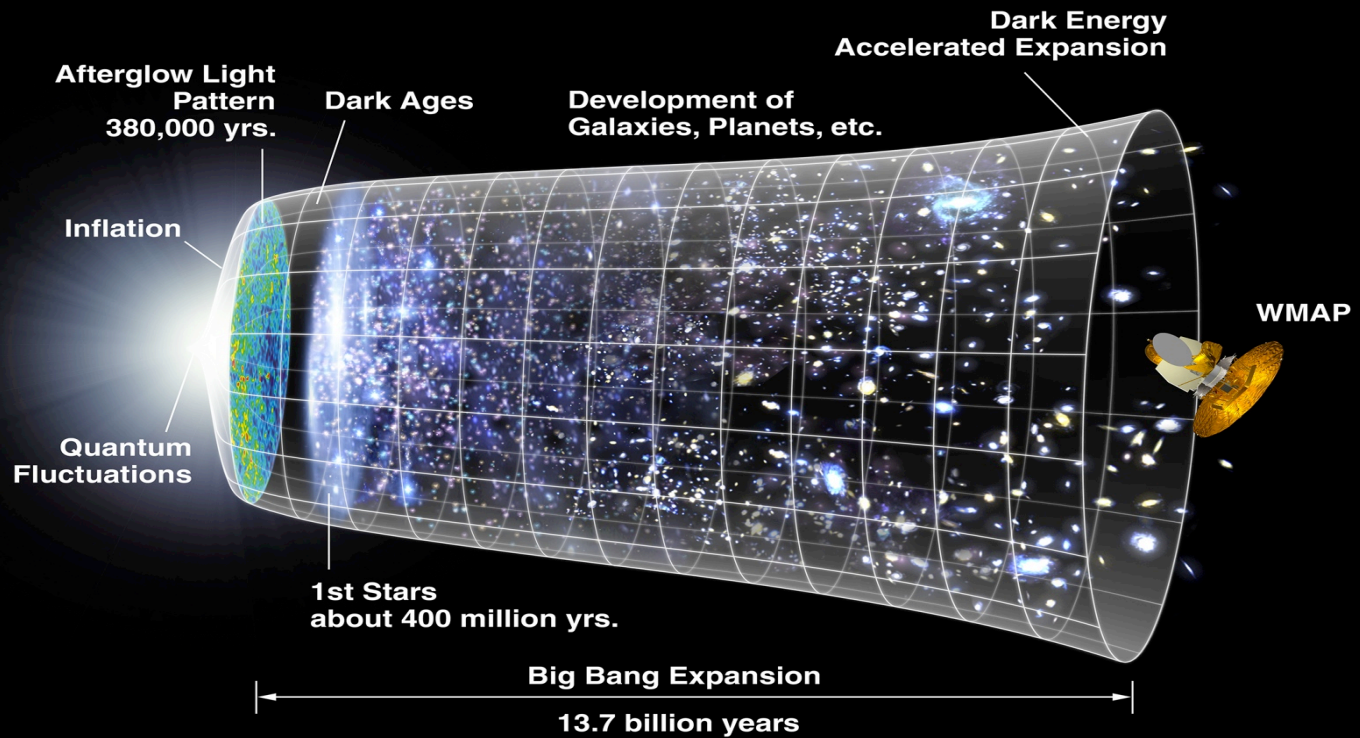


* Non-Gaussianity consistency relation

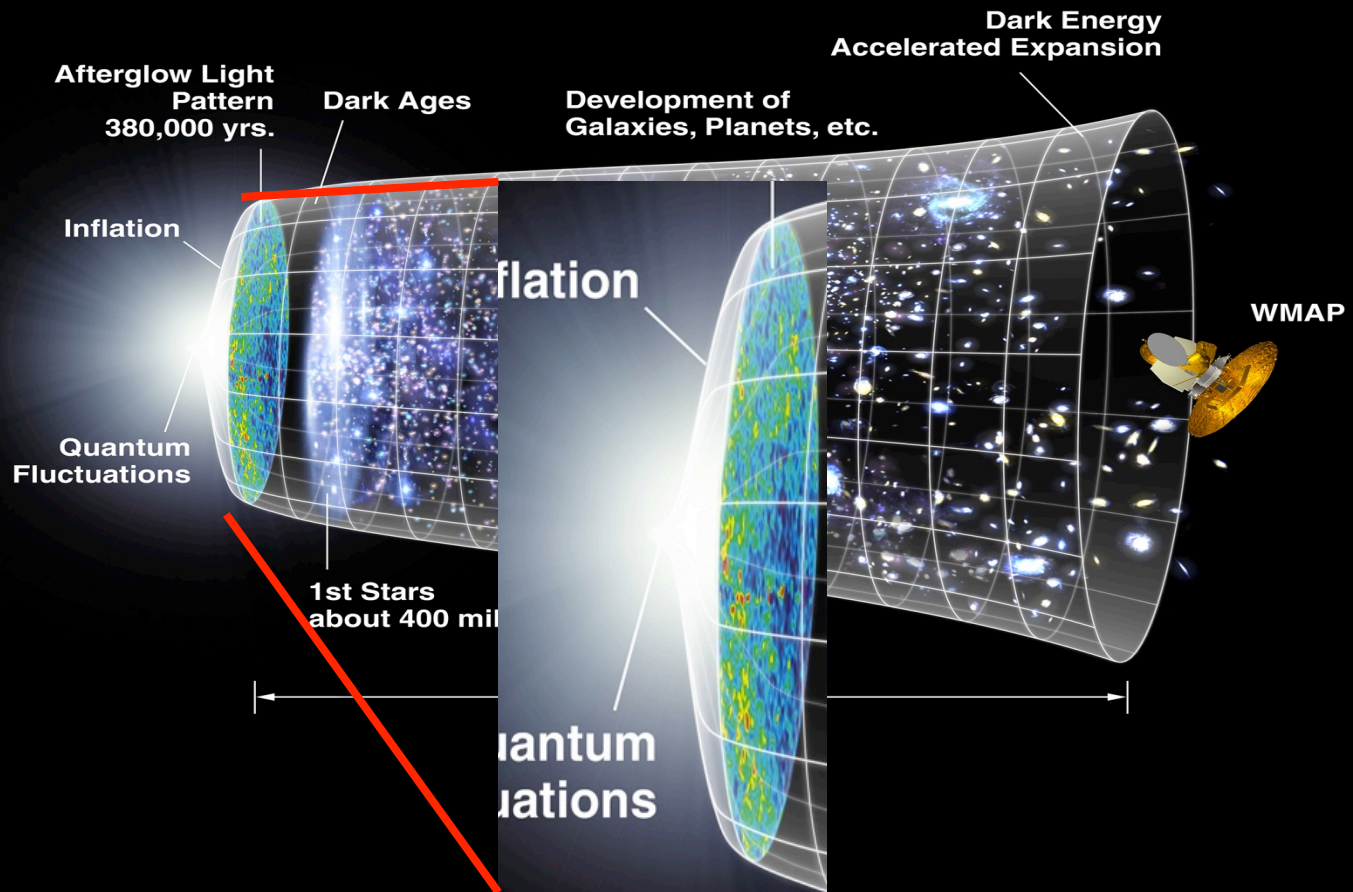
杉山 尚徳 東北大学博士課程 2 年
東北大学院生雑誌会@2011

*インフレーションとは何か？

宇宙初期に急激な 宇宙膨張が起こったとする、仮説。

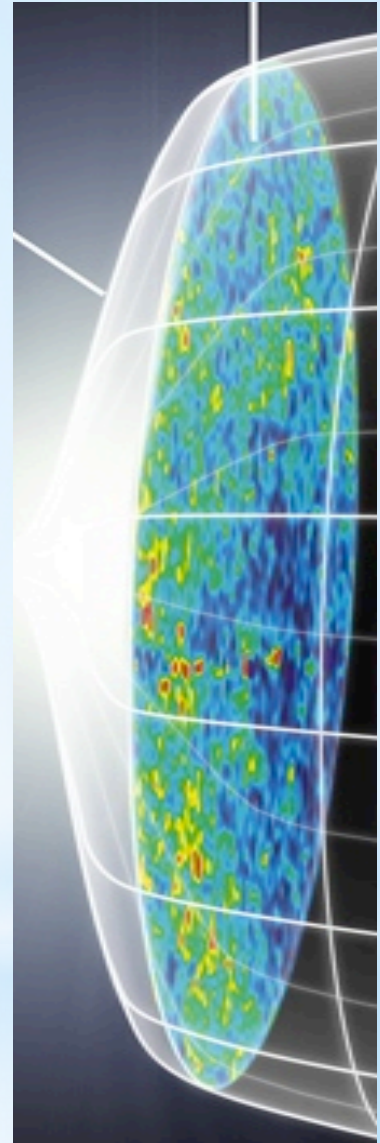


宇宙初期に急激な 宇宙膨張が起こったとする、仮説。



なぜインフレーションが起こったと考えられるか

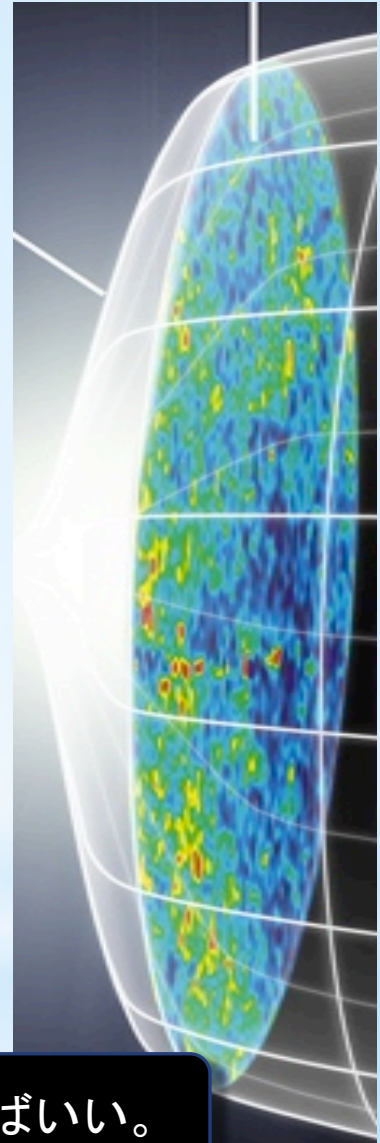
- ・ 宇宙の一様性、平坦性を説明する。
- ・ 急激な宇宙膨張により、物質がならされて一様化する。
- ・ 逆に、宇宙に構造がなくなってしまう。



なぜインフレーションが起こったと考えられるか

- ・ 宇宙の一様性、平坦性を説明する。
- ・ 急激な宇宙膨張により、物質がならされて一様化する。
- ・ 宇宙に構造がなくなってしまう。

インフレーション期に、物質の揺らぎを生成する機構があればいい。



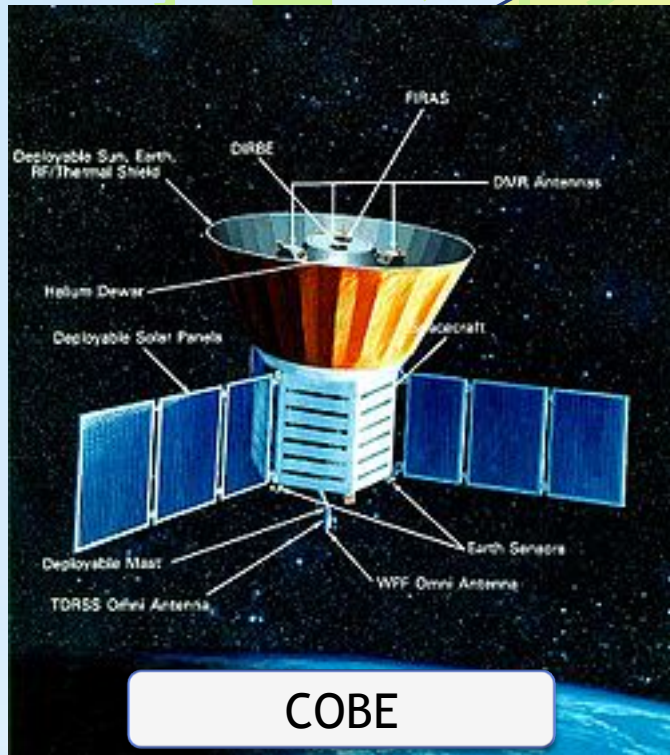
宇宙マイクロ背景放射(CMB)

宇宙は温度2.7K(ケルビン)の光で満たされている。



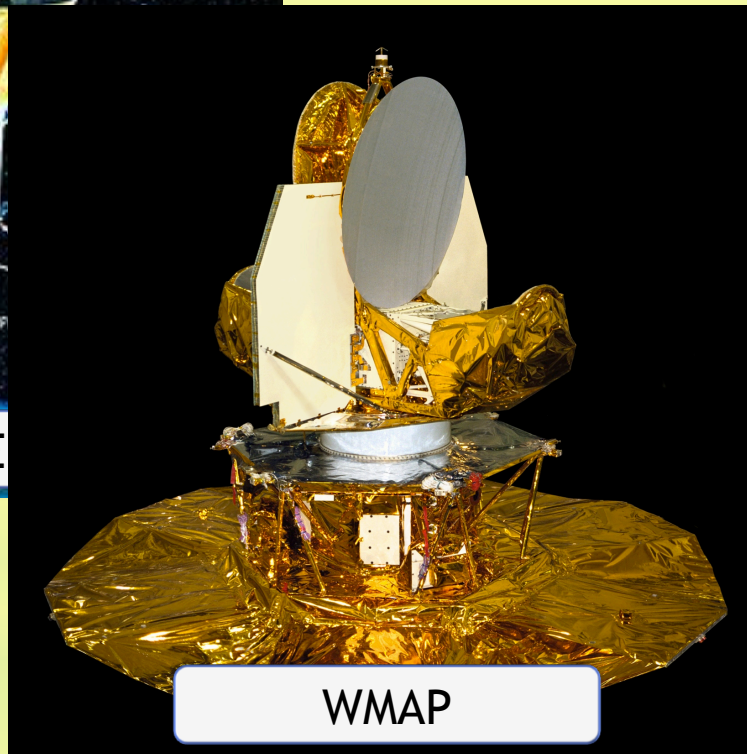
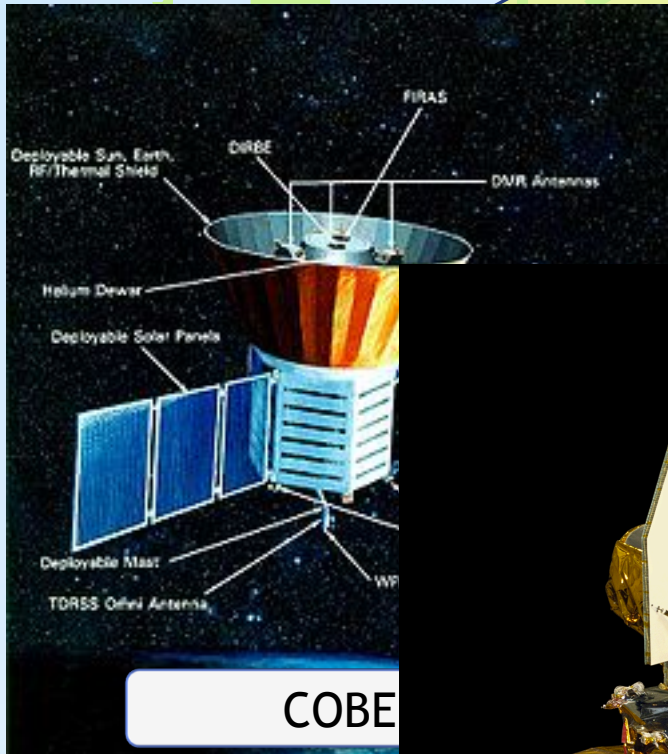
宇宙マイクロ背景放射(CMB)

(ケルビン)の光で満たされている。



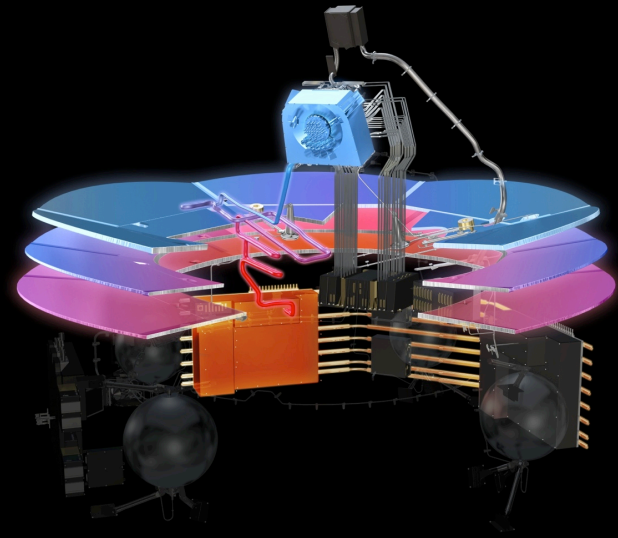
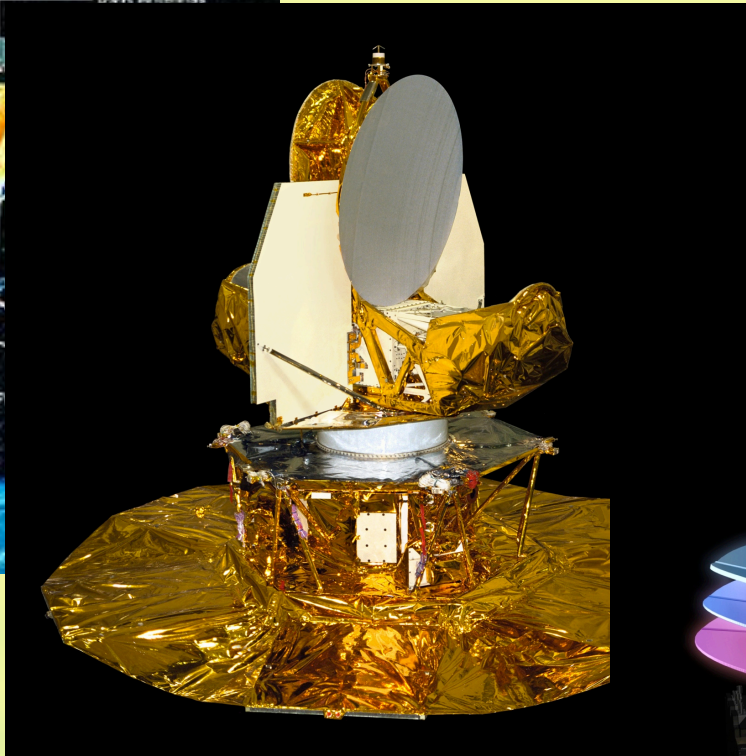
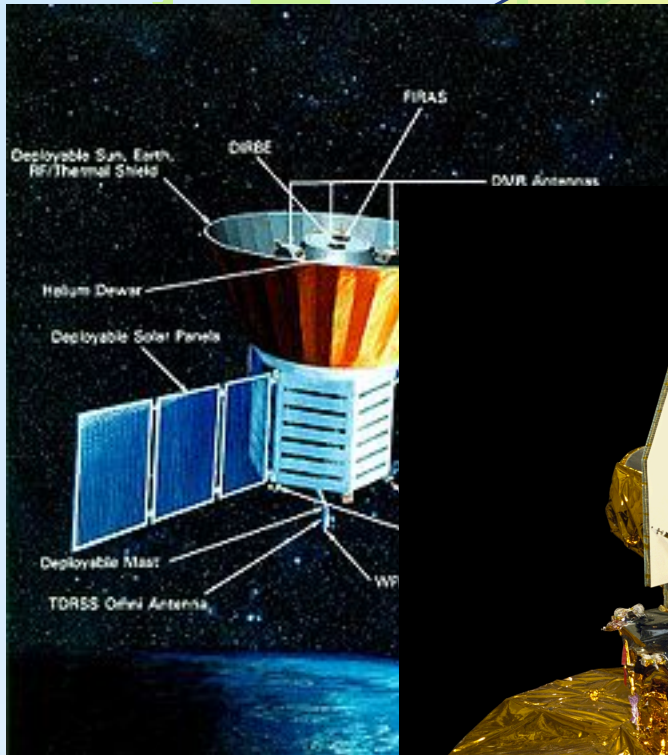
宇宙マイクロ背景放射(CMB)

(ケルビン)の光で満たされている。

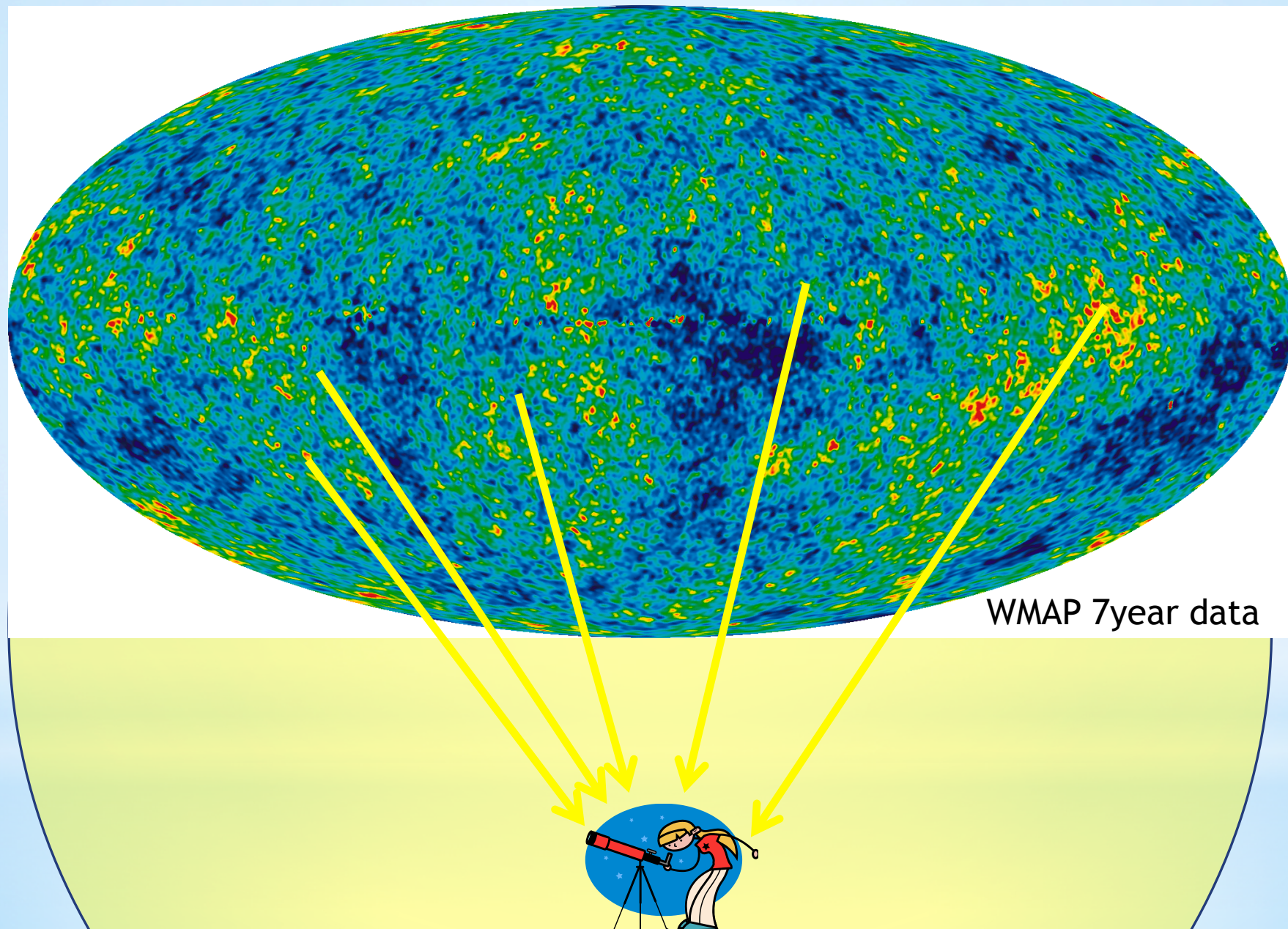


宇宙マイクロ背景放射(CMB)

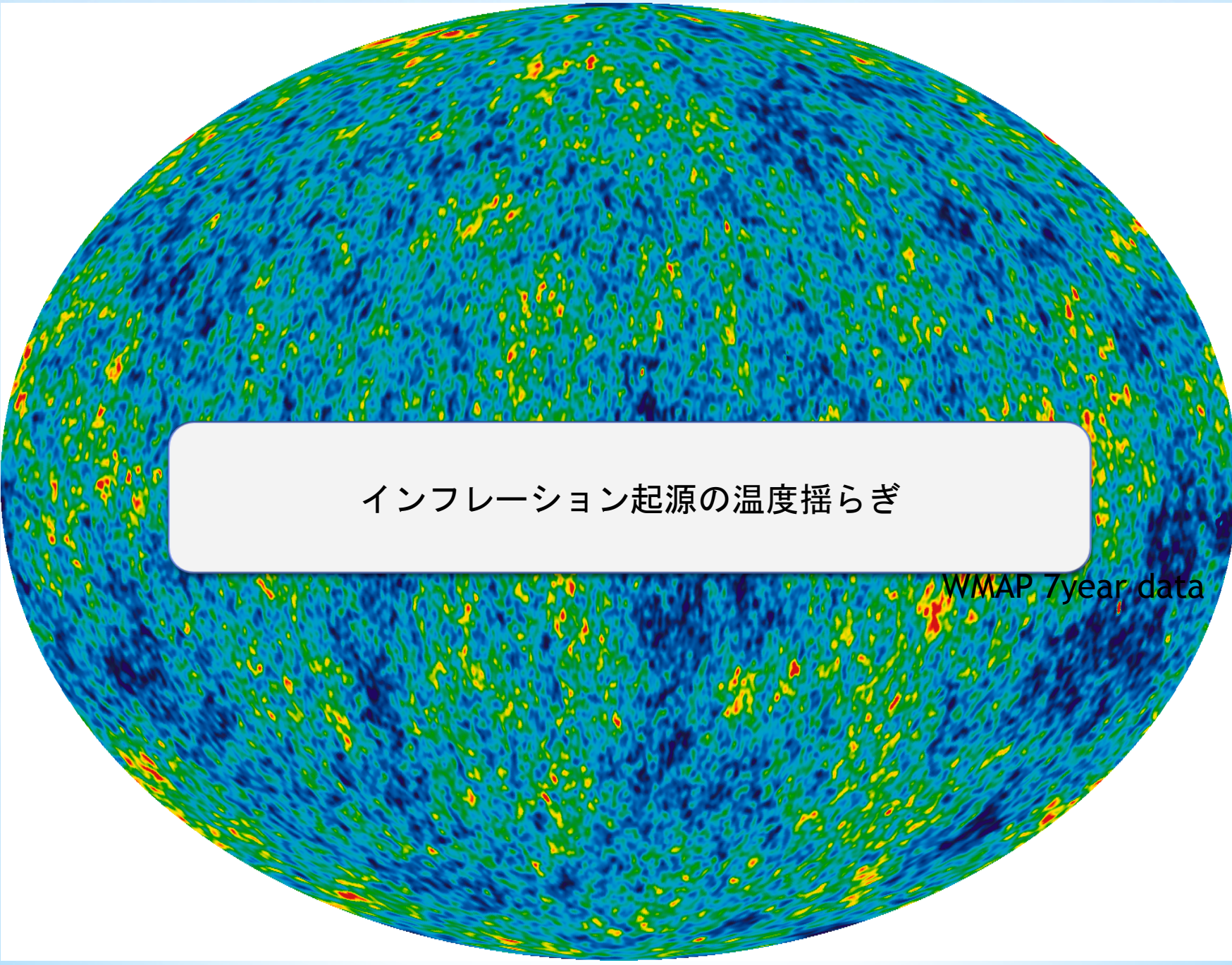
(ケルビン)の光で満たされている。



PLANK



よく見ると、それぞれ場所ごとに温度が違う



インフレーション起源の温度揺らぎ

WMAP 7year data

Primordial Gaussian Perturbations

- ・ Inflation scenario が
primordial curvature perturbation ζ の生成を
予言

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\zeta}(k)$$

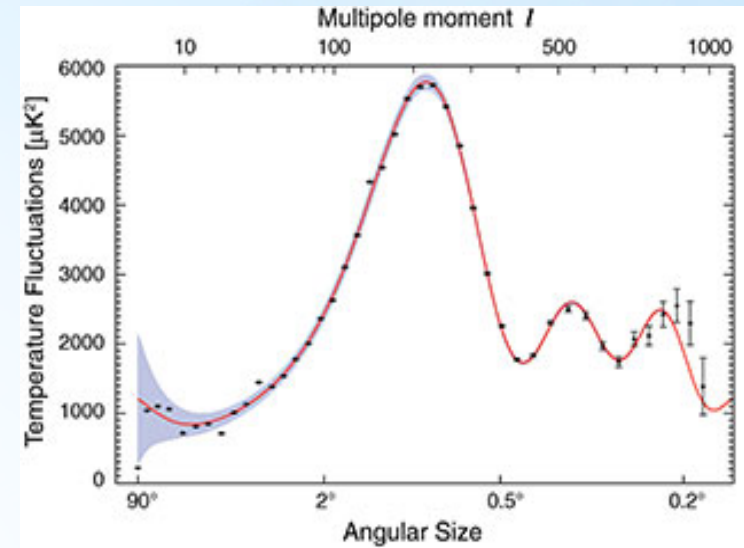
$$k^3 P_{\zeta}(k) \propto k^{n_s-1} \text{ (spectrum index)}$$

standard inflation scenario

$$|n_s - 1| = |-6\varepsilon + 2\eta| \ll 1$$

observation

$$n_s = 0.96 \pm 0.01$$



E.Komatsu et al (WMAP), 2010

Inflation scenario を制限するには明らかに情報が不足



primordial non-Gaussianity

*宇宙の非ガウス性

Primordial non-Gaussianity

一般的に高次相関関数（3点相関関数、4点相関関数など）を用いて、調べられる。

→ 定義により、ガウシアン揺らぎ
ならば3点相関関数はゼロ。

3点相関関数 (Bi-spectrum)

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$$



f_{NL} : 3点相関の大きさを表すパラメータ

4点相関関数 (Tri-spectrum)

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$$



τ_{NL} : 4点相関の大きさを表すパラメータ

今までのインフレーション シナリオへのアプローチ

とにかく、少ない観測的情報に一致するように、多数のモデルを作る。



莫大な量のモデルが乱立される。

Brane インフレーション理論など。
空間が4次元以上であるという、高次元インフレーション理論



インフレーションモデルごとに、非ガウスパラメータが预言される。

$$f_{NL} \approx O(10^{-2}), \quad f_{NL} \approx O(10)$$

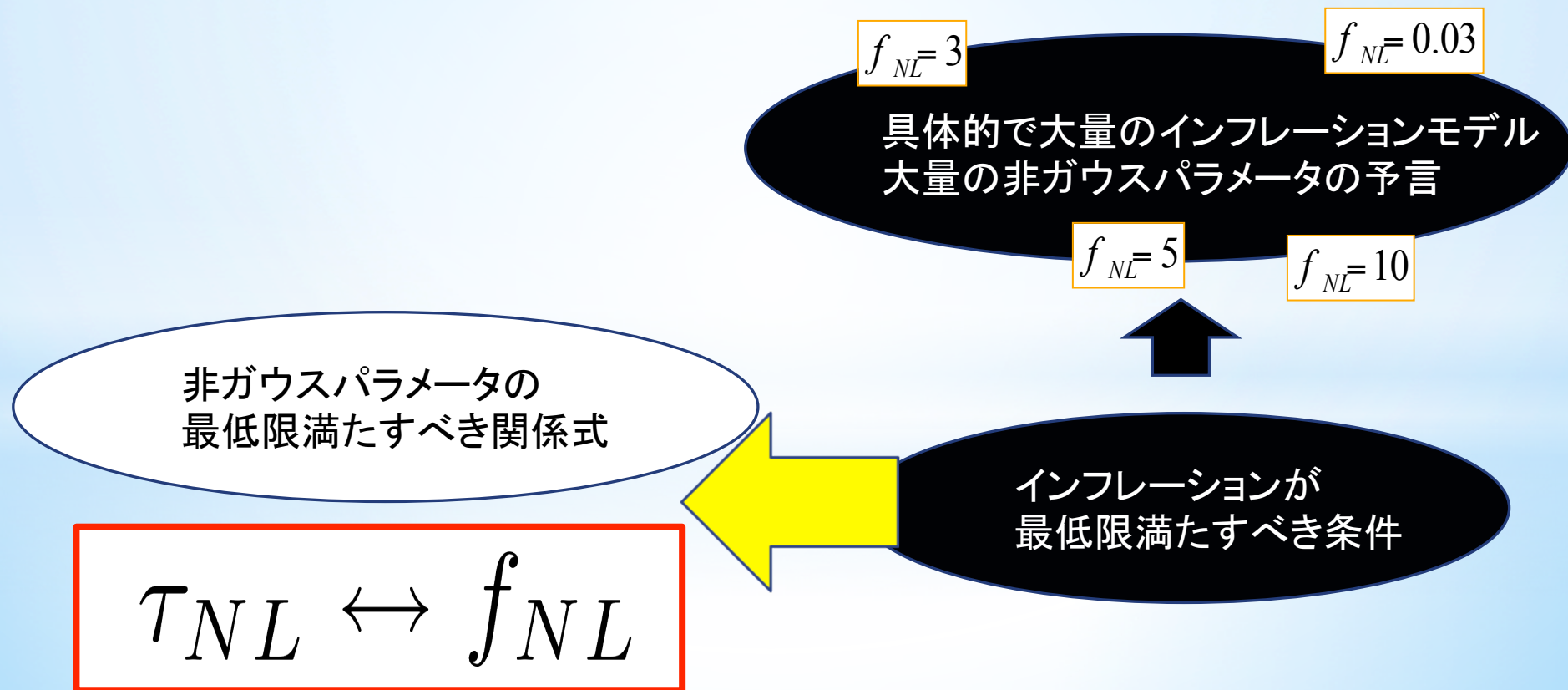
現在の観測値

$$f_{NL} = 32 \pm 21 (68\% CL)$$

観測的検証が不十分なため、ほとんどのモデルを棄却することができない!!

より一般的なアプローチ

検証のできない、具体的で大量のモデルを作るのではなく、
もっと一般的な議論をしたい。



* **Consistency relation**

Multi field case

δN formalism

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = N_a(t, t_*)\delta\varphi_*^a(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}N_{ab}(t, t_*)\delta\varphi_*^a(\mathbf{x})\delta\varphi_*^b(\mathbf{x}) \cdots$$

$$\left[N = \int_{t_*}^t H dt, \quad N_a \equiv \frac{\partial N}{\partial \varphi_*^a}, \quad N_{ab} \equiv \frac{\partial^2 N}{\partial \varphi_*^a \partial \varphi_*^b}, \quad \delta\varphi_*^a(\mathbf{x}) \equiv \delta\varphi^a(t_*, \mathbf{x}) \right]$$

インフレーション期に生成される揺らぎ ζ は、
インフラトン場（スカラー場）で展開したもので表される。

$$\langle \zeta \zeta \zeta \rangle = N_a N_b N_c \langle \delta\varphi_*^a \delta\varphi_*^b \delta\varphi_*^c \rangle + N_a N_b N_{cd} \langle \delta\varphi_*^a \delta\varphi_*^b \delta\varphi_*^c \delta\varphi_*^d \rangle + \dots$$

$$\langle \zeta \zeta \zeta \zeta \rangle = N_a N_b N_c N_d \langle \delta\varphi_*^a \delta\varphi_*^b \delta\varphi_*^c \delta\varphi_*^d \rangle$$

$$+ N_a N_b N_{cd} N_{ef} \langle \delta\varphi_*^a \delta\varphi_*^b \delta\varphi_*^c \delta\varphi_*^d \delta\varphi_*^e \delta\varphi_*^f \rangle + \dots$$

Local form Bi-spectrum and Tri-spectrum

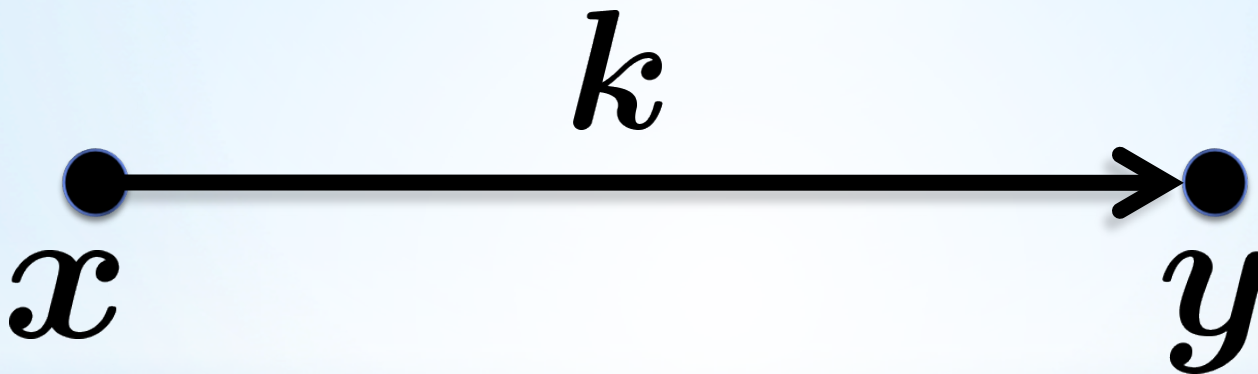
非ガウス性の大きさを表す、非線形パラメータ

$$\frac{6}{5}f_{\text{NL}}^{\text{local}} = \frac{N_a N_b N_{ab}}{(N_a N_a)^2}$$

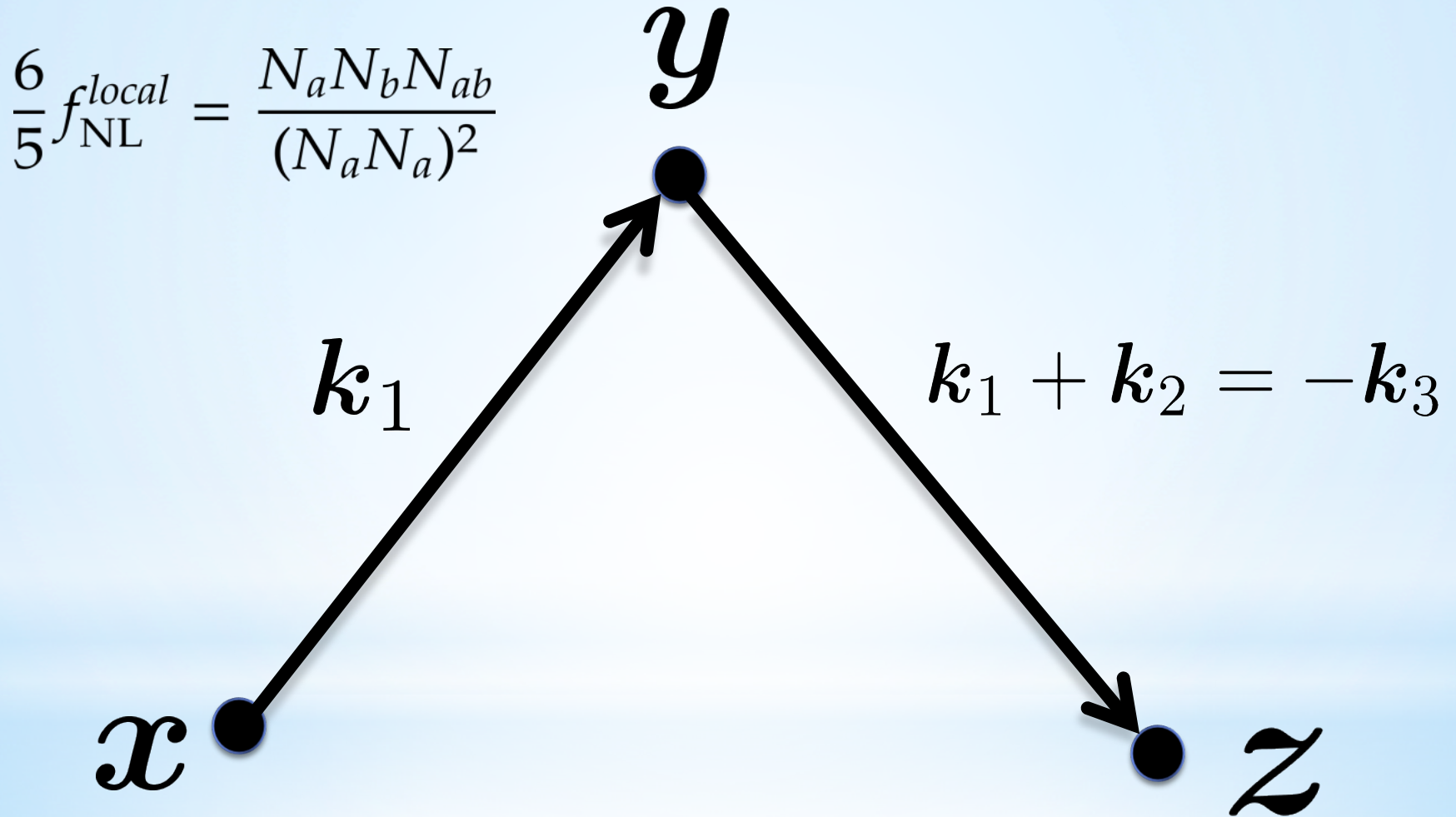
$$\tau_{\text{NL}} = \frac{N_a N_{bc} N_{cd} N_d}{(N_a N_a)^3}$$

A diagram description of the power spectrum

$$\langle \zeta_k \zeta_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_\zeta(k) \quad \mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_* N_a N_a$$

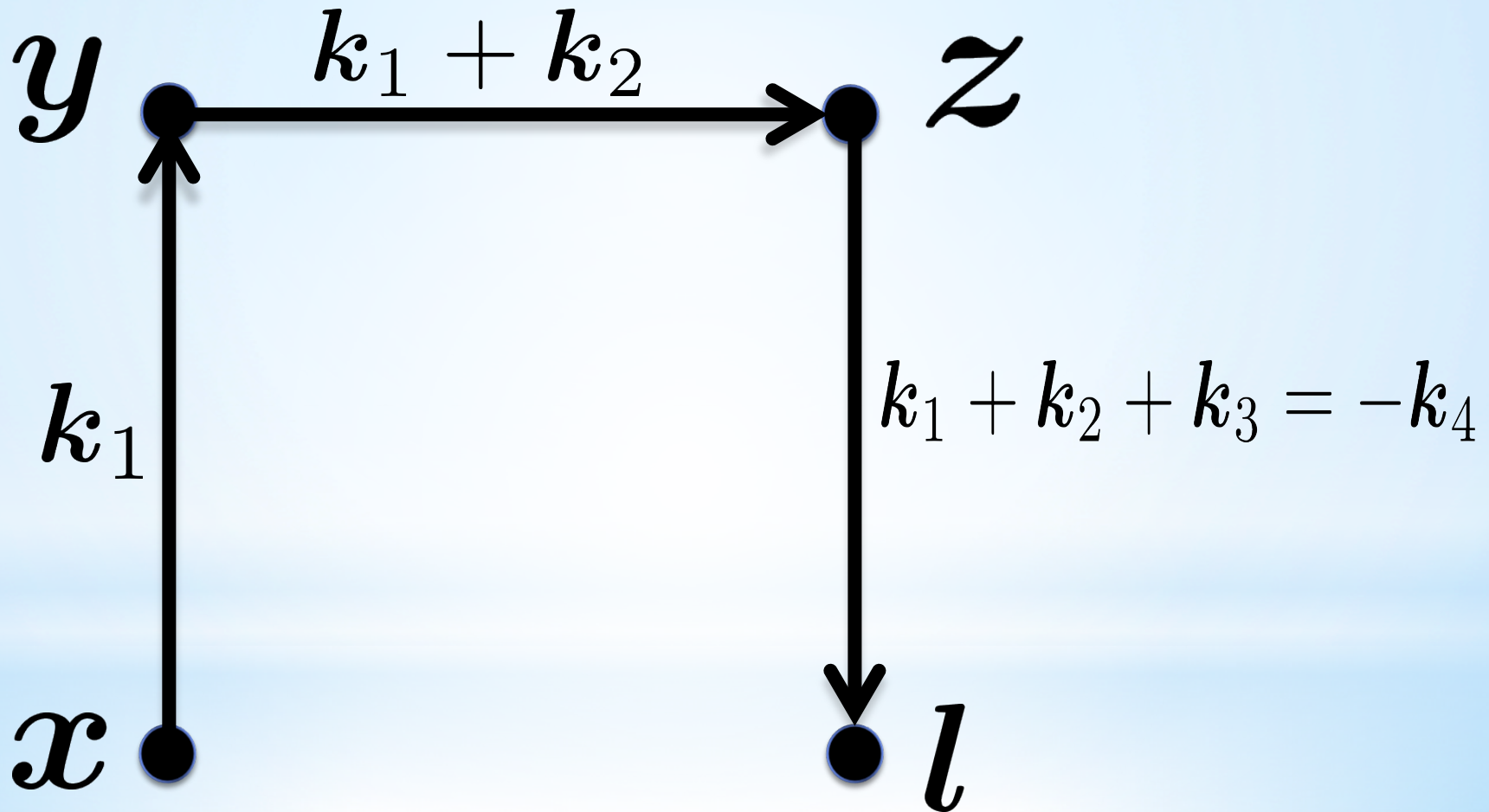


A diagram description of the local form bi-spectrum spectrum



$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathbf{B}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$$

A diagram description of the local form tri-spectrum spectrum



$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$$

$$\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_* N_a N_a \quad \Rightarrow \quad \text{---}$$

$$\frac{6}{5} f_{\text{NL}}^{\text{local}} = \frac{N_a N_b N_{ab}}{(N_a N_a)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{triangle}}{(\text{---})^2}$$

$$\tau_{\text{NL}} = \frac{N_a N_{bc} N_{cd} N_d}{(N_a N_a)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{square}}{(\text{---})^3}$$

Suyama-yamaguchi-inequality

Cauchy-Schwarz inequality

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \quad \langle v, u \rangle \equiv \sum_a v_a u_a$$

proof

$$\langle u, v \rangle^2 = |u|^2 |v|^2 \cos^2 \theta \leq |u|^2 |v|^2$$

適用



$$\left(\begin{array}{l} u_a = N_{ab} N_b \\ v_a = N_a \end{array} \right)$$

proof

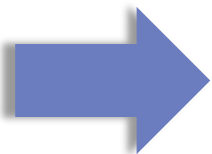
$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{5} f_{NL}^{local} \right)^2 &= \frac{\langle N_a, N_b N_{ba} \rangle^2}{(N_d N_d)^4} \\ &\leq \frac{\langle N_a, N_a \rangle \langle N_b N_{ba}, N_c N_{ca} \rangle}{(N_d N_d)^4} \\ &= \tau_{NL} = \frac{N_a N_{bc} N_{cd} N_d}{(N_a N_a)^3} \end{aligned}$$

Suyama-Yamaguchi-inequality

$$\left(\frac{6}{5} f_{NL}^{local} \right)^2 \leq \tau_{NL}$$

Proof : Diagram description

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{6}{5}f_{NL}^{local}\right)^2 &= \left(\frac{\triangle}{(\text{---})^2}\right)^2 = \frac{1}{(\text{---})^4} \left(\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \right)^2 = \frac{1}{(\text{---})^4} \left\langle \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \\ \circ \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \circ \end{array} \right\rangle^2 \\
 &\leq \frac{\left\langle \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \text{---} \end{array} \right\rangle}{(\text{---})} \frac{\left\langle \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \text{---} \end{array} \right\rangle}{(\text{---})^3} \\
 &= \frac{(\text{---})}{(\text{---})} \frac{\square}{(\text{---})^3} \\
 &= \frac{\square}{(\text{---})^3} = \tau_{NL}
 \end{aligned}$$



$$\left(\frac{6}{5}f_{NL}^{local}\right)^2 \leq \tau_{NL}$$

1-loop correlations for power spectrum

$$\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_* \left(\underbrace{N_a N_a}_{\text{tree}} + \underbrace{\text{Tr}(N^2) \mathcal{P}_* \ln(kL)}_{\text{1-loop}} + \underbrace{N_a N_{abb} \mathcal{P}_* \ln(k_{\max} L)}_{\text{1-loop}} + \frac{1}{4} \underbrace{N_{acc} N_{abb} \mathcal{P}_*^2 \ln^2(k_{\max} L)}_{\text{2-loop}} + \underbrace{N_{abcc} N_{ab} \mathcal{P}_*^2 \ln(kL) \ln(k_{\max} L)}_{\text{2-loop}} \dots \right)$$

$$\mathcal{P}_\zeta = \text{tree} + \text{1-loop} + \text{1-loop} + \frac{1}{4} \text{2-loop} + \text{2-loop} + \dots$$

議論の簡単化のため、 N_a , N_{ab} , ... の再定義を行う。

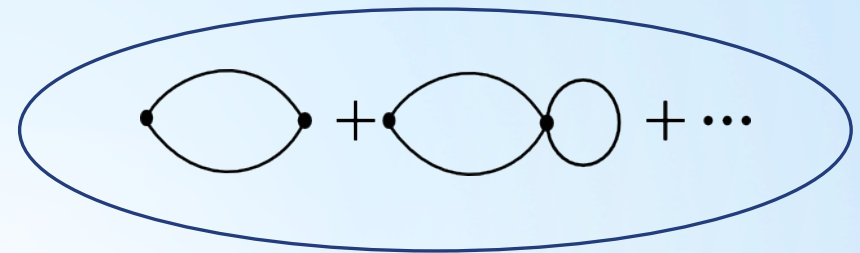
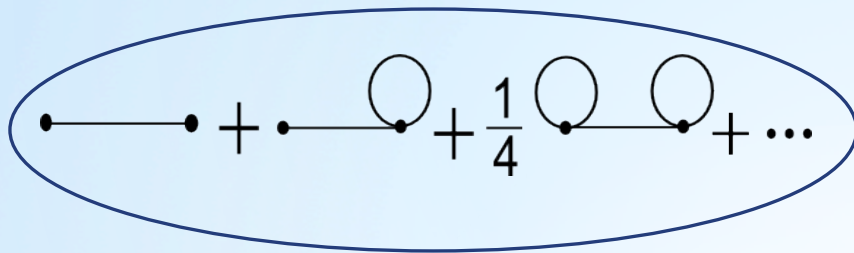
Nの再定義！

$$\tilde{N}_a \equiv N_a + \frac{1}{2} N_{abb} \mathcal{P}_* \ln(k_{\max} L) + \dots$$

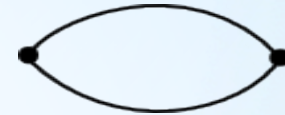
$$\tilde{N}_{ab} \equiv N_{ab} + \frac{1}{2} N_{abcc} \mathcal{P}_* \ln(k_{\max} L) + \dots$$

.....

Nの再定義は、vertex loopの繰りこみに対応する。



$$\mathcal{P}_* \tilde{N}_a \tilde{N}_a$$



$$\text{Tr}(\tilde{N}^2) \mathcal{P}_*^2 \ln(kL)$$

$$\mathcal{P}_\zeta = \tilde{N}_a \tilde{N}_a \mathcal{P}_* (1 + \mathcal{P}_{\text{loop}} + \dots)$$

$$= \text{---} + \text{---}$$

$$\left[\mathcal{P}_{\text{loop}} \equiv \frac{\text{Tr}(\tilde{N}^2)}{\tilde{N}_a \tilde{N}_a} \mathcal{P}_* \ln(k_0 L) \right]$$

1-loop correlations for bi-spectrum

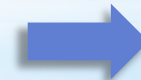
$$\frac{6}{5} f_{\text{NL}}^{\text{local}} \simeq \left[\tilde{N}_a \tilde{N}_a + \text{Tr}(\tilde{N}^2) \mathcal{P}_* \ln(k_0 L) \right]^{-2} \\ \times \left[\tilde{N}_a \tilde{N}_b \tilde{N}_{ab} + \left(\text{Tr}(\tilde{N}^3) + 2 \tilde{N}_a \tilde{N}_{bc} \tilde{N}_{abc} \right) \mathcal{P}_* \ln(k_0 L) \right]$$

$$\frac{6}{5} f_{\text{NL}}^{\text{local}} = \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^2} \times \left[\text{---} + \text{---} - 2 \text{---} \right]$$

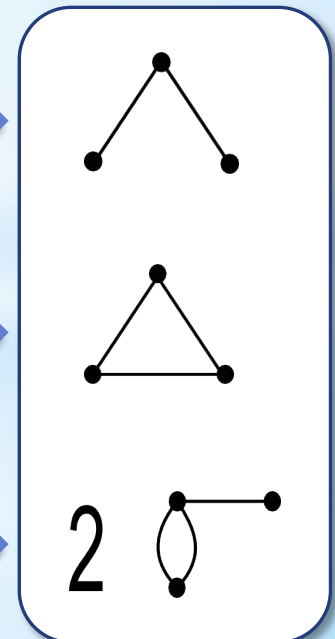
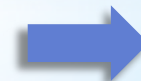
$$\text{---} + \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} + \dots$$



$$\text{---} + \frac{3}{2} \text{---} + \frac{3}{2} \text{---} + \dots$$



$$2 \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$



1-loop correlations for Tri-spectrum

$$\tau_{\text{NL}} \simeq \left[\tilde{N}_a \tilde{N}_a + \text{Tr}(\tilde{N}^2) \mathcal{P}_* \ln(k_0 L) \right]^{-3} \\ \times \left[\tilde{N}_a \tilde{N}_{ab} \tilde{N}_{bc} \tilde{N}_c + \left(2 \tilde{N}_a \tilde{N}_{ab} \tilde{N}_{cd} \tilde{N}_{bcd} + \text{Tr}(\tilde{N}^4) + 2 \tilde{N}_a \tilde{N}_{bc} \tilde{N}_{bd} \tilde{N}_{acd} + \tilde{N}_a \tilde{N}_b \tilde{N}_{acd} \tilde{N}_{bcd} \right) \mathcal{P}_* \ln(k_0 L) \right]$$

$$\tau_{NL} = \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^3} \left[\text{---} + 2 \text{---} + 2 \text{---} + \text{---} + \text{---} \right]$$

1-loop 補正を加えた場合において、Tree level と同様な非ガウスパラメータ間での不等式を導く。

$$\tau_{NL} \geq \left(\frac{6}{5} f_{NL} \right)^2$$

Tree-level

$$\tau_{NL} > \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5} f_{NL} \right)^2$$

1-loop

Proof : Step 1

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2} (\alpha + \beta)^2 \quad \text{任意の実数}$$

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \left[N_a N_a (1 + \mathcal{P}_{\text{loop}}) \right]^{-2} [N_a N_b N_{ab} + N_a N_{bc} N_{abc} \mathcal{P}_* \ln(k_0 L)] \\ \beta &\equiv \left[N_a N_a (1 + \mathcal{P}_{\text{loop}}) \right]^{-2} [\text{Tr}(N^3) + N_a N_{bc} N_{abc}] \mathcal{P}_* \ln(k_0 L) \end{aligned}$$

$$\frac{6}{5} f_{NL}^{local} = \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^2} \times \left[\text{---} + \text{---} + 2 \text{---} \right]$$



$$\frac{6}{5} f_{NL}^{local} = \alpha + \beta$$



$$\alpha = \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^2} \times \left[\text{---} + \text{---} \right]$$

$$\beta = \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^2} \times \left[\text{---} + \text{---} \right]$$

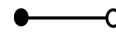
$$\frac{1}{(\text{---} + \text{---})^4} \left[\left(\text{---} + \text{---} \right)^2 + \left(\text{---} + \text{---} \right)^2 \right] \geq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5} f_{NL}^{local} \right)^2$$

$$\tau_{NL} > \alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2} f_{NL}^{local} \quad \text{を証明する。}$$

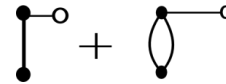
Proof : step 2 -

$$v_a \equiv N_a$$

diagram $\rightarrow$



$$u_a \equiv N_b N_{ba} + N_{bc} N_{abc} \mathcal{P}_* \ln(k_0 L)$$



$$\frac{1}{(\text{---} + \text{---})^4} \left(\text{---} + \text{---} \right)^2 = \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^4} \left(\text{---} + \text{---} \right)^2$$

$$= \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^4} \langle \text{---}, \text{---} + \text{---} \rangle^2$$

$$\langle u, v \rangle^2$$

$$\leq \frac{\langle \text{---}, \text{---} \rangle}{(\text{---} + \text{---})} \frac{\langle \text{---} + \text{---}, \text{---} + \text{---} \rangle}{(\text{---} + \text{---})^3}$$

$$\langle v, v \rangle \langle u, u \rangle$$

$$= \frac{\text{---}}{(\text{---} + \text{---})} \frac{\text{---} + 2\text{---} + \text{---}}{(\text{---} + \text{---})^3}$$

$$\leq \frac{\text{---} + 2\text{---} + \text{---}}{(\text{---} + \text{---})^3}$$

$$\frac{\text{---}}{(\text{---} + \text{---})} \leq 1$$

Proof : Step 3-diagram

$$M_{ab} \equiv N_{ac}N_{cb} + N_cN_{cab}$$

$$L_{ab} \equiv N_{ab}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^4} \left(\triangle + \text{---} \right)^2 &= \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^4} \left(\triangle + \text{---} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^4} \langle \text{---}, \text{---} + \text{---} \rangle^2 \quad \leftarrow \langle L, M \rangle^2 \\ &\leq \frac{\langle \text{---}, \text{---} \rangle}{(\text{---} + \text{---})} \frac{\langle \text{---} + \text{---}, \text{---} + \text{---} \rangle}{(\text{---} + \text{---})^3} \quad \leftarrow \langle L, L \rangle \langle M, M \rangle \\ &= \frac{\text{---}}{(\text{---} + \text{---})} \frac{\square + 2\triangle + \text{---}}{(\text{---} + \text{---})^3} \\ &< \frac{\square + 2\triangle + \text{---}}{(\text{---} + \text{---})^3} \quad \leftarrow \frac{\text{---}}{(\text{---} + \text{---})} < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \tau_{NL} \\
 &= \frac{1}{(\text{---} + \text{---})^3} \left[\underbrace{\text{---}}_{\text{tree diagram}} + \underbrace{2 \text{---} + 2 \text{---}}_{\text{1 loop diagram}} + \underbrace{\text{---}}_{\text{2 loop diagram}} \right] + \frac{\text{---}}{(\text{---} + \text{---})^3} \\
 &> \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\text{---} + \text{---})^2} \left[\underbrace{\text{---}}_{\text{tree diagram}} + \underbrace{\text{---} + 2 \text{---}}_{\text{1 loop diagram}} \right] \right)^2 \\
 &= \left(\frac{6}{5} f_{NL}^{local} \right)^2
 \end{aligned}$$

2 loop項についての考察

Cauchy-Schwarz inequality

$$\left(\text{diagram} \right)^2 = \langle \text{diagram}, \text{diagram} \rangle^2 \leq \langle \text{diagram}, \text{diagram} \rangle \langle \text{diagram}, \text{diagram} \rangle = \text{diagram} \text{diagram}$$

$$\left(\frac{\text{diagram}}{\text{diagram}} \right)^2 \leq \frac{\text{diagram}}{\text{diagram}}$$

$$\frac{\text{diagram}}{\text{diagram}} \ll \left| \frac{\text{diagram}}{\text{diagram}} \right|$$

「2 loopは必ず1 loopよりも小さい」
という仮定。

$$\left| \frac{\text{diagram}}{\text{diagram}} \right| \ll 1$$

「2 loopは必ず1 loopよりも小さい」
という仮定を考えると、τNLの中の一つの
1 loopが必ずtree diagramよりもずっと小さくなる。

Q. E. D.

$$\frac{1}{(\text{---} + \text{---})^3} \left[\text{---} + 2 \cancel{\text{---}} + 2 \text{---} + \text{---} + \text{---} \right] + \cancel{\frac{\text{---}}{(\text{---} + \text{---})^3}} \\ > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\text{---} + \text{---})^2} \left[\text{---} + \text{---} + 2 \text{---} \right] \right)^2$$

$$\tau_{\text{NL}} \gtrsim \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5} f_{\text{NL}}^{\text{local}} \right)^2$$

*観測との比較

非ガウスパラメータと観測との関係

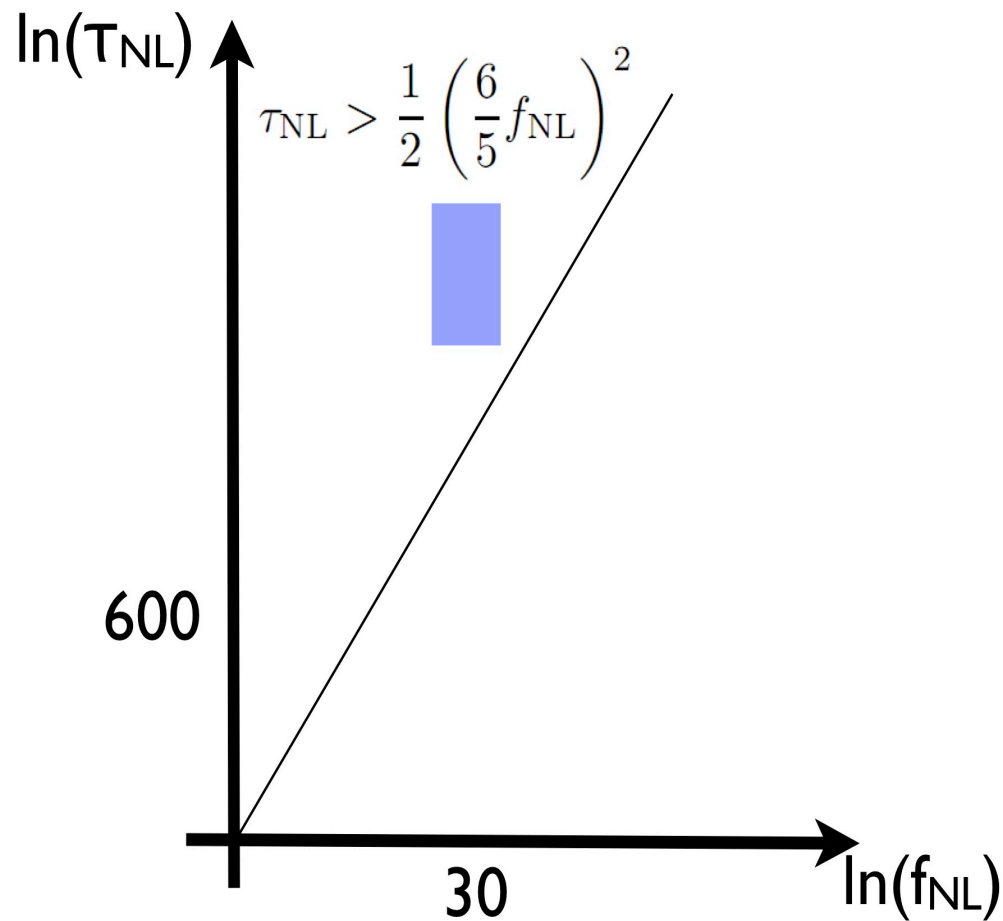
fNLが観測される場合

fNLが観測されず、 τ NLが観測される場合



Single field inflation scenario の棄却

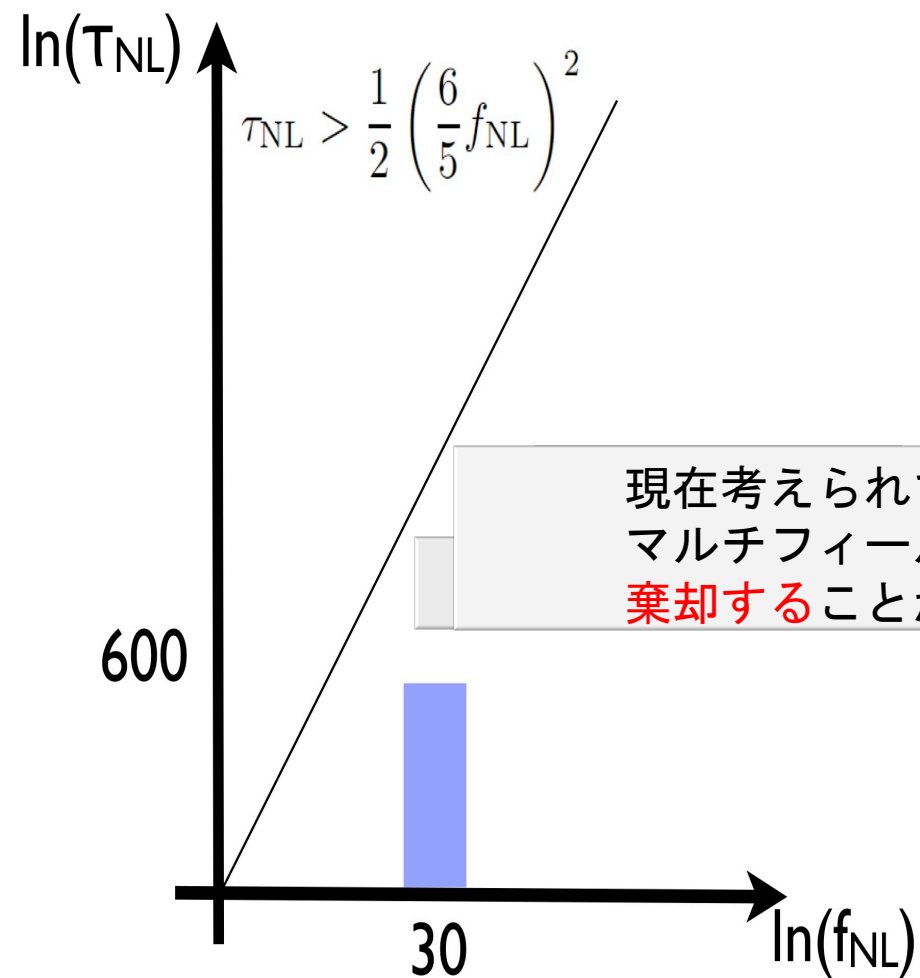
*不等式が満たされる場合



現在考えられているほとんどのマルチフィールドインフレーションモデルは、存在を許される。

現在までの理論が妥当性が確かめられる。

*不等式が満たされない場合



現在考えられているほとんどの
マルチフィールドインフレーションモデルを
棄却することができる。

A Extra Slide

* 今回導いたconsistency relation が適用できる条件

(1) Primordial curvature perturbations がインフレーション期のスカラー場によって引き起こさえる。

(2) horizon crossing において、揺らぎはほぼガウシアンであり、その後の非線形進化によって大きな非ガウス性が生成される

(tree level なら解決の目処はついている。
1-loop は要研究)

(3) 2-loop correlations 以降は無視する。

(要研究)