

# **Axisymmetric toroidal modes of magnetized neutron stars**

# Abstract

- 中性子星のaxisymmetric toroidal modeを磁場を含めて計算

星の内部はpoloidal磁場によって繋がれており (magnetic coupling)、磁場は外部の双極子磁場と連続 (強さは $10^{16}$ G)

磁場星の振動は変数分離ができないので、振動の角度依存性を表すために、球面調和関数を用いて摂動を展開

- 計算により得られた振動スペクトルの振動数のrangeは、SGRで観測されているQPOの振動数と重なる部分が多い

magnetarの磁場が $10^{16}$ Gくらいであるとすれば、QPOをmagnetic toroidal modeによって説明できる可能性がある

# Introduction

- 何故、中性子星の固有振動を計算するのか？

中性子星の中には、特に磁場が強い **magnetar** と呼ばれるものがある。これらは、中性子星の典型的な磁場の大きさの100倍から1000倍の磁場を持っていると考えられている。magnetarの一つとして、**SGR** という天体があり、そのような天体から近年、**QPO** と呼ばれる振動が観測されている。そして、そのような現象を説明するため。

- **SGR**

Soft Gamma-ray repeater (軟ガンマ線リピーター)の略で、強大な磁場の減衰をエネルギー源としてガンマ線やX線を放出する(**flare**を起こす)現象を繰り返す天体。**flare**は星震に関連していると考えられており、magnetic pressureによって歪みが蓄えられているcrustに破壊が生じて起こると思われる。時折、非常に稀な **giant flare** と呼ばれる現象を起こす。

# Introduction

- **giant flare**

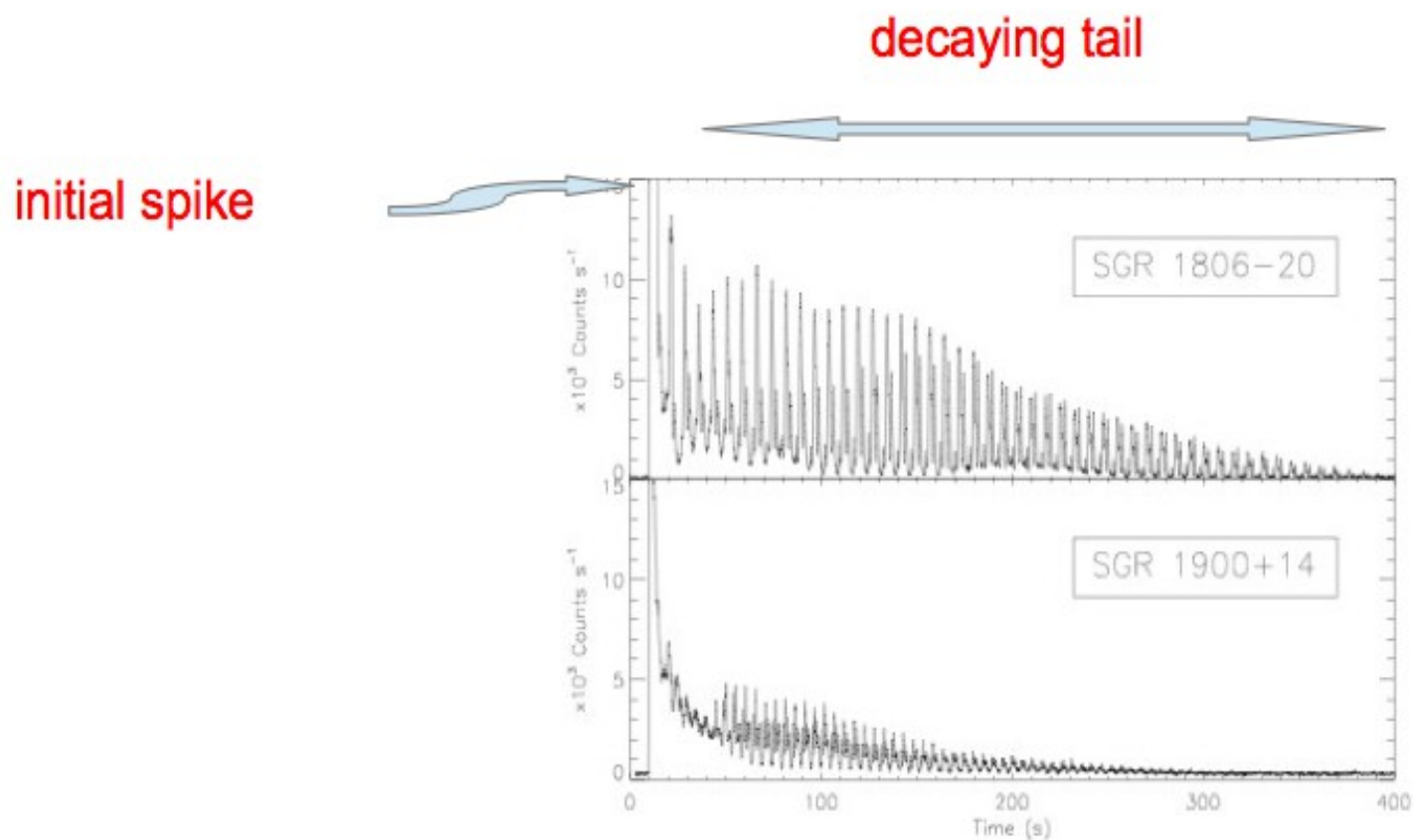
SGRの起こす **flare** の中でも特にエネルギーの規模が大きいものを指す。おおよそ  $10^{44}$  erg/s ほどのエネルギーを放出する(0.1秒間に放出したエネルギーが太陽が10万年間に放出するであろうエネルギーと同程度)。この現象は稀であり、現在までに3例しか観測例がない(**1979年3月のSGR 0526-66, 1998年8月のSGR 1900+14, 2004年12月のSGR 1806-20**)。磁場の reconnection と関連して起こると考えられている。この現象のX線スペクトルの **tail** と呼ばれる部分をFourier解析することにより、**QPO** が検出されている。

- **QPO**

giant flareのX線スペクトルのdecaing tailをFourier解析することで得られた **振動現象** で、Quasi-Periodic Oscillationの略。giant flareで破壊されたcrustに星震が起こり、それによって励起される **toroidal oscillation** によるものであると考えられている。現在までに十数Hzから数百Hzまで、10個程の振動数が得られている。

# Introduction

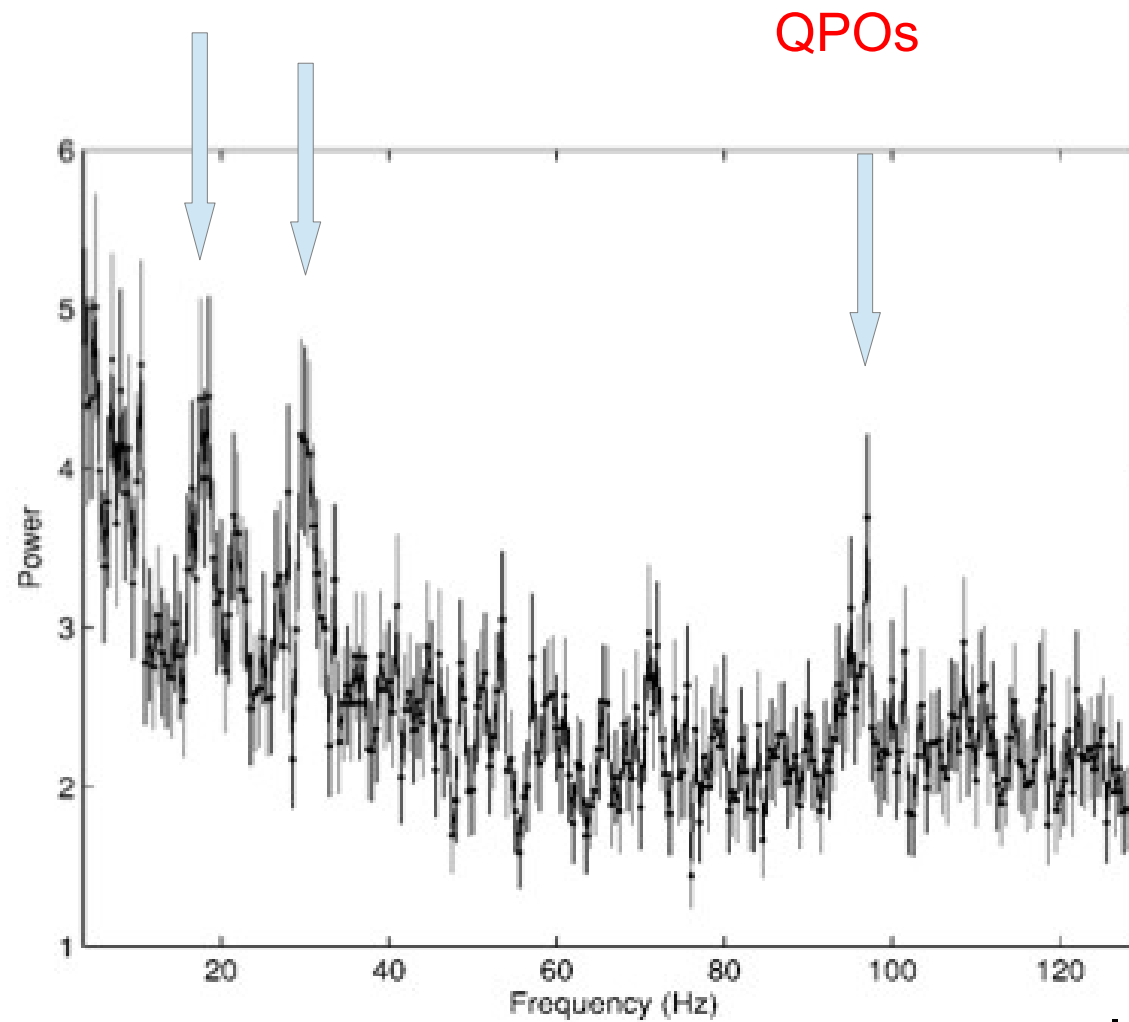
- giant flareのX線スペクトル



*Watts (2011)*

# Introduction

- Fourier解析の例?



# Introduction

- 実際に得られている**QPO**の振動数

SGR 0526-66 : 43.5Hz

SGR 1900+14 : 28, 54, 84, 155Hz

SGR 1806-20 : 18, 26, 29, 92.5, 150, 626.5Hz

- **QPOがtoroidal modeとして考えられている理由**

toroidal modeの振動数のrangeが、数十Hzから数百Hzまであり、これらが観測されているQPOの振動数のrangeと良く重なり合うから。また、pulsation energyがそれほど大きくないのでgiant flareのエネルギーで容易に励起することができるから。

実際に、Israel et al. 2005やStrohmayer & Watts (2005,2006)などでは**low l**の**fundamental torsional mode (磁場なし)**であるという主張をしている。しかしながら、magnetarは非常に大きな磁場を持っているため、磁場も振動に対して何らかの寄与をしていると考えるべきである。

# Introduction

- 現在までに行われてきた磁場を含めた振動の計算

Piro (2005); Newtonian gravityでmagnetic toroidal modeの振動数をscalingしているが、coreの磁場の効果を見無視している。

Glampedakis, Samuelsson, Andersson (2006); coreとcrustのmagnetic couplingを考慮。simpleなplane-parallel modelを用いてglobalなmodeを計算。

Sotani, Kokkotas & Stegioulas (2007); 相対論的な幾何学でmagnetic toroidal modeを計算。しかし、magnetic couplingの効果などを無視。

これらのnormal modeの計算では、近似的な取り扱いをすることで、いずれも振動の角度依存性を一つの球面調和関数のみで表している。しかし、これは $B_p > 10^{15} \text{G}$ となる(magnetic couplingがeffectiveになる, Alfvén velocityがshear velocityを上回る)ような状況では、あまり正確な手法ではない。特に、非常に強い磁場を持っていると考えられるmagnetarについてはせこい近似を行わずに、きちんと磁場がある場合のtoroidal modeの解析を行うことが重要。



# Introduction

そこで、この論文ではmagnetic couplingを考慮して、摂動を展開する(角度依存性を一つの球面調和関数のみではなく、多数の球面調和関数で表す)ことによってmagnetic toroidal modeを計算する。

- **magnetic mode**について現実的な計算をすれば...

Levin (2007)などのような磁気流体シミュレーションによってアプローチしている研究では、magnetic discrete modeは粘性抵抗がない限りは存在できないという主張がある。しかし、この論文のような計算によってnormal modeの存在を確かめるmode analysisの例を与えることは重要。

得られたmodeがQPOの振動数と良く一致していれば、振動を解析することによって、magnetarの内部について状態方程式や磁場の構造などのような情報を得られる可能性がある。magnetarにおける星震学を大きく発展させることができるかもしれない。

# Method of solution

- 計算する際の仮定

1. 摂動は軸対称。
2. 磁場について、星の内部のmatterはpoloidal磁場によって繋がれており、poloidal磁場は星の外部の双極子磁場と連続。よって、振動は回転がなくともfluidとsolidの両方でamplitudeを持つ。
3. fluid regionとsolid regionの両方で摂動方程式を用意して、それぞれの領域で得られた解を適切な境界条件で繋げることによって全体の解を得る。
4. 摂動は、球面調和関数を用いて有限の長さで展開される。
5. 星は球対称で、磁場によるdeformationや回転は無視。
6. 中性子星の構造は、fluid coreとsolid crustとsurface fluid oceanからなると考える。

# Method of solution

- **Magnetic fields in the interior**

この論文ではFerraro (1954) typeの双極子磁場を用いている。

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} U, \quad B_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} U$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} U \right) \right] = \kappa r^2 \sin^2 \theta$$

$$U = (C_1 r^2 + C_2 r^4) \sin^2 \theta \quad C_1 = -\frac{5}{4} B_p, \quad C_2 = \frac{\kappa}{10} = \frac{3}{4} \frac{B_p}{R^2}$$

振動の計算をする際には、この磁場の平衡解をmagnetic poleでの磁場の強さ $B_p$ をパラメータとして用いる

# Method of solution

- **Oscillation equations**

摂動の方位角依存性と時間依存性を  $\exp(im\phi + i\omega t)$  にすべて押し込む。ここでは軸対称なので  $m=0$  となる。 $\omega$  は慣性系での振動数。toroidal mode とは、摂動の  $\phi$  成分のことで、radial amplitude を持たず divergence free となるような成分のこと。

$$-\omega^2 \xi_\phi = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \sigma')_\phi + \frac{1}{4\pi\rho} [(\nabla \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}]_\phi$$

$$B'_\phi = [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})]_\phi$$

$$\delta\sigma_{ij} = (\Gamma_1 p u) \delta_{ij} + 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} u \delta_{ij} \right) \quad u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)$$

$\mu$  は shear modulus (剪断弾性係数),  $\sigma$ : shear stress tensor,  $u_{ij}$ : strain tensor,  $\xi$ : Lagrange 変位

# Method of solution

- Oscillation equations**

$$-\sigma^2 \xi_\phi = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{d\mu}{dr} \xi_\phi + \mu \left( \frac{\partial^2 \xi_\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \xi_\phi \right) \right] \\ + \frac{1}{4\pi\rho} \left( B_r \frac{\partial B'_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta \frac{\partial B'_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} B_\theta B'_\phi + \frac{1}{r} B_r B'_\phi \right)$$

$$B'_\phi = B_r \frac{\partial \xi_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} B_r \xi_\phi - \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} B_\theta \xi_\phi$$

$\xi_\phi$ は $r$ と $\theta$ の2変数に依存している。normal modeを計算するためには、変数分離を行い1変数の常微分方程式にしたい。しかし.....

# Method of solution

- **Oscillation equations**

磁場星の振動は変数分離することができないので、球面調和関数を用いて摂動を展開する。

$$\frac{\xi_\phi}{r} = - \sum_{j=1}^{j_{\max}} T_{l'_j}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{l'_j}^{m=0}(\theta, \phi) e^{i\omega t}$$

$$\frac{B'_\phi}{B_0} = - \sum_{j=1}^{j_{\max}} b_{l_j}^T(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{l_j}^{m=0}(\theta, \phi) e^{i\omega t}$$

**for even modes**

$$l_j = 2(j-1), \quad l'_j = l_j + 1$$

**for odd modes**

$$l_j = 2j-1, \quad l'_j = l_j - 1$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, j_{\max}$$

# Method of solution

- **Oscillation equations**

最終的にfluid regionsとsolid regionで解くべき方程式

**for fluid regions**

$$\frac{B_1}{B_0} \mathbf{Q}_1 \hat{\mathbf{C}}_0 r \frac{d}{dr} \mathbf{i} t = \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{i} \mathbf{b}^T - \left[ \frac{B_1}{B_0} \left( 2 + \frac{d \ln B_r}{d \ln r} \right) \mathbf{Q}_1 - \frac{B_2}{B_0} \mathbf{C}_1 \right] \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{i} t,$$

$$\frac{B_1}{B_0} \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{C}}_1 r \frac{d}{dr} \mathbf{i} \mathbf{b}^T = - \frac{p}{2 p_{\text{mag}}} V_{C_1} \bar{\omega}^2 \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{i} t - \left( \frac{B_1}{B_0} \mathbf{Q}_0 - \frac{B_2}{B_0} \mathbf{C}_0 \right) \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{i} \mathbf{b}^T,$$

**for solid region**

$$\frac{B_1}{B_0} \mathbf{Q}_1 \hat{\mathbf{C}}_0 r \frac{d}{dr} \mathbf{i} t = \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{i} \mathbf{b}^T - \left[ \frac{B_1}{B_0} \left( 2 + \frac{d \ln B_r}{d \ln r} \right) \mathbf{Q}_1 - \frac{B_2}{B_0} \mathbf{C}_1 \right] \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{i} t,$$

$$r \frac{d}{dr} W = -(3 - V) W - \left[ V_{C_1} \bar{\omega}^2 \hat{\mathbf{C}}_0 + \frac{\mu}{p} (2 \hat{\mathbf{C}}_0 + 2 \mathbf{Q}_0 \hat{\Lambda}_1 - \Lambda_0 \hat{\mathbf{C}}_0) \right] \mathbf{i} t + \frac{2 p_{\text{mag}}}{p} \left[ \frac{B_1}{B_0} \left( 2 + \frac{d \ln B_r}{d \ln r} \right) \mathbf{Q}_0 + \frac{B_2}{B_0} \mathbf{C}_0 \right] \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{i} \mathbf{b}^T,$$

# Method of solution

- **Oscillation equations**

適切な境界条件のもとで摂動方程式を解くことにより、解を得ることができる。境界条件の一つは、星の中心で  $t$  や  $b$  が **regular** になるように課す、**regular condition** であり、他には **core-crust interface** と **crust-ocean interface** で課される **jump conditions** がある。星の表面では **zero-traction condition** として  $b=0$  が課される。

$B_p$  をパラメータとしてほとんどの解を得ることができるが、それらのほとんどは  $j_{\max}$ -dependent な mode なので、 $j_{\max}$  を変えて (展開の数を変えて)  $j_{\max}$ -independent な mode を pick up する必要がある = 展開の数に依らないで常に存在してくれる mode を探す。

→ 固有値、固有関数の概形、振動の kinetic energy の比などが不変のもの



# Method of solution

- **Neutron star models**

zero-temperature limitを仮定してTOV equationを解くことで、neutron star modelを与える。磁場がequilibrium structureに与える影響は無視。inner crustとfluid coreではEOS DHを用いる。このEOSでは、matterがn,p,e,  $\mu$  (free-neutron, proton, free-electron, muon) から成っていると仮定。outer crustではEOS BBPを用いる。この領域ではCoulomb latticeが形成されていると仮定。fluid oceanでは完全縮退している電子と縮退していないFe核のfluidから成ると仮定。

crustの(shear modulus)剪断弾性係数については、平均化したshear modulusを用いている。

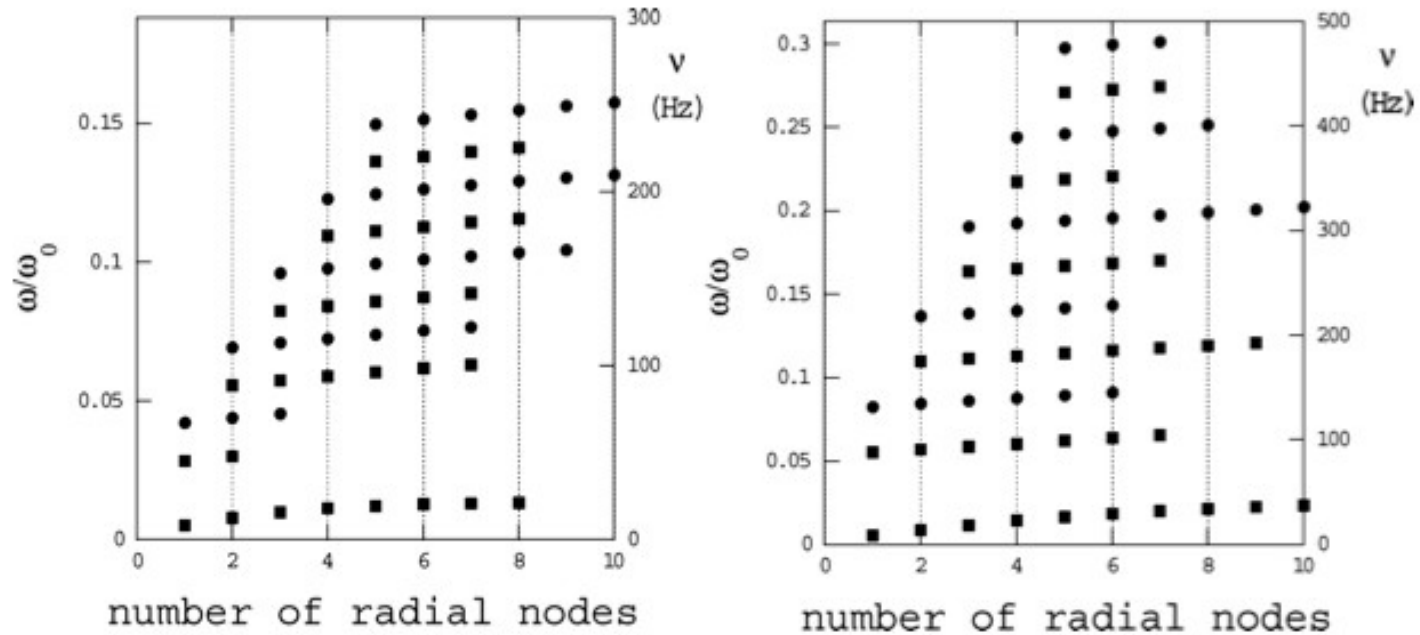
$$\mu_{\text{eff}} = 0.1194 \frac{(Ze)^2 n}{a} \quad \Gamma \equiv (Ze)^2 / (ak_B T) \rightarrow \infty$$

この論文で用いられるmodelは2つあり、massが0.8967 solar massのものと1.245 solar massのもの

# Numerical results

- $j_{\text{max}}$ -independentなmodeをpick upした結果

$B_p = 10^{16} \text{ G}$  と  $5 \times 10^{15} \text{ G}$  のそれぞれで magnetic discrete mode が得られている。



**Figure 2.** Frequencies of axisymmetric ( $m = 0$ ) toroidal modes of the  $M = 1.245 M_{\odot}$  model versus the number of radial nodes of  $iT_{l1}$ , where  $\omega_0 = \sqrt{GM/R^3}$  and  $\nu = \omega/2\pi$ , and the filled squares and circles denote even and odd modes, respectively. The left-hand panel is for the case of  $B_p = 5 \times 10^{15} \text{ G}$ , and the right-hand panel for  $B_p = 10^{16} \text{ G}$ . No fundamental modes without radial nodes are found.

# Numerical results

- $j_{\text{max}}$ -independentなmodeをpick upした結果

$B_p = 10^{16} \text{G}$  と  $5 \times 10^{15} \text{G}$  のそれぞれで magnetic discrete mode が得られている。

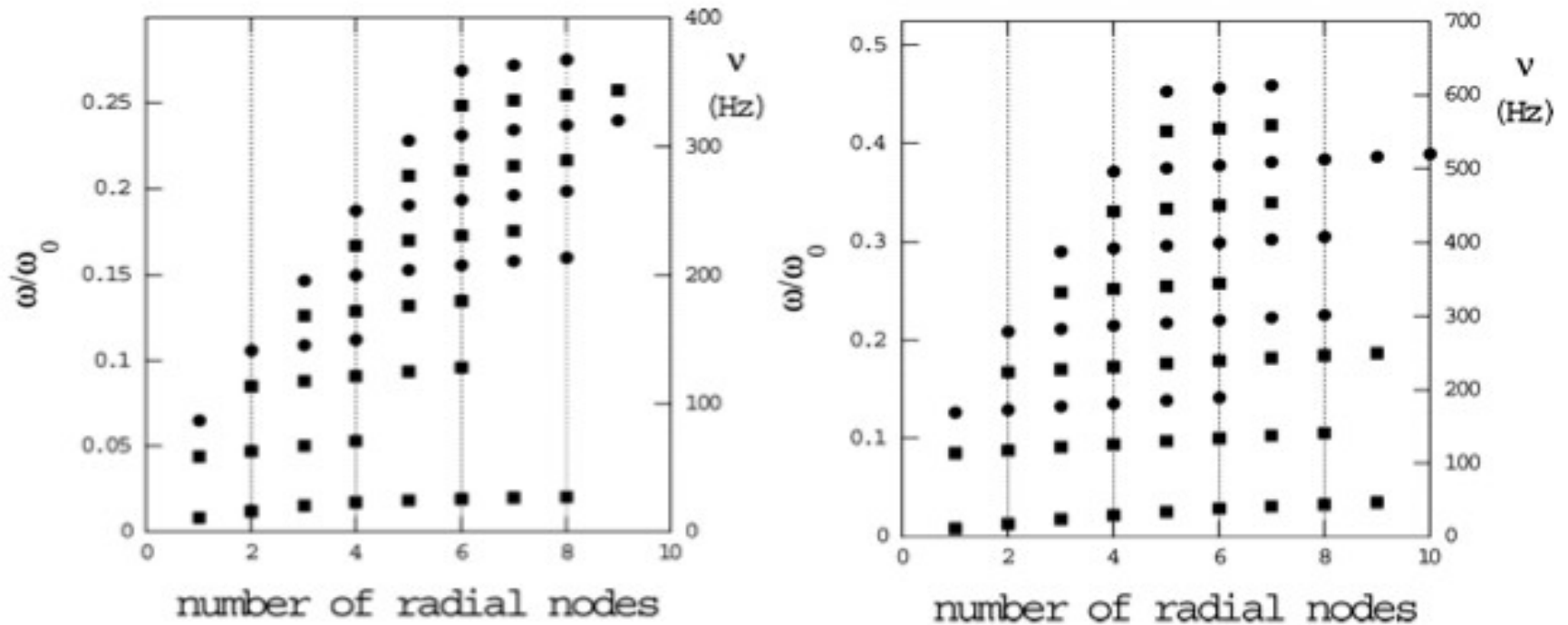
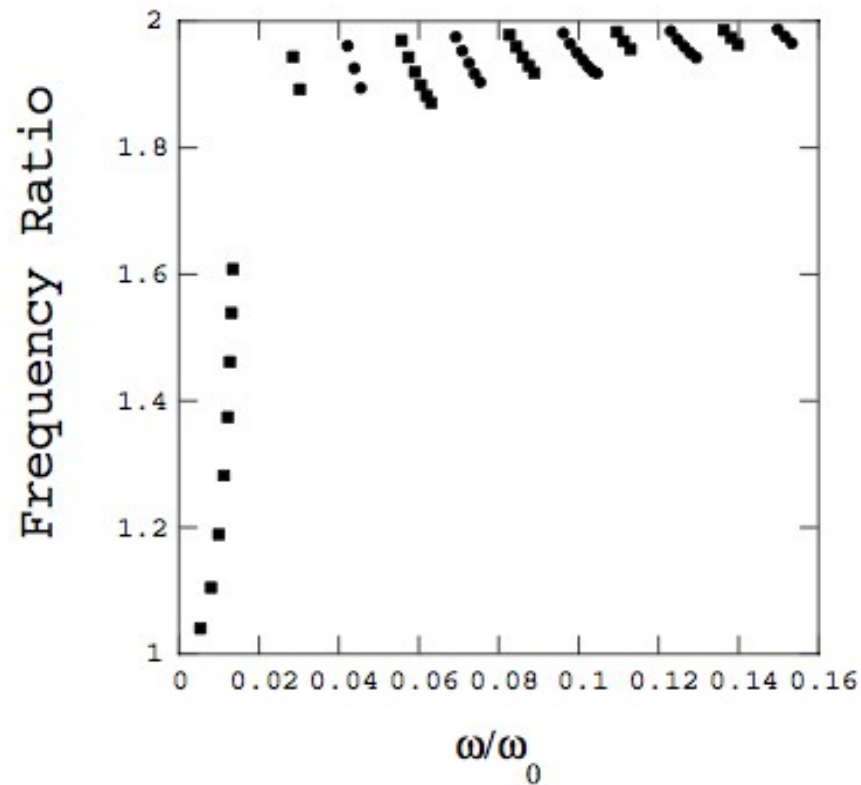


Figure 5. Same as Fig. 2 but for  $M = 0.8967 M_{\odot}$ .

# Numerical results

- frequency ratio

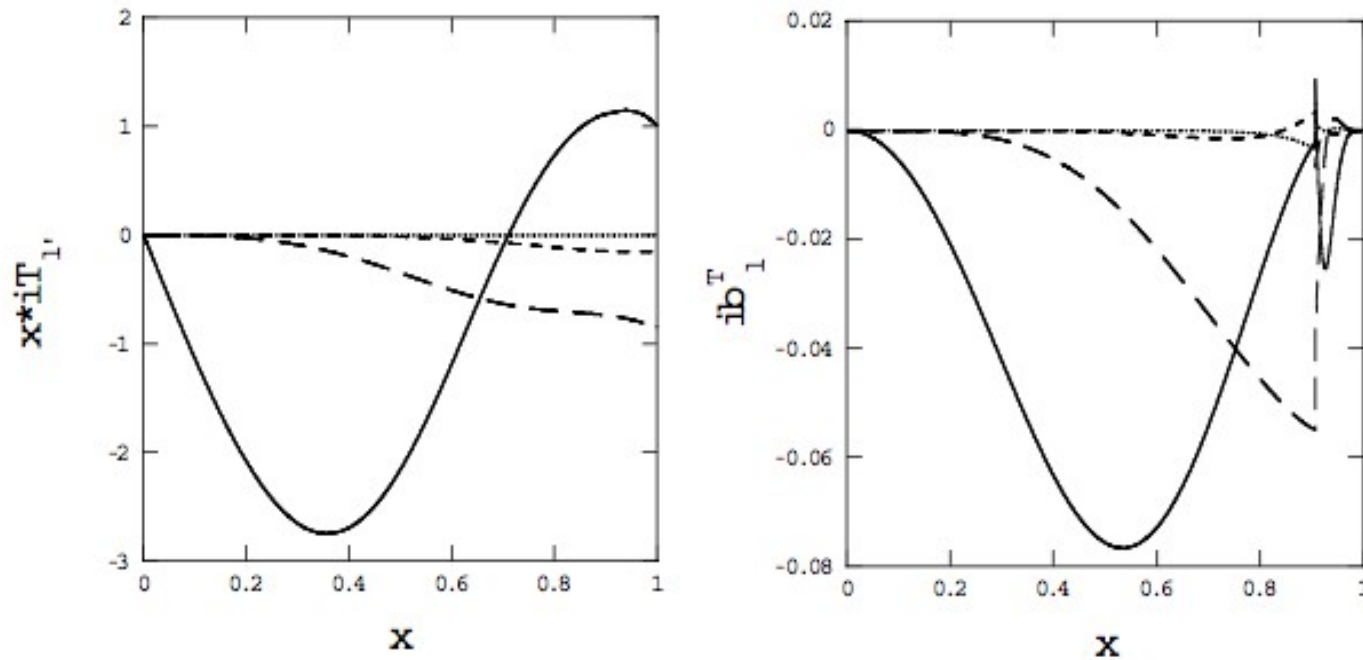


一番下のsequence  
以外はおおよそ2  
倍。磁場に比例して  
scaling

**Figure 4.** Frequency ratio  $\omega(10^{16} \text{ G})/\omega(5 \times 10^{15} \text{ G})$  versus  $\omega(5 \times 10^{15} \text{ G})/\omega_0$  for the model of  $M = 1.245 M_{\odot}$ , where the filled squares and circles are for even and odd toroidal modes with  $m = 0$ , respectively.

# Numerical results

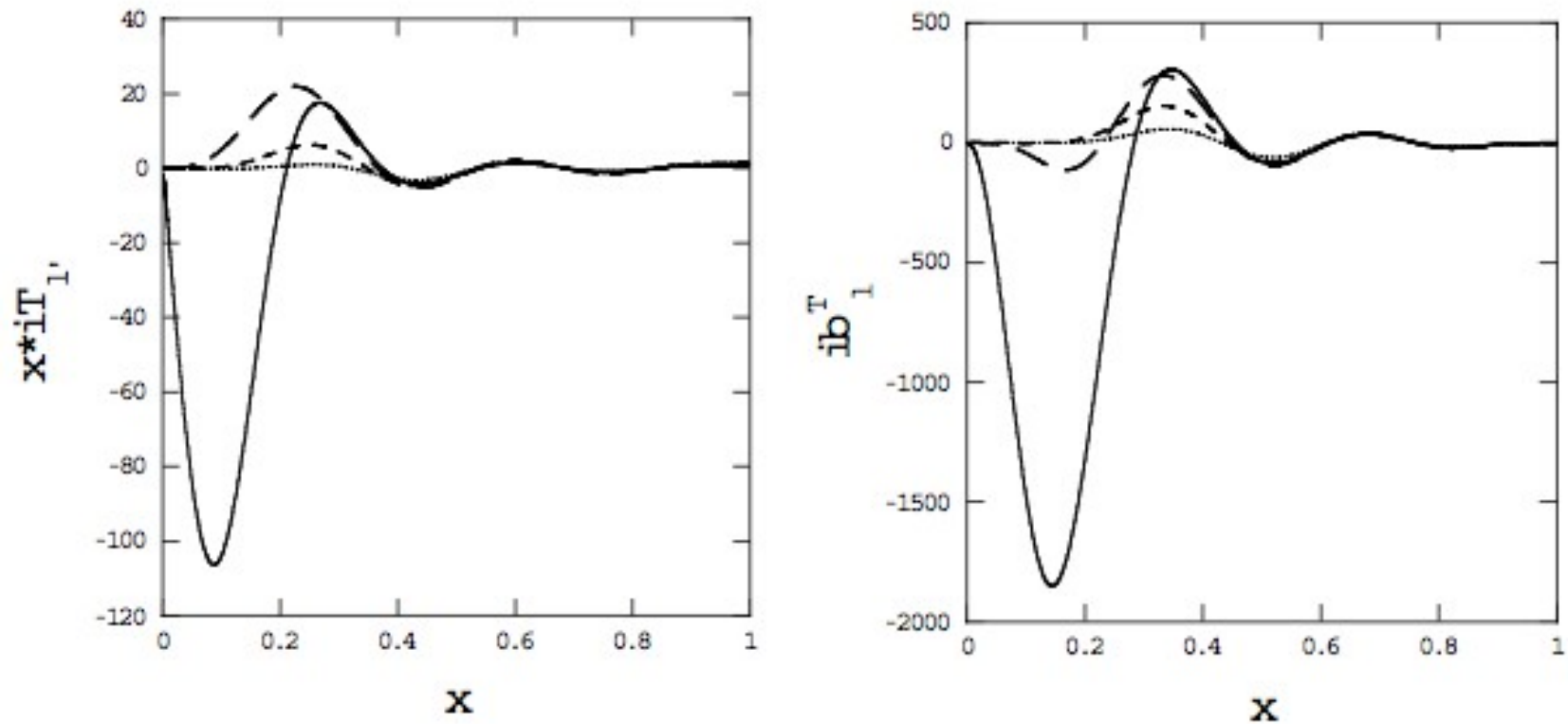
- 固有関数  
for even modes



**Figure 6.** Expansion coefficients  $x i T_{l_j}^{T'}$  and  $i b_{l_j}^T$  as functions of the fractional radius  $x = r/R$  for the axisymmetric ( $m = 0$ ) even toroidal mode of  $\omega_e(0, 1)/\omega_0 = 0.005515$  for  $B_p = 10^{16}$  G, where  $\omega_0 = \sqrt{GM/R^3}$  and  $M = 1.245 M_\odot$ . The solid, long-dashed, short-dashed and dotted lines are for the expansion coefficients associated with  $j = 1$  to 4, respectively. The amplitude normalization is given by  $i T_{l_1}^{T'} = 1$  at the stellar surface  $x = 1$ .

# Numerical results

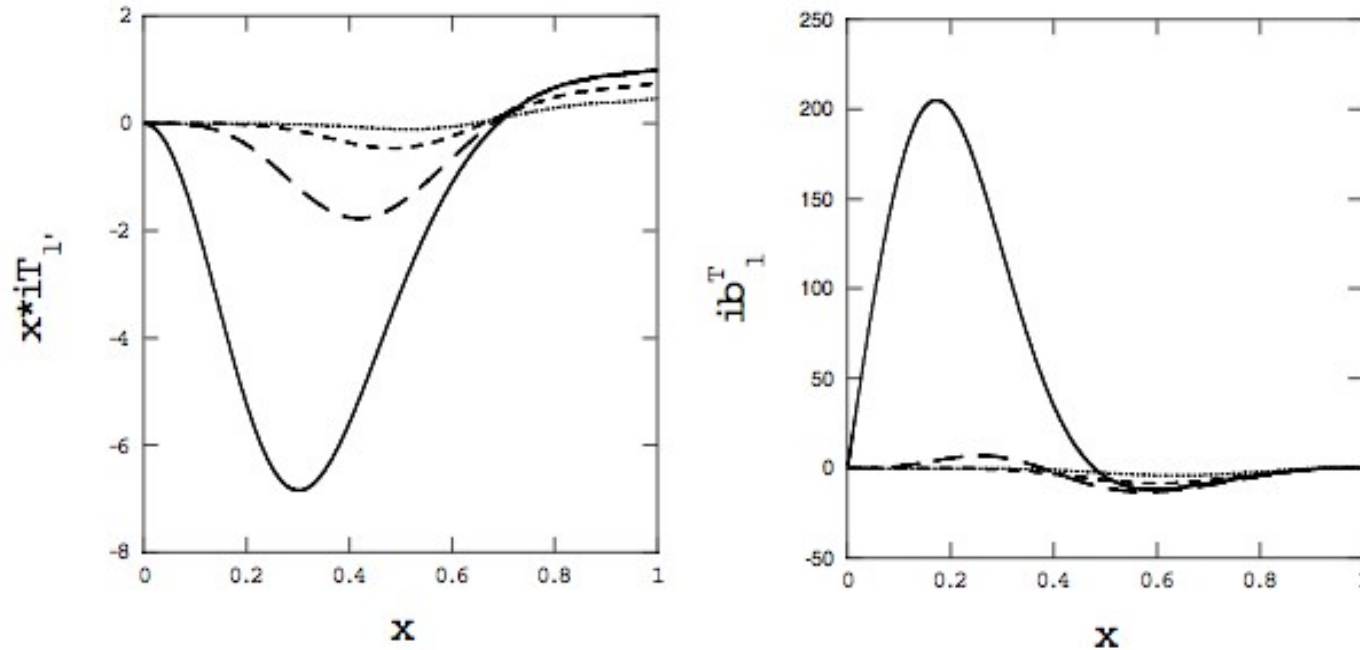
- 固有関数  
for even modes



**Figure 8.** Same as Fig. 6, but for the axisymmetric ( $m = 0$ ) even mode of  $\omega_c(5, 5)/\omega_0 = 0.2709$ .

# Numerical results

- 固有関数  
for odd modes



**Figure 9.** Expansion coefficients  $\xi i T_1^j$  and  $i b_1^T$  as functions of the fractional radius  $x = r/R$  for the axisymmetric ( $m = 0$ ) odd toroidal modes of  $\omega_0(1, 1)/\omega_0 = 0.08271$  for  $B_p = 10^{16}$  G, where  $\omega_0 = \sqrt{GM/R^3}$  and  $M = 1.245 M_\odot$ . The solid, long-dashed, short-dashed and dotted lines are for the expansion coefficients associated with  $j = 1$  to 4, respectively. The amplitude normalization is given by  $i T_1^j = 1$  at the stellar surface  $x = 1$ .

# Numerical results

- 固有関数  
for odd modes

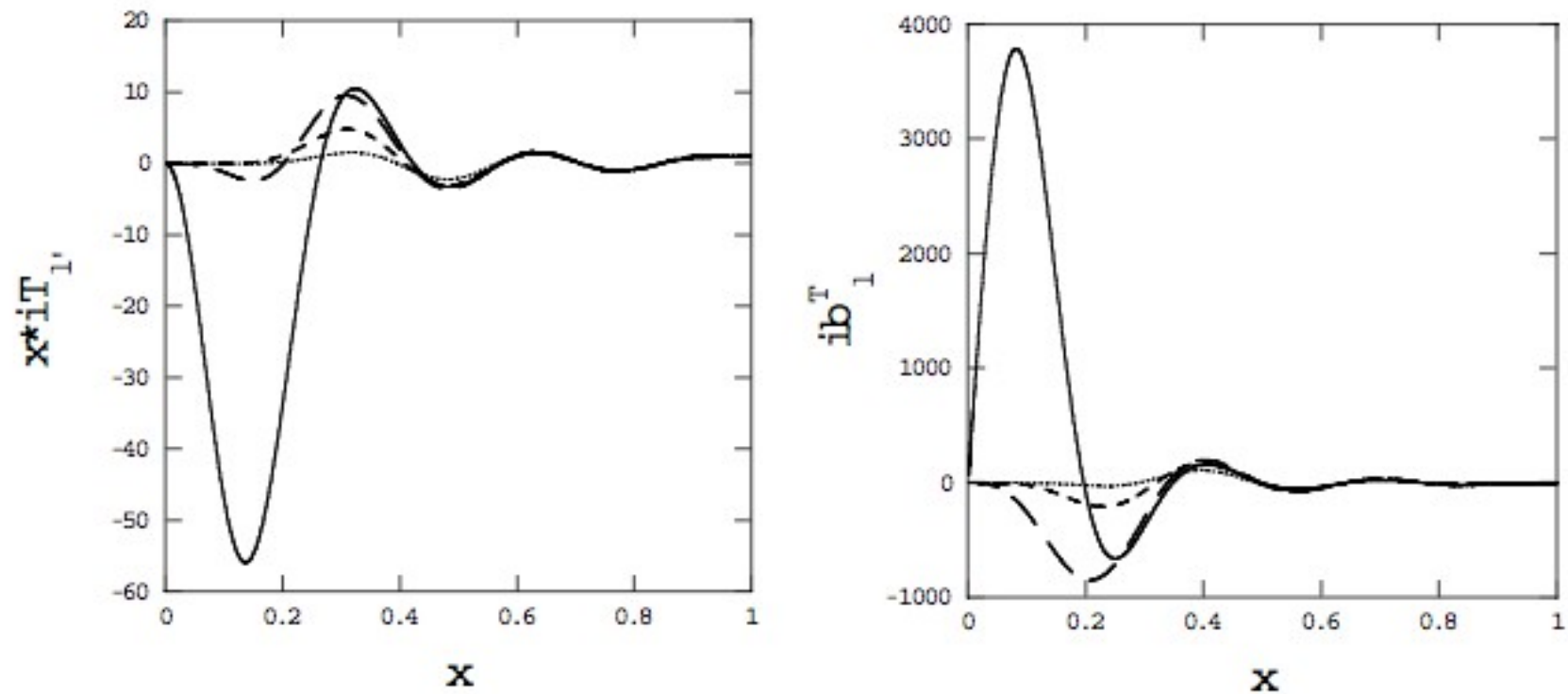
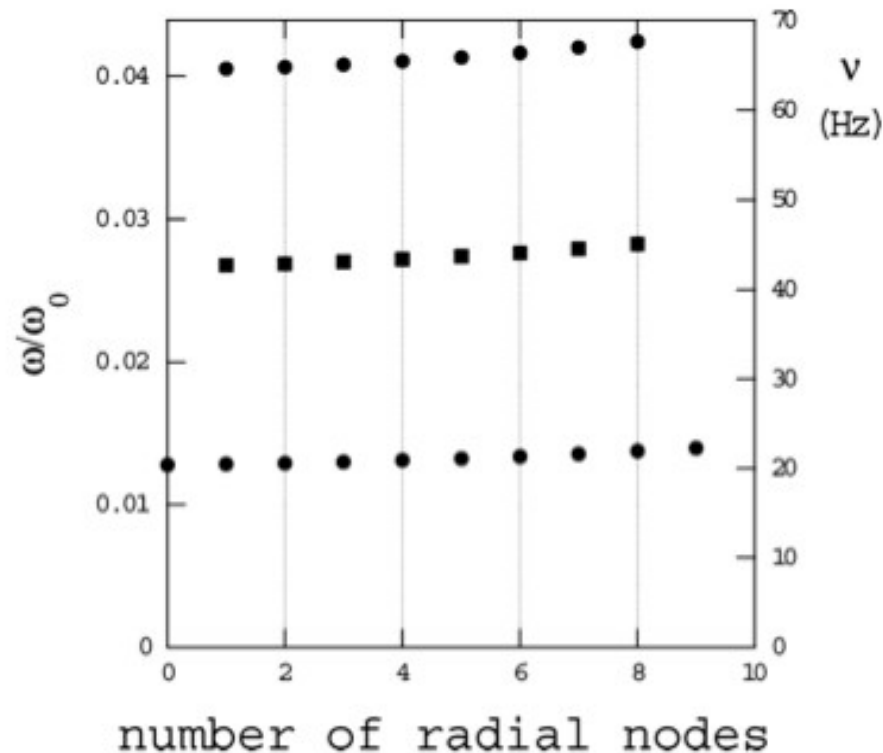


Figure 11. Same as Fig. 9, but for the axisymmetric ( $m = 0$ ) odd mode of  $\omega_0(5, 5)/\omega_0 = 0.2976$ .



# Numerical results

- solid crustがない場合



even parityに一番下の系列が現れない

**Figure 12.** Frequencies of the axisymmetric ( $m=0$ ) toroidal modes of the  $M = 1.245 M_{\odot}$  model versus the number of radial nodes of the expansion coefficient  $iT_{l_1}$  for  $B_p = 5 \times 10^{15}$  G, where  $\omega_0 = \sqrt{GM/R^3}$  and  $\nu = \omega/2\pi$ , and the filled squares and circles are for even modes and odd modes, respectively. The modes are calculated by treating the entire interior as a fluid.

# Conclusions

- 計算結果をまとめると...

1. toroidal modeに離散的なsequenceが見つかり、そのsequenceにあるmodeはnodeが増加すると緩やかに振動数も増加する性質を持つ。系列間の幅は磁場が弱い程、massが大きい程小さくなる。
2. solid crustが存在することによって、even parityには振動数の低い新しいsequenceが現れる。
3. それぞれのmodeの振動数は、おおよそ磁場に比例してscailingされるが、even parityの一番下の系列のみは磁場への依存性があまりsensitiveではない。
4. 固有関数についても、一番下の系列と上の系列とでは性質が異なる。一番下のeven modeはsolid regionでも大きなamplitudeを持つ一方で、上の系列のmodeは、even, oddともにamplitudeのほとんどがcoreに限られていて、solidでは相対的にかなり小さくなっている。

# Conclusions

- 得られた振動数とQPOとの関係？

もしもmagnetarの磁場が $10^{16}$ Gくらい(とてつもなく大きい)ならば、toroidal modeの振動数のrangeはSGR 1806-20とSGR 1900+14で観測されている振動数と良く一致する。

→ QPOをmagnetic toroidal modeで解釈できるかもしれない。そして、観測データと理論数値計算の結果を比較することで、magnetar内部の物理的なパラメータを明らかにできるかもしれない。

しかしながら...

evenの一番下の系列を除いて、摂動のamplitudeはかなりcore regionに限られていてsolid regionでは相対的に小さい。従って、直接的にこれらのmodeを観測するのは難しい。amplitudeのほとんどがcrust中に限られているようなmodeは得られなかった。

また、磁場を弱くするとmodeの検出が極端に難しくなり、弱い磁場の極限でmodeがどのようなになっているのかは分からない。もはや、magnetic modeとして解く必要性がないかも？

# Conclusions

- まとめ?

magnetic toroidal modeについて、**real**な振動数を持つ離散的な**normal mode**が存在することを示し、modal analysisの例を与えることができた(シミュレーションで得られているようなcoreの連続的なcontinuumを除外して考えても)。

→ **磁場がかなり大きい場合**には、おおよそQPOの振動数と一致。

磁場が弱くなるとmodeをidentifyするのがかなり難しくなる。

→ **sequence間の幅がかなり狭くなる上に、その間隔に多くの $j_{\max}$ -dependentなmodeが存在するようになってしまうため、magnetic mode同士でavoided crossingを起こしてしまっている可能性がある。**  
この時、 $j_{\max}$ を相当に大きくして、注意深く振動数の振る舞いを追うしかない...(かなりの労力を要する)。

toroidal磁場を加えたり(磁場の構造を変える)、相対論的な扱いをすれば振動数スペクトルの性質は変わるかもしれない。この時にどのようなになるか?

ちなみに...相対論的な場合にも磁場が弱いとmodeを得るのが困難