Athena++ ver.21.0
Orbital Advection と Shearing Box の使い方

小野　智弘（東京工業大学）

高い品質の結果を低い計算コストで得たい

良い結果が欲しい		計算コストを抑えたい
解像度を上げる 追加の物理を考慮	⟷ 相反	解像度を下げる 簡単な物理だけ考える
良い問題設定		計算手法の工夫

- 研究課題を遂行するための問題設定を練り上げる
- 明らかにしたい事柄から解像度や考慮する物理を決定する
- 数値計算で使う計算手法を吟味する

➔ 実際に数値計算を開始する

Athena++ ver.21.0 で使える『計算手法の工夫』

解像度を上げるために

- ノード数を増やしより多くの計算リソースを使用する
- Mesh Refinementを使用する (SMRでOK)？SMR : AMR

局所系の使用

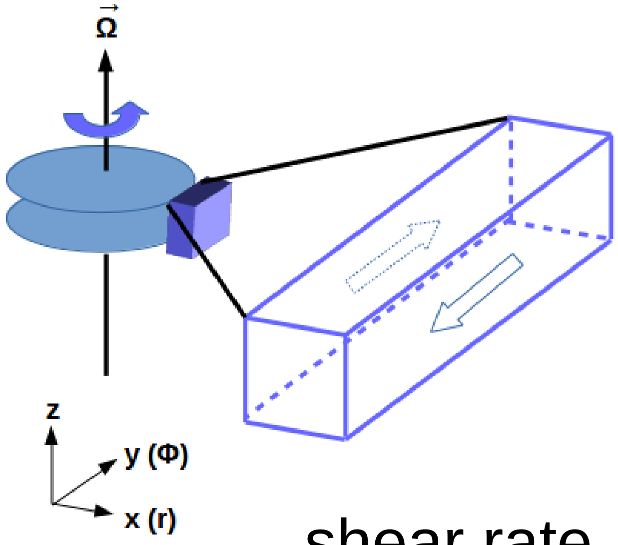
- Shearing Box (円盤局所系)

高速化モジュールの使用

- Super-Time-Stepping の使用 (拡散項が入った計算を高速化)
- Orbital Advection (ケプラー回転円盤の計算を高速化)

Shearing Box (SB) 系

円盤の局所系



$$(r, \phi, z) = (r_0, \phi_0 + \Omega_0 t, z)$$
$$x = r - r_0$$
$$y = r_0(\phi - \phi_0 - \Omega t)$$

shear rate $q = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d\ln\Omega^2}{d\ln r}$

SB系での基礎方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{B}) = \boxed{2q\Omega_0^2 x v_x}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \boxed{2q\Omega_0^2 x \hat{\boldsymbol{\imath}}} \boxed{- 2\Omega_0 \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{v}}$$

潮汐力

コリオリ力

メリット

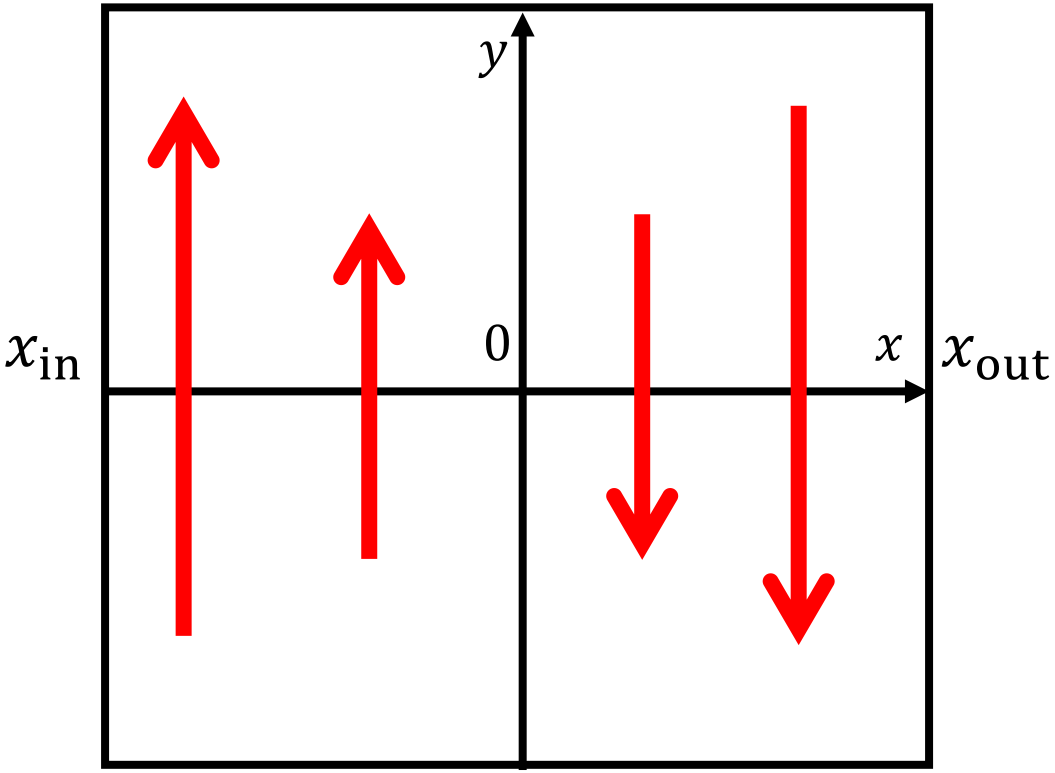
- グローバル計算に比べ低コスト
- 境界条件の性質が良い

デメリット

- 曲率項が無視されている
- 大スケールの現象は追えない

SB系特有の境界条件

SB系では x 方向にシアー周期境界を用いる場合がある



シアー速度 $v_{y0} = -q\Omega_0 x$

密度、x2方向以外の速度場、磁場に対して

$$w(x_{\mathrm{in}}, y, z) = w(x_{\mathrm{out}}, y + t\delta v, z)$$

x2方向の速度場に対して

$$v_y(x_{\mathrm{in}}, y, z) = v_y(x_{\mathrm{out}}, y + t\delta v, z) + \delta v$$

エネルギーに対して

$$E(x_{\mathrm{in}}, y, z) = E(x_{\mathrm{out}}, y + t\delta v, z) + \rho\delta v v_y + \rho\delta v^{\,2}/2$$

Shearing Box の使い方

Input ファイル内で

① x1方向の境界条件を “shear_periodic” にする

```
<mesh>
ix1_bc          = shear_periodic #
ox1_bc          = shear_periodic #
```

② シアリングボックスのパラメータを設定

```
<orbital_advection>
qshear          = 値    # シアー率q     デフォルト: 0, ケプラー回転: -1.5
Omega0          = 値    # 系の角速度Ω0 デフォルト: 0
shboxcoord      = 値    # 2次元
```

ただし、(qshear !=0.0 && Omega0 != 0.0) が必要

Shearing Box 使用上の制限

- Cartesian座標のみ
- シアー周期境界はx1方向の境界条件としてのみ有効
- シアーの流れは x2方向 (shboxcoord == 1)
  or x3方向 (shboxcoord == 2 && 二次元)
- Time Integratorは 3次精度以下 (rk1, vl2, rk2, rk3)
- SB系でReconstructionの精度を4次以上にするメリットは少ない
- x2方向に一様グリッド (x2rat=1.0)
- x1方向の境界に面するMesh Blockについて以下の条件を満たすことが必要
  ① シアー周期境界に面するMesh Blockはx2方向に同じレベル
  ② シアー周期境界で面する可能性のあるMesh Blockは同じRefinementレベル
- 自己重力との併用はまだ未実装（近いうちに）
- その他はだいたい使えるはず

Orbital Advection (OA) アルゴリズム

FARGO (Fast Advection in Rotating Gaseous Objects) アルゴリズム とも呼ばれる

点源重力天体の周りにある円盤の回転速はおよそ Keplerian $v_K = \sqrt{GM/R}$

$R \longrightarrow 0$ の時 $v_K \longrightarrow \infty$ なので $v_K \gg c_s$ になることがある

➔ 速い Kepler 回転速度のために (復習 CFL条件)
円盤計算ではタイムステップdtが小さくなりがち

➔ Kepler回転成分が既知・定常であることを利用し
Operator Splitting法でKepler回転成分だけを分離して解く手法が OA

- OAを使用すると dt が大きくなり、
円盤計算の計算コストを下げることができる
- 円盤の局所系である Shearing Box 系でも使用可能

軌道移流法でやってること

速度場を $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}$ という形に分ける（ただし、$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}}$は軌道速度場）
$\bar{\boldsymbol{v}}$が速度場だと考えた時の保存変数を $\bar{\boldsymbol{u}}$ とすると

基礎方程式

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{u}})}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_2(\bar{\boldsymbol{u}})}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_3(\bar{\boldsymbol{u}})}{\partial z} + v_K \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial y} = \boldsymbol{\Psi}(\bar{\boldsymbol{u}})$$

赤は普通のMHD基礎方程式と同一、青が軌道速度による移流項

この式を Operator Splitting 法を使って

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_1(\bar{\boldsymbol{u}})}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_2(\bar{\boldsymbol{u}})}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_3(\bar{\boldsymbol{u}})}{\partial z} = \boldsymbol{\Psi}(\bar{\boldsymbol{u}})$$

(operator A) 流体パート

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial y} = 0$$

(operator B) 移流パート

という2つの処理 (A, B) に分けて順次解いていく

それぞれのオペレータ処理をどうやって解くの？

- **Operator A: 流体パート**

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_1(\overline{\boldsymbol{u}})}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_2(\overline{\boldsymbol{u}})}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_3(\overline{\boldsymbol{u}})}{\partial z} = \boldsymbol{\Psi}(\overline{\boldsymbol{u}})$$

普通のMHD基礎方程式と同じなので、Riemann solver を用いて解く

- **Operator B: 軌道移流パート**

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_K \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}}{\partial y} = 0$$

軌道速度場 $\boldsymbol{v}_K$ は既知・定常
➔ 解析解が存在するのでCFL条件を気にしなくて良い

Athena++ の OA では時間1次・2次精度の operator splitting に対応
(STS の 時間2次精度と同様)

OAにおける時間精度の違い

OA 1次精度のメリット

- OA使用による 1 cycle辺りの計算コスト増大が小さい (20%程度)
- 移流を解く際に発生する数値拡散を軽減できる

OA 2次精度のメリット

- 時間積分由来のエラーが卓越する場合でも、結果が2次精度になる
- 他の operator splitting を使ったモジュール (ex. STS) と併用しても高い性能

使い分けの基準

[上級]　流体パートと移流パートの非可換性が高い時は OA 2次精度

[初級]　STSと併用する時は必ずOA2次精度
まずOA2次精度を使い、OA1次精度でも大丈夫そうなら使う

OAの有効化

inputファイル内で

```
<orbital_advection>
   OAorder = 値   # 0:OAなし (デフォルト)、1: OA1次精度、2: OA2次精度
```

[Cartesian座標]

<orbital_advection> qshear, Omega0 の両方が0でない

or　ユーザー定義軌道速度の設定

- ✓ <orbital_advection> shboxcoord = 1
- ✓ 軌道速度の方向はx2方向で2次元 or 3次元問題

[cylindrical座標 & spherical_polar座標]

<problem> gm が0でない　or　ユーザー定義軌道速度の設定

- ✓ 軌道移流の方向はx2方向で2次元 or 3次元問題 (--coord=cylindrical)
- ✓ 軌道移流の方向はx3方向、3次元問題 (--coord=spherical_polar)

OAを使う上での注意点

- ✓ 計算内で使う速度場は軌道速度場を差っ引いたもの
  初期条件、境界条件を与える際に注意が必要
- ✓ Time Integratorは 3次以下 (rk1, vl2, rk2, rk3)
- ✓ hydro・fields・passive scalar の全てに対応
- ✓ Mesh Refinementとの併用が可能
- ✓ 拡散物理を考慮した際も使用可能、STSとの併用も可
- ✓ STSとの併用時、時間2次精度OAの使用を強く推奨
- ✓ 相対論と一緒には使用不可
- ✓ シアリングボックスで使う時は軌道移流法の使用を推奨

OA使用時の出力

Inputファイル

```
<output#>
orbital_system = 値
```

値 = false の時

速度場 $\boldsymbol{v}$ が出力データ（デフォルト）

値 = true の時

速度場 $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{K}} - \boldsymbol{v}$ が出力データ

このオプションは file_type = rst 以外のoutputで利用可能

回転座標系

cylindrical or spherical_polar 座標使用時にinputファイル内で

```
<orbital_advection>
Omega0        = 値  #
```

- Omega0 の回転角速度を持った回転座標系 (コリオリカ + 潮汐力)
- 回転方向はOAの軌道速度と同じ。

参考となるpgen

- ssheet.cpp
  shwaveテスト(e.g., Johnson & Gammie 2005)
  2次元等温流体における Shearing Box テスト
- jgg.cpp
  MHD shwaveテスト(Johnson 2007)
  3次元等温磁気流体におけるShearing Box テスト
- hb3.cpp
  2次元MRI問題 (Hawly & Balbus 1992)
  2次元磁気回転不安定性の Shearing Box テスト
- hgb.cpp
  3次元MRI問題 (Hawly & Balbus 1992)
  3次元磁気回転不安定性の Shearing Box テスト
- disk.cpp
  回転円盤のテスト