力学２演義アドヴァンスト 問題１ 2018/4/10

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F616）
TA：荒田 翔平（arata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F624）
仲田 祐樹（nakata@vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp 居室：F617）

授業の進め方について：

・毎回演習問題を配布し、回答者を募り黒板で説明してもらう、発表形式で進めます。成績は平常点６割期末試験４割で、期末試験はスタンダードクラスと共通です。平常点は発表を中心とし、必要に応じて行うレポート・小テストと合わせて評価します。**少なくとも一度の発表は必須**とし、二回目以降の発表は追加で加点します。

・＊印を付した問題は時間不足等の理由で時間内に扱わなかった場合にレポートとして提出を求めますので、毎回レポートとして提出できる形で用意してください。

・本講義の Web サイトで問題と略解を公開します。
http://vega.ess.sci.osaka-u.ac.jp/~tomida/mechanics2ea.html

・スタンダードの問題及び力学２の講義ノート等は CLE で公開されます。

・講義・演習問題について気軽に TA に質問してください（事前にメールで連絡を取ること）。また友人と相談することを推奨します。

小テストについて：

不定期に事前通知なしで行います。範囲はそれまでの演習で扱った問題（アドバンスト・スタンダード両方）全てとします。事情で欠席する場合は事前に教員に相談してください。

今日のテーマ：数学的準備・変分法

問１ [物理量の次元]

自然界の物理量は次元を持っており、異なる次元を持つものは足し引き・比較できない（当たり前だが、しばしばそのような間違いを目にするので注意)。物理学の様々な数式には物理過程に対応する様々な物理量が現れるが、一方無次元の大きな定数はほとんど現れない。ということは、次元に着目して系の特徴的な物理量や物理定数を組み合わせることで系を特徴づける物理量やその相互の依存性を推測できると考えられる。この手法を次元解析と呼び、厳密ではないものの系の性質を推定するのに有効である。

(1) 湯川秀樹は大阪帝国大学講師時代[*1]に原子核内の相互作用を媒介する中間子の理論を発表し後にノーベル物理学賞を受賞した。この π 中間子の質量を次元解析で見積もろう。核力を特徴づけるのはその短い到達距離であり、原子核のサイズと同程度の $L \sim 1\,\mathrm{fm} = 1\times 10^{-15}\,\mathrm{m}$ である。これと、基本的な物理定数の光速度 $c \sim 3\times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$ とディラック定数[*2]$\hbar \sim 1\times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ を組み合わせて質量の次元を持つ量を作り、実際の π 中間子（π^+ の質量は 139MeV）と比較せよ。

[*1] 主任教授であった八木秀次（八木・宇田アンテナで著名）に「本来なら朝永君に来て貰うことにしていたのに、君の兄さんから依頼されたので、やむなく君を採用したのだから、朝永君に負けぬよう、しっかり勉強してくれなければ困る」と叱責されたという逸話がある。

[*2] プランク定数を 2π で割ったもの。換算プランク定数ということもある。

(2) 大質量の星はその一生の終わりに超新星爆発を起こし光すら脱出できないブラックホールを残す。回転・電荷を持たないブラックホールの性質は元の星とは無関係に、その質量だけで決まることが知られている。ブラックホールの質量を M として、その半径（厳密にはシュヴァルツシルト半径）を見積もってみよう。ブラックホールは重力による構造であるから、基本定数として万有引力定数 G と光速度 c、それに M を用いて長さの次元を持つ量を作る。M を太陽質量とした時の半径を求め、結果を正確な表式と比べなさい。物理量や太陽質量等は自分で調べること。
(3) 円運動する惑星の公転周期 T は半径 a（一般には軌道長半径）と中心星質量 M にどのように依存するか（何乗に比例するか）、次元解析によって求めよ。またこの法則を何と呼ぶか。
(4) 平均密度 $\rho\,(\mathrm{kg\,m^{-3}})$ のガスが自らの重力で収縮するとする。この時間スケール（自由落下時間）を次元解析で求めよ。これは宇宙物理の天体形成現象でしばしば現れる。
(5) 基本的な物理定数だけを組み合わせて次元を持つ量を作れば、その量はこの世界を特徴づけるスケールを与えると考えられる。基本定数を組み合わせて長さの次元を持つ量、時間の次元を持つ量を作り、その意味を考察せよ。

＊問２ [ニュートン力学・座標変換]

点源重力ポテンシャル場 $V=-\frac{GMm}{r}$ の中で運動する質量 m の質点の運動を考える。
(1) ニュートンの運動方程式をデカルト座標で書き下せ。
(2) デカルト座標から極座標に変換せよ。質点は平面内で運動するため 2 次元で計算して良い。
(3) 角運動量 $J=mr^2\dot{\theta}$ が保存量であることを示せ。
(4) 円運動の場合に問 1 (3) の関係を係数まで含めて示せ。

問３ [変分法１]

点 A $(0,f(0))$, 点 B $(a,f(a))$ （ただし $a>0, f(x)>0$）を通る関数 $y=f(x)$ を考える。
(1) AB を最短距離で結ぶ $f(x)$ を求めよ。（注：自明な結果になるはずである）
(2) $f(x)$ を x 軸周りに回転させた時に $f(x)$ が描く「側面積」が最小となるような $f(x)$ を求めよ。

問４ [変分法２：最速降下曲線[*3]]

(1) 重力加速度 g の中で、原点 $(0,0)$ から点 A（座標を適当にとること）まで質量 m の点を初速度ゼロである曲線に沿って降下させる。点 A に最も短い時間で降下するような曲線 $f(x)$ はサイクロイド[*4]であることを変分法を用いて示せ。ヒント：原点から下（重力加速度）方向を x, 右方向を y とする座標系を取る。エネルギー保存則 $\frac{1}{2}mv^2=mgx$ を用いる。
(2) 点 A がサイクロイドの「最下点」（$\theta=\pi$）の場合を考える。原点から点 A までの途中の点 B$(x_0,f(x_0))$ に初速度ゼロで質点を置き、前問で求めた $f(x)$ に沿って A まで降下させるのにかかる時間を求めよ。ヒント：変数をサイクロイドの θ に取る。

[*3] 英語では Brachistochrone curve。1696 年に Johann Bernoulli が著書の読者に対する問題として提示した。
[*4] 転がる円上の一点が描く軌跡。ここでは半径を R として $x=R(1-\cos\theta), y=R(\theta-\sin\theta)$ の形のものと比べる