは物理量は全てゲージによらないので、Newtonian ゲージを示す添字を取った。これらを連立すると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \delta'' + aH\delta' - \frac{3}{2} a^2 H^2 \delta &= 0 \\ \ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2} H^2 \delta &= 0 \end{aligned} \quad (4.225)$$

$\Omega_m = 1$ よりこの方程式は以下のように書ける。

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0$$

解は以下の二つである。

$$\begin{aligned} \delta &\propto t^{-1} \\ \delta &\propto t^{2/3} \propto a \end{aligned} \quad (4.226)$$

一つ目は減衰モードで、二つ目が成長モードで、スケールファクターに比例して振幅が成長する。この結果を (4.222) に代入すると

$$k^2 \Phi = -\frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \rho_0 a^2 \delta \propto \rho_0 a^3 = const \quad (4.227)$$

のように時間によらず一定となる。ここで物質密度に対して $\rho_0 a^3 = const$ が成り立つ事を使った。

現在はダークエネルギー優勢であることが、どう影響を与えるか議論する。ダークエネルギーは、宇宙膨張を早める効果として働くため、その存在は density contrast の成長を抑制する。ダークエネルギーは一様等方と考えられているので、 Φ は物質密度の揺らぎのみに起因して生成される。したがって、宇宙の平均密度としてはダークエネルギー優勢であっても、ポアソン方程式 (4.222) 中の ρ_0 はあくまで物質の平均密度である。従って、 δ の成長率が抑えられる分、 Φ はその絶対値が時間と共に減少することになる。要するに物があつまりにくくなるので、ポテンシャルがディケーし、平坦に近づこうとするのである。このことは、CMB スペクトルの l の小さい所に Integrated Sachs Wolfe 効果として影響を与えている。

4.2 テンソルモード

4.2.1 揺らぎの生成とスペクトル

インフレーション中に発生した時空のテンソルモードの量子的揺らぎが、ホライズンの外に波長が引き延ばされる事で、古典的な揺らぎ即ち宇宙背景重力波として実在かする。この時真空の揺らぎから発生する量子はグラビトンである。まずは、スペクトルと振幅を求める。ミンコフスキー時空に弱い重力波のみ存在するときの重力場のラグランジアンは以下のようなになる。

$$L = \frac{1}{2} 2\tilde{M}_{pl}^2 \left[(-\dot{E}^+)^2 + (\vec{\nabla} E^+)^2 + (-\dot{E}^\times)^2 + (\vec{\nabla} E^\times)^2 \right] \quad (4.228)$$

これは $\Psi^+ \equiv \sqrt{2\tilde{M}_{pl}}E^+, \Psi^\times \equiv \sqrt{2\tilde{M}_{pl}}E^\times$ と変数を変換するとラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}[(-\dot{\Psi}^+)^2 + (\vec{\nabla}\Psi^+)^2] + \frac{1}{2}[(-\dot{\Psi}^\times)^2 + (\vec{\nabla}\Psi^\times)^2] \quad (4.229)$$

となり Ψ^+, Ψ^\times はそれぞれ mass less free scalar field と全く同じ形になる。従ってテンソルモードのパワースペクトルは次のようになる。

$$P_T(k) = 2 \times \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right)^2 \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{aH}{k} \right)^{2\epsilon} \\ \propto k^{-2\epsilon} \quad (4.230)$$

スカラーモードとテンソルモードのパワースペクトルの比は以下の様になる。

$$r \equiv P_T/P_\delta \sim 12.5\epsilon \quad (4.231)$$

よって r の値とインフラトンポテンシャルの大きさの間の以下の関係を得る。

$$V^{1/4} = 3 \times 10^{16} r^{1/4} \text{GeV} \quad (4.232)$$

テンソルモードの振幅は、インフラトンのポテンシャルの大きさにのみ依存しているので、テンソルモードの振幅が測定できれば、インフレーションが起きた時のエネルギースケールが求まるのである。

4.2.2 進化

テンソルモードが満たす方程式は、この章の始めに論じた時空の揺らぎを無視した mass less scalar field と全く同じである。それはラグランジアンの形から類推できる。テンソルモードは他のスカラー、ベクターモードと独立であり線形理論の範囲では互いにカップルしない。従って、テンソルモードが満たす方程式は exact に以下の式になる。

$$\ddot{h} + 3H\dot{h} + \frac{k^2}{a^2}h = 0 \quad (4.233)$$

スーパーホライズンスケールでは、左辺第三項は無視出来、 $H > 0$ であることから、減衰モードと $h = const$ となるモードの重ね合わせとなる事が分かる。従って、テンソルモードは、インフレーション中にホライズンエクジットすると、ホライズン再エントリーまで振幅一定で進化する。

インフレーション終了後のテンソルモードの進化を輻射優勢期及び物質優勢期に分けて調べる。宇宙は平坦として扱う。テンソルモードの発展方程式は Conformal time による微分を用いて以下のように書ける。

$$h'' + 2aHh' + k^2h = 0 \quad (4.234)$$

これを解くには Conformal time η をインフレーション期から現在まで時間の関数として求め上記方程式中のスケールファクターを Conformal time で書き換えなければならない。インフレーション終了時刻を t_e その時の Conformal time を η_e とする。インフレーション期間中式 (4.28) より

$$a \sim -\frac{1}{1-\epsilon} \frac{1}{H_I \eta} \quad (4.235)$$

である。ここで H_I はインフレーション期間中のハッブル定数である。以下では、方程式 (4.236) を解く上で便利な変数の組み合わせ $\alpha = k\eta$ を Conformal time の代わりに用いる。すると上の式は以下のように書ける。

$$a = -\frac{1}{1-\epsilon} \frac{k}{H\alpha} \quad (4.236)$$

インフレーション終了後、宇宙再加熱期を経て輻射優勢期に入るが、以下では宇宙再加熱は瞬時を起こり、インフレーション終了後直ちに輻射優勢期に入るとする。またその時、インフラトン場が真空のエネルギーの形で持っていたエネルギーが瞬時に輻射のエネルギーに全て転換され、輻射優勢期が始まった直後のハッブル定数の値はインフレーション期のハッブル定数の値 H_I と等しいとする。輻射優勢期でのスケールファクター a を Conformal time η を時間の関数として求める。スケールファクターは energy equipartition になる時刻 t_{eq} とその時のスケールファクター a_{eq} を用いて

$$a(t) = a_{eq} \left(\frac{t}{t_{eq}} \right)^{1/2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\eta - \eta_e &= \int_{t_e}^t \frac{dt}{a} = \frac{2t_{eq}}{a_{eq}^2} (a(t) - a(t_e)) = \frac{2t_e}{a_{eq}^2} \left(\frac{t_{eq}}{t_e} \right) (a(t) - a(t_e)) \\ &= \frac{2t_e}{a(t_e)^2} (a(t) - a(t_e)) \sim \frac{1-2\varepsilon}{k^2} H_I \alpha_e^2 a(t) + \frac{1-\varepsilon}{k} \alpha_e\end{aligned}$$

最後の変形では、

$$H_I = \frac{\dot{a}}{a}(t_e) = \frac{1}{2t_e} \quad (4.237)$$

$$a(t_e) = -\frac{1}{1-\varepsilon} \frac{k}{H_I \alpha_e} \quad (4.238)$$

を用いた。よって輻射優勢期のスケールファクターは以下のように書ける。

$$a(t) = \frac{1}{1-2\varepsilon} \frac{k}{H_I} \frac{(\alpha - (2-\varepsilon)\alpha_e)}{\alpha_e^2} \quad (4.239)$$

次に物質優勢期のスケールファクターを Conformal time を用いて書き表す。ここで t_{eq} を境にスケールファクターの時間依存性が $t^{1/2}$ から $t^{2/3}$ に突然変わるとする。また t_{eq} 以降現在まで輻射優勢期で宇宙の幾何学は平坦であるとする。すると物質優勢期のスケールファクターの時間依存性は以下のように書ける。

$$a(t) = a_{eq} \left(\frac{t}{t_{eq}} \right)^{2/3} \quad (4.240)$$

よって以下の式を得る。

$$\eta - \eta_{eq} = \frac{3t_{eq}}{a_{eq}^{3/2}} (a^{1/2} - a_{eq}^{1/2}) = \frac{3}{2} \frac{1}{H_I a_e^2} a_{eq}^{1/2} (a^{1/2} - a_{eq}^{1/2})$$

これから以下の結果を得る。

$$a(t) = \frac{1}{9} \frac{1}{1-2\varepsilon} \frac{k}{H_I} \frac{1}{\alpha_e^2} \frac{(2\alpha + 3\alpha_{eq} - 3(2-\varepsilon)\alpha_e)^2}{\alpha_{eq} - (2-\varepsilon)\alpha_e} \quad (4.241)$$

これらを用いてテンソルモードの発展方程式を各時期について書きあらわし、テンソルモードの時間発展を表す解を求める。インフレーション期は式(4.30)で $V'' = 0$ とした時の方程式に従う。 $\xi = -\alpha$ 、 $u_k = \sqrt{\xi} H_k(\xi)$ とおくと

$$\frac{d^2 H_k}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dH_k}{d\xi} + \left(1 - \frac{9/4 + 3\varepsilon}{\xi^2}\right) H_k = 0 \quad (4.242)$$

が求める方程式である。テンソルモード h と u の間には、 $h = u/a$ の関係があった。従ってインフレーション期のテンソルモードの時間発展解は式(4.36)で与えられる。

$$h_k = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sqrt{\frac{\pi}{4k}} e^{-i\left(\frac{k}{a_1 H_1} - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)} \sqrt{\xi} H_\nu^{(1)}(\xi) \quad (4.243)$$

輻射優勢期において計算の便宜上新たな Conformal time を以下のように定義する。

$$\tilde{\eta}_R = \int_0^t \frac{dt}{a} = \frac{2t_{eq} a}{a_{eq}^2} \quad (4.244)$$

すると

$$aH = a \frac{1}{2t_{eq}} \frac{t_{eq}}{t} = \frac{a_{eq}^2}{2t_{eq}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\tilde{\eta}_R}$$

発展方程式は $\tilde{\eta}_R$ の微分を用いて以下のようにになる。

$$h'' + \frac{2}{\tilde{\eta}_R} h' + k^2 h = 0$$

ここで $h = u/a$ において u の方程式を求めると以下の様になる。

$$u'' + k^2 u = 0$$

$\xi_R \equiv k\tilde{\eta}_R$ を用いて変形すると

$$\frac{d^2 u}{d\xi_R^2} + u = 0 \quad (4.245)$$

次に物質優勢期でも同様に計算の便宜上新たな Conformal time を以下のように定義する。

$$\tilde{\eta}_M = \int_0^t \frac{dt}{a} = \frac{3t_{eq}}{a_{eq}^{3/2}} a^{1/2} \quad (4.246)$$

ここで

$$aH = \frac{2a_{eq}^{3/2}}{3t_{eq}a^{1/2}} = \frac{2}{\tilde{\eta}_M}$$

なのでテンソルモードの発展方程式は以下ようになる。

$$h'' + \frac{4}{\tilde{\eta}_M} h' + k^2 h = 0$$

同様に $h = u/a$ とおき $\xi_M = k\tilde{\eta}_M$ に変換すると

$$\frac{d^2 u}{d\xi_M^2} + \left(1 - \frac{2}{\xi_M^2}\right) u = 0 \quad (4.247)$$

一般に次の形の方程式が次数 ν のベッセル微分方程式に還元出来る事を示す。

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\xi^2}\right) u = 0 \quad (4.248)$$

この方程式に $u = \sqrt{\xi}\chi$ を代入すると

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \chi + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right) \chi = 0 \quad (4.249)$$

従ってテンソルモードの発展方程式は、輻射優勢時は $\nu = \pm 1/2$ の物質優勢時は $\nu = \pm 3/2$ のベッセル微分方程式である。

輻射優勢期の発展方程式の一般解は次のように書ける。

$$\begin{aligned} h_k &= \frac{1}{a} \sqrt{\xi} (A J_{1/2}(\xi) + B J_{-1/2}(\xi)) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (A \sin \xi + B \cos \xi) \\ &= \frac{2t_{eq}}{a_{eq}^2} k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(A \frac{\sin \xi_R}{\xi_R} + B \frac{\cos \xi_R}{\xi_R} \right) \\ &= \frac{1-2\varepsilon}{k} H_I \alpha_e^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(A \frac{\sin \xi_R}{\xi_R} + B \frac{\cos \xi_R}{\xi_R} \right) \end{aligned} \quad (4.250)$$

ここで

$$\xi_R = ka \frac{2t_{eq}}{a_{eq}^2} = ka \frac{1}{H_I a_e^2} = a(1-2\varepsilon) \frac{H_I}{k} \alpha_e^2 = \alpha - (2-\varepsilon)\alpha_e \quad (4.251)$$

宇宙初期に遡って $t \rightarrow 0$ で $\xi \rightarrow 0$ であり、この極限で値が有限であることを保証する取る為には $B = 0$ で無ければならない。インフレーション終了

直後は解 (4.245) と連続で無ければならない。今興味あるスケールは、インフレーション終了時に十分スーパーホライズンスケールになっている揺らぎである。そこで解 (4.245) のスーパーホライズン極限との解の連続性から係数 A を定める。

$$\begin{aligned} & \frac{H}{\sqrt{V_c}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{k^{3/2}} 2^{\nu-2} e^{i\left(\frac{-k}{a_1 H_1} + \frac{\pi}{2}(\nu-1/2)\right)} \left(\frac{a_e H_1}{k}\right)^\varepsilon \\ &= \frac{1-2\varepsilon}{k} H_1 \alpha_e^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} A \frac{\sin \xi_{R,e}}{\xi_{R,e}} \end{aligned} \quad (4.252)$$

ここで $\xi_{R,e}$ はインフレーション終了時での Conformal time を用いて計算されたものである。輻射優勢期の解の定性的振る舞いについてまとめる。揺らぎの波長がスーパーホライズンである期間は、 $\xi \ll 1$ であり、 $h \sim const$ でテンソルモードの振幅は初期の値で凍結されたままで進化する。一方ホライズン再エントリ後は $\xi > 1$ で振幅の減衰が始まる。特に $\xi \gg 1$ の極限では、

$$h \propto \frac{1}{\xi} \propto \frac{1}{a} \quad (4.253)$$

である。

物質優勢時の一般解は次のように書ける。

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{a} \sqrt{\xi} (C J_{3/2}(\xi) + D J_{-3/2}(\xi)) \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[C \left(\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi \right) - D \left(\sin \xi + \frac{\cos \xi}{\xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.254)$$

$$= \frac{9t_{eq}^2}{a_{eq}^3} k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi_M^2} \left[C \left(\frac{\sin \xi_M}{\xi_M} - \cos \xi_M \right) - D \left(\sin \xi_M + \frac{\cos \xi_M}{\xi_M} \right) \right] \quad (4.255)$$

ここで

$$\xi_M = \frac{3}{2} \frac{1}{H_1} k a_{eq}^{1/2} a^{1/2} \frac{1-2\varepsilon}{k^2} H_1^2 \alpha_e^2 = \alpha + \frac{\alpha_{eq}}{2} - \frac{3}{2}(2-\varepsilon)\alpha_e \quad (4.256)$$

今特に興味あるのは、宇宙再結合時にはまだホライズンより波長が長く、

それ以後にホライズン再エントリーする長波長の揺らぎである。従って、energy equipartition 頃は $\xi \ll 1$ である。この時期に解が有限値に収まるためには $D = 0$ でなければならない。Energy equipartition $t = t_{eq}$ での解 (4.252) との連続性から係数 C が定まる。スーパーホライズン極限の $\xi \ll 1$ の極限では、 $h \sim const$ となり、スーパーホライズンである限りテンソルモードの振幅は凍結される。ホライズン再エントリー後は、振幅の減衰が始まる。特に $\xi \gg 1$ の極限では

$$h \propto \frac{1}{\xi^2} \propto \frac{1}{a} \quad (4.257)$$

となる。以上からテンソルモードは、スーパーホライズンスケールでいる間は振幅が凍結され、ホライズン再エントリーが輻射優勢、物質優勢いずれの時代であってもホライズン再エントリー後スケールファクターに反比例して振幅が減衰することが示された。

ここまでの結果を用いて、ホライズンリエントリーの時期が輻射優勢期か物質優勢期か分けてテンソルモードの時間発展の解の形を調べる。まず物質優勢期後期にホライズン再突入をする揺らぎを考える。この揺らぎに対しては $\alpha_e \ll 1$ 且つ $\alpha_{eq} \ll 1$ である。したがって $\xi_M \sim \alpha$ と近似できる。一方輻射優勢期にホライズン再突入する揺らぎに対しては $\alpha_e \ll 1$ であるが $\alpha_{eq} > 1$ である。したがって $\xi_R \sim \alpha$ であり $\xi_M \sim \alpha + \alpha_{eq}/2$ である。

第 5 章

真空の進化

この章では、宇宙の進化に現れる量子力学的効果とその観測的検証可能性について考察する。スーパーホライズンスケールの量子揺らぎに対する真空状態がスクーズド状態になし、それが観測量とどのように関係するかが議論の中心である。扱いが比較的楽なテンソルモードから議論を始める。更に、テンソルモードの二つの偏光状態が量子もつれ状態をなす可能性を議論する。これはスカラーモードには現れないテンソルモード特有の量子効果である。

5.1 数学及び物理学的準備

この節では、膨張宇宙の中での粒子生成および真空状態の進化を調べる上で基本となる、数学的及び物理学的基礎事項についてまとめる。ここで扱う内容は、量子力学、場の量子論特に量子光学で扱われる内容である。

5.1.1 数学的準備

具体的話題に入る前に以下の議論で用いる演算子間の演算にかんする重要な公式をまとめておく。

二つの共役な物理量 A, B の間に交換関係 $[A, B] = iC$ の関係が満たされる時、以下の不確定性関係式が満たされる事を示す。

$$\sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta B)^2 \rangle} \geq \frac{|\langle C \rangle|}{2} \quad (5.1)$$

ここで $\Delta A = A - \langle A \rangle$ 、 $\Delta B = B - \langle B \rangle$ はそれぞれの物理量の平均からのズレである。任意の実数 t に対して以下の式が満たされる。

$$\langle \Delta A + t \Delta A, \Delta B \rangle \langle \Delta B, \Delta A + t \Delta B \rangle \langle \Delta A, \Delta B \rangle \geq 0$$

演算子の絶対値の2乗なのでこれは自明である。左辺を展開すると以下の二次不等式を得る。

$$\langle \Delta B, \Delta B \rangle |\langle \Delta A, \Delta B \rangle|^2 t^2 + 2 |\langle \Delta A, \Delta B \rangle|^2 t + \langle \Delta A, \Delta A \rangle \geq 0$$

この不等式が任意の実数 t に対して成り立つためには、右辺の二次式の判別式がゼロ以下で無ければならない。従って、以下の関係式を得る。

$$D = |\langle \Delta A, \Delta B \rangle|^4 - \langle \Delta A, \Delta A \rangle \langle \Delta B, \Delta B \rangle |\langle \Delta A, \Delta B \rangle|^2 \leq 0 \quad (5.2)$$

$$|\langle \Delta A, \Delta B \rangle|^2 \leq 4 \langle \Delta A, \Delta A \rangle \langle \Delta B, \Delta B \rangle \quad (5.3)$$

右辺は $\Delta A, \Delta B$ の交換関係と反交換関係 $\{\Delta A, \Delta B\}$ を用いて以下のように変形できる。

$$\langle \Delta A, \Delta B \rangle = \frac{1}{2} \langle [\Delta A, \Delta B] \rangle + \frac{1}{2} \langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle$$

ここで

$$\begin{aligned} \langle [\Delta A, \Delta B] \rangle^* &= \langle [\Delta B, \Delta A] \rangle = - \langle [\Delta A, \Delta B] \rangle \\ \langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle^* &= \langle \{\Delta B, \Delta A\} \rangle = \langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle \end{aligned}$$

より $\langle [\Delta A, \Delta B] \rangle$ は純虚数、 $\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle$ は実数である。従って以下の不等式を得る。

$$\begin{aligned} \langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} |\langle [\Delta A, \Delta B] \rangle + \langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} |\langle [\Delta A, \Delta B] \rangle|^2 + |\langle \{\Delta A, \Delta B\} \rangle|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} |\langle [\Delta A, \Delta B] \rangle|^2 \end{aligned}$$

最後に

$$[\Delta A, \Delta B] = iC$$

を代入することで目的の関係式が証明される。

二つの非可換な演算子 A, B に対して以下の式が成り立つ。

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda [A, B] + \frac{\lambda^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{\lambda^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (5.4)$$

この式は以下のように証明することができる。

$$f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$$

によって関数 $f(\lambda)$ を定義する。この関数の λ による導関数を計算する。

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= A e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} - e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} A = [A, f(\lambda)] \\ f''(\lambda) &= A f'(\lambda) - f'(\lambda) A = [A, [A, f(\lambda)]] \\ f'''(\lambda) &= [A, [A, [A, f(\lambda)]]] \end{aligned}$$

ここで $f(\lambda)$ を $\lambda = 0$ のまわりでテイラー展開すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= f(0) + f'(0)\lambda + \frac{1}{2!} f''(0)\lambda^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\lambda^3 + \dots \\ &= B + [A, B]\lambda + \frac{1}{2!} [A, [A, B]]\lambda^2 + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]]\lambda^3 + \dots \end{aligned}$$

したがって与式が証明された。

次に演算子 A, B が交換関係 $[A, B] = C$ 但し C は C 数を満たすとき次ぎの関係式が成り立つ。

$$e^{\lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2} C} = e^{\lambda A} e^{\lambda B} \quad (5.5)$$

この式を証明する。

$$\begin{aligned} l.h.s. &= 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2} C + \frac{1}{2!} \left(\lambda^2(A^2 + AB + BA + B^2) + \lambda^3 C(A+B) + \frac{\lambda^4}{4} C^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} (\lambda^3(A^3 + AAB + ABA + BAA + ABB + BAB + BBA + B^3) + O(\lambda^4)) \\ &= 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2} (C + A^2 + B^2 + 2AB - C) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \lambda^3 (A^3 + B^3 + 3AAB - 3CA + 3ABB - 3CB + 3C(A+B)) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}(A^2+B^2+2AB) + \frac{1}{3!}\lambda^3(A^3+B^3+3AAB+3ABB)\dots \\
r.h.s &= (1 + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2!}A^2 + \frac{\lambda^3}{3!}A^3 \dots) \\
&\quad \times (1 + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2!}B^2 + \frac{\lambda^3}{3!}B^3 \dots) \\
&= 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}(A^2+B^2+2AB) + \frac{\lambda^3}{3!}(A^3+B^3+3AAB+3ABB)\dots
\end{aligned}$$

よって証明された。この関係式を Baker-Hausdorff の関係式と呼ぶ。

異なる時刻での演算子 $B(t)$ の交換関係が $[B(t'), B(t'')] = C$ (C は C 数) を満たす時、次の式がなりたつ。T 積の定義は次の小節で述べる。

$$T \exp \left[\int_0^t dt' B(t') \right] = \exp \left(\int_0^t dt' B(t') + \frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [B(t'), B(t'')] \right) \quad (5.6)$$

これを証明する。時間積分を十分大きな数 N で N 等分し微小時間間隔 $\Delta t \equiv t/N$ での N 個の積分の和で表す。

$$T \exp \left[\int_0^t dt' B(t') \right] = T \exp \left[\int_{(N-1)\Delta t}^t dt' B(t') + \int_{(N-2)\Delta t}^{(N-1)\Delta t} dt' B(t') \dots + \int_0^{\Delta t} dt' B(t') \right]$$

更に各時間間隔での中心値 $t_k = k\Delta t - (1/2)\Delta t$ で各積分の被積分関数を近似すると次の式を得る。

$$\begin{aligned}
l.h.s. &= T \exp [\Delta t (B(t_N) + B(t_{N-1}) \dots + B(t_1))] \\
&= e^{\Delta t B(t_N)} e^{\Delta t B(t_{N-1})} \dots e^{\Delta t B(t_1)}
\end{aligned} \quad (5.7)$$

式 (5.18) を用いると次の式を得る。

$$e^{\Delta t B(t_N)} e^{\Delta t B(t_{N-1})} = \exp \left[\Delta t (B(t_N) + B(t_{N-1})) + \frac{\Delta t^2}{2} [B(t_N), B(t_{N-1})] \right]$$

この計算を逐次繰り返すと次の式を得る。

$$\begin{aligned}
T \exp \left[\int_0^t dt' B(t') \right] &= \exp (\Delta t (B(t_N) + B(t_{N-1}) \dots + B(t_1))) \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \{ [B(t_N), B(t_{N-1})] + [B(t_N) + B(t_{N-1}), B(t_{N-2})] + \dots \\
&\quad + [B(t_N) + B(t_{N-1}) + \dots + B(t_2), B(t_1)] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\Delta t(B(t_N) + B(t_{N-1}) \dots + B(t_1)) \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \{[B(t_N), B(t_{N-1}) + B(t_{N-2}) + \dots + B(t_1)] \\
&\quad + [B(t_{N-1}), B(t_{N-2}) + \dots + B(t_1)] + \dots \\
&\quad + [B(t_2), B(t_1)]\})
\end{aligned}$$

よって証明された。

5.1.2 シュレディンガー表示、ハイゼンベルグ表示、相互作用表示

量子力学的に物理量の時間変化を追う方法には、主にシュレディンガー表示、ハイゼンベルグ表示、相互作用表示の三つの手法がある。量子力学では、物理量 θ の観測量は状態による平均値 $\langle \theta \rangle$ で与えられる。観測量が実数であることを保証するため物理量演算子 θ はエルミート演算子でなければならない。後で具体的に示すが、上記三つの表示方法は、同一の系に対して同一の観測量を与えるため、観測との比較という意味で物理的に等価である。以下三つの表示方法について具体的にみる。

量子力学を初めて習うときは、シュレディンガー表示で系の時間変化を扱う。シュレディンガー表示では、系の時間変化を状態の時間変化として扱う。系のハミルトニアンを H 、シュレディンガー表示の状態関数を $\Psi_S(t)$ とすると以下のシュレディンガー方程式の解として状態の時間変化が求まる。

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_S(t)}{\partial t} = H \Psi_S(t) \quad (5.8)$$

この後扱う系を意識して、以下では、ゼロ次のハミルトニアンが以下の単位質量の調和振動子のハミルトニアンで与えられるとする。

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2} q^2 \quad (5.9)$$

ここで Ω は調和振動子の固有振動数であり、 p, q は交換関係 $[q, p] = i\hbar$ を満たす演算子である。生成・消滅演算子 a^\dagger, a を以下のように定義すると

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\Omega}} (\Omega q + ip) \quad (5.10)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\Omega}}(\Omega q - ip) \quad (5.11)$$

以下の交換関係を満たす。

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (5.12)$$

これらを用いてゼロ次ハミルトニアンを以下のように書き換える事ができる。

$$H_0 = \hbar\Omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (5.13)$$

従って、ゼロ次のハミルトニアンは、エネルギー固有値 $\hbar\omega_n = \hbar\Omega(n + 1/2)$ をもち、その固有状態は

$$\Psi_{S,n}(t) = |n\rangle e^{-i\omega_n t} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n |0\rangle e^{-i\omega_n t}$$

である。座標表示をとると

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$$

であり、

$$\xi \equiv \left(\frac{\Omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} q$$

を用いてゼロ次のハミルトニアンと生成消滅演算子を変形すると以下のようになる。

$$H_0 = -\frac{\hbar\Omega}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \hbar\Omega \xi^2 \quad (5.14)$$

$$a^\dagger = \xi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (5.15)$$

$$a = \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (5.16)$$

これから以下の式をえる。

$$a^\dagger - a = -\frac{\partial}{\partial \xi} \quad (5.17)$$

基底状態 $n = 0$ の規格化された状態の座標表示での時間に依存しない状態

関数は以下のように与えられる。

$$u_0(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\xi^2} \quad (5.18)$$

したがって、一般の n に対する規格化されたエネルギー固有状態は座標表示での状態関数は以下のように得られる。

$$u_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\xi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\xi^2} \quad (5.19)$$

一方運動量表示をとると

$$q = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$$

であり

$$\eta \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}\right)^{1/2} p$$

を用いると

$$H_0 = \hbar\Omega \left(-\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \eta^2\right) \quad (5.20)$$

$$a^\dagger = i\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} - i\eta \quad (5.21)$$

$$a = i\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} + i\eta \quad (5.22)$$

これから以下の式をえる。

$$a^\dagger + a = i\frac{\partial}{\partial \eta} \quad (5.23)$$

運動量表示でのエネルギー固有状態は以下のように与えられる。

$$u_0(\eta) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\eta^2} \quad (5.24)$$

$$u_n(\eta) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (i)^n \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta\right)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\eta^2} \quad (5.25)$$

座標表示と運動量表示の基底状態の固有状態が、座標と運動量のフーリエ変換で結ばれている事確かめる。フーリエ変換の基底は

$$e^{ikq} = e^{i\frac{p}{\hbar}q} = e^{2i\xi\eta}$$

座標 ξ から運動量 η への変換で関数のノルムが保存するためにはフーリエ変換を以下のように定義すればよい。

$$\hat{f}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{2i\eta\xi} \quad (5.26)$$

この定義に従った時のパーシバルの定理を計算すると以下のようにノルムが保存する事が確認できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta |\hat{f}(\eta)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |f(\xi)|^2 \quad (5.27)$$

このフーリエ変換の定義を使って $u_0(\xi)$ をフーリエ変換すると以下のようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\xi^2} e^{2i\xi\eta} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\eta^2} = u_0(\eta)$$

数学的準備の小節で述べた関係を用いれば、座標と運動量の不確定性関係は以下のようになることが分かる。

$$\sqrt{\langle \Delta q^2 \rangle} \sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.28)$$

一方ゼロ次のハミルトニアンエネルギー基底状態を用いて位置の分散を求めると以下のようになる。

$$\langle \Delta \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 u_0(\xi)^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^2 e^{-2\xi^2} = \frac{1}{4}$$

これより

$$\sqrt{\langle \Delta q^2 \rangle} = \left(\frac{2\hbar}{\Omega}\right)^{1/2} \sqrt{\langle \Delta \xi^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}}$$

同様に運動量の分散は

$$\langle \Delta \eta^2 \rangle = \frac{1}{4}$$

その標準偏差は以下のようになる。

$$\sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2}}$$

これより以下の関係式を得る。

$$\sqrt{\langle \Delta q^2 \rangle} \sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2}$$

即ち、エネルギー基底状態は、最小不確定性関係を満たす状態である。

ゼロ次のハミルトニアン³⁾のエネルギー固有関数が、完全直交関数系をなす事をしめす。

$$\langle m|H_0|n \rangle = \hbar\omega_n \langle m|n \rangle = \hbar\omega_m \langle m|n \rangle$$

より

$$\langle m|n \rangle = \delta_{mn} \quad (5.29)$$

の正規直交関係を持たす事が示される。また次の直交性関係を満たす。

$$\int dq |q\rangle \langle q| = I \quad (5.30)$$

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I \quad (5.31)$$

ここで I は無限次元の単位行列である。この関係式からシュレディンガー描像の波動関数 $\psi_S(q,t)$ が、状態関数の座標基底への写像として以下のように求まる。

$$|\Psi_S(t)\rangle = \int dq |q\rangle \langle q|\Psi_S(t)\rangle$$

より

$$\psi_S(q,t) = \langle q|\Psi_S(t)\rangle \quad (5.32)$$

座標表示の定常状態のエネルギー固有関数 $u_n(q)$ は以下のように定義される。

$$u_n(q) = \langle q|n\rangle \quad (5.33)$$

これから以下の関係式を得る。

$$\sum_n u_n^*(q') u_n(q) = \sum_n \langle q'|n\rangle \langle n|q\rangle = \langle q'|q\rangle$$

$$= \delta(q' - q) \quad (5.34)$$

これは関数系 $u_n(q)$ が完全系であり、任意の関数 $f(q)$ が $u_n(q)$ で展開できることを保証する。即ち

$$f(q) = \sum_n c_n u_n(q) \quad (5.35)$$

と必ず書ける。これは $u_n(q)$ の正規直交性を用いると以下のように変形できる。

$$f(q) = \sum_n \int dq' f(q') u_n^*(q') u_n(q) = \int dq' f(q') \sum_n u_n^*(q') u_n(q)$$

最後の項に完全性の条件を代入すれば、右辺が $f(q)$ となることが示せる。

さて次に相互作用ポテンシャル V が存在する場合の扱いに移る。この段階になって、3つの描像のそれぞれの特徴が浮き彫りになる。シュレディンガー描像では、状態関数は以下のシュレディンガー方程式を満たす。

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi_S(t)\rangle}{\partial t} = (H_0 + V) |\Psi_S(t)\rangle \quad (5.36)$$

ここで状態関数を時刻 t_0 から t の間の状態の進化を表す伝達関数 $U(t, t_0)$ を用いて形式的に以下のように書く。

$$|\Psi_S(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi_S(t_0)\rangle \quad (5.37)$$

伝達関数は以下の方程式の解として与えられる。

$$i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H U(t, t_0) \quad (5.38)$$

確率保存の式

$$\langle \Psi_S(t) | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_S(t_0) | \Psi_S(t_0) \rangle$$

より伝達関数はユニタリー関数であり $U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)$ である。伝達関数の満たす方程式のエルミート共役を取る事で $U^\dagger(t, t_0)$ の満たす方程式が以下のようになることが分かる。

$$-i\hbar \frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t} = U^\dagger(t, t_0) H \quad (5.39)$$

初期条件 $U(t_0, t_0) = 1$ の元で解くと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) = & 1 + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) \\
& + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H(t_1) H(t_2) H(t_3) + \dots, \quad (5.40)
\end{aligned}$$

この式は step function

$$\begin{aligned}
\theta(\tau) &= 1 \quad \text{for } \tau \geq 0 \\
&= 0 \quad \text{for } \tau < 0
\end{aligned}$$

を用いて以下のように書ける。

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_1 dt_2 \dots dt_n \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) \dots \theta(t_{n-1} - t_n) H(t_1) \dots H(t_n) \quad (5.41)$$

ハミルトニアンが時間に依存しないとき、この積分は以下のようになる。

$$U(t, t_0) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right)^n = \exp\left(-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}\right) \quad (5.42)$$

ここで以下で定義される T 積を導入してこの式を書き換える。

$$T[H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)] = \sum_p \Theta(t_{p_1}, t_{p_2}, \dots, t_{p_n}) H(t_{p_1}) H(t_{p_2}) \dots H(t_{p_n}) \quad (5.43)$$

$$\Theta(t_{p_1}, t_{p_2}, \dots, t_{p_n}) H(t_{p_1}) = \theta(t_{p_1} - t_{p_2}) \theta(t_{p_2} - t_{p_3}) \dots \theta(t_{p_{n-1}} - t_{p_n}) \quad (5.44)$$

\sum_p は t_1, t_2, \dots, t_n のすべての可能な順列を取り足し合わせよという意味である。

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_1 dt_2 \dots dt_n T[H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)] \quad (5.45)$$

この式を形式的に以下のように表す。

$$U(t, t_0) = T \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t')\right] \quad (5.46)$$

任意の時刻 t のにおける物理量 θ の観測値期待値は以下の期待値で与えられる。

$$\langle \Psi_S(t) | \theta | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_S(t_0) | U^\dagger(t, t_0) \theta U(t, t_0) | \Psi_S(t_0) \rangle$$

ここで新しい演算子 $\theta_H(t)$ を以下のように定義し、状態は初期の時刻のもので固定し、系の時間進化を全て物理量を表す演算子の時間変化に押し付ける事にする。

$$\theta_H(t) = U^\dagger(t, t_0) \theta U(t, t_0) \quad (5.47)$$

これがハイゼンベルグ描像であり、定義から物理量の期待値はシュレディンガー描像と同じものが与えられる事がわかる。 $\theta_H(t)$ は以下の方程式を満たす。

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \theta_H(t)}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial U^\dagger(t, t_0)}{\partial t} \theta U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) \theta i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} + U^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} U(t, t_0) \\ &= -U^\dagger(t, t_0) H \theta U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) \theta H U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} U(t, t_0) \\ &= -H U^\dagger(t, t_0) \theta U(t, t_0) + U^\dagger(t, t_0) \theta U(t, t_0) H + U^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} U(t, t_0) \\ &= [\theta_H(t), H] + U^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} U(t, t_0) \end{aligned} \quad (5.48)$$

三つ目の等号では、 U が演算子としては H のみを含むため H と交換することを使った。これがハイゼンベルグの運動方程式であり物理量 θ が陽に時間に依存しなければ

$$i\hbar \frac{\partial \theta_H(t)}{\partial t} = [\theta_H(t), H] \quad (5.49)$$

である。

この小節の最後に相互作用描像について述べる。シュレディンガー描像の状態関数をゼロ次のハミルトニアン H_0 の固有状態 $e^{-i\omega_n(t-t_0)} |n\rangle$ で展開する。

$$|\Psi_S(t)\rangle = \sum_n C_{I,n}(t) |n\rangle e^{-i\omega_n(t-t_0)} \quad (5.50)$$

ゼロ次のハミルトニアン H_0 の固有状態は完全系をなすためこのようなことが可能である。シュレディンガー方程式に代入すると

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi_S(t)\rangle}{\partial t} = (H_0 + V) |\Psi_S(t)\rangle$$

$$\begin{aligned}
l.h.s. &= \sum_n \left[i\hbar \frac{\partial C_{I,n}(t)}{\partial t} |n\rangle e^{-i\omega_n(t-t_0)} + \hbar\omega_n C_{I,n}(t) |n\rangle e^{-i\omega_n t} \right] \\
r.h.s. &= \sum_n (\hbar\omega_n + V) C_{I,n}(t) |n\rangle e^{-i\omega_n(t-t_0)}
\end{aligned}$$

これから以下の式を得る。

$$i\hbar \sum_n \frac{\partial C_{I,n}(t)}{\partial t} |n\rangle e^{-i\omega_n(t-t_0)} = V \sum_n C_{I,n}(t) |n\rangle e^{-i\omega_n(t-t_0)} \quad (5.51)$$

ここでゼロ次のハミルトニアンのみによる伝達関数を以下のように定義する。

$$R(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)\right) \quad (5.52)$$

これはユニタリー演算子である。これを用いると上式は書き換えられる。

$$i\hbar \sum_n \frac{\partial C_{I,n}(t)}{\partial t} R(t, t_0) |n\rangle = V \sum_n C_{I,n}(t) R(t, t_0) |n\rangle \quad (5.53)$$

従って $C_{I,n}(t)$ の満たす方程式は以下のような。

$$i\hbar \frac{\partial C_{I,n}(t)}{\partial t} = R^\dagger(t, t_0) V R(t, t_0) C_{I,n}(t) \quad (5.54)$$

そこで以下で定義される状態関数を相互作用描像の状態関数と定義すると

$$|\Psi_I(t)\rangle = \sum_n C_{I,n}(t) |n\rangle \quad (5.55)$$

この状態は以下の方程式を満たす。

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi_I(t)\rangle}{\partial t} = V_I(t) |\Psi_I(t)\rangle \quad (5.56)$$

$$V_I(t) \equiv R^\dagger(t, t_0) V R(t, t_0) \quad (5.57)$$

即ち相互作用描像は、相互作用による状態の変化のみ状態に押し付けた方法と解釈することができる。ここで $V_I(t)$ は相互作用描像での相互作用ポテンシャルである。シュレディンガー描像の状態関数と相互作用描像の状態関数は以下の関係で結ばれる。

$$|\Psi_S(t)\rangle = R(t, t_0) |\Psi_I(t)\rangle \quad (5.58)$$

物理量 θ の期待値は以下のように書き換えることができる。

$$\langle \Psi_S(t) | \theta | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_I(t) | \theta_I(t) | \Psi_I(t) \rangle \quad (5.59)$$

$$\theta_I(t) = R^\dagger(t, t_0) \theta R(t, t_0) \quad (5.60)$$

ここで定義された $\theta_I(t)$ が相互作用描像での物理量演算子である。これが満たす方程式は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \theta_I(t)}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial R^\dagger(t, t_0)}{\partial t} \theta R(t, t_0) + R^\dagger(t, t_0) \theta i\hbar \frac{\partial R(t, t_0)}{\partial t} + R^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} R(t, t_0) \\ &= -R^\dagger(t, t_0) H_0 \theta R(t, t_0) + R^\dagger(t, t_0) \theta H_0 R(t, t_0) + R^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} R(t, t_0) \\ &= [\theta_I(t), H_0] + R^\dagger(t, t_0) i\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} R(t, t_0) \end{aligned} \quad (5.61)$$

即ち相互作用描像での物理量を表す演算子の時間進化は、ゼロ次のハミルトニアンのみによって決定される。次に相互作用描像における状態の時間進化を記述する伝達関数を $S(t, t_0)$ を導入すると状態関数は形式的に以下のように書ける。

$$|\Psi_I(t)\rangle = S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle \quad (5.62)$$

この伝達関数が満たす方程式は以下のようになる。

$$i\hbar \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = V_I(t) S(t, t_0) \quad (5.63)$$

従って相互作用描像における伝達関数 S の形式的な解は以下のように与えられる。

$$S(t, t_0) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \right] \quad (5.64)$$

これを用いるとシュレディンガー描像の状態関数は以下のように書ける。

$$|\Psi_S(t)\rangle = R(t, t_0) S(t, t_0) |\Psi_S(t_0)\rangle \quad (5.65)$$

ここで初期の状態関数はシュレディンガー描像、相互作用描像で同じであることを用いた。

5.1.3 コヒーレント状態

この節では、膨張宇宙の中での粒子生成および真空状態の進化を調べる上で基本となる、量子光学を例にコヒーレント状態の基礎についてまとめる。消滅演算子の固有状態をコヒーレント状態と呼ぶ。

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (5.66)$$

ここで α は任意の複素数である。コヒーレント状態をゼロ次のハミルトニアンの固有状態で展開した表現を求める。

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

定義より以下の式を得る。

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle \end{aligned}$$

これから展開係数間の以下の漸化式を得る。

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n$$

これから以下を得る。

$$c_n = \alpha^n \frac{1}{\sqrt{n!}} c_0$$

規格化条件 $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ より

$$1 = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{1}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}$$

よって規格化されたコヒーレント状態は以下のように表現することができる。

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (5.67)$$

コヒーレント状態の光子数の平均値は、光子数演算子 $N = a^\dagger a$ のコヒーレント状態による期待値を計算することで以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \langle \alpha | N | \alpha \rangle &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n}{n!} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n}{n!} \\ &= |\alpha|^2 \end{aligned}$$

光子が n 個存在する確率は以下のように求まる。

$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-\langle N \rangle} \frac{\langle N \rangle^n}{n!} \quad (5.68)$$

ここで $\langle N \rangle = \langle \alpha | N | \alpha \rangle$ である。これはポアソン分布である。コヒーレント状態の光子数分布はポアソン分布に従うことが示された。

この状態の物理的性質を調べる。まず光子数の揺らぎの大きさを求める。光子数の分散値は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \langle \Delta N^2 \rangle &= \langle \alpha | N^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | N | \alpha \rangle^2 \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n^2}{n!} - \langle N \rangle^2 \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n(n-1) + n}{n!} - \langle N \rangle^2 \\ &= e^{-|\alpha|^2} \left(\sum_{n=2}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{1}{(n-1)!} \right) - \langle N \rangle^2 \\ &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 = |\alpha|^2 \\ &= \langle N \rangle \end{aligned}$$

したがって、光子数の揺らぎは期待値のルートに等しいという有名なポアソン統計の結果が得られる。式 (5.8), (5.9) および式 (5.14), (5.15) より規格化された座標と運動量が以下のように求まる。

$$\xi = \frac{1}{2}(a + a^\dagger) \quad (5.69)$$

$$\eta = \frac{i}{2}(a^\dagger - a) \quad (5.70)$$

これらから以下の式を得る。

$$[\xi, \eta] = \frac{i}{2} \quad (5.71)$$

$$a = \xi + i\eta \quad (5.72)$$

$$a^\dagger = \xi - i\eta \quad (5.73)$$

ξ 、 η の交換関係からこれらの物理量は互いに共役で以下の不確定性関係を満たす。

$$\sigma_\xi \sigma_\eta \geq \frac{1}{4} \quad (5.74)$$

ここで σ_ξ は ξ の標準偏差である。コヒーレント状態におけるこれらの物理量の分散を計算する。

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2 &= \langle \alpha | \xi^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \xi | \alpha \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} \langle \alpha | (aa + a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + 1) | \alpha \rangle - \frac{1}{4} (\alpha + \alpha^*)^2 \\ &= \frac{1}{4} [\alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + 1 - (\alpha^2 + 2|\alpha|^2 + (\alpha^*)^2)] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}$$

どうように

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 &= \langle \alpha | \eta^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \eta | \alpha \rangle^2 \\ &= -\frac{1}{4} \langle \alpha | (aa + a^\dagger a^\dagger - 2a^\dagger a - 1) | \alpha \rangle + \frac{1}{4} (-\alpha + \alpha^*)^2 \\ &= -\frac{1}{4} [\alpha^2 + (\alpha^*)^2 - 2|\alpha|^2 - 1 - (\alpha^2 - 2|\alpha|^2 + (\alpha^*)^2)] \\ &= \frac{1}{4} \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがってコヒーレント状態は、共役な二つの物理量、座標と運動量、の不

確定さが同じ大きさで、且つ最小不確定性関係

$$\sigma_{\xi}\sigma_{\eta} = \frac{1}{4}$$

を満たす状態である。以下 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ と置くと

$$\langle \xi \rangle = \frac{\alpha + \alpha^*}{2} = \text{Re}(\alpha) = |\alpha| \cos \theta \quad (5.75)$$

$$\langle \eta \rangle = \frac{\alpha - \alpha^*}{2i} = \text{Im}(\alpha) = |\alpha| \sin \theta \quad (5.76)$$

この結果を ξ, η 平面で表現すると、 ξ, η は点 $(\sqrt{\langle N \rangle} \cos \theta, \sqrt{\langle N \rangle} \sin \theta)$ を中心とした半径 $1/2$ の円内のどこにあるか不確定になっていると言う事ができる。光子数を求める演算子が $N = a^\dagger a$ と a とそのエルミート共役は演算子のかけ算で表されている事をつかってエルミートな位相演算子 $\hat{\phi}$ を以下のように導入する。

$$a = e^{i\hat{\phi}} \sqrt{N} \quad (5.77)$$

$$a^\dagger = \sqrt{N} e^{-i\hat{\phi}} \quad (5.78)$$

これより a, a^\dagger の交換関係は以下ようになる。

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= e^{i\hat{\phi}} N e^{-i\hat{\phi}} - N \\ &= \left(N + i[\hat{\phi}, N] + \frac{i^2}{2!} [N, [N, \hat{\phi}]] + \dots \right) - N \\ &= i[\hat{\phi}, N] + \frac{i^2}{2!} [N, [N, \hat{\phi}]] + \dots \end{aligned}$$

これが $[a, a^\dagger] = 1$ に等しくなるためには

$$[\hat{\phi}, N] = -i \quad (5.79)$$

で無ければならない。これより光子数と電磁波の位相は互いに共役な物理量であり以下の不確定性関係を満たす事が分かる。

$$\sigma_{\hat{\phi}} \sigma_N \geq \frac{1}{2} \quad (5.80)$$

ここまでの結果からコヒーレント状態では $\sigma_N = \sqrt{\langle N \rangle}$ であることが分かっているので位相の揺らぎは

$$\sigma_{\hat{\phi}} = \frac{1}{2\sqrt{N}}$$

で与えられる。したがって、コヒーレント状態で光子数を十分増やせば、位相の揺らぎを小さくする、即ち電磁波の位相をそろえる事が可能となる。一方光子数の揺らぎは増加するが、相対的な光子数の揺らぎは

$$\frac{\sigma_N}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}$$

であり、光子数を増やせば、相対的な光子数の揺らぎを小さくする事ができる。コヒーレント状態で光子数を増やした極限が、古典的な電磁波に対応する状態と考えられている。コヒーレント状態における位相の揺らぎと α の位相の揺らぎの関係を調べる。光子数の平均値は $\langle N \rangle = |\alpha|^2$ であった。これを微分すると $\Delta \langle N \rangle = 2|\alpha|\Delta|\alpha|$ を得る。一方 $\Delta \langle N \rangle = \sigma_N$ とおけば $\sigma_N = |\alpha|$ であるから

$$\Delta|\alpha| = \frac{1}{2}$$

を得る。したがって、

$$\sigma_{\hat{\phi}} = \frac{1}{2\sqrt{\langle N \rangle}} = \frac{\Delta|\alpha|}{|\alpha|}$$

であり、これは、 $|\alpha|$ が $\pm\Delta|\alpha|$ 揺らぐ事に起因する、 α の位相角 θ の揺らぎ $\Delta\theta$ に対応する。即ちコヒーレント状態の位相の揺らぎは固有値の位相の揺らぎであり

$$\sigma_{\hat{\phi}} = \Delta\theta \tag{5.81}$$

である。ついでに述べておくと固有値の絶対値は光子数の揺らぎの大きさに対応する。

コヒーレント状態の定義から明らかなように真空状態 $|0\rangle$ は固有値 $\alpha = 0$ のコヒーレント状態である。実際コヒーレント状態で $\alpha = 0$ としてみると $|0\rangle$ が得られる。一般の α のコヒーレント状態は真空に以下で定義される変位演算子を作用する事で得られる。

$$D_\alpha \equiv e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \tag{5.82}$$

そのことを証明する。Baker-Hausdorff の関係式を用いると以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 D_\alpha|0\rangle &= e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-|\alpha|^2/2}|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle
 \end{aligned}$$

二つ目の等号では、消滅演算子が真空状態に掛かると消滅することを用いた。式(5.17),(5.23)より

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (5.83)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (5.84)$$

$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ と実部と虚部に分けると変位演算子はこれらを用いて以下のように書き換えられる。

$$D_\alpha = \exp \left[-\alpha_r \frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \quad (5.85)$$

したがってコヒーレント状態の ξ, η 平面への射影は以下のような意味を持つ。

$$\begin{aligned}
 \langle \xi \eta | \alpha \rangle &= \langle \xi \eta | D_\alpha | 0 \rangle = \int \int d\xi' d\eta' \langle \xi \eta | D_\alpha | \xi' \eta' \rangle \langle \xi' \eta' | 0 \rangle \\
 &= \int \int d\xi' d\eta' D_\alpha(\xi, \eta; \xi', \eta') \langle \xi' \eta' | 0 \rangle \\
 &= \int \int d\xi' d\eta' D_\alpha(\xi, \eta) \delta(\xi' - \xi) \delta(\eta' - \eta) u_0(\xi') u_0(\eta') \\
 &= \exp \left[-\alpha_r \frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial \eta} \right] u_0(\xi) u_0(\eta) \\
 &= u_0(\xi - \alpha_r) u_0(\eta - \alpha_i)
 \end{aligned} \quad (5.86)$$

一つ目の等号では $|\xi \eta\rangle$ が完全系を張る事を使った。三つ目の等号では、量子力学におけるエルミート演算子が局所的であることを用いた。最後の等号では、関数 $u_0(\xi - \alpha_r) u_0(\eta - \alpha_i)$ の点 (ξ, η) でのテーラー展開の定義

式をその一つ上の式が与える事を使った。真空は $\xi - \eta$ 平面上で原点を中心とした半径 $1/2$ の円の中の ξ, η が不確定な値を取る状態である。従って、コヒーレント状態は $\xi - \eta$ 平面で真空状態が値を取る領域の原点を点 (α_r, α_i) にシフトした状態である。演算子 D_α がこのような状態のシフトを表すので変位演算子と呼んだ。

ここまでは、コヒーレント状態の時間変化を無視してきた。コヒーレント状態は調和振動子のハミルトニアンで与えられるゼロ次のハミルトニアンの元シュレディンガー方程式を満たすとする。

$$i\hbar \frac{\partial |\alpha(t)\rangle}{\partial t} = H_0 |\alpha(t)\rangle \quad (5.87)$$

初期条件 $t = 0$ で $|\alpha(0)\rangle = |\alpha\rangle$ とすると時間に依存するコヒーレント状態は形式的に以下のように書け、計算を進めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\alpha\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n |\alpha|^n e^{in\theta} \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-in\Omega t} e^{-\frac{i}{2}\Omega t} |n\rangle \end{aligned} \quad (5.88)$$

したがって、時間に依存するコヒーレント状態は α を $|\alpha|e^{i(\theta-\Omega t)}$ で置き換えて $e^{-\frac{i}{2}\Omega t}$ を掛けたものに等しい。最後のファクターは零点振動からくるもので以下で議論する事に関わりがないので当面無視する。時間依存するコヒーレント状態の座標・運動量表示は以下ようになる。

$$\langle \xi \eta | \alpha(t) \rangle = u_0(\xi - |\alpha| \cos(\theta - \Omega t)) u_0(\eta - |\alpha| \sin(\theta - \Omega t)) \quad (5.89)$$

したがって、コヒーレント状態の観測値が存在する領域は、一定半径の円を保ちながら原点をのまわりを角速度 Ω で回転する。このように位相空間上で時間的に整然と運動することが、この状態がコヒーレント状態と呼ばれる所以の一つである。

ここまでは、状態光子を念頭において議論してきたが、実際の所ボーズ粒子であれば何でもよい。以下でもう少し物理的に突っ込んだ議論を行うため具体的に電磁波を量子化した状態を扱う。量子化された電磁波の電場は2章の議論から以下のように書ける。但し、ここでは簡単のため電磁波は

スカラー波として扱う。また波数は k とし $\omega_k = ck$ であり、伝搬方向を z 軸とした。

$$\hat{E}(z, t) = iE_0(ae^{-i(\omega_k t - kz)} - a^\dagger e^{i\omega_k t - kz}) \quad (5.90)$$

式 (5.69), (5.70) を用いて座標と運動量で書き換えると以下ようになる。

$$\hat{E}(z, t) = 2E_0(\xi \sin(\omega_k t - kz) - \eta \cos(\omega_k t - kz)) \quad (5.91)$$

このように ξ, η は互いに位相が 90 度ずれた正弦波の重ね合わせの振幅を表している。このため ξ, η を用いた表示を直交位相表示、 ξ, η を直交位相振幅演算子と呼ぶ。

5.1.4 スクイズド状態

この節ではスクイズド状態の基礎についてまとめる。スクイズド状態とは、共役な二つの物理量間の不確定性関係を保ちつつ、片方の物理量の不確定さを極端に小さくした状態のことである。その代償として、相棒の物理量の不確定さは非常に大きくなり、その結果不確定性関係が保たれる。コヒーレント状態は、共役な物理量両方の不確定さが同量の状態であった。真空状態もコヒーレント状態の特別な状態であった。そこでコヒーレント状態からのスクイズド状態の生成から議論を始める。スクイズド演算子を以下のように定義する。

$$S(\zeta) = e^{\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2} \quad (5.92)$$

ζ はある複素数であり、当面は時間に依存しない定数とし振幅と位相を用いて以下のように表す。

$$\zeta = \frac{1}{2} r e^{-2i\phi} \quad (5.93)$$

この後の計算に必要な下準備として以下の計算を行う。 $A = -(\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2)$ と置く。

$$[A, a e^{i\phi}] = [-\zeta a^{\dagger 2}, a e^{i\phi}] = 2\zeta e^{i\phi} a^\dagger = r e^{-i\phi} a^\dagger \quad (5.94)$$

$$[A, a^\dagger e^{-i\phi}] = [\zeta^* a^2, a^\dagger e^{-i\phi}] = 2\zeta^* e^{-i\phi} a = r e^{i\phi} a \quad (5.95)$$

この結果を用いて Baker-Hausdorff の関係式を計算することで以下の結果を得る。

$$S^\dagger a e^{i\phi} S = a e^{i\phi} \cosh r + a^\dagger e^{-i\phi} \sinh r \quad (5.96)$$

$$S^\dagger a^\dagger e^{-i\phi} S = a^\dagger e^{-i\phi} \cosh r + a e^{i\phi} \sinh r \quad (5.97)$$

同様に $A^\dagger = -(\zeta^* a^2 - \zeta a^{\dagger 2})$ であり

$$[A^\dagger, a e^{i\phi}] = 2\zeta e^{i\phi} a^\dagger = -r e^{-i\phi} a^\dagger \quad (5.98)$$

$$[A^\dagger, a^\dagger e^{-i\phi}] = 2\zeta^* e^{-i\phi} a = -r e^{i\phi} a \quad (5.99)$$

よって

$$S a e^{i\phi} S^\dagger = a e^{i\phi} \cosh r - a^\dagger e^{-i\phi} \sinh r \quad (5.100)$$

$$S a^\dagger e^{-i\phi} S^\dagger = a^\dagger e^{-i\phi} \cosh r - a e^{i\phi} \sinh r \quad (5.101)$$

コヒーレント状態にスクイーズド演算子を作用することでスクイーズド状態が得られる。

$$|ss\rangle = S(\zeta)|\alpha\rangle \quad (5.102)$$

スクイーズド状態によって物理量のスクイーズがどのように起こるか調べる。以下の二つのエルミート共役な演算子を定義する。

$$d_1 = \frac{1}{2}(a e^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi}) \quad (5.103)$$

$$d_2 = \frac{1}{2i}(a e^{i\phi} - a^\dagger e^{-i\phi}) \quad (5.104)$$

前節で導入した直交位相振幅演算子 ξ, η は、これらから $\phi = 0$ とすることで得られる。これらは以下の交換関係を満たす。

$$[d_1, d_2] = \frac{i}{2} \quad (5.105)$$

従って、これらは以下の不確定性関係を満たす。

$$\sigma_{d_1} \sigma_{d_2} \geq \frac{1}{4} \quad (5.106)$$

ここで定義された二つの演算子はシュレディンガー描像での表記である。そこでこれらをハイゼンベルグ描像の表記に変換する。

$$d_{1H} = S^\dagger d_1 S = \frac{e^r}{2} (ae^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi}) \quad (5.107)$$

$$d_{2H} = S^\dagger d_2 S = \frac{e^{-r}}{2i} (ae^{i\phi} - a^\dagger e^{i\phi}) \quad (5.108)$$

この結果から分かるように $r \gg 1$ の時、 d_2 がスクイーズされる状態であり、 d_2 がストレッチされる状態である。同様の事を、シュレディンガー描像を用いて二つの演算子の標準編纂を求める事で示す。スクイーズド状態によるこれらの演算子の期待値及び2乗平均を計算する。

$$\begin{aligned} \langle ss|d_1|ss \rangle &= \frac{1}{2} \langle \alpha | S^\dagger (ae^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi}) S | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{2} e^r (e^{i\phi} \alpha + e^{-i\phi} \alpha^*) \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$= e^r |\alpha| \cos(\theta + \phi) = e^r (\alpha_r \cos \phi - \alpha_i \sin \phi) \quad (5.110)$$

$$\langle ss|d_2|ss \rangle = \frac{1}{2i} e^{-r} (e^{i\phi} \alpha - e^{-i\phi} \alpha^*) \quad (5.111)$$

$$= e^{-r} |\alpha| \sin(\theta + \phi) = e^{-r} (\alpha_r \sin \phi + \alpha_i \cos \phi) \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} \langle ss|d_1^2|ss \rangle &= \frac{1}{4} \langle \alpha | S^\dagger d_1 S S^\dagger d_1 S | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \alpha | e^r (a^\dagger e^{-i\phi} + ae^{i\phi}) e^r (a^\dagger e^{-i\phi} + ae^{i\phi}) | \alpha \rangle \\ &= \frac{e^{2r}}{4} (\alpha^{*2} e^{-2i\phi} + \alpha^2 e^{2i\phi} + 2|\alpha|^2 + 1) \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} \langle ss|d_2^2|ss \rangle &= -\frac{1}{4} \langle ss | e^{-r} (ae^{i\phi} - a^\dagger e^{-i\phi}) e^{-r} (ae^{i\phi} - a^\dagger e^{-i\phi}) | ss \rangle \\ &= -\frac{e^{-2r}}{4} (\alpha^{*2} e^{-2i\phi} + \alpha^2 e^{2i\phi} - 2|\alpha|^2 - 1) \end{aligned} \quad (5.114)$$

これらからそれぞれの演算子の揺らぎは以下のように求まる。

$$\sigma_{d_1} = \frac{1}{2} e^r \quad (5.115)$$

$$\sigma_{d_2} = \frac{1}{2} e^{-r} \quad (5.116)$$

したがって、 r が大きくなれば d_2 が圧搾され d_1 の揺らぎが大きく引き延ばされる、言い換えると d_2 が確定し、 d_1 が非常に不確定になる。このように r がスクイーズの度合いを表すパラメータなのでスクイーズドパラメータと呼ぶ。次にスクイーズドされた方向が複素 α 平面上、即ち直交位相振幅演

算子 $\xi - \eta$ 平面上、どちらに向いているかを調べる。 d_1 の平均値が作る軸上では、 d_2 の平均値が 0 である。従って、 $\langle ss|d_1|ss \rangle$ 軸は以下の直線である。

$$\alpha_i = -\tan \phi \alpha_r \quad (5.117)$$

即ち、実軸を時計回りに角 ϕ 回転した方向である。一方 $\langle ss|d_2|ss \rangle$ 軸は、 $\langle ss|d_1|ss \rangle = 0$ より、以下の直線である。

$$\alpha_i = \cot \phi \alpha_r \quad (5.118)$$

即ち虚軸を時計回りに角 ϕ 回転した方向である。 d_2 が圧搾される方向であるから、 $\phi = -\theta$ の時、位相が圧搾されることになる。一方 $\phi = \pi/2 - \theta$ の時、粒子数がスクイーズされることになる。

最後に相互作用ハミルトニアンとスクイーズド状態の発生の関係について議論する。

5.2 テンソルモード

ここから膨張する宇宙の中での真空からの量子的粒子生成の議論に移る。まずは、取り扱いが簡単なテンソルモードを取り上げる。テンソルモードは、メトリック揺らぎ h そのものがゲージ不変量であり、その進化は式 (4.236) に従う。

5.2.1 基本的事項のまとめ

節 4.2.1 で行ったと同様に $\sqrt{2}\tilde{M}_{pl}h = \tilde{h}$ と変数変換することで \tilde{h} の進化は massless scalar field に対する結果をそのまま適応できる。更に $\tilde{h} = u/a$ を用いて式 (4.236) を変形すると以下の発展方程式を得る。

$$u'' + \left(-\nabla^2 - \frac{a''}{a}\right)u = 0 \quad (5.119)$$

この方程式を導出する自明な作用積分として以下のものがまず思い浮かぶ。

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left((u')^2 - (\vec{\nabla}u)^2 + \frac{a''}{a}u^2 \right) \quad (5.120)$$

ここで空間微分は共同座標での微分であり積分も共同座標でのものである。最小作用の原理では、出発点と終点の位相空間上の点を固定して作用を最小とするためにラグランジアンが満たすべき方程式を導く。従って、作用積分に時間全微分の項を付け加えても理論は不変である。そこで式(5.2)の a''/au^2 を

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{a'}{a} u^2 \right) = \frac{a''}{a} u^2 + 2 \frac{a'}{a} uu' - \frac{a'^2}{a^2} u^2$$

を用いて閉経する事で得られる新たな作用積分

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \int d^4x \left((u')^2 - (\vec{\nabla}u)^2 - 2 \frac{a'}{a} uu' + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 u^2 \right) \quad (5.121)$$

を以下では用いる。勿論始めから方程式(5.1)を導く作用積分として式(5.3)を使ったと考えても良い。従って Lagrangian 密度は以下のように書ける。

$$L = \frac{1}{2} \left((u')^2 - (\vec{\nabla}u)^2 - \frac{a'}{a} (uu' + u'u) + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 u^2 \right) \quad (5.122)$$

正準共役な運動量を π とおくと次のように計算できる。

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial u'} = u' - \frac{a'}{a} u$$

Hamiltonian 密度は以下のようになる。

$$h = \pi u' - L = \frac{1}{2} \left(\pi^2 + \frac{a'}{a} (\pi u + u\pi) + (\vec{\nabla}u)^2 \right) \quad (5.123)$$

従って Hamiltonian は

$$H = \int dx^3 \frac{1}{2} \left(\pi^2 + \frac{a'}{a} (\pi u + u\pi) + (\vec{\nabla}u)^2 \right) \quad (5.124)$$

ゼロ次と相互作用部を以下のように定義する。

$$H_0 = \int dx^3 \frac{1}{2} (\pi^2 + (\vec{\nabla}u)^2) \quad (5.125)$$

$$H_I = \int dx^3 \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} (\pi u + u\pi) \right) \quad (5.126)$$

u, π のフーリエ積分表示を以下のように定義する。

$$u = \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}} \pi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

ここで V_c は comoving volume である。これらを用いて運動量表示 Hamiltonian を求めると以下のようなになる。

$$\hat{H}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left(\pi_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}} + k^2 u_{\vec{k}} u_{-\vec{k}} + \frac{a'}{a} (\pi_{\vec{k}} u_{-\vec{k}} + u_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}}) \right) \quad (5.127)$$

ここで右辺が $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ に対して対称であるため $H_{-\vec{k}} = H_{\vec{k}}$ であり \vec{k} と $-\vec{k}$ を独立に扱えない。従って運動量表示の Hamiltonian を改めて以下のように書き換える必要がある。

$$H_{\vec{k}} = \pi_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}} + k^2 u_{\vec{k}} u_{-\vec{k}} + \frac{a'}{a} (\pi_{\vec{k}} u_{-\vec{k}} + u_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}}) \quad (5.128)$$

Hamiltonian のゼロ次と相互作用部は次のように書ける。

$$H_{0,\vec{k}} = \pi_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}} + k^2 u_{\vec{k}} u_{-\vec{k}} \quad (5.129)$$

$$H_{I,\vec{k}} = \frac{a'}{a} (\pi_{\vec{k}} u_{-\vec{k}} + u_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}}) \quad (5.130)$$

いよいよ量子化を行う。Reality condition から $u_{\vec{k}}^* = u_{-\vec{k}}$ である。交換関係 $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$ を満たす、生成消滅演算子 $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$ を用いて以下のように書ける。

$$\hat{u}_{\vec{k}} = w_k(\eta) a_{\vec{k}} + w_k^* a_{-\vec{k}}^\dagger \quad (5.131)$$

ここで量子化後の u を $\hat{u}_{\vec{k}}$ と書いた。 u が方程式 (5.1) を満たす事から $w_k(\eta)$ は以下の方程式の解である。

$$w_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) w_{\vec{k}} = 0 \quad (5.132)$$

簡単な場合について解を求める。ここでインフレーション期のハッブル定数の時間変化を無視できるとするとスケールファクターの時間変化は

$$a = a_1 e^{Ht} \quad (5.133)$$

であり Conformal time は以下のように書ける。

$$\eta = -\frac{1}{aH} \quad (5.134)$$

この時、上記の方程式は以下のように変形できる。

$$w_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) w_{\vec{k}} = 0 \quad (5.135)$$

この方程式の解は以下で与えられる。

$$w_{\vec{k}} = C \left(\frac{i}{\eta} - k\right) e^{-ik\eta} \quad (5.136)$$

従って、

$$\hat{u}_{\vec{k}} = C \left(\frac{i}{\eta} - k\right) e^{-ik\eta} a_{\vec{k}} + C^* \left(\frac{-i}{\eta} - k\right) e^{ik\eta} a_{-\vec{k}}^\dagger \quad (5.137)$$

ここで Conformal time の定義

$$\eta - \eta_1 = \int_{t_1}^t \frac{dt}{a(t)}$$

より η は、共同座標系での時刻 t_1 から t までの間に光が動く particle horizon を表している。或は、 $|k\eta| = (k/a)/H$ は event horizon と揺らぎの物理的な波長の比である。Horizon exit 以後は $|k\eta| \ll 1$ であり、subhorizon の期間は $|k\eta| \gg 1$ である。解 (5.18) に導入した η_0 は $|k\eta_0| \gg 1$ を満たすある時期であり、 $\eta = \eta_0$ の時、2章で得られた massless スカラー場の flat space time での量子化の結果

$$u = \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k}} (a_{\vec{k}} e^{-ik\eta_0} + a_{-\vec{k}}^\dagger e^{ik\eta_0}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (5.138)$$

つまり

$$\hat{u}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} (a_{\vec{k}} e^{-ik\eta_0} + a_{-\vec{k}}^\dagger e^{ik\eta_0}) \quad (5.139)$$

と一致すべきである。ここで $\eta = \eta_0$ で時間に依存する位相がゼロになると設定した。時刻 $\eta = \eta_0$ での場のフーリエスペクトル $\hat{u}_{\vec{k}}$ は、式 (5.19) の $\eta = \eta_0$ で $|k\eta_0| \gg 1$ の極限をとった形として

$$\hat{u}_{\vec{k}} = -Cka_{\vec{k}}e^{-ik\eta_0} - C^*ka_{-\vec{k}}^\dagger e^{ik\eta_0}$$

であり、これが式(5.21)と一致せよという条件から

$$C = C^* = -\frac{1}{\sqrt{2k^3}}$$

を得る。共役な運動量の定義式から量子化した一般化運動量は以下の式で書ける。

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{\vec{k}} &= \left(w'_{\vec{k}} - \frac{a'}{a}w_{\vec{k}}\right)a_{\vec{k}} + \left(w'^*_{\vec{k}} - \frac{a'}{a}w^*_{\vec{k}}\right)a_{-\vec{k}}^\dagger \\ &= ik^2Ce^{-ik\eta_0}a_{\vec{k}} - ik^2C^*e^{ik\eta_0}a_{-\vec{k}}^\dagger\end{aligned}\quad (5.140)$$

$$= -i\sqrt{\frac{k}{2}}(a_{\vec{k}}e^{-ik\eta_0} - a_{-\vec{k}}^\dagger e^{ik\eta_0})\quad (5.141)$$

この結果から $[\hat{u}_{\vec{k}}, \hat{\pi}_{\vec{k}'}] = i\delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$ 又 $[u(\vec{x}, \eta), \pi(\vec{x}', \eta)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ が満たされることを確かめる事ができる。

5.2.2 シュレディンガー方程式の解として時間発展演算子を導出する試み

以下 Schrodinger 描像で考え、物理量を $\eta = \eta_0$ での演算子として扱う。Schrodinger 描像では、演算子は時簡に依存しない。式(5.23),(5.24)を代入すると運動量表示の Hamiltonian は以下のようなになる。

$$\hat{H}_{\vec{k}} = \Omega_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}} + 1) + i\lambda_{\vec{k}}(e^{-2i\varphi_{\vec{k}} - 2ik\eta_0} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} - e^{2i\varphi_{\vec{k}} + 2ik\eta_0} a_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger)\quad (5.142)$$

$$\Omega_{\vec{k}} = k\quad (5.143)$$

$$\lambda_{\vec{k}} = \frac{a'}{a}\quad (5.144)$$

今の場合 $\varphi_{\vec{k}} = \pi/2$ である。Hamiltonian のゼロ次と相互作用部は次のように書ける。

$$\hat{H}_{0, \vec{k}} = \Omega_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}} + 1)\quad (5.145)$$

$$\hat{H}_{1, \vec{k}} = i\lambda_{\vec{k}}(e^{-2i\varphi_{\vec{k}} - 2ik\eta_0} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} - e^{2i\varphi_{\vec{k}} + 2ik\eta_0} a_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger)\quad (5.146)$$

Schrodinger 描像での波動関数 Φ_S は、次ぎの方程式を満たす。

$$i \frac{d\Phi_S}{d\eta} = (\hat{H}_{0,\vec{k}} + \hat{H}_{I,\vec{k}}) \Phi_S \quad (5.147)$$

時間発展演算子 $U(\eta, \eta_0)$, $U(\eta_0, \eta_0) = 1$ を用いて Schrodinger 描像での波動関数を以下のように表す。

$$\Phi_S = U(\eta, \eta_0) |0\rangle \quad (5.148)$$

ここで $|0\rangle$ は $a_{\vec{k}}|0\rangle = 0$ を満たす真空状態であり、 $\eta = \eta_0$ の時状態は真空状態にあったと仮定した。時間発展演算子は以下の方程式を満たす。

$$i \frac{dU(\eta, \eta_0)}{d\eta} = (\hat{H}_{0,\vec{k}} + \hat{H}_{I,\vec{k}}) U(\eta, \eta_0) \quad (5.149)$$

ここで

$$U(\eta, \eta_0) = \exp \left[-i \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta \hat{H}_{0,\vec{k}} \right] \tilde{U}(\eta, \eta_0) \quad (5.150)$$

と書けるとする。今扱っている系では $\hat{H}_{0,\vec{k}}$ は時間に依存しないためこの式は以下のように書ける。

$$U(\eta, \eta_0) = \exp \left[-i(\eta - \eta_0) \hat{H}_{0,\vec{k}} \right] \tilde{U}(\eta, \eta_0) \quad (5.151)$$

ここで

$$\tilde{R}_{\vec{k}} \equiv \exp \left[-i(\eta - \eta_0) \hat{H}_{0,\vec{k}} \right] \quad (5.152)$$

と表す。 $\hat{H}_{0,\vec{k}}$ がエルミートであることから $\tilde{R}_{\vec{k}}$ はユニタリーとなり $\tilde{R}_{\vec{k}}^\dagger \tilde{R}_{\vec{k}} = 1$ である。これを方程式 (5.30) に代入することで \tilde{U} の満たす方程式が以下のように求まる。

$$i \frac{d\tilde{U}(\eta, \eta_0)}{d\eta} = \tilde{R}_{\vec{k}}^\dagger \hat{H}_{I,\vec{k}} \tilde{R}_{\vec{k}} \tilde{U}(\eta, \eta_0) \quad (5.153)$$

$$[\hat{H}_{0,\vec{k}}, \hat{H}_{I,\vec{k}}] = i\lambda_{\vec{k}} (-2ke^{-2i\varphi_{\vec{k}} - 2i\eta_0 k} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} - 2ke^{2i\varphi_{\vec{k}} + 2i\eta_0 k} a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger)$$

$$[\hat{H}_{0,\vec{k}}, [\hat{H}_{0,\vec{k}}, \hat{H}_{I,\vec{k}}]] = i\lambda_{\vec{k}} ((-2k)^2 e^{-2i\varphi_{\vec{k}} - 2i\eta_0 k} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} - (2k)^2 e^{2i\varphi_{\vec{k}} + 2i\eta_0 k} a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger)$$

を用いると右辺の相互作用ハミルトニアンは以下ようになる。

$$\tilde{H}_{I,\vec{k}}(t) = \tilde{R}_{\vec{k}}^\dagger \hat{H}_{I,\vec{k}} \tilde{R}_{\vec{k}} \quad (5.154)$$

$$= \frac{a'}{a} (e^{-2i\varphi_{\vec{k}} - 2ik\eta} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} - e^{2i\varphi_{\vec{k}} + 2ik\eta} a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger) \quad (5.155)$$

以下では

$$\zeta(\eta) = \frac{a'}{a} e^{-2i\varphi_{\vec{k}} - 2ik\eta}$$

と置く。この方程式の解として \tilde{U} の形式解を以下のように得る。

$$\tilde{U}(\eta, \eta_0) = T \exp \left[\int_{\eta_0}^{\eta} d\eta (\zeta(\eta) a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} - \zeta^*(\eta) a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger) \right] \quad (5.156)$$

$$(5.157)$$

ここで T は T 積を表す。式 (5.6) の公式が使えるには、式 (5.6) 右辺第二項にあたる部分が C 数で無ければならない。今

$$B(\eta) = \frac{a'}{a} (e^{-2i\eta k - 2i\varphi_{\vec{k}}} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} - e^{2i\eta k + 2i\varphi_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger)$$

従って、

$$\begin{aligned} [B(\eta'), B(\eta'')] &= 2i \frac{a'}{a} (\eta') \frac{a'}{a} (\eta'') \sin(\eta' - \eta'') k \\ &\quad \times (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}} + 1) \end{aligned} \quad (5.158)$$

であり、C 数では無いので公式 (5.6) は使えない。

5.2.3 時間発展演算子の導出: $U = SR$

相互作用ハミルトニアンが生成演算子の 2 乗および消滅演算子の 2 乗の項からなることから、膨張宇宙の真空状態はスクイーズド状態になっていることは間違いない。そこでハイゼンベルグ描像の状態とシュレディンガー描像の状態を結びつけるユニタリー演算子 U が以下のような形のスクイーズド演算子 $S_{\vec{k}}$ と回転演算子 $R_{\vec{k}}$ の積の形で書けるとする。

$$U(\eta, \eta_0) = S_{\vec{k}} R_{\vec{k}} \quad (5.159)$$

$$S_{\vec{k}} = \exp \left[\frac{r(\eta)}{2} (e^{-2i\Phi(\eta)} a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger - e^{2i\Phi(\eta)} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}) \right] \quad (5.160)$$

$$R_{\vec{k}} = \exp[-i\theta_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}^{\dagger}a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^{\dagger}a_{-\vec{k}} + 1)] \quad (5.161)$$

初期 $\eta = \eta_0$ の時の状態が $|0\rangle$ であるとする。任意の時刻でのシュレディンガー描像における状態は以下のように計算できる。

$$|ss\rangle_I = U(\eta, \eta_0)|0\rangle = e^{-i\theta_{\vec{k}}S_{\vec{k}}}|0\rangle \quad (5.162)$$

スクイーズド演算子のエルミート共役は以下ようになる。

$$S_{\vec{k}}^{\dagger} = \exp\left[-\frac{r(\eta)}{2}(e^{-2i\Phi(\eta)}a_{\vec{k}}^{\dagger}a_{-\vec{k}}^{\dagger} - e^{2i\Phi(\eta)}a_{\vec{k}}a_{-\vec{k}})\right] \quad (5.163)$$

$$(5.164)$$

これは逆行列でありスクイーズド演算子がユニタリー演算子であることが確認できた。

時間発展演算子が、実際に式 (5.157) で定義したようなスクイーズド演算子で書けるのか？ その場合、スクイーズドパラメーター r, θ, Φ の波数依存性や時間進化はどのように記述されるのかを調べる。スクイーズド演算子による記述ができるかどうかの証明は、式 (5.157) で書けると仮定して矛盾無くスクイーズドパラメータの発展方程式が得られることを示すことで進める。スクイーズドパラメータの時間発展は、ハイゼンベルグ表示に移って、ハイゼンベルグ表示の場の量とその共役な運動量 u_H と π_H のハイゼンベルグの運動方程式から導出を試みる。以下、簡単のため添字の H は省略する。同時交換関係 $[u(\vec{x}, \eta), \pi(\vec{x}', \eta)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ を用いて以下のハイゼンベルグの運動方程式を計算する。ハミルトニアンは式 (5.122) で与えられる。まず

$$iu'(\vec{x}, \eta) = [u(\vec{x}, \eta), H(\eta)]$$

より以下の方程式を得る。

$$u'(\vec{x}, \eta) = \pi(\vec{x}, \eta) + \frac{d}{a}u(\vec{x}, \eta) \quad (5.165)$$

次に

$$i\pi'(\vec{x}, \eta) = [\pi(\vec{x}, \eta), H(\eta)]$$

より以下の方程式を得る。

$$\pi'(\vec{x}, \eta) = -\frac{a'}{a}\pi(\vec{x}, \eta) + \nabla^2 u(\vec{x}, \eta) \quad (5.166)$$

場の量のハイゼンベルグ表示は、シュレディンガー表示に時間発展演算子を作用することで得られる。まずシュレディンガー表示の場の量の表現を式 (5.137), (5.139) を用いて求める。

$$u_S(\vec{x}, \eta_0) = \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{2k'}} (a_{\vec{k}'} e^{-ik'\eta_0} + a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik'\eta_0}) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \quad (5.167)$$

$$\pi_S(\vec{x}, \eta_0) = -\frac{i}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}'} \sqrt{\frac{k'}{2}} (a_{\vec{k}'} e^{-ik'\eta_0} - a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik'\eta_0}) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \quad (5.168)$$

波数 \vec{k} のモードに対するハイゼンベルグ表示の場の量は以下の式を計算することで得られる。

$$u_H(\vec{x}, \eta) = R_k^\dagger S_k^\dagger u_S(\vec{x}, \eta_0) S_k R_{\vec{k}} \quad (5.169)$$

$$\pi_H(\vec{x}, \eta) = R_k^\dagger S_k^\dagger \pi_S(\vec{x}, \eta_0) S_k R_{\vec{k}} \quad (5.170)$$

この計算を実行するのに必要となる計算をまとめる。 $B_k \equiv -\frac{r}{2}(e^{-2i\Phi(\eta)} a_k^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger - e^{2i\Phi(\eta)} a_{-\vec{k}} a_k)$ とおく。

$$[B_k, e^{i\Phi_k'} a_{\vec{k}'}] = \frac{r}{2} e^{-i\Phi_k} a_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}', \vec{k}} + \frac{r}{2} e^{-i\Phi_k} a_{\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}', -\vec{k}} \quad (5.171)$$

$$[B_k, e^{-i\Phi_k'} a_{-\vec{k}'}^\dagger] = \frac{r}{2} e^{i\Phi_k} a_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}', \vec{k}} + \frac{r}{2} e^{i\Phi_k} a_{-\vec{k}} \delta_{\vec{k}', -\vec{k}} \quad (5.172)$$

これを繰り返し使う事で以下の計算ができる。

$$\tilde{u}_I \equiv S_k^\dagger u_S S_k \quad (5.173)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{V_c}} \left[\sum_{\vec{k}' \neq \vec{k} \& -\vec{k}} \sqrt{\frac{1}{2k'}} (a_{\vec{k}'} e^{-ik'\eta_0} + a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik'\eta_0}) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \right. \\ &+ \sqrt{\frac{1}{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\Phi_k - ik\eta_0} \left(a_{\vec{k}} e^{i\Phi_k} + \frac{r}{2} a_{-\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k} + \frac{1}{2!} \left(\frac{r}{2}\right)^2 a_{\vec{k}} e^{i\Phi_k} + \dots \right) \\ &+ \sqrt{\frac{1}{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\Phi_k + ik\eta_0} \left(a_{-\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k} + \frac{r}{2} a_{\vec{k}} e^{i\Phi_k} + \frac{1}{2!} \left(\frac{r}{2}\right)^2 a_{-\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k} + \dots \right) \\ &\left. + c.c. \right] \quad (5.174) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{V_c}} \left[\sum_{\vec{k}' \neq \vec{k} \& -\vec{k}} \sqrt{\frac{1}{2k'}} (a_{\vec{k}'} e^{-ik' \eta_0} + a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik' \eta_0}) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \right. \\
&+ \sqrt{\frac{1}{2k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \left((\cosh \frac{r}{2} e^{-ik \eta_0} + \sinh \frac{r}{2} e^{ik \eta_0 + 2i\Phi_k}) a_{\vec{k}} \right. \\
&\quad \left. \left. + (\cosh \frac{r}{2} e^{ik \eta_0} + \sinh \frac{r}{2} e^{-ik \eta_0 - 2i\Phi_k}) a_{-\vec{k}}^\dagger \right) \right. \\
&\left. + c.c. \right] \tag{5.175}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_I =: & \sqrt{\frac{1}{V_c}} \left(-i \sqrt{\frac{k}{2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \left[(\cosh \frac{r}{2} e^{-ik \eta_0} - \sinh \frac{r}{2} e^{ik \eta_0 + 2i\Phi_k}) a_{\vec{k}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\cosh \frac{r}{2} e^{ik \eta_0} - \sinh \frac{r}{2} e^{-ik \eta_0 - 2i\Phi_k}) a_{-\vec{k}}^\dagger \right] \right. \\
&\left. + c.c. \right) \tag{5.176}
\end{aligned}$$

場の量の計算結果に出てくる \vec{k} と $-\vec{k}$ を省いた和は時間変化をしない。従って、以降の議論には影響を与えない項である。言い換える、 $S_{\vec{k}}$ を作用してモード $\vec{k}, -\vec{k}$ のみ取り出しているのもそれ以外のモードは無視しても良いという事である。そこで共役な運動量の計算結果の標識では、この項を省いた。この計算を実行するのに必要になる計算をまとめる。 $A_k = i\theta(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}} + 1)$ と置く。

$$[A_k, a_{\vec{k}'}] = -i\theta(a_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}', \vec{k}} + a_{-\vec{k}} \delta_{\vec{k}', -\vec{k}}) \tag{5.177}$$

$$[A_k, a_{\vec{k}'}^\dagger] = i\theta(a_{\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}', \vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}', -\vec{k}}) \tag{5.178}$$

$$[A_k, [A_k, a_{\vec{k}'}]] = (-i\theta)^2 (a_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}', \vec{k}} + a_{-\vec{k}} \delta_{\vec{k}', -\vec{k}}) \tag{5.179}$$

$$[A_k, [A_k, a_{\vec{k}'}^\dagger]] = (i\theta)^2 (a_{\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}', \vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}', -\vec{k}}) \tag{5.180}$$

よって

$$\begin{aligned}
R_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'} R_{\vec{k}} &= (a_{\vec{k}'}^\dagger)_{\vec{k}' \neq \vec{k} \& \vec{k}' \neq -\vec{k}} \\
&\quad + e^{-i\theta k} (a_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}', \vec{k}} + a_{-\vec{k}} \delta_{\vec{k}', -\vec{k}}) \tag{5.181}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'}^\dagger R_{\vec{k}} &= (a_{\vec{k}'}^\dagger)_{\vec{k}' \neq \vec{k} \& \vec{k}' \neq -\vec{k}} \\
&\quad + e^{i\theta k} (a_{\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}', \vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger \delta_{\vec{k}', -\vec{k}}) \tag{5.182}
\end{aligned}$$

これからハイゼンベルグ描像の場の量は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
u_H &= R_{\vec{k}}^{\dagger} \hat{u}_I R_{\vec{k}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{V_c}} \sqrt{\frac{1}{2k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[(\cosh \frac{r}{2} e^{-ik\eta_0 - i\theta_k} + \sinh \frac{r}{2} e^{ik\eta_0 - i\theta_k + 2i\Phi_k}) a_{\vec{k}} \right. \\
&\quad \left. + (\cosh \frac{r}{2} e^{ik\eta_0 + i\theta_k} + \sinh \frac{r}{2} e^{-ik\eta_0 - 2i\Phi_k + i\theta_k}) a_{-\vec{k}}^{\dagger} \right] \\
&\quad + c.c. \tag{5.183}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_H &= -i \sqrt{\frac{1}{V_c}} \sqrt{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[(\cosh \frac{r}{2} e^{-ik\eta_0 - i\theta_k} - \sinh \frac{r}{2} e^{ik\eta_0 - i\theta_k + 2i\Phi_k}) a_{\vec{k}} \right. \\
&\quad \left. - (\cosh \frac{r}{2} e^{ik\eta_0 + i\theta_k} - \sinh \frac{r}{2} e^{-ik\eta_0 + i\theta_k - 2i\Phi_k}) a_{-\vec{k}}^{\dagger} \right] \\
&\quad + c.c. \tag{5.184}
\end{aligned}$$

これらのハイゼンベルグの運動方程式 (5.163),(5.164) に代入する。ここで式 (5.129),(5.138) を振り返ると、運動方程式の二つの固有解によりハイゼンベルグ描像の $(\hat{u}), \hat{\pi}$ を展開した時の展開係数が生成、消滅演算子であった。つまり式 (5.195),(5.196) で求めた表式の $a_{\vec{k}}$ の係数および $a_{-\vec{k}}^{\dagger}$ の係数がそれぞれハイゼンベルグの運動方程式を満たさなければならない。この条件から次の4つの方程式を得る。ここで u_H, π_H の複素共役部は、独立な情報を与えないため、 $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ の係数のみに着目すれば十分である。

$$\begin{aligned}
&(-i\theta'_k + 2i\Phi'_k) \sinh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \cosh \frac{r}{2} + (-i\theta'_k \cosh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \sinh \frac{r}{2}) e^{-2i\sigma} \\
&= \frac{a'}{a} \cosh \frac{r}{2} e^{-2i\sigma} + \frac{a'}{a} \sinh \frac{r}{2} - ik \cosh \frac{r}{2} e^{-2i\sigma} + ik \sinh \frac{r}{2} \tag{5.185}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(i\theta'_k - 2i\Phi'_k) \sinh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \cosh \frac{r}{2} + (i\theta'_k \cosh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \sinh \frac{r}{2}) e^{2i\sigma} \\
&= \frac{a'}{a} \sinh \frac{r}{2} + \frac{a'}{a} \cosh \frac{r}{2} e^{2i\sigma} - ik \sinh \frac{r}{2} + ik \cosh \frac{r}{2} e^{2i\sigma} \tag{5.186}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(i\theta'_k - 2i\Phi'_k) \cosh \frac{r}{2} - \frac{r'}{2} \cosh \frac{r}{2} + (-i\theta'_k \cosh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \sinh \frac{r}{2}) e^{-2i\sigma} \\
&= -\frac{a'}{a} \cosh \frac{r}{2} e^{-2i\sigma} + \frac{a'}{a} \sinh \frac{r}{2} - ik \cosh \frac{r}{2} e^{-2i\sigma} - ik \sinh \frac{r}{2} \tag{5.187}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(i\theta'_k - 2i\Phi'_k) \sinh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \cosh \frac{r}{2} - (i\theta'_k \cosh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \sinh \frac{r}{2}) e^{2i\sigma} \\
&= -\frac{a'}{a} \sinh \frac{r}{2} + \frac{a'}{a} \cosh \frac{r}{2} e^{2i\sigma} - ik \sinh \frac{r}{2} - ik \cosh \frac{r}{2} e^{2i\sigma} \tag{5.188}
\end{aligned}$$

ここで $\sigma \equiv k\eta_0 + \Phi_k$ これらを整理すると求める方程式が得られる。

$$r' = 2\frac{a'}{a} \cos 2\sigma \quad (5.189)$$

$$\theta'_k = k - \frac{a'}{a} \tanh \frac{r}{2} \sin 2\sigma \quad (5.190)$$

$$\Phi'_k = k - \frac{a'}{2a} \left(\tanh \frac{r}{2} + \coth \frac{r}{2} \right) \sin 2\sigma \quad (5.191)$$

これらの方程式を方程式 (5.183)~(5.186) に代入することで、解になっていることを確かめられる。即ち、方程式 (5.187)~(5.189) を満たす r, θ_k, Φ_k を用いて時間発展演算子が式 (5.157) のように書ける事が証明された。

5.2.4 時間発展演算子の導出: $U = RS$

次に時間発展演算子のスクイーズド演算子と回転演算子の順番を入れ替えた場合を考える。即ちシュレディンガー描像の場の量とハイゼンベルグ描像の場の量が以下のように結ばれる場合を考える。

$$u_H(\vec{x}, \eta) = S_k^\dagger(\eta, \eta_0) R_k^\dagger u_S(\vec{x}, \eta_0) R_k S_k(\eta, \eta_0) \quad (5.192)$$

$$\pi_H(\vec{x}, \eta) = S_k^\dagger(\eta, \eta_0) R_k^\dagger \pi_S(\vec{x}, \eta_0) R_k S_k(\eta, \eta_0) \quad (5.193)$$

この形は、ハイゼンベルグ描像の状態に相互作用による時間発展演算子を掛けて相互作用描像に移り、それにゼロ次のハミルトニアンによる時間発展演算子を掛けてシュレディンガー描像の状態関数に移るという描像に乗っ取っており、スクイーズド演算子、回転演算子のそれぞれと系のハミルトニアンとの対応づけが考えやすい。以下では、シュレディンガー描像の場の量に回転演算子 $R_{\vec{k}}$ を作用して変換した量を相互作用表示の場の量と呼ぶ事にする。式 (5.175)~(5.178) を用いると相互作用表示の場量が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} u_I(\vec{x}, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{2k'}} R_{\vec{k}}^\dagger \left(a_{\vec{k}'} e^{-ik'\eta_0} + a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik'\eta_0} \right) R_{\vec{k}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}' \neq \vec{k} \& \vec{k}' \neq -\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k'}} \left(a_{\vec{k}'} e^{-ik'\eta_0} + a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik'\eta_0} \right) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{V_c}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(e^{-ik\eta} (a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{-\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \right. \\
& \left. + e^{ik\eta} (a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{-\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \right) \tag{5.194}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}' \neq \vec{k} \& \vec{k}' \neq -\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k'}} (a_{\vec{k}'} e^{-ik'\eta_0} + a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik'\eta_0}) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{V_c}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(e^{-ik\eta - i\Phi_k} e^{i\Phi_k} (a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{-\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \right. \\
& \left. + e^{ik\eta + i\Phi_k} e^{-i\Phi_k} (a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{-\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \right) \tag{5.195}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_I(\vec{x}, \eta) & = -\frac{i}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}' \neq \vec{k} \& \vec{k}' \neq -\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k'}} (a_{\vec{k}'} e^{-ik'\eta_0} - a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik'\eta_0}) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \\
& - \frac{i}{\sqrt{V_c}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(e^{-ik\eta} (a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{-\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \right. \\
& \left. - e^{ik\eta} (a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{-\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \right) \tag{5.196}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -\frac{i}{\sqrt{V_c}} \sum_{\vec{k}' \neq \vec{k} \& \vec{k}' \neq -\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k'}} (a_{\vec{k}'} e^{-ik'\eta_0} - a_{-\vec{k}'}^\dagger e^{ik'\eta_0}) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \\
& - \frac{i}{\sqrt{V_c}} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(e^{-ik\eta - i\Phi_k} e^{i\Phi_k} (a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{-\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \right. \\
& \left. - e^{ik\eta + i\Phi_k} e^{-i\Phi_k} (a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{-\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \right) \tag{5.197}
\end{aligned}$$

上記で求めた波数 $\pm\vec{k}$ のモードに対するハイゼンベルグ表示の場の量の $\vec{k}' \neq \vec{k} \& -\vec{k}$ に対する和の項は時間に依存しない。従って、これらのモードはハイゼンベルグの運動方程式中で役割を持たない。以後、この項を落として計算を進める。これらにスクイーズド演算子を作用するとハイゼンベルグ描像での場の量が以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
u_H(\vec{x}, \eta) & = S_{\vec{k}}^\dagger u_I(\vec{x}, \eta) S_{\vec{k}} \\
& = \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sqrt{\frac{1}{2k}} \left[\right. \\
& \quad \left. \times e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(e^{-i\theta} \cosh \frac{r}{2} + e^{i\theta + 2i\Phi_k} \sinh \frac{r}{2} \right) a_{\vec{k}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (e^{-i\theta - 2i\Phi_k} \sinh \frac{r}{2} + e^{i\theta} \cosh \frac{r}{2}) a_{-\vec{k}}^\dagger \\
& + c.c] \quad (5.198)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_H(\vec{x}, \eta) = & -\frac{i}{\sqrt{V_c}} \sqrt{\frac{k}{2}} \left[\right. \\
& \times e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left((e^{-i\theta} \cosh \frac{r}{2} - e^{i\theta + 2i\Phi_k} \sinh \frac{r}{2}) a_{\vec{k}} \right. \\
& \left. \left. - (e^{i\theta} \cosh \frac{r}{2} - e^{-i\theta - 2i\Phi_k} \sinh \frac{r}{2}) a_{-\vec{k}}^\dagger \right) \right. \\
& \left. + c.c \right] \quad (5.199)
\end{aligned}$$

新たに求めたハイゼンベルグ表示の場の量をハイゼンベルグの運動方程式 (5.163), (5.164) に代入すると以下の4つの方程式を得る。

$$\begin{aligned}
& -(i\theta'_k + 2i\Phi'_k) \sinh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \cosh \frac{r}{2} + (-i\theta'_k \cosh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \sinh \frac{r}{2}) e^{-2i\gamma} \\
= & -\frac{a'}{a} \cosh \frac{r}{2} e^{-2i\gamma} + \frac{a'}{a} \sinh \frac{r}{2} - ik \cosh \frac{r}{2} e^{-2i\gamma} - ik \sinh \frac{r}{2} \quad (5.200)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (i\theta'_k + 2i\Phi'_k) \sinh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \cosh \frac{r}{2} + (-i\theta'_k \cosh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \sinh \frac{r}{2}) e^{-2i\gamma} \\
= & \frac{a'}{a} \cosh \frac{r}{2} e^{-2i\gamma} + \frac{a'}{a} \sinh \frac{r}{2} - ik \cosh \frac{r}{2} e^{-2i\gamma} + ik \sinh \frac{r}{2} \quad (5.201)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(i\theta'_k + 2i\Phi'_k) \sinh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \cosh \frac{r}{2} - (i\theta'_k \cosh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \sinh \frac{r}{2}) e^{2i\gamma} \\
= & -\frac{a'}{a} \sinh \frac{r}{2} - ik \sinh \frac{r}{2} + \frac{a'}{a} \cosh \frac{r}{2} e^{2i\gamma} - ik \cosh \frac{r}{2} e^{2i\gamma} \quad (5.202)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(i\theta'_k + 2i\Phi'_k) \sinh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \cosh \frac{r}{2} + (i\theta'_k \cosh \frac{r}{2} + \frac{r'}{2} \sinh \frac{r}{2}) e^{2i\gamma} \\
= & \frac{a'}{a} \sinh \frac{r}{2} - ik \sinh \frac{r}{2} + \frac{a'}{a} \cosh \frac{r}{2} e^{2i\gamma} + ik \cosh \frac{r}{2} e^{2i\gamma} \quad (5.203)
\end{aligned}$$

ここで $\gamma = \theta_k + \Phi_k + k\eta_0$ である。これらを整理すると求める方程式が以下のように求まる。

$$r' = 2 \frac{a'}{a} \cos 2\gamma \quad (5.204)$$

$$\theta'_k = k - \frac{a'}{a} \tanh \frac{r}{2} \sin 2\gamma \quad (5.205)$$

$$\Phi'_k = -\frac{a'}{2a} \left(\coth \frac{r}{2} - \tanh \frac{r}{2} \right) \sin 2\gamma \quad (5.206)$$

方程式 (5.202)~(5.204) を方程式 (5.198)~(5.201) に代入することで、全ての方程式を満たす事を確認できる。即ち、スクイーズド演算子と回転演算子の順番を入れ替えた時間発展演算子も解としてあり得る事が証明された。

5.2.5 宇宙論的スクイーズド状態及び時間発展演算子の二つの分離法の物理的等価性

ここまで時間発展演算子の表現の仕方として二つの方法を取り上げてきた。ここでは、それぞれの方法で得られるシュレディンガー表示の状態が一致することを示し、それぞれが物理的に等価であることを示す。そのための準備としてスクイーズド演算子を真空の作用した状態

$$|ss\rangle \equiv S_{\vec{k}}|0\rangle$$

の詳細を調べる。この状態を2モード状態

$$|n, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle = (a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger)^n |0\rangle \quad (5.207)$$

で展開できるとし以下のようにおく

$$|ss\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle \quad (5.208)$$

展開係数を以下の方法でもとめる。準備として以下の計算を行う。

$$S_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger S_{\vec{k}} = \cosh \frac{r}{2} a_{-\vec{k}}^\dagger + e^{2i\Phi_k} \sinh \frac{r}{2} a_{\vec{k}} \quad (5.209)$$

$$S_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} S_{\vec{k}} = \cosh \frac{r}{2} a_{\vec{k}} + e^{-2i\Phi_k} \sinh \frac{r}{2} a_{-\vec{k}}^\dagger \quad (5.210)$$

$$S_{-\vec{k}} a_{-\vec{k}}^\dagger S_{-\vec{k}}^\dagger = \cosh \frac{r}{2} a_{-\vec{k}}^\dagger - e^{2i\Phi_k} \sinh \frac{r}{2} a_{\vec{k}} \quad (5.211)$$

$$S_{-\vec{k}} a_{\vec{k}} S_{-\vec{k}}^\dagger = \cosh \frac{r}{2} a_{\vec{k}} - e^{-2i\Phi_k} \sinh \frac{r}{2} a_{-\vec{k}}^\dagger \quad (5.212)$$

両辺に $a_{-\vec{k}}^\dagger$ を掛ける。

$$a_{-\vec{k}}^\dagger |ss\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \alpha_{n-1} |n-1, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle \quad (5.213)$$

$$= a_{-\vec{k}}^\dagger S_{\vec{k}} |0\rangle = S_{\vec{k}} S_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger S_{\vec{k}} |0\rangle \quad (5.214)$$

に式 (5.207) を用いると

$$\begin{aligned} a_{-\vec{k}}^\dagger |ss\rangle &= a_{-\vec{k}}^\dagger S_{\vec{k}} |0\rangle = S_{\vec{k}} S_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger S_{\vec{k}} |0\rangle \\ &= \cosh \frac{r}{2} S_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}^\dagger |0\rangle = \cosh \frac{r}{2} S_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}^\dagger S_{\vec{k}}^\dagger S_{\vec{k}} |0\rangle \\ &= \cosh^2 \frac{r}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \alpha_{n-1} |n-1, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle \\ &\quad - e^{2i\Phi_k} \cosh \frac{r}{2} \sinh \frac{r}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \alpha_n |n-1, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle \end{aligned}$$

これを整理すると次に漸化式を得る。

$$\alpha_n = -e^{-2i\Phi_k} \tanh \frac{r}{2} \alpha_{n-1}$$

よって

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left(-e^{-2i\Phi} \tanh \frac{r}{2} \right)^n \alpha_0 \\ |ss\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0 \left(-e^{-2i\Phi} \tanh \frac{r}{2} \right)^n |n, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle \end{aligned}$$

規格化条件 $\langle ss|ss\rangle = 1$ より

$$\begin{aligned} 1 &= |\alpha_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tanh^2 \frac{r}{2} \right)^n = \frac{|\alpha_0|^2}{1 - \tanh^2 \frac{r}{2}} \\ &= |\alpha_0|^2 \cosh^2 \frac{r}{2} \end{aligned}$$

したがって

$$\alpha_0 = e^{i\alpha} \frac{1}{\cosh \frac{r}{2}}$$

以上から

$$|ss\rangle = \frac{e^{i\alpha}}{\cosh \frac{r}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-2i\Phi_k} \tanh \frac{r}{2} \right)^n |n, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle \quad (5.215)$$

多くの論文での扱いと同じように時間発展演算子を $U = SR$ の順番で与えられる場合、シュレディンガー描像の状態関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\Psi_S(\eta) &= \frac{e^{i\alpha - i\theta_k}}{\cosh \frac{r}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-2i\Phi_k} \tanh \frac{r}{2} \right)^n |n, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle \\ &= \frac{e^{i\alpha - i\theta_k}}{\cosh \frac{r}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-2i\Phi_k} \tanh \frac{r}{2} \right)^n |n, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle\end{aligned}\quad (5.216)$$

$$\theta_k = k\eta - \int d\eta \frac{a'}{a} \tanh \frac{r}{2} \sin 2\sigma \quad (5.217)$$

$$\Phi_k = k\eta - \frac{1}{2} \int d\eta \frac{a'}{a} \left(\coth \frac{r}{2} + \tanh \frac{r}{2} \right) \sin 2\sigma \quad (5.218)$$

$$\sigma = k\eta_0 + k\eta - \int d\eta \frac{a'}{a} \left(\coth \frac{r}{2} + \tanh \frac{r}{2} \right) \sin 2\sigma \quad (5.219)$$

$$r = 2 \int d\eta \frac{a'}{a} \cos 2\sigma \quad (5.220)$$

次にここで新たに取り上げた $U = RS$ の順番で与えられる場合、シュレディンガー描像の状態関数は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\Psi_S(\eta) &= R_{\vec{k}} \frac{e^{i\alpha}}{\cosh \frac{r}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-2i\Phi_k} \tanh \frac{r}{2} \right)^n |n, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle \\ &= \frac{e^{i\alpha - i\theta_k}}{\cosh \frac{r}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-2i\Phi_k - 2i\theta_k} \tanh \frac{r}{2} \right)^n |n, \vec{k}\rangle |n, -\vec{k}\rangle\end{aligned}\quad (5.221)$$

$$\theta_k = k\eta - \int d\eta \frac{a'}{a} \tanh \frac{r}{2} \sin 2\gamma \quad (5.222)$$

$$\Phi_k = -\frac{1}{2} \int d\eta \frac{a'}{a} \left(\coth \frac{r}{2} - \tanh \frac{r}{2} \right) \sin 2\gamma \quad (5.223)$$

$$\theta_k + \Phi_k = k\eta - \frac{1}{2} \int d\eta \frac{a'}{a} \left(\coth \frac{r}{2} + \tanh \frac{r}{2} \right) \sin 2\gamma \quad (5.224)$$

$$\gamma = k\eta_0 + k\eta - \frac{1}{2} \int d\eta \frac{a'}{a} \left(\coth \frac{r}{2} + \tanh \frac{r}{2} \right) \sin 2\gamma \quad (5.225)$$

$$r = 2 \int d\eta \frac{a'}{a} \cos 2\gamma \quad (5.226)$$

これでどちらの方法でも得られるシュレディンガー表示の状態関数が全く同じになることが証明できた。

5.2.6 宇宙論的スクイーズド状態における粒子数の平均値、2乗平均値

得られたスクイーズド状態による波数 \vec{k} のモードの重力子の個数の平均を求める。

$$\begin{aligned}\Psi^\dagger(\eta)a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}\Psi(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\cosh^2 \frac{r}{2}} \left(\tanh^2 \frac{r}{2}\right)^n = \frac{x}{\cosh^2 \frac{r}{2}} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x}{\cosh^2 \frac{r}{2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{2}} \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \sinh^2 \frac{r}{2}\end{aligned}\quad (5.227)$$

ここで $x = \tanh^2 r/2$ 。2次のコヒーレンス度を以下のように定義する。

$$g^{(2)} = \frac{\Psi^\dagger(\eta)a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} - 1)\Psi(\eta)}{|\Psi^\dagger(\eta)a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}\Psi(\eta)|^2}\quad (5.228)$$

この定義の物理的意味は、重力子の個数の自乗平均のポアソン揺らぎからのズレの度合いの指標である。

$$\begin{aligned}\Psi^\dagger(\eta)a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} - 1)\Psi(\eta) &= \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left(\tanh^2 \frac{r}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{2}} x^2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{2}} \tanh^4 \frac{r}{2} (2 \cosh^6 \frac{r}{2}) \\ &= 2 \sinh^4 \frac{r}{2} \\ &= \sinh^2 \frac{r}{2} (\cosh^2 \frac{r}{2} + \sinh^2 \frac{r}{2}) + \sinh^4 \frac{r}{2} - \sinh^2 \frac{r}{2} \cosh^2 \frac{r}{2} \\ &= \sinh^2 \frac{r}{2} \cosh 2 \frac{r}{2} + \sinh^4 \frac{r}{2} - \sinh^2 \frac{r}{2} \cosh^2 \frac{r}{2} \\ &= \sinh^2 \frac{r}{2} \cosh r - \sinh^2 \frac{r}{2}\end{aligned}\quad (5.229)$$

同じ計算を別のアプローチで試みる。

$$\begin{aligned}\Psi^\dagger(\eta)a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}\Psi(\eta) &= \langle 0 | S^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger S S^\dagger a_{\vec{k}} S S^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger S S^\dagger a_{\vec{k}} S | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (\cosh \frac{r}{2} a_{\vec{k}}^\dagger - e^{i\pi} \sinh \frac{r}{2} a_{-\vec{k}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& *(\cosh \frac{r}{2} a_{\vec{k}} - e^{-i\pi} \sinh r a_{-\vec{k}}^\dagger) \\
& *(\cosh \frac{r}{2} a_{\vec{k}}^\dagger - e^{i\pi} \sinh \frac{r}{2} a_{-\vec{k}}) \\
& *(\cosh \frac{r}{2} a_{\vec{k}} - e^{-i\pi} \sinh \frac{r}{2} a_{-\vec{k}}^\dagger) |0\rangle \\
= & \langle 0 | \sinh^2 \frac{r}{2} \cosh^2 \frac{r}{2} a_{-\vec{k}} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger + \sinh^4 r a_{-\vec{k}} a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}} a_{-\vec{k}}^\dagger |0\rangle \\
= & \sinh^2 \frac{r}{2} \cosh^2 \frac{r}{2} + \sinh^4 \frac{r}{2} \\
= & \sinh^2 \frac{r}{2} \cosh 2 \frac{r}{2} \tag{5.230}
\end{aligned}$$

二つの方法の結果が一致した。

5.2.7 スクイズドパラメータの時間発展解概観

次にスクイズドパラメータ r のスケール依存性について調べる。正確には r の発展方程式を解けばよい。詳細は数値的に行うとして、ここでは概算を行う。簡単のため以下のようにおけるとする。

$$\Phi'_k = k \tag{5.231}$$

従って

$$\Phi_k = k\eta \tag{5.232}$$

$$\sigma = k\eta_0 + k\eta \tag{5.233}$$

ここで conformal time の物理的意味を振り返ってみる。定義は次のようになる。

$$\eta - \eta_1 = \int_{t_1}^t \frac{dt}{a(t)} \tag{5.234}$$

これから η は、共同座標でのホライゾンサイズ（加速膨張時はイベントホライゾン、減速膨張時はパーティクルホライゾン）である。考えているモードの波長がホライズンスケールより小さいときは、 $k|\eta| \gg 1$ であり r の積分には殆ど寄与しない。従って、近似的に r の値は、ホライズン exit から horizon reentry の期間の積分のみで決まると考えてよい。したがって、以下の式を得る。

$$r_k = \int_{\eta_{\text{exit}}}^{\eta_{\text{reentry}}} 2 \frac{a'}{a} d\eta = 2 \ln \frac{a_{\text{re}}}{a_{\text{ex}}} \quad (5.235)$$

4章で述べたようにインフレーション終了直前にホライズンサイズと等しかったスケールは今の現在の宇宙において 80cm である。このスケールは一度もホライズンスケールを出る事がないのでこのスケールで丁度

$$r_k = 0$$

天文学的スケールでは、 r_k は非常に大きな値を持つ事になる。

5.2.8 位相空間内でのスクイーズド状態の時間発展

スクイーズされる物理量について考察する。1.1.4 節式 (1.103),(1.104) の定義を参考に以下の可能性が考えられる。シュレディンガー描像で定義された以下の演算子の組を考える。

$$d_{a1} = \frac{1}{2}(a_{\vec{k}}e^{i\Phi_k} + a_{-\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k})d_{a2} = \frac{1}{2i}(a_{-\vec{k}}e^{i\Phi_k} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k}) \quad (5.236)$$

$$d_{b1} = \frac{1}{2}(a_{-\vec{k}}e^{i\Phi_k} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k})d_{b2} = \frac{1}{2i}(a_{\vec{k}}e^{i\Phi_k} - a_{-\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k})$$

$$d_{c1} = d_{a1} + d_{b1}d_{c2} = d_{a2} + d_{b2} \quad (5.237)$$

それぞれは以下の交換関係を満たす。

$$[d_{a1}, d_{a2}] = \frac{i}{2} \quad (5.238)$$

$$[d_{b1}, d_{b2}] = \frac{i}{2} \quad (5.239)$$

$$[d_{c1}, d_{c2}] = i \quad (5.240)$$

時間発展演算子が $U = RS$ で与えられる場合についてハイゼンベルグ表示におけるそれぞれの演算子は以下ようになる。

$$d_{H,a1} = \frac{e^{r/2}}{2}(a_{\vec{k}}e^{i\Phi_k - i\theta_k} + a_{-\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k + i\theta_k})d_{H,a2} = i \frac{e^{-r/2}}{2}(a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k + i\theta_k} - a_{-\vec{k}}e^{i\Phi_k - i\theta_k}) \quad (5.241)$$

$$d_{H,b1} = \frac{e^{r/2}}{2}(a_{-\vec{k}}e^{i\Phi_k - i\theta_k} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k + i\theta_k})d_{H,b2} = i \frac{e^{-r/2}}{2}(a_{-\vec{k}}^\dagger e^{-i\Phi_k + i\theta_k} - a_{\vec{k}}e^{i\Phi_k - i\theta_k})$$

$$d_{H,c1} = d_{H,a1} + d_{H,b1}d_{H,c2} = d_{H,a2} + d_{H,b2} \quad (5.242)$$

確かに d_2 がスクイーズされる状態を d_1 がストレッチされる状態をあらわすことが分かった。

いよいよテンソルモードがスーパーホライズンスケールでスクイーズされることを観測量と結びつける作業に入る。ここでは $U = SR$ の表記を用いる。テンソルモードのフーリエスペクトル $\hat{u}_{H,\vec{k}}$ およびその共役な運動量のフーリエスペクトル $\hat{\pi}_{H,\vec{k}}$ は式 (1.181),(1.182) より以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_{H,\vec{k}} = & \sqrt{\frac{1}{2k}} \left[(\cosh \frac{r}{2} e^{-ik\eta_0 - i\theta_k} + \sinh \frac{r}{2} e^{ik\eta_0 - i\theta_k + 2i\Phi_k}) a_{\vec{k}} \right. \\ & \left. + (\cosh \frac{r}{2} e^{ik\eta_0 + i\theta_k} + \sinh \frac{r}{2} e^{-ik\eta_0 - 2i\Phi_k + i\theta_k}) a_{-\vec{k}}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (5.243)$$

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{H,\vec{k}} = & -i\sqrt{\frac{k}{2}} \left[(\cosh \frac{r}{2} e^{-ik\eta_0 - i\theta_k} - \sinh \frac{r}{2} e^{ik\eta_0 - i\theta_k + 2i\Phi_k}) a_{\vec{k}} \right. \\ & \left. - (\cosh \frac{r}{2} e^{ik\eta_0 + i\theta_k} - \sinh \frac{r}{2} e^{-ik\eta_0 + i\theta_k - 2i\Phi_k}) a_{-\vec{k}}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (5.244)$$

$$(5.245)$$

ここで $\langle 0 | \hat{u}_{H,\vec{k}} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\pi}_{H,\vec{k}} | 0 \rangle = 0$ を用いて、これらの量の真空期待値の分散を求める。

$$\begin{aligned} \Delta u_k^2 = & \langle 0 | \hat{u}_{H,\vec{k}}^\dagger \hat{u}_{H,\vec{k}} | 0 \rangle \\ = & \frac{1}{2k} (e^{r/2} \cos^2 \sigma + e^{-r/2} \sin^2 \sigma) \end{aligned} \quad (5.246)$$

$$\begin{aligned} \Delta \pi_k^2 = & \langle 0 | \hat{\pi}_{H,\vec{k}}^\dagger \hat{\pi}_{H,\vec{k}} | 0 \rangle \\ = & \frac{k}{2} (e^{r/2} \sin^2 \sigma + e^{-r/2} \cos^2 \sigma) \end{aligned} \quad (5.247)$$

ここで $\sigma \equiv k\eta_0 + \Phi_k$ は式 (1.217) で与えられる。更に以下の議論を簡略化するため位置と共役な運動量として以下のような新たな変数を導入する。

$$Q_{\vec{k}} \equiv \sqrt{k} u_{H,\vec{k}} \quad (5.248)$$

$$P_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\frac{1}{k}} \pi_{H,\vec{k}} \quad (5.249)$$

式 (1.243),(1.244) をもちいて $Q_{\vec{k}} - P_{\vec{k}}$ 平面上で $Q_{\vec{k}}$ 軸に対して角度 χ 反時計

回りに回転してえられる物理量を考える。

$$\begin{aligned}
d_{H,1} &\equiv Q_{\vec{k}} \cos \chi + P_{\vec{k}} \sin \chi \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[(\cosh \frac{r}{2} e^{-i(k\eta_0 + \theta_k + \chi)} + \sinh \frac{r}{2} e^{i(k\eta_0 - \theta_k + 2\Phi_k + \chi)}) a_{\vec{k}} \right. \\
&\quad \left. + (\cosh \frac{r}{2} e^{i(k\eta_0 + \theta_k + \chi)} + \sinh \frac{r}{2} e^{-i(k\eta_0 - \theta_k + 2\Phi_k + \chi)}) a_{-\vec{k}}^\dagger \right]
\end{aligned} \tag{5.250}$$

$$\begin{aligned}
d_{H,2} &\equiv -Q_{\vec{k}} \sin \chi + P_{\vec{k}} \cos \chi \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[i(-\cosh \frac{r}{2} e^{-i(k\eta_0 + \theta_k + \chi)} + \sinh \frac{r}{2} e^{i(k\eta_0 - \theta_k + 2\Phi_k + \chi)}) a_{\vec{k}} \right. \\
&\quad \left. + i(\cosh \frac{r}{2} e^{i(k\eta_0 + \theta_k + \chi)} - \sinh \frac{r}{2} e^{-i(k\eta_0 - \theta_k + 2\Phi_k + \chi)}) a_{-\vec{k}}^\dagger \right]
\end{aligned} \tag{5.251}$$

ここで $\chi = -k\eta_0 - \Phi_k$ の時 d_1, d_2 は以下のようになる。

$$d_{H,1} = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{r/2} (e^{i(\Phi_k - \theta_k)} a_{\vec{k}} + e^{-i(\Phi_k - \theta_k)} a_{\vec{k}}^\dagger) \tag{5.252}$$

$$d_{H,2} = -i \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-r/2} (e^{i(\Phi_k - \theta_k)} a_{\vec{k}} - e^{-i(\Phi_k - \theta_k)} a_{-\vec{k}}^\dagger) \tag{5.253}$$

これからスクイーズされる物理量は、 $Q-P$ 平面上で Q 軸に対して角度 $\pi/2 - \sigma$ をなす方向の物理量であり、引き延ばされる物理量は Q 軸に対して角度 $-\sigma$ をなす方向の物理量であることが分かる。

以下では、物理量のスクイーズイングがインフレーション期以降どのように引き起こされ、現在の観測量にどのように現れるか調べる。中心課題は、現在の観測により検証可能な初期宇宙の量子効果があるかどうかを検討することである。以下、上で導入した $Q_{\vec{k}}, P_{\vec{k}}$ を用いて議論する。ここで $\pi_{\vec{k}}$ は、

$$\pi_{\vec{k}} = u'_{\vec{k}} - \frac{a'}{a} u_{\vec{k}}$$

で与えられるので、 Q はテンソルモードの振幅を、 P はテンソルモードの時間一階微分を表す量と考えてよい。テンソルモードの振幅 $u_{H,\vec{k}}$ の時間進化は、4章で議論したように発展方程式の解として既に与えられている。そ

れらを用いて Q, P の時間進化を以下調べる。まずインフレーション期について調べる。ここで興味ある揺らぎは、インフレーション期にスーパーホライズンスケールに波長が引き延ばされるスケールである。スーパーホライズン極限でのインフレーション期の解は以下のように書ける。

$$u_{H,\vec{k}} = \sqrt{\frac{\pi}{4k}} e^{-i(k/a_1 H_1 - \pi(2\nu+1)/4)} \sqrt{\xi} \left(-i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \right) \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-\nu} \quad (5.254)$$

ここで $\nu \sim 3/2 + \varepsilon$ である。従って

$$Q_{\vec{k}} = -i 2^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} e^{-i(k/a_1 H_1 - \pi(2\nu+1)/4)} \xi^{1/2-\nu} \quad (5.255)$$

$$P_{\vec{k}} = \varepsilon^2 i 2^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} e^{-i(k/a_1 H_1 - \pi(2\nu+1)/4)} \xi^{-1/2-\nu} \quad (5.256)$$

ここで P の計算を行う時、 u を ε の二次まで計算する必要があるが、一次までしか追っていない。スケールファクターの時間微分を Conformal time で書き換えるところで ε の二次までの展開を行い、得た結果を示した。 P の計算結果は、正確で無く、 ε の二次でも消える可能性があることを注意しておく。今は全体像の把握に集中したいので、以後の議論の本質とあまり関係がなさそうな式の計算の詳細は後回しにさせてもらう。ただし、ここまでの結果から分かる、インフレーション期に運動量がスクイーズされ、振幅がストレッチされる、ということは本質的に正しい。一方、これまでの議論からスクイーズされる物理量は、 P と時計回りに $-k\eta_0$ なすことになり、初期位相に依存する。これは、上記の結果と反する。何がおかしいのか今のところ不明なので、とりあえず、初期位相をゼロ $-k\eta_0 = 0$ として以下議論を進める。ここでスーパーホライズンスケールでは $\Phi_{\vec{k}} \sim 0$ であることを使った。初期位相をゼロとしてよいなら、 $\chi \sim 0$ であり、スクイーズドされる物理量がほぼ P 軸方向を向く事になり、上記の結果と一致する。

次に輻射優勢期の時間発展について考察する。4章の結果から以下のようになる。

$$Q_{\vec{k}} = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} \sin \xi_R \quad (5.257)$$

ここでインフレーション終了後十分時間が経過した時期では $\xi_R \sim k\eta_R$ 。イ

インフレーション終了時 η_e ($\xi_R \sim \varepsilon \alpha_e$) での解の連続性から

$$A = i \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(3/2) e^{-i(k/a_1 H_1 - \pi(2\nu+1)/4)} \frac{1}{\sqrt{k}} (k\eta_e)^{-2} \quad (5.258)$$

共役な運動量は以下のように求まる。

$$P_{\vec{k}} = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} \left(\cos \xi_R - \frac{\sin \xi_R}{\xi_R} \right) \quad (5.259)$$

輻射優勢期の間、常にスーパーホライズンスケールであり続ける揺らぎでは、常に $\xi_R \ll 1$ であるから以下ようになる。

$$Q_{\vec{k}} \sim A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} \xi_R \quad (5.260)$$

$$P_{\vec{k}} \sim -A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} \frac{1}{3} \xi_R^2 \quad (5.261)$$

従って、 P の方向にスキューズされた状態であることは殆ど変わらない。一方、輻射優勢期のある時期 $\eta_{R,2}$ にホライズン内に再突入する揺らぎを考える。ホライズン再突入後は $\xi_R > 1$ であり、その後十分時間が経過すれば $\xi_R \gg 1$ となる。従って、energy equipartition 時では以下のように近似できる。

$$Q_{\vec{k}} = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} \sin \xi_R \quad (5.262)$$

$$P_{\vec{k}} \sim A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} \cos \xi_R \quad (5.263)$$

この結果からホライズン再突入後スキューズされる物理量が、時計回りに改訂することが分かる。時刻を固定すると（例えば energy equipartition 時）にスキューズされる物理量が $P-Q$ 平面上でどちらを向くかは、波数 k ($\xi_{R,eq}$ の値に依存する事から）に依存することも分かる。ホライズンに再突入以後十分時間が経過した時期には $k\eta \gg 1$ なので $\Phi_k \sim k\eta, \chi \sim -k\eta$ であり、 $P-Q$ 平面上でスキューズされる物理量が時計回りに回転することとなり、上記の結果と一致する。

次に物質優勢期の時間発展について考察する。4章の結果から以下のようになる。

$$Q_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} C \left(\frac{\sin \xi_M}{\xi_M} - \cos \xi_M \right) \quad (5.264)$$

$$P_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} C \left(\frac{3 \cos \xi_M}{\xi_M} - \frac{3 \sin \xi_M}{\xi_M^2} + \sin \xi_M \right) \quad (5.265)$$

Energy equipartition 時の解の連続性から

$$C = A \sin \xi_{eq} / (\sin \xi_{eq} / \xi_{eq} - \cos \xi_{eq}) \quad (5.266)$$

物質優勢期にホライズン再突入する場合、 $\xi_M \sim k\eta_M > 1$ である。 $\xi_M \gg 1$ のケースでは以下のようなになる。

$$Q_{\vec{k}} \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} C \cos \xi_M \quad (5.267)$$

$$P_{\vec{k}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k} C \sin \xi_M \quad (5.268)$$

スクイーズされる物理量は、時計回りに回転する。輻射優勢期にホライズン再突入したスケールの揺らぎの物質優勢期での進化については後回しにする。

テンソルモード振幅、時間一階微分それぞれに依存する観測量があれば、それらから Q, P を分離し、上記のことを検証することができる。宇宙物理的意義だが、宇宙のようなマクロスケールでの真空のスクイーピングという量子効果の検出というアカデミックな意義以外に、引き出す事ができる情報は何か？今後の課題の一つである。

5.2.9 量子もつれ状態

インフレーションは、揺らぎの波長がスーパーホライズンになる長波長モードに対して $\vec{k}, -\vec{k}$ で対となる 2 モードスクイーズド状態を生じる。テンソルモードには偏光の自由度が二つあり、これらと併せて量子もつれ状態を形成している可能性がある。即ち、どちらか一方を観測するまでは、二つの量子は、どちらの状態になるかは不確定であるが、どちらか一方を観測する他方の状態も決定されるという遠隔相関が存在する可能性がある。Nambu (2013), *Entropy*, 15, 1847-1874 や Nambu (2008) が、インフレーション中に

生成された量子揺らぎの量子もつれは、二つの検出器のセパレーションがホライズン以上になると観測されなくなることを、スカラー場を例として取り上げて示している。インフレーション時に生成されるスクイズド状態を用いて記述した時具体的に *disentanglement* がどう起きるのかは示されていない。ホライズン再突入期まで含めた考察もされていない。一旦、*disentangle* されたものは、二度と量子相関が復活しないという事なのかもしれないが。Jérôme Martin (2012), *Journal of Physics: Conference Series* 405, 012004 はインフレーションは、人類が手にしたもっとスクイズされたスクイズ状態を作り出す等から、量子力学と重力を結びつける重要な研究の場を提供していると、主張しているが具体性に欠けている。

5.2.10 有限温度の効果

宇宙に果てはありますか？という素朴な疑問に観測に基づいて回答を与える可能性について議論する。宇宙に果てはあるか？という問題設定を現在のハッブルホライズン内で我々が観測する宇宙と同じ姿をした宇宙は無限の空間に広がっているのか？それとも有限か？有限なら現在のハッブルホライズンの何倍まで広がっているのか？という問題設定とする。手がかりの一つが、現在のハッブルホライズンがインフレーション期にスーパーホライズンになる時期の宇宙の温度が有限であることが、何らかの観測量に現れる可能性にあるのではないかと考え以下の考察を行う。

ここまではインフレーション時は、インフラトン場のエネルギーが支配的としてきた。しかし、プランクタイムからインフレーションが始まるまでの時期は、輻射優勢であたっと考えられる。したがって、インフレーションへの移行期は、輻射場のエネルギー密度が与える膨張則への効果は無視できない。そこで、輻射場のエネルギー密度も考慮して、輻射優勢期からインフラトン場優勢期への移行を考慮して厳密にスケールファクターの時間進化を追い、テンソルモードの発展方程式の解を求めることにする。輻射場のエネルギー密度を ρ_r 、インフラトン場のエネルギー密度を ρ_ϕ とする。輻射場とインフラトン場のエネルギー密度が等しくなった時期を a_1 とする。

$$\rho_{r,1} = \rho_{\phi,1}$$

よとなる時期である。フリードマン方程式は以下のようになる。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_{r,1} \left(\frac{a_1}{a}\right)^4 + \rho_{\phi} \right) \quad (5.269)$$

a_1 の時のハッブル定数を H_1 とし、Conformal time を用いて変形すると以下のようになる。

$$a'^2 = \frac{1}{2} H_1^2 a_1^4 \left(1 + \frac{\rho_{\phi}}{\rho_{r,1}} \left(\frac{a}{a_1}\right)^4 \right) \quad (5.270)$$

$a \gg a_1$ の時期では、

$$a'^2 \sim \frac{8\pi G}{3} \rho_{\phi} a^4 = H_{\phi}^2 a^4 \quad (5.271)$$

と書ける。ここで H_{ϕ} はインフラトン優勢期のハッブル定数であり、これまでの議論でインフレーション期のハッブル定数として扱っていたものである。これを用いると以下の式をえる。

$$a'^2 = \frac{1}{2} H_1^2 a_1^4 \left(1 + 2 \frac{H_{\phi}^2}{H_1^2} \left(\frac{a}{a_1}\right)^4 \right) \quad (5.272)$$

この式から Conformal time のスケールファクター依存性が得られる。これを用いて式 (4.236) を解くことでテンソルモードの解が得られ、スペクトルの波数依存性が得られる。式 (4.254) で得られたスペクトルからのズレとして、輻射場のエネルギー密度が膨張則に与える影響が現れる。したがって、このズレを測定することで、現在のハッブルホライズンが、インフレーション期にホライズン以上の長さになった時の輻射場の寄与が分かる。この結果から現在のハッブルホライズン内と一度は因果関係を保つ事ができた領域、即ち同じ姿をしている宇宙の大きさが、現在のハッブルホライズンの何倍であるかが分かる。

インフラトン場のエネルギー密度の時間依存性が無視できるときは $H_{\phi}^2 = 1/2H_1^2$ である。この時

$$x = -\frac{a_1}{a}$$

を変数として用いて発展方程式を書き換えると以下の方程式をえる。

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{2}{x(1+x^4)} \frac{dh}{dx} + \left(\frac{k}{a_1 H_\phi}\right)^2 \frac{1}{1+x^4} h = 0 \quad (5.273)$$

この式はインフレーション期突入後十分時間が経過した時点、即ち $a \gg a_1$ の極限で

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{2}{x^5} \frac{dh}{dx} + \left(\frac{k}{a_1 H_\phi}\right)^2 \frac{1}{x^4} h = 0 \quad (5.274)$$

となり4章で扱ったテンソルモードのインフレーション期の発展方程式と一致する。逆にインフレーション期に入る十分以前、即ち輻射優勢期では、

$$X = -\frac{1}{x}$$

を用いて以下のように書き換えられる。

$$\frac{d^2h}{dX^2} + \frac{2}{X} \frac{dh}{dX} + \left(\frac{k}{a_1 H_\phi}\right)^2 h = 0 \quad (5.275)$$

これは4章で議論した輻射優勢期の発展方程式と一致している。

ここまでは、宇宙は平坦であるとしてきた。しかし、インフレーション開始以前は、ぴったり平坦である理由が無く、平坦からのズレが顕著である可能性が高い。従って、**Conformal time** とスケールファクターを結びつける関係は以下の方程式から得られる。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_{r,1} \left(\frac{a_1}{a}\right)^4 + \rho_\phi\right) - \frac{K}{a^2} \quad (5.276)$$

ここで K は宇宙の曲率である。ここまでは、一様等方性をインフレーション開始以前の宇宙にかしていたが、この仮定からも大きくずれている可能性がある。 K がゼロで無い場合、一様等方性からのズレがあった場合等、調べるべきパラメータは沢山ある。

宇宙の有限温度の影響は、インフラトン場や重力場の量子揺らぎの熱的揺らぎとして現れる可能性もある。加速度膨張する宇宙での量子場の熱的スペクトルの計算の参考になる論文として、**Rindler** 時空でのスカラー場の熱的揺らぎのスペクトルについて考察した **Kolekar and Padmanabhan (2013)**

arXiv:1308.6289v2 がある。ただ、宇宙の進化の各段階でインフラトン場や重力場が熱的揺らぎにより各時代の温度と熱平衡にある量子スペクトルを持つならば、現在の宇宙でも重力波 3 K の熱的スペクトルを持った成分を持たねばならず、それはおかしい。したがって、真空の揺らぎは温度 0 の場合のみで十分で、有限温度のため生じる熱的スペクトルを考慮する必要は無いと考えてよいと思われる。

5.2.11 2 次のコヒーレンス

以下の議論では、時間発展演算子を $U = SR$ で表現することとする。

$$a_{H,\vec{k}}(\eta) = U^\dagger a_{\vec{k}} U = \cosh \frac{r}{2} e^{i\Phi_k - \theta_k} a_{\vec{k}} + \sinh \frac{r}{2} e^{-i\Phi_k - \theta_k} a_{-\vec{k}}^\dagger \quad (5.277)$$

$$a_{H,\vec{k}}^\dagger(\eta) = U^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger U = \cosh \frac{r}{2} e^{-i\Phi_k - \theta_k} a_{\vec{k}}^\dagger + \sinh \frac{r}{2} e^{i\Phi_k - \theta_k} a_{-\vec{k}} \quad (5.278)$$

これから粒子数の平均値は

$$\langle 0 | a_{H,\vec{k}}^\dagger a_{H,\vec{k}} | 0 \rangle = \sinh^2 \frac{r}{2} \quad (5.279)$$

となり $\langle ss | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | ss \rangle$ の結果と一致する。時刻 η 、位置 \vec{x} でのテンソルモードの振幅、及び共役な運動量を以下のように二つの方法で定義する。

$$Q_H(\vec{x}, \eta) \equiv \sqrt{\frac{1}{V_c}} \sum_{\vec{k}} (Q_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + Q_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \quad (5.280)$$

$$P_H(\vec{x}, \eta) \equiv \sqrt{\frac{1}{V_c}} \sum_{\vec{k}} (P_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + P_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \quad (5.281)$$

$$u_{H,\vec{k}}(\vec{x}, \eta) = \sqrt{\frac{1}{V_c}} \sum_{\vec{k}} (u_{H,\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + u_{H,\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \quad (5.282)$$

$$\pi_{H,\vec{k}}(\vec{x}, \eta) = \sqrt{\frac{1}{V_c}} \sum_{\vec{k}} (\pi_{H,\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \pi_{H,\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \quad (5.283)$$

一次のコヒーレンスは以下のように計算される。

$$\langle 0|Q_H^\dagger(\vec{x}, \eta)Q_H(\vec{x}, \eta)|0\rangle = \frac{1}{V_c} \sum_{\vec{k}} (\cosh r + \cos 2\sigma \sinh r) \quad (5.284)$$

$$\langle 0|P_H^\dagger(\vec{x}, \eta)P_H(\vec{x}, \eta)|0\rangle = \frac{1}{V_c} \sum_{\vec{k}} (\cosh r - \cos 2\sigma \sinh r) \quad (5.285)$$

$$\langle 0|u_H^\dagger(\vec{x}, \eta)u_H(\vec{x}, \eta)|0\rangle = \frac{1}{V_c} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k} (\cosh r + \cos 2\sigma \sinh r) \quad (5.286)$$

$$\langle 0|\pi_H^\dagger(\vec{x}, \eta)\pi_H(\vec{x}, \eta)|0\rangle = \frac{1}{V_c} \sum_{\vec{k}} k (\cosh r - \cos 2\sigma \sinh r) \quad (5.287)$$

付録 A

相対論概説

基底ベクトルが \vec{e}_μ で与えられる時、ベクトルは以下のように書ける。

$$\vec{A} = A^\mu \vec{e}_\mu \quad (\text{A.1})$$

ベクトルの座標 x^ν での微分は以下のように成分の微分と基底の微分で書ける。

$$\partial_\nu \vec{A} = A^{\mu, \nu} \vec{e}_\mu + A^\nu \vec{e}_{\mu, \nu} \quad (\text{A.2})$$

ここで基底の微分も同一座標点でのベクトルであるので、以下のように基底ベクトルで展開できる。

$$\vec{e}_{\mu, \nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (\text{A.3})$$

ここで展開係数 Γ をクリストッフエル記号と呼ぶ。

メトリックテンソルは以下のように定義される。微小線素ベクトル $d\vec{x} = dx^\nu \vec{e}_\nu$ を使って微小線素の長さが以下のように計算できる。

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \vec{e}_\nu \cdot \vec{e}_\mu dx^\nu dx^\mu \quad (\text{A.4})$$

ここでメトリックテンソルを以下のように定義する。

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \quad (\text{A.5})$$

例えば二次元のデカルト座標系では、基底ベクトルは至る所で互いに直交しており且つ大きさが1であるので

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.6})$$

である。座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu) \quad (\text{A.7})$$

を施したとする。この時以下のように変換する基底ベクトルを座標基底と呼ぶ。

$$\vec{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \vec{e}_\nu \quad (\text{A.8})$$

例えば、二次元デカルト座標から二次元極座標への変換を考える。

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

すると返還後の基底は以下の様に見える。

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y$$

従って、二次元極座標系でのメトリックテンソルは以下のようになる。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

クリストッフェル記号をメトリックテンソルで表す公式を導出する。相対論の基本原理の一つは等価原理である。これによると重力場中で自由落下する系では無重力状態となる。即ちどんな座標系であっても局所的慣性系に座標変換によってうつる事ができる。以下局所慣性系を \tilde{x} とし、その基底を \vec{e} と表す。局所慣性系とはメトリックテンソルの座標一階微分がゼロである系である。従って、局所慣性系では基底の座標一階微分がゼロである。座標二階微分はゼロである必要がない。一般座標系 x から局所慣性系への変換によって基底ベクトルは次のように変換される。

$$\vec{e}_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \vec{e}_\alpha$$

この両辺を x で微分する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_\alpha + \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\nu} \\
 &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_\alpha \\
 \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \vec{e}_\alpha &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_\alpha \\
 &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_\alpha \\
 &= \frac{\partial \vec{e}_\nu}{\partial x^\mu} \\
 &= \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \vec{e}_\alpha
 \end{aligned}$$

即ち

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \quad (\text{A.9})$$

でありクリストッフエル記号の下付き添字の対称性は等価原理により保証されている。次にメトリックテンソルの微分を考える。

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \partial_\alpha \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \vec{e}_\sigma \cdot \vec{e}_\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\sigma \\
 &= \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma g_{\beta\sigma}
 \end{aligned}$$

添字をサイクリックに並べ替えた式を並べる。

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma g_{\beta\sigma} \\
 \partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma g_{\sigma\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma g_{\gamma\sigma} \\
 \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma g_{\alpha\sigma}
 \end{aligned}$$

上の二つの式を足し、最後の式を引き、クリストッフエルの添字の対称性を用いると次の式を得る。

$$2\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}$$

メトリックテンソルの反変成分 $g^{\mu\gamma}$ は、共変成分 $g_{\gamma\nu}$ の逆行列として定義される。即ち

$$g^{\mu\gamma} g_{\gamma\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (\text{A.10})$$

で定義される。両辺に $g^{\mu\gamma}$ つまり $g_{\sigma\gamma}$ の逆行列を掛けて以下の式を得る。

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}(\partial_{\alpha}g_{\gamma\beta} + \partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) \quad (\text{A.11})$$

ベクトルの共変微分は次のように定義される。

$$\partial_{\nu}\vec{A} = \partial_{\nu}A^{\mu}\vec{e}_{\mu} + A^{\mu}\partial_{\nu}\vec{e}_{\mu} = \partial_{\nu}A^{\mu}\vec{e}_{\mu} + A^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}\vec{e}_{\mu}$$

そこでこれを以下のように表す。

$$\nabla_{\nu}A^{\mu} = A^{\mu}_{;\nu} = \partial_{\nu}A^{\mu} + A^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} \quad (\text{A.12})$$

スカラー量は、基底ベクトルを持たないので、スカラー量の共変微分は、偏微分に等しい。成分が上付き添字で表されているベクトルを反変ベクトルとよび、下付きの場合共変ベクトルと呼ぶ。共変ベクトルの共変微分は次のように計算出来る。

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu}(A^{\mu}B_{\mu}) &= \nabla_{\nu}A^{\mu}B_{\mu} + A^{\mu}\nabla_{\nu}B_{\mu} \\ &= \partial_{\nu}(A^{\mu}B_{\mu}) = \partial_{\nu}A^{\mu}B_{\mu} + A^{\mu}\partial_{\nu}B_{\mu} \\ &= \nabla_{\nu}A^{\mu}B_{\mu} + A^{\mu}\nabla_{\nu}B_{\mu} \\ &= (\partial_{\nu}A^{\mu} + A^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu})B_{\mu} + A^{\mu}\nabla_{\nu}B_{\mu} \end{aligned}$$

二行目の等号では、スカラー量の共変微分は偏微分に等しいということを使った。これを整理すると以下の式を得る。

$$\nabla_{\nu}B_{\mu} = \partial_{\nu}B_{\mu} - B_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \quad (\text{A.13})$$

一般のテンソルの共変微分は、これら共変、反変ベクトルの掛け合わせで成分が出来ていると考えれば、これらの公式を適応することで容易に得られる。例えば二階の共変反変テンソル T_{ν}^{μ} の共変微分は $T_{\nu}^{\mu} = A^{\mu}B_{\nu}$ として、次のように計算できる。

$$\nabla_{\alpha}T_{\nu}^{\mu} = \nabla_{\alpha}A^{\mu}B_{\nu} + A^{\mu}\nabla_{\alpha}B_{\nu} \quad (\text{A.14})$$

$$= (\partial_{\alpha}A^{\mu} + A^{\sigma}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu})B_{\nu} + A^{\mu}(\partial_{\alpha}B_{\nu} - B_{\sigma}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma}) \quad (\text{A.15})$$

$$= \partial_{\alpha}T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu}T_{\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma}T_{\sigma}^{\mu} \quad (\text{A.16})$$

共変微分は、テンソルの階数を一つ上げた新たなテンソルを生成する。この事は任意のスカラー関数 ϕ の共変微分を調べる事が示す事が出来る。

$$\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi$$

は、座標変換 $x \rightarrow x'$ に伴い以下のように変換される。

$$\nabla'_{\mu}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu}\phi = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \nabla_{\nu}\phi$$

この式から $\nabla_{\mu}\phi$ の変換則が共変ベクトルと同じであることがわかる。任意スカラー関数 ϕ に対してこの式が成立するという事は共変微分の変換則が共変ベクトルと同じであるところを示している。この事を使うとメトリックテンソルの共変微分がゼロであることが示される。局所慣性系においてメトリックテンソルの共変微分を行うと以下のようになる。

$$\nabla_{\alpha}\tilde{g}_{\beta\gamma} = 0$$

即ち全ての成分がゼロである。一般座標におけるメトリックテンソルの共変微分は、局所慣性系のメトリックテンソルの共変微分の線形結合で必ず表す事ができる。従って、一般座標におけるメトリックテンソルの共変微分はゼロの線形結合となり、ゼロとなる。

ここまでの話のまとめとして、主たる式を行列表記で表す。

時空間の曲率の情報を持つリーマンテンソルは共変微分の交換関係式 $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}$ を用いて、次に様に定義される。

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]A^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}A^{\beta} \quad (\text{A.17})$$

この定義式の左辺を計算することでリーマンテンソルをクリストッフェル記号で表す以下の公式を得る。

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} \quad (\text{A.18})$$

リッチーテンソル、リッチースカラーをそれぞれ以下のように定義する。

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (\text{A.19})$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} \quad (\text{A.20})$$

何も断らなければ、計算は時間一次元空間三次元の四次元空間で行う。一方時間軸の存在を無視して、空間三次元だけで計算することがある。この時得られたリッチースカラーを空間局率 (spatial curvature) と呼ぶ。リーマ

ンテンソルは添字に対する以下の対称性を持つ。ここで $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma}R_{\beta\mu\nu}^{\sigma}$ である。

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.21})$$

$$R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.22})$$

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.23})$$

これはリーマンテンソルをクリストッフエルで表す公式を局所慣性系で適応し、局所慣性系のメトリックテンソルの二階微分で書き表す事で示す事ができる。リーマンテンソルの対称、反対称性という性質は座標系に依存しない性質なので、調べ易い座標系つまり局所慣性系で調べればよい。これからリッチテンソルは、対称テンソルであることが分かる。

次にアインシュタイン方程式を導出する。指導原理の一つは、一般共変性、即ち方程式がテンソルで書けている必要があること。もう一つは、エネルギー運動量の保存が必ず成り立つ事である。後者はエネルギー運動量テンソルを用いて次のように表現できる。

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.24})$$

マクスウェル方程式が電荷保存則を必ず保証するように、アインシュタイン方程式はこの式を必ず満たす必要がある。以下のビアンキの恒等式を考える。

$$([\nabla_{\alpha}, [\nabla_{\beta}, \nabla_{\gamma}]] + [\nabla_{\beta}, [\nabla_{\gamma}, \nabla_{\alpha}]] + [\nabla_{\gamma}, [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]]A^{\mu} \equiv 0 \quad (\text{A.25})$$

ここで A^{σ} は任意のベクトルである。この式が恒等的に成り立つ事は具体的に交換関係式を展開して括弧の中を計算してみれば自明である。計算を進めるにあたって $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]B_{\alpha}$ がリーマンテンソルを用いてどう書ける調べておく必要がある。

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}](B_{\alpha}A^{\alpha}) &= \nabla_{\mu}\partial_{\nu}(B_{\alpha}A^{\alpha}) - \nabla_{\nu}\partial_{\mu}(B_{\alpha}A^{\alpha}) \\ &= \partial_{\mu}\partial_{\nu}(B_{\alpha}A^{\alpha}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\partial_{\sigma}(B_{\alpha}A^{\alpha}) - \partial_{\nu}\partial_{\mu}(B_{\alpha}A^{\alpha}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}\partial_{\sigma}(B_{\alpha}A^{\alpha}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

これはスカラー量を二回移動して同じ場所にうつす時その結果が移動の順

番によらないことを示している。この式から以下の式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= A^\alpha [\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_\alpha + B_\alpha [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha \\ &= A^\alpha [\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_\alpha + B_\beta R_{\alpha\mu\nu}^\beta A^\alpha \end{aligned}$$

従って

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_\alpha = -B_\beta R_{\alpha\mu\nu}^\beta \quad (\text{A.26})$$

ビアンキの恒等式の左辺最後の項を取り上げる。

$$[\nabla_\gamma, [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]] A^\mu = \nabla_\gamma [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu - [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \nabla_\gamma A^\mu$$

第一項は次のようになる。

$$\nabla_\gamma [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu = \nabla_\gamma (R_{\nu\alpha\beta}^\mu A^\nu) = (\nabla_\gamma R_{\nu\alpha\beta}^\mu) A^\nu + R_{\nu\alpha\beta}^\mu \nabla_\gamma A^\nu$$

第二項は、共変微分の交換関係演算子が、共変ベクトル ∇_γ に作用する部分と反変ベクトル A^μ に作用する部分に分けられる。

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \nabla_\gamma A^\mu = -R_{\gamma\alpha\beta}^\sigma \nabla_\sigma A^\mu + R_{\nu\alpha\beta}^\mu \nabla_\gamma A^\nu$$

これから

$$[\nabla_\gamma, [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]] A^\mu = (\nabla_\gamma R_{\nu\alpha\beta}^\mu) A^\nu + R_{\gamma\alpha\beta}^\sigma \nabla_\sigma A^\mu$$

この結果をビアンキの恒等式に代入すると以下の式を得る。

$$(\nabla_\alpha R_{\nu\beta\gamma}^\mu + \nabla_\beta R_{\nu\gamma\alpha}^\mu + \nabla_\gamma R_{\nu\alpha\beta}^\mu) A^\nu \quad (\text{A.27})$$

$$+ (R_{\alpha\beta\gamma}^\sigma + R_{\beta\gamma\alpha}^\sigma + R_{\gamma\alpha\beta}^\sigma) \nabla_\sigma A^\mu \equiv 0 \quad (\text{A.28})$$

ここで A^ν 、 $\nabla_\sigma A^\mu$ はそれぞれ独立で任意のベクトル及び二階のテンソルなので、この式が恒等的に成り立つためには、それぞれの係数がゼロで無ければならない。従ってビアンキの恒等式から以下の恒等式を得る。

$$\nabla_\alpha R_{\nu\beta\gamma}^\mu + \nabla_\beta R_{\nu\gamma\alpha}^\mu + \nabla_\gamma R_{\nu\alpha\beta}^\mu = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\sigma + R_{\beta\gamma\alpha}^\sigma + R_{\gamma\alpha\beta}^\sigma = 0 \quad (\text{A.30})$$

一つの恒等式を扱う。まず μ と β の縮約をとると次の式を得る。

$$\nabla_\alpha R_{\nu\gamma} + \nabla_\mu R_{\nu\gamma\alpha}^\mu - \nabla_\gamma R_{\nu\alpha} = 0$$

次に $g^{\nu\nu}$ を掛けると次の式を得る。

$$0 = \nabla_\alpha R - 2\nabla_\mu R^\mu_\alpha = \nabla_\mu (g^\mu_\alpha R - 2R^\mu_\alpha)$$

ここで $R^\mu_\alpha = g^{\mu\sigma} R_{\sigma\alpha}$ である。以上から以下の恒等式を得る。

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (\text{A.31})$$

従ってアインシュタイン方程式を以下の形にすれば、エネルギー運動量保存則が常に成立することが保証される。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \kappa^2 T^{\mu\nu} \quad (\text{A.32})$$

ここで κ^2 は定数である。

アインシュタイン方程式の未定定数は、弱い重力場の極限でアインシュタイン方程式がニュートンの万有引力の法則と矛盾しないという対応原理から導かれる。静止した圧力ゼロの完全流体のエネルギー運動量テンソルは T^{00} 成分のみ値をもち $T^{00} = \rho c^2$ である。弱い重力場の極限ではメトリックテンソルを次の様に書けるとする。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) \left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right) \quad (\text{A.33})$$

ここで $|\Phi/c^2| \ll 1$ であり、この量の一次までアインシュタイン方程式を計算すると以下の式を得る。

$$\frac{2}{c^2} \Delta \Phi = \kappa^2 \rho c^2$$

これがニュートンの万有引力の法則を表すポアッ村方程式 $\delta \Phi = 4\pi G \rho$ に一致する為には、

$$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (\text{A.34})$$

であればよい。

アインシュタイン方程式の両辺に $g_{\mu\nu}$ を掛けて縮約をとると次の式を得る。

$$R = -\kappa^2 T$$

ここで $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ である。これを用いてアインシュタイン方程式を書き直

すと次の式を得る。

$$R^{\mu\nu} = \kappa^2 \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g^{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.35})$$

スカラー曲率を計算せずに済む分、計算が楽になるため具体的計算ではこちらを用いる事が多い。

アインシュタイン方程式を導く作用積分はアインシュタイン – ヒルベルト作用と呼ばれて以下で書ける。

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{1}{2} \frac{c^4}{8\pi G} R + L_{mat} \right) \quad (\text{A.36})$$

ここで L_{mat} は物質場のラグランジアンである。 g はメトリックテンソルの行列式であり、 $\sqrt{-g}$ は、局所慣性系から一般座標系への座標変換に伴い現れたジャコビアンである。

重力場中の粒子の運動方程式を導出する。粒子は重力以外の力を受けていないとする。粒子の質量を m とする。粒子の固有時間を次の式で定義する、

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

固有時間はスカラー量である。これを用いて固有速度、固有運動量を次のように定義する。

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$P^\mu = mU^\mu$$

これら定義から次の等式を得る。

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = P_\mu P^\mu = m^2 \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = -m^2 c^2$$

等価原理より、重力場中の粒子の運動を記述する座標は必ず局所慣性系に取る事ができる。そこでは重力のみ感じて運動する粒子には、力が働かないので等速直線運動する。局所慣性系の物理量にチルダーを付けて表すと粒子の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{d\tilde{U}^\mu \vec{e}_\mu}{d\tau} = \frac{d\tilde{U}^\mu}{d\tau} \vec{e}_\mu = 0 \quad (\text{A.37})$$

ここで $\tilde{U}^\mu \vec{e}_\mu = U^\mu \vec{e}_\mu$ であるから、この式は一般座標変換を行っても同じ形で成立する。したがって

$$\begin{aligned} \frac{dU^\mu \vec{e}_\mu}{d\tau} &= \frac{dU^\mu}{d\tau} \vec{e}_\mu + U^\alpha \frac{d\vec{e}_\alpha}{d\tau} \\ &= \frac{dU^\mu}{d\tau} \vec{e}_\mu + U^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \frac{dU^\mu}{d\tau} \vec{e}_\mu + U^\alpha U^\nu \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \vec{e}_\mu \end{aligned}$$

よって自由落下する粒子の運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = -U^\alpha U^\nu \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \quad (\text{A.38})$$

この式から分かるようにクリストッフェルは、粒子に働く重力を表す。光速より十分遅い速度の粒子が、弱い重力場中を運動する場合を考える。メトリックテンソルが次のように書けるとする。

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Psi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) \quad (\text{A.39})$$

固有時間は次のように近似出来る。

$$d\tau \sim dt \left(1 + \frac{\Psi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

ここで $v^i = dx^i/dt$ は粒子の3次元速度である。四元速度は次のようになる。

$$U^\mu = \left(c \left(1 - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2}\right), v^i \left(1 - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2}\right)\right) \quad (\text{A.40})$$

従って粒子の運動方程式は次のように

$$\frac{dv^i}{dt} \sim -U^0 U^0 \Gamma_{00}^i \sim -\partial_i \Psi$$

重力ポテンシャル Ψ 中の運動方程式を再現する。

次に光子のように質量がゼロの粒子の重力場中の運動方程式を導く。この時質量も固有時間もゼロであるから、四元速度、四元運動量の定義に因る。ここで $m \rightarrow 0$ に速度と $d\tau \rightarrow 0$ になる速度が同じであることに着目す

ると $d\lambda \equiv d\tau/m$ なるアフィンパラメータと呼ばれるパラメータを定義すれば、 λ はスカラー量の割り算で定義されているのでスカラー量であり、且つ $d\lambda = \text{const}$ を保ちながら $d\tau$ 、 m をゼロに近づける極限をとることができる。そこで mass less 粒子の四元運動量を次のように定義する。

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (\text{A.41})$$

当然だがこれは質量がゼロで無い粒子の四元運動量と一致し

$$P_\mu P^\mu = 0 \quad (\text{A.42})$$

を満たす。質量 m の粒子の重力場中の運動方程式の両辺に m^2 を掛け、四元運動量で書き換えると次の式を得る。

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = -P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \quad (\text{A.43})$$

これが mass less 粒子にも適応できる重力場中の運動方程式である。アフィンパラメータを陽に含むと扱いにくいので左辺を更に変形する。

$$\frac{dP^\mu}{dx^0} \frac{dx^0}{d\lambda} = -P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$$

したがって mass less 粒子の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{dP^\mu}{dx^0} = -\frac{1}{P^0} P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \quad (\text{A.44})$$

下付き四元運動量ベクトルを使った方程式にしておくと便利なのでそれを導出する。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dP^\mu}{d\lambda} + P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha} + P^\alpha P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \\ &= P^\alpha \left(\frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha} + P^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) = P^\alpha \nabla_\alpha P^\mu \end{aligned}$$

つまり粒子の運動方程式は共変微分を使って表すことができる。メトリックテンソルの共変微分がゼロであることからこの方程式は以下のように変形できる。

$$0 = P^\alpha \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} P_\nu) = g^{\mu\nu} P^\alpha \nabla_\alpha P_\nu$$

任意のメトリックテンソルについてこの式が成り立つことから以下の方程式を得る。

$$P^\mu \nabla_\mu P_\nu = P^\mu \partial_\mu P_\nu - P^\mu P_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \quad (\text{A.45})$$

ここで

$$\begin{aligned} P^\mu P_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= P^\mu P_\alpha \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \\ &= \frac{1}{2} P^\mu P^\beta (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \\ &= \frac{1}{2} P^\mu P^\beta g_{\beta\mu,\nu} \end{aligned}$$

また

$$P^\mu \frac{\partial P_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial P_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{dP_\nu}{d\lambda} = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dP_\nu}{dx^0} = P^0 \frac{dP_\nu}{dx^0} \quad (\text{A.46})$$

であるので求める方程式は以下のようになる。

$$\frac{dP_\nu}{dx^0} = \frac{1}{2} \frac{1}{P^0} P^\mu P^\beta g_{\beta\mu,\nu} \quad (\text{A.47})$$

付録 B

偏光 E、B モードとその電子散乱による生成

6.z 軸方向に伝搬する電磁波の電場成分が以下の式で与えられる場合を考える。

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} \\ E_y &= a_2 e^{i(\omega t + \delta_2)} \end{aligned}$$

ここで複素数表示を用いたのは計算の都合上であり、実際の電場はこれらの実部即ち $Re(E_x), Re(E_y)$ で表わされる。

6-1. 以下の式で coherency matrix を定義する。

$$J \equiv \begin{pmatrix} E_x E_x^* & E_x E_y^* \\ E_x^* E_y & E_y^* E_y \end{pmatrix}$$

この時式 (2.38) で定義される Stokes parameters を用いて以下のように書くことを示せ。

$$J \equiv \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{Q}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{U}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{V}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

6-2. 以下の4つの場合について電磁波の電場成分の振動方向を $x-y$ 平面内に図示せよ。(1) $\delta = 0, Q > 0, U = 0$, (2) $\delta = 0, Q < 0, U = 0$, (3) $\delta =$

0, $Q = 0, U > 0$, (4) $\delta = 0, Q = 0, U < 0$

6-3. 空のある領域が $\delta = 0$ 即ち直線偏光をしている場合を考える。空の座標を $\vec{x} = (x, y)$ で表わすとする。偏光観測により $I(x, y), Q(x, y), U(x, y)$ の分布がこの空の領域に対して得られたとする。これらを $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ ($\vec{k} = (k_x, k_y)$) によりフーリエ変換した結果 $\hat{I}(\vec{k}), \hat{Q}(\vec{k}), \hat{U}(\vec{k})$ を用いて coherency matrix のフーリエスペクトルは以下のように書ける。

$$\hat{J}(\vec{k}) \equiv \frac{\hat{I}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hat{Q}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hat{U}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

波数ベクトル \vec{k} と x 軸のなす角を θ (x から \vec{k} へ反時計回りを正とする) とし、座標を反時計回りに角 θ 回転し x 軸を \vec{k} 方向と一致させた新しい座標系を (x', y') とする。変換後の'系での coherency matrix が以下のように書ける事を示せ。

$$\hat{J}'(\vec{k}) \equiv \frac{\hat{I}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hat{E}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hat{B}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

但し、

$$\begin{aligned} \hat{E}(\vec{k}) &\equiv \hat{Q}(\vec{k})\cos 2\theta + \hat{U}(\vec{k})\sin 2\theta \\ \hat{B}(\vec{k}) &\equiv -\hat{Q}(\vec{k})\sin 2\theta + \hat{U}(\vec{k})\cos 2\theta \end{aligned}$$

6-4. 偏光状態が

$$\frac{\hat{E}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表わされるモードを偏光の E モード

$$\frac{\hat{B}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で表わされるモードを偏光の B モードと呼ぶ。E モードのみが存在する場合即ち $\hat{B} = 0$ の場合の偏光状態、及び B モードのみが存在する場合即ち $\hat{E} = 0$ の場合の偏光状態を波数ベクトル \vec{k} に対する相対的關係に特に注意して図

示せよ。

6-5. 6-4. で与えられた $\hat{E}(\vec{k})$ の定義式両辺に $-k^2$ を掛け $k_x = k\cos\theta, k_y = k\sin\theta$ を用いて変形すると以下式が得られることを示せ。

$$-k^2\hat{E}(\vec{k}) = -(k_x^2 - k_y^2)\hat{Q}(\vec{k}) - 2k_xk_y\hat{U}(\vec{k})$$

6-6. フーリエ逆変換の公式

$$E(\vec{x}) = \int d^2k \hat{E}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$Q(\vec{x}) = \int d^2k \hat{Q}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$U(\vec{x}) = \int d^2k \hat{U}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

を用いて 6-5 で得られた結果をフーリエ逆変換することで以下の式が得られることを示せ。

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)E(\vec{x}) = (\partial_x^2 - \partial_y^2)Q(\vec{x}) + 2\partial_x\partial_yU(\vec{x})$$

ここで

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$$

6-7. E モードと同様の手続きを B モードに施し以下式を満たすことを示せ。

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)B(\vec{x}) = -2\partial_x\partial_yQ(\vec{x}) + (\partial_x^2 - \partial_y^2)U(\vec{x})$$

8 任意の方向 $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ から飛来する無偏光電磁波の原点に存在する電子による散乱を考える。観測者の視線方向 \vec{n}' を z 軸にとる。

8-1 入射光の偏光成分を進行方向 $-\vec{n}$ と視線方向 z 軸が作る平面（これを入射平面と呼ぶ）内の成分とその平面に垂直な成分の 2 成分に分離しそれぞれの偏光ベクトルを \vec{e}_1, \vec{e}_2 とする。以下の式を示せ。

$$\vec{e}_1 = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$

$$\vec{\epsilon}_2 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

8-2 同様に散乱波の偏光成分を入射平面内の成分とそれと垂直な成分に分離しそれぞれの偏光ベクトルを $\vec{\epsilon}'_1, \vec{\epsilon}'_2$ とする。以下の式を示せ。

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}'_1 &= (\cos\phi, \sin\phi, 0) \\ \vec{\epsilon}'_2 &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0)\end{aligned}$$

8-3 入射波の偏光ベクトルが一般の方向を向いた $\vec{\epsilon}_{in}$ でその散乱波の偏光ベクトルが $\vec{\epsilon}_{out}$ の時トムソン散乱の微分断面積が以下の式で書ける事を説明せよ。式 (3.3) の結果を用いてよい。

$$\frac{d\sigma(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} = r_0^2 (\vec{\epsilon}_{in} \cdot \vec{\epsilon}_{out})^2$$

8-4 入射フラックス $S/2$ 、偏光ベクトル $\vec{\epsilon}_1$ の入射波の散乱波の x 成分 y 成分の強度がそれぞれ

$$\begin{aligned}\frac{dP_x^{(1)}(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{x})^2 \\ \frac{dP_y^{(1)}(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{y})^2\end{aligned}$$

と書ける事を示せ。ここで \vec{x}, \vec{y} は x, y 方向の単位ベクトルである。同様に偏光ベクトルが $\vec{\epsilon}_2$ の入射波に対して

$$\begin{aligned}\frac{dP_x^{(2)}(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{x})^2 \\ \frac{dP_y^{(2)}(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{y})^2\end{aligned}$$

を示せ。

8-5 入射波が無偏光の時散乱波のストークスパラメータ Q, U がそれぞれ以下の式で書ける事を示せ。

$$\begin{aligned}Q(\vec{n}', \vec{n}) &= \frac{S}{2} r_0^2 [(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{x})^2 + (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{x})^2 - (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{y})^2 - (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{y})^2] \\ U(\vec{n}', \vec{n}) &= \frac{S}{2} r_0^2 2 [(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{x})(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{y}) + (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{x})(\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{y})]\end{aligned}$$

ここで入射波の二つの独立な偏光成分の入射フラックスがそれぞれ S であ

るとした。

8-6 \vec{n} の方向から飛来する入射電磁波の強度が $S(\vec{n})$ で与えられる時、観測される Q, U が次の式で与えられることを説明せよ。

$$Q(\vec{n}') = - \int d\Omega \frac{S(\vec{n})}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \cos 2\phi$$

$$U(\vec{n}') = - \int d\Omega \frac{S(\vec{n})}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin 2\phi$$

9 スカラーモードによる偏光の生成：状況設定は、 $S(\vec{n})$ の起源がスカラーモードであることを除いては問題 8 と同じとする。

9-1 電子が密度 500cm^{-3} で宇宙に一様に分布しているとする。この時、光のトムソン散乱に対する平均自由行程がいくらか光年単位で答えよ。

9-2 原点に存在する電子から見て空間が

$$\vec{r}(t) = (1 + \Phi(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 + \alpha)) \vec{r}_0$$

にしたがって波数ベクトル \vec{k} で波打ちながら膨張 $\Phi > 0$ 、収縮 $\Phi < 0$ をしているとする。ここで Φ は $\Phi \ll 1$ の振動関数であり $\Phi(0) = 0$ をみたし、 $t = 0$ の時の空間座標を \vec{r}_0 とした。 α は原点での位相である。電子からみて光が飛来する方向

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

が

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_0}{r_0}$$

と書けることを示せ。

9-3 距離の伸び縮みに比例して光の波長が伸び縮みするとすると \vec{n} の方向から電子に向かって飛来する光の周波数が

$$\nu = (1 - \Phi(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 + \alpha)) \nu_0$$

となることを示せ。ここで ν_0 は $t = 0$ の時の光の周波数である。また微量の 2 次以上は無視した。

9-4 温度 T_0 で熱平衡状態にある物体からの放射では、振動数 ν_0 の一つの

量子状態を占める光子の数が Planck 分布関数

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{k_B T_0}} - 1}$$

で与えられる。ここで h は Planck 定数、 k_B はボルツマン定数。この時 9-3 の状況下で振動数が変化することは、温度が

$$T = T_0(1 - \Phi(t)\cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 + \alpha))$$

に変化したことと等価であることを示せ。

9-5 簡単のため原点の電子により散乱される光は、光の平均自由行程程度 l_T の場所にいた光のみであるとする。以下 $2\pi/k \gg l_T$ の場合を扱う。空間伸び縮みの周期は、平均自由時間に比べて十分長く $\Phi(t)$ の時間変化は無視できるものとする。テイラー展開することで

$$\delta T = T - T_0 \sim -T_0(\cos\alpha - \sin\alpha(\vec{n} \cdot \vec{k})l_T - \frac{1}{2}\cos\alpha(\vec{n} \cdot \vec{k})^2 l_T^2)$$

と書ける事を示せ。

9-6 上記の設定では放射強度は温度 T に比例する。従って、空間の伸び縮みによる放射強度のムラは δT に比例し、 $S(\vec{n}) = A\delta T(\vec{n})$ である。これを問題 8-6 で求めた式に代入し

$$Q(\vec{n}') = -\frac{4\pi}{15}T_0\cos\alpha l_T^2 r_0^2 (k_x^2 - k_y^2)$$

$$U(\vec{n}') = -\frac{4\pi}{15}T_0\cos\alpha l_T^2 2r_0^2 k_x k_y$$

となることを示せ。

9-7 9-6 の結果を用いて、偏光 E モード・B モードを計算せよ。

9-8 α を $-\pi \sim \pi$ の範囲を連続的に変えることは電子の位置を空間伸び縮みの谷から谷へ一周分変化させたことになる。このことと 9-6 の結果を用いて空間伸び縮みの波と偏光方向の関係を図中に図示せよ。但し、 $k_x \neq 0, k_y \neq 0$ とする。

10 テンサーモードによる偏光の生成：notation 及び状況設定は、特に断らない限り問題 9 と同じである。

10-1 空間が、($h_X > 0$ の時) xy 平面に平行に x 軸に対して 45 度方向 (X 軸) に伸び、135 度方向 (Y 軸) に縮む振動をしている。以下の式に従って伸び縮みしているとする。

$$X = (1 + h_X(t) \cos kz) X_0$$

$$Y = (1 - h_X(t) \cos kz) Y_0$$

ここで波数ベクトルの方向を z 軸と一致させた。 $h_X \ll 1$ である。以下の式を示せ

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$$

$$x = x_0 + h_X(t) \cos kz y_0$$

$$y = y_0 + h_X(t) \cos kz x_0$$

10-2 9-4,5 にならって温度 T_0 の熱平衡分布から放射強度が

$$S(\vec{n}') = -AT_0^2 h_X(t) n_{x0} n_{y0} \cos kz$$

だけムラができることを示せ。ここで

$$n_{x0} = \frac{x_0}{r_0}, \quad n_{y0} = \frac{y_0}{r_0}$$

9-5 ではコサインパートを 2 次までテーラー展開した。理由は、0 次がモノポールしか含まないからである。今回は 0 次が四重極から始まっているためコサインをテーラー展開する必要は無く、やっても高次の微量が加わるだけである。

10-3 ここまでは \vec{k} が z 軸即ち視線方向と一致している特殊な場合を扱ってきた。この時の $\vec{k} = \vec{k}_0$ とする。そこで $\vec{k} = k(\sin\theta_k \cos\phi_k, \sin\theta_k \sin\phi_k, \cos\theta_k)$ なる任意の方向を向いた一般の場合に拡張する。 \vec{k}_0 から \vec{k} へ変換は、 \vec{k}_0 を z 軸の周りに角度 ϕ_k 回転し付随する xy 軸を $x'y'$ 軸に変換する。次に y' 軸を軸として角 θ_k, z から z へ回転する。この変換を表す行列が以下のように書ける事を示せ。ベクトル $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ が写る先を調べればわかる。以後変換後の xy 軸を x_k, y_k と呼ぶ。

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta_k \cos\phi_k & -\sin\phi_k & \sin\theta_k \cos\phi_k \\ \cos\theta_k \sin\phi_k & \cos\phi_k & \sin\theta_k \sin\phi_k \\ -\sin\theta_k & 0 & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

10-4 10-2 の結果は、 x_k, y_k, z_k 座標に於ける方向余弦の成分を用いれば、

$$S(\vec{n}') = -AT_0 2h_X(t) n_{x_k} n_{y_k}$$

と書ける事を示している。ここでは簡単のため $\vec{r}_0 = 0$ とした。

$$\begin{pmatrix} n_{x_k} \\ n_{y_k} \\ n_{z_k} \end{pmatrix} = {}^t R \begin{pmatrix} n_{x0} \\ n_{y0} \\ n_{z0} \end{pmatrix}$$

を用いて $S(\vec{n}')$ を計算し 9-6 を用いて Q, U を計算せよ。

10-5 偏光 B モード・E モードを計算せよ。

10-6 10-2 から 10-5 までの事を以下の場合についてもやれ。空間が、($h_+ > 0$ の時) xy 平面に平行に x 軸に伸び、 y 軸に縮む振動をしている。以下の式に従って伸び縮みしているとする。

$$x = (1 + h_+(t) \cos kz) x_0$$

$$y = (1 - h_+(t) \cos kz) y_0$$

ここで波数ベクトルの方向を z 軸と一致させた。 $h_+ \ll 1$ である。