力学２演義アドヴァンスト 問題１０ 2018/06/26

担当教員：富田 賢吾 （宇宙地球科学専攻 tomida@astro-osaka.jp 居室：F616）

TA：荒田 翔平（arata@astro-osaka.jp 居室：F624）

仲田 祐樹（nakata@astro-osaka.jp 居室：F617）

今日のテーマ：正準変換２

＊問１ [正準変換１][*1]（時間内に扱わなかった場合はレポート課題）

正準変換とは正準方程式を不変に保つような新しい独立変数に移る変換である。

(1) $W = \sum_i q_i P_i$、$W = \sum_i p_i P_i$ および $W = \sum_i q_i Q_i$ はそれぞれどのような変換か。[*2]

(2) 次の母関数から導かれる正準変換を求めよ：

(a) $W = q_1 P_1 + q_1 P_2 + q_2 P_2$

(b) $W = q_1 P_1 + q_1 P_2 + q_2 P_1 - q_2 P_2$

(c) $W = q_1 P_1 + q_1 P_2 + q_1 P_3 + q_2 P_2 + q_2 P_3 + q_3 P_3$

(3) $Q = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right)$, $P = q \cot p$ の母関数を求めよ

問２ [正準変換２]

(1) 適切な座標変換によって調和振動子を $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ と書けることは既に示した（これも正準変換）。このハミルトニアンに対し $W = \frac{1}{2}q^2 \cot Q$ という母関数を考える（ポアンカレ変換）。

(a) P, Q やハミルトニアン H の具体的な形を求めよ。

(b) 新しい正準変数で運動を解き、元の座標に戻すことで調和振動子の解であることを確かめよ。

(c) 新しい正準変数の位相空間での軌道の概形をグラフに書け。

(2) 同じく調和振動子について時間を陽に含む母関数 $W = \frac{q^2 \cos t - 2qQ + Q^2 \cos t}{2 \sin t}$ を考える。新しい正準変数 P, Q やハミルトニアン H の具体的な形を求め、この変換の意味を説明せよ[*3]。この座標で運動を解き、元の座標に戻して調和振動子の解を導け。

問３ [正準変換３]

(1) デカルト座標から (a) 円筒座標 (b) 球座標 に変換する母関数を求めよ。

(2) 中心力ポテンシャルの中で運動する粒子を考える：$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r)$。

(a) デカルト座標から z 軸周りに一定角速度 ω で回転する座標系

$$x = \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t$$

$$y = \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t$$

$$z = \zeta$$

への変換の母関数を求めよ。

(b) 回転系でのハミルトニアンを求め、正準方程式を具体的に書き下せ。

[*1] この手の「計算問題」は出題者の趣味ではないのだが、具体例で手を動かすことで理解が進むこともあるだろう。

[*2] 正準変換ではもはや「座標」と「運動量」は明確に区別されず、位相空間の座標として抽象化される。

[*3] この系ではもはやハミルトニアンはエネルギーと対応しない。ネタバレであるがハミルトニアンはゼロになり、この空間で解は自明（不動の点）となる。逆に言えばこのような正準変換を見つけることができれば系の運動が解けたことになる。ではこのような変換の母関数を見つけることはできるだろうか？そのレシピこそが前回登場した Hamilton-Jacobi の方法というものであり、実際 S がそのような母関数になっていることを見比べて欲しい。

問４ [微小正準変換]

問１ (1) の $W=\sum_i q_iP_i$ は恒等変換であった。これをもとに、ϵ を微小な数として q_i, p_i から微小に動かした $Q_i=q_i+\epsilon\delta_{q,i}$, $P_i=p_i+\epsilon\delta_{p,i}$ という変換に対応する母関数を求める。このような母関数の形を $W=\sum_i q_iP_i+\epsilon\, G(\mathbf{q},\mathbf{P})$ とする。G は本来 P の関数であるが、P と p の違いは ϵ 程度の微小量であり、ϵG の高次の項は無視できるとして P を p に置き換える：$G(\mathbf{q},\mathbf{p})$。これを計算すると $Q_i=q_i+\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}$, $p_i=P_i+\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}$ であるから、上の式と比較して $\delta_{q,i}=\frac{\partial G}{\partial p_i}$, $\delta_{p,i}=-\frac{\partial G}{\partial q_i}$ となる。この G を微小正準変換の生成子 (Generator) と呼ぶ。

(1) 微小な i 方向への空間推進 $q_i\to q_i+\epsilon$（p はそのまま）に対応する生成子を求めその物理的意味を説明せよ。

(2) z 軸周りの微小回転の生成子を求めよ。その物理的意味を説明せよ。

(3) 任意の回転軸 $\mathbf{e}$ の周りの微小回転の生成子を求めよ。ヒント：$G=\mathbf{G}\cdot\mathbf{e}$ として $\mathbf{G}$ を求めよ。

(4) 特別な場合として、ある時刻の q_i, p_i からある微小時間 $\epsilon\,dt$ 後の位置 $q_i+\dot{q}_i\epsilon dt$, $p_i+\dot{p}_i\epsilon dt$ に移る「微小時間推進」を考える。この生成子を求めよ。またこの結果の意味する所を説明せよ。

前回誤魔化した感のあるハミルトン–ヤコビの方法について補足しておきたい。詳細な議論や具体的な解法は教科書等に譲るが、問２ (2) で見たようにハミルトニアンがゼロになるような正準変換[a]が見つかればその系では自明な解が得られ、それを元に戻すことで運動が解ける。元のハミルトニアンを $H(q_1,...,q_N,p_1,...,p_N,t)$ と書き、そのような変換を与える母関数を $W(q_1,...,q_N,P_1,...,P_N,t)$ と書こう。すると

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\qquad Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i},\qquad H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}=0$$

新しいハミルトニアンはゼロなので、Q_i, P_i はどちらも定数。これらを $P_i=\alpha_i$, $Q_i=\beta_i$ と置く。これらを用いて上の式を書くと

$$p_i=\frac{\partial}{\partial q_i}W(q_1,...,q_N,\alpha_1,...,\alpha_N,t),\qquad \beta_i=\frac{\partial}{\partial \alpha_i}W(q_1,...,q_N,\alpha_1,...,\alpha_N,t)$$

またハミルトン–ヤコビの偏微分方程式は p_i を母関数を使って書き換えて

$$\frac{\partial}{\partial t}W(q_1,...,q_N,\alpha_1,...,\alpha_N,t)+H\left(q_1,...,q_N,\frac{\partial W}{\partial q_1},...,\frac{\partial W}{\partial q_N},t\right)=0$$

この方程式はハミルトニアンが与えられればすぐに作ることができる。これを解いて W（の完全解）を求めれば力学の問題が解ける。この母関数 W が（定数分の自由度を別にして）作用と対応している。前回の問題の a,b,c や α,β,γ はこの定数になった正準変数 α_i,β_i に対応するので定数だったのである。これを踏まえてもう一度前回の問題に取り組んで欲しい。

ハミルトン–ヤコビの方法は一見煩雑だが比較的機械的に解ける (特に変数分離が使える時)。また問題が解けなくても保存量の発見に役立つ。ただこれは他の解法と等価であり、解けない問題が解けるわけではない。シュレディンガー方程式の古典極限にも関係している。

[a] 一般に正準変換によって得られたハミルトニアンはルジャンドル変換の必要条件を満たすとは限らないため、対応するラグランジアンがない場合もある。ハミルトニアンが定数となる場合はその顕著な例である。